REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Matemática

9

Cuaderno de Ejercicios

ESMATE

Cuaderno de Ejercicios Matemática

Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Lic. Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Lic. Óscar de Jesús Águila Chávez
Director Nacional de Educación Media (Tercer Ciclo y Media)
Director del Proyecto ESMATE

Licda. Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Directora Nacional de Educación Básica

Licda. Mélida Hernández de Barrera
Directora Nacional de Prevención y Programas Sociales

Ing. Wilfredo Alexander Granados Paz
Gerente de Gestión y Desarrollo Curricular de Educación Media
Coordinador del Proyecto ESMATE

Lic. Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Jefe del Departamento de Especialistas en Currículo de Educación Media
Coordinador del equipo de Educación Básica, proyecto ESMATE

Lic. Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación (Matemática)
Coordinador del equipo de Tercer Ciclo y Bachillerato, proyecto ESMATE

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Diana Marcela Herrera Polanco
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Equipo de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición, 2019.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra el teorema de Pitágoras con polígonos de diferente cantidad de lados y se pueden apreciar figuras semejantes

372.704 5
M425 Matemática 9° : cuaderno de ejercicios / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Diana Marcela Herrera, Reina Maritza Pleitez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, César Omar Gómez ; diagramación Francisco René Burgos Álvarez ; corrección de estilo Marlene Elizabeth Rodas. -- 1ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
1 recurso electrónico, (185 p. : il. ; 28 cm.) -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-70-6 (impreso)
1. Matemáticas-Problemas, ejercicios, etc. 2. Matemáticas-Libros de texto. 3. Matemáticas-enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991- coaut. II. Título.
BINA/jmh

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Matemática

Cuaderno de Ejercicios

ESMATE

Estimados jóvenes:

Es grato dirigirnos a ustedes con el propósito de felicitarlos por iniciar un nuevo año escolar con mucho entusiasmo, voluntad y entrega.

Desde “El proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media”(ESMATE), hemos trabajado este cuaderno de ejercicios, el cual presenta una nueva propuesta para el abordaje de la matemática.

Estamos convencidos que saber matemática significa tener una excelente herramienta para el desarrollo de sus capacidades productivas y ciudadanas; ya que les ayuda a ser más eficientes, a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Tenemos la seguridad de que su encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología constructiva, retadora y exigente, con el único fin de que los conocimientos matemáticos les enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en sus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Recuerden que en nuestro país todos los jóvenes son capaces de aprender y desarrollarse. Mantengan la confianza en sus capacidades, porque todos pueden alcanzar el éxito con esfuerzo, disciplina y dedicación.

Mucho ánimo ya que contamos con lo mejor de ustedes para desarrollar un mejor El Salvador.

Atentamente,

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Presentación del Cuaderno de Ejercicios

El Cuaderno de Ejercicios (CE) es un documento complementario al Libro de Texto (LT), con la diferencia que el CE es para que el estudiante practique todos los días en su casa lo que aprendió en la escuela con el LT, con el objetivo que el estudiante consolide los conocimientos matemáticos y desarrolle las competencias establecidas oficialmente por el Ministerio de Educación.

Por la relación que existe entre el LT y el CE, se tiene que para cada clase del LT, corresponde una clase del CE.

Íconos

La letra R representa el **Recuerda**. En esta sección se proponen problemas y ejercicios de las dos clases anteriores para que el estudiante repase antes de trabajar el contenido de la clase que le corresponde.

Con la C de **Conclusión** se presenta la explicación del contenido. En la mayoría de casos, la conclusión será la misma que la del Libro de texto, en otras ocasiones se agregarán ejemplos con sus respectivas soluciones para brindar mayor orientación al estudiante.

El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

Información complementaria

En el libro se utiliza un recurso que facilita el aprendizaje de los contenidos como presaberes, pistas e información adicional, esto se representa de la siguiente manera:

Información complementaria

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una está formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por diferentes clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo número indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 de la lección 2 de la unidad 4 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de la lección

2.3 Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función

Indica el número de la clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 4

Índice

1 Unidad

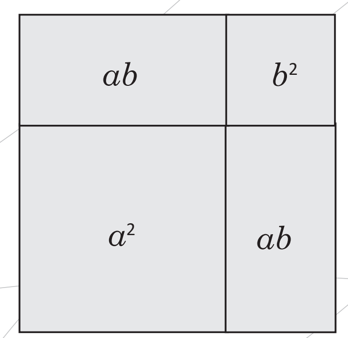
Multiplicación de polinomios

Página del libro escrito por Al-Juarismi.

La palabra “álgebra” procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi, matemático árabe nacido alrededor del 825 a.C., sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-<abr wa’l muqqabala*, que significa “ciencia de la transposición y la reducción”, donde el término “la-yabr” se convirtió en “álgebra”, sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.

En el libro II de *Los elementos* del griego Euclides se explora la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.



Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de Los elementos *de Euclides.*

El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.

En el abordaje de esta unidad desarrollarás productos de polinomios por polinomios, además de utilizar los productos notables y métodos geométricos para factorizar expresiones algebraicas.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

Desarrolla los siguientes productos:

a) $x(5x)$

b) $-2y(3y)$

c) $3x(-\frac{1}{4}xy)$

d) $(-9y)(-2xy)$

e) $(5yz)(-6xyz)$

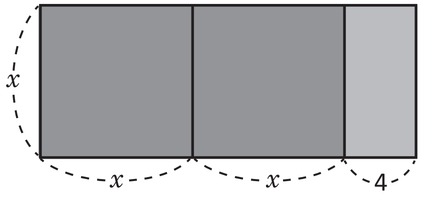
f) $(5xy)(3xyz)$

En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}-2x(xy-y) &= -2x(xy)-(-2x)(y)\\ &= -2x^2y-(-2xy)\\ &= -2x^2y+2xy\end{aligned}$$

Por lo tanto, $-2x(xy-y) = -2x^2y + 2xy$.

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $5x(3x-4)$

b) $-5xy(-x-2y)$

c) $(xy-y)(3xy)$

d) $(2xy-3x+4y)(-2xy)$

1.2 Binomio por binomio, parte 1

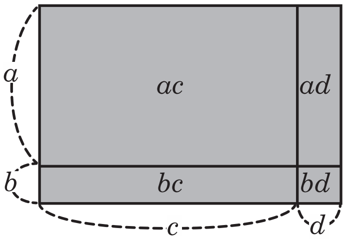
Desarrolla los siguientes productos:

a) $(2xy)(-9yz)$

b) $(2xyz)(5yz)$

c) $2xy(-7x + 10y)$

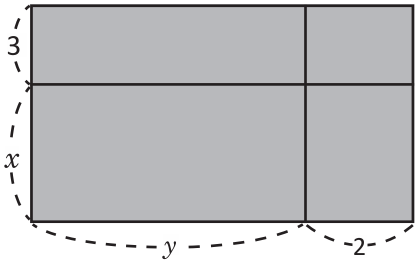
d) $(-4x - 7y)(-3xy)$



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 4)(5x + 11)$

b) $(5xy + 9)(6y + 5)$

c) $(4x + 6y)(3xy + 3x)$

d) $(2xy + 3)(10x + 9y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Binomio por binomio, parte 2

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(-10xy)(-7xy - 5)$

b) $(4xy + 9x - 3y)(-7xy)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 5y)(8x + 10)$

b) $(xy + 8)(4x + 5y)$

Para multiplicar $(a - b)(c + d)$:
Se escribe $a - b = a + (-b)$ y

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= [a + (-b)]\ (c + d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

Por ejemplo, $(2x - 1)(y + 3)$ se desarrolla:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= [2x + (-1)]\ (y + 3)\\ &= 2x\,(y) + 2x(3) + (-1)\,(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2x\,y + 6x - y - 3$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x - 6)(3y + 8)$

b) $(7x + 9)(8y - 1)$

c) $(x - y)(xy + y)$

d) $(2xy - x)(3x - 2)$

e) $(5y - 9)(4xy - 7)$

f) $(-10xy + 3)(2x - 5y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Binomio por trinomio

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(9x + 10y)(8y + 7)$

b) $(x + 11y)(5xy + 8)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(-6x + 1)(2y - 7)$

b) $(2xy - x)(3x - 2)$

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

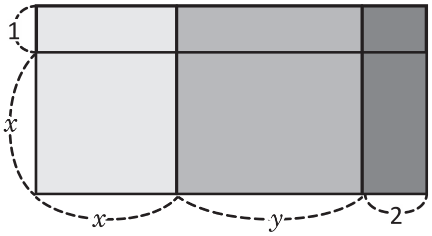
1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 5)(-2x - 7y + 11)$

b) $(y - 10)(2x + 3y + 9)$

c) $(5x + 3y)(4x - 6y - 3)$

d) $(-x + 10)(xy + 2x + 3y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Trinomio por trinomio

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(7x + 5y)(2xy - 7)$

b) $(5y - 6)(-5xy - 4)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 7y)(2x + 10y - 7)$

b) $(x - 9y)(2x + 10y - 7)$

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + x + y + 3\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 2y + 4)(2x - 4y - 4)$

b) $(3x + 5y - 2)(-x + 3y - 4)$

c) $(xy + 5x - 3)(-5x + 3y + 6)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Desarrollo productos de monomio por polinomio o viceversa. Por ejemplo: a) $7x(2xy - 7)$ b) $(5y - 6)(-5xy)$				
2. Desarrollo productos de binomio por binomio. Por ejemplo: a) $(12x + 1)(5xy + 11)$ b) $(6xy - 1)(-9x - 4)$				
3. Desarrollo productos de binomio por trinomio. Por ejemplo: $(5x + 6y)(-9x + 7y - 5)$				
4. Desarrollo productos de trinomio por trinomio. Por ejemplo: $(10x + 4y - 5)(-5x + 3y + 6)$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $(2x + 9)(-6xy + 7x - 2)$

b) $(4xy - 5y + 1)(10xy + 8y - 3)$

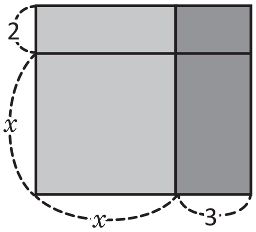
C El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (\overbrace{a + b}^{\text{Suma de } a \text{ y } b})x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + (\overbrace{5 - 2}^{\text{Suma}})x - \overbrace{5(2)}^{\text{Producto}}$$
$$= x^2 + 3x + 10$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 7)(y + 6)$

b) $(x - 2)(x - 3)$

c) $(y + 2)(y - 3)$

d) $(x - 9)(x + 2)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 10)(x + 4)$

b) $(y - \frac{1}{3})(y - \frac{2}{3})$

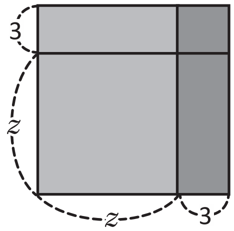
El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Por ejemplo:

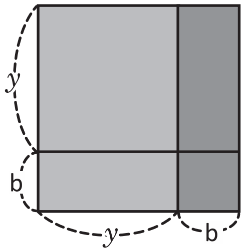
$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 2(3)x + (3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de los siguientes cuadrados:



Primera forma:

Segunda forma:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 4)^2$

b) $(x + 9)^2$

c) $(y + 2)^2$

d) $(x + \frac{1}{9})^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 8)(y - 3)$

b) $(y - \frac{1}{5})(y - \frac{1}{10})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 10)^2$

b) $(x + \frac{5}{2})^2$

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio, y:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ .... (1)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ .... (2)}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 &= x^2 - 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

Por tanto, $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 2)^2$

b) $(y - 5)^2$

c) $(y - \frac{1}{10})^2$

d) $(y - \frac{5}{2})^2$

2.4 Suma por la diferencia de binomios

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 11)^2$

b) $(x + 5)^2$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 10)^2$

b) $(y - \frac{1}{7})^2$

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 5)(x - 5)$

b) $(y - 6)(y + 6)$

c) $(y + \frac{5}{6})(y - \frac{5}{6})$

d) $(x - \frac{7}{2})(x + \frac{7}{2})$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 3)^2$

b) $(x + 5)^2$

c) $(x - 8)(x + 8)$

d) $(y + 2)(y - 5)$

Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

Por ejemplo, desarrollar: $(5x + 2)(5x - 2)$

$$\begin{aligned}(5x + 2)(5x - 2) &= (w + 2)(w - 2) && \text{... Tomando } 5x = w\\ &= w^2 - 4 \\ &= (5x)^2 - 4 && \text{... Sustituyendo nuevamente } w = 5x\\ &= 25x^2 - 4\end{aligned}$$

Por tanto, $(5x + 2)(5x - 2) = 25x^2 - 4$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x - 3)(4x + 5)$

b) $(2xy - 5)(2xy + 5)$

c) $(3yz + 8)^2$

d) $(5yz - 6)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Combinación de productos notables

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 7)(x + 7)$

b) $(9 - x)(9 + x)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x - 7y)(3x + 7y)$

b) $(5xy - 10)^2$

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identifica cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarróllalos, teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reduce los términos semejantes, si los hay.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x - 3)^2 + (x + 2)(x - 2) &= (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 + x^2 - 4\\ &= 4x^2 - 12x + 9 + x^2 - 4\\ &= 5x^2 - 3x + 5\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x - 3)^2 + (x + 2)(x - 2) = 5x^2 - 3x + 5$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 5)(x + y - 5)$

b) $(2y + 3)(2y - 3) - (y + 1)^2$

c) $(2x + 1)(2x - 1) + (y + 7)(y - 7)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Cuadrado de un trinomio

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(5yz - 6)(5yz + 6)$

b) $(\frac{x}{3} - \frac{2}{5})(\frac{x}{3} + \frac{2}{5})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 2)(x + y - 2)$

b) $(4x + 10y)^2 - (3x - 9y)$

C

El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x)^2 + (-3y)^2 + 4^2 + 2(5x)(-3y) + 2(5x)(4) + 2(-3y)(4)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x - 3y + 4)^2 = 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y$.

Desarrolla:

a) $(x + 5y + 4)^2$

b) $(8x - 3y + 2)^2$

c) $(-x + 6y + 4)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

1. Desarrolla el siguiente producto:

$(10x - 2y)(10x + 2y) + (7x - 3y)^2$

2. Desarrolla el siguiente producto:

$(3x - y - 7)^2$

---

1. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor númerico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 125$ y $ab = 50$?

b) ¿Cuál es el valor númerico de ab si $(a + b)^2 = 100$ y $a^2 + b^2 = 58$?

c) ¿Cuál es el valor númerico de $(a + b + c)^2$ si $a^2 + b^2 + c^2 = 35$ y $ab + bc + ca = 23$?

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

a) 99 × 101 =

b) 111^2 =

c) 45 × 55 =

d) 103 × 101 =

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Desarrollo productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Por ejemplo: a) $(x + 8)(x - 11)$ b) $(y - \frac{5}{2})(y - \frac{3}{2})$				
2. Desarrollo productos de la forma $(x + a)^2$. Por ejemplo: $(x + 4)^2$				
3. Desarrollo productos de la forma $(x - a)^2$. Por ejemplo: $(y - 12)^2$				
4. Desarrollo productos de la forma $(x - a)^2$. Por ejemplo: $(x + 3)(x - 3)$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo sustitución para desarrollar productos notables. Por ejemplo: $(7x + \frac{y}{2})^2$				
2. Desarrollo operaciones en polinomios que involucren combinaciones de productos notables. Por ejemplo: $(3x + 6y + 5)(3x + 6y - 5)$				
3. Desarrollo productos de la forma $(a + b + c)^2$. Por ejemplo: $(2x - 3y + z)^2$				
4. Calculo el valor númerico de expresiones algebraicas utilizando productos notables. Por ejemplo: $a^2 + b^2$ si $a - b = 3$ y $ab = 70$				
5. Calculo el resultado de operaciones aritméticas utilizando productos notables. Por ejemplo: 105 × 103				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Factorización de polinomios

Desarrolla los siguientes productos:

a) $xy(2x + 3y - 5)$

b) $(2x + 9y)^2$

c) $(5x - 7y)^2$

d) $(4x + 3y)(4x - 3y)$

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $5x^2 + 7x$ se factoriza como el producto $x(5x + 7)$; a cada uno de los polinomios x y $5x + 7$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

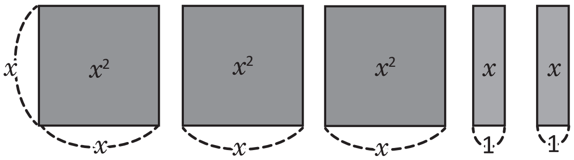
Factorizar

$$5x^2 + 7x = x(5x + 7)$$

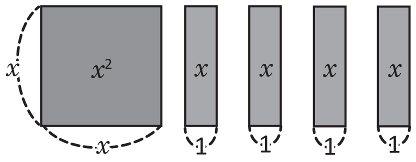
Desarrollar

1. Dibuja el rectángulo que se forma con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

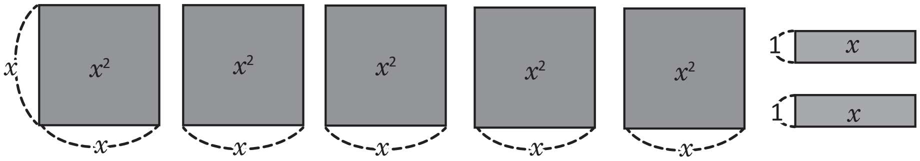
a) $-2x(3x + 9)(4y + 6)$

b) $-xy(x - 1)(2x + 7)(y - 7)$

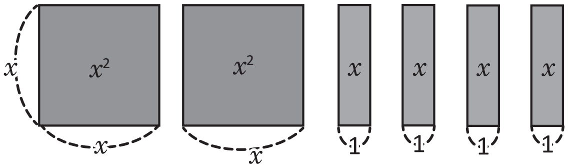
3.2 Factor común

Forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.

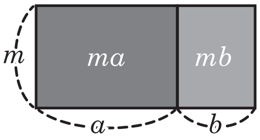
a)



b)



Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 5xy$

b) $-2xy + 3y^2$

c) $-3x^2 - 15xy$

d) $6xy + 12x^2 + 15x$

e) $-4xy - 6y^2 - 14y$

f) $-6x^2y + 8xy^2 + 14xy$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

Factoriza los siguientes polinomios extrayendo el factor común en cada uno de ellos:

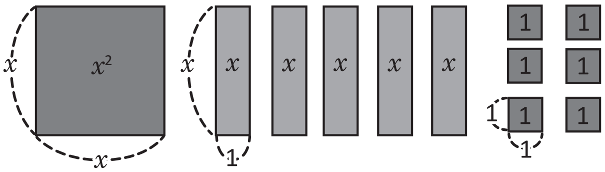
a) $-15xy + 35y^2$

b) $24x^2y - 20xy^2 - 4xyz$

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).
2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

1. Dibuja el rectángulo que se forma con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.



2. Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 + 7x + 10$

b) $y^2 + 10y + 16$

c) $y^2 + 9y + 18$

d) $x^2 + 14x + 40$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

R 1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6xy^2 + 9x^2yz - 15x^2y$

b) $30xyz - 50xy^2z - 40x^2yz$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $x^2 + 10x + 21$

C Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan **2 números positivos** cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan **2 números negativos** cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan **2 números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$ según sea el caso.

Por ejemplo, para factorizar el trinomio $x^2 - 13x + 36$ se buscan dos números negativos cuyo producto sea +36 y cuya suma sea –13:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Entonces: $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$.

Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 - 2x - 24$

c) $y^2 - 8y + 15$

d) $y^2 - 2y - 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

1. Factoriza los siguientes polinomios:
   a) $x^2 + 7x + 12$
   b) $x^2 + 12x + 35$

2. Factoriza los siguientes polinomios:
   a) $y^2 - y - 12$
   b) $y^2 - 7y + 10$

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

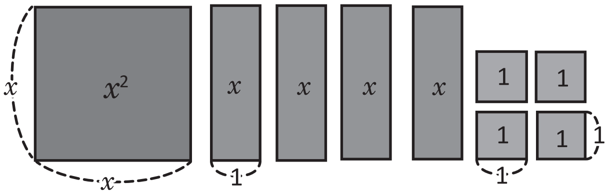
En un trinomio cuadrado perfecto, el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo, $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de 3 ($3^2 = 9$); además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

---

1. En la figura:
   a) escribe el área descrita por las piezas;
   b) dibuja el rectángulo que se forma con las piezas;
   c) encuentra el área del rectángulo formado.



2. Factoriza los siguientes trinomios:
   a) $x^2 + 2x + 1$
   b) $x^2 - 6x + 9$
   c) $y^2 - 20y + 100$
   d) $y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^2 - y - 30$

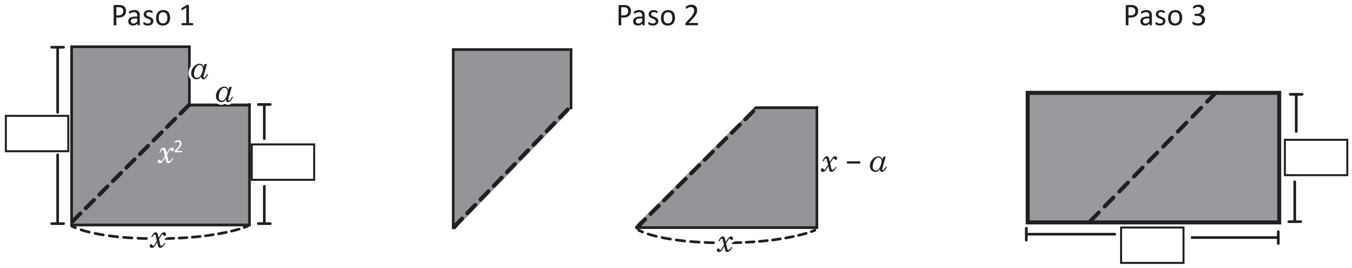
b) $x^2 - 16x + 64$

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se le llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

1. La siguiente secuencia de pasos es una demostración visual. Utiliza una hoja de papel y calca la figura en el paso 1 o haz una figura más grande pero semejante a esta.

   a) recorta la figura y sigue la secuencia descrita en los pasos;
   b) completa las medidas faltantes en las imágenes de abajo;



   c) de los pasos descritos. Escribe la propiedad de factorización que se ha demostrado.

$\underline{x^2 - a^2}$ = ____________

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 - 36$

c) $y^2 - 49$

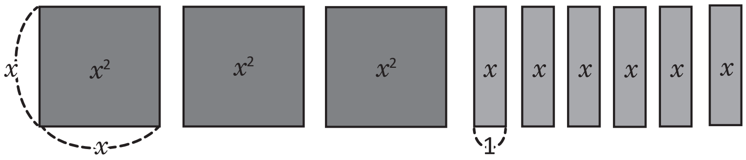
d) $y^2 - \frac{1}{25}$

e) $x^2 - \frac{4}{9}$

f) $x^2 - \frac{16}{25}$

3.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo áreas de cuadrados y rectángulos para factorizar polinomios. Por ejemplo, formar un rectángulo con las siguientes piezas y escribir el área total como producto de altura por base: 				
2. Identifico factores en productos de polinomios. Por ejemplo en los siguientes productos: a) $-10x(x + 9)(2y + z)$ b) $(5x - 7)(x + 3y)(2x + 9y - 11)$				
3. Extraigo factor común en polinomios. Por ejemplo: a) $10x^2y^2 - 20xy^2 - 15xy$ b) $-21xy^2z^2 - 18y^2z^2 + 15yz$				
4. Factorizo trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$. Por ejemplo: $x^2 + 3x - 28$				
5. Factorizo trinomios cuadrados perfectos. Por ejemplo: $y^2 + 8y + 16$				
6. Factorizo binomios que son diferencia de cuadrados. Por ejemplo: a) $x^2 - 81$ b) $x^2 - \frac{9}{64}$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

R Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^2 - 14y + 49$

b) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

c) $x^2 - 100$

d) $y^2 - 64$

C Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformalo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

b) $25x^2 - 36y^2$

c) $64x^2 - y^2$

d) $4x^2 + 20x + 25$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $y^2 - 81x^2$

c) $25x^2 - 30x + 9$

d) $49x^2 - 81y^2$

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformalo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza los siguientes trinomios:

a) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2$

b) $(x + 5)^2 + 2(x + 5)(y - 1) + (y - 1)^2$

c) $9x^2 - 6x(y - 3) + (y - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16y^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.10 Factorizaciones sucesivas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $25y^2 + 30y + 9$

b) $16x^2 - 81y^2$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $(x - 2)^2 - (y + 2)^2$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1) + (y - 1)^2$

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $7x^2 - 28x + 35$

b) $-3x^2 + 15x - 18$

c) $6xy^2 - 48xy + 96x$

d) $3x^2y - 24xy + 48y$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.11 Combinación de factorizaciones

1. Factoriza el siguiente polinomio:

   $(x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 2) + (y - 2)^2$

2. Factoriza el siguiente polinomio:

   $3xy^2 - 18xy + 27x$

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera:

1. Se verifica si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae ese monomio y se factoriza el segundo factor.

2. Si no hay monomio común:
   Se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos. Se repite el proceso para los factores resultantes hasta que el polinomio original quede totalmente factorizado.

Factoriza los siguientes polinomios:

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

a) $5x^2z - 45y^2z$

b) $45x^2z - 20y^2z$

c) $27mn^2 - 18mn + 3m$

d) $28xy^2 - 84xy + 63x$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + 8x - 10$

b) $4x^2y - 24xy + 36y$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $18x^2z - 200y^2z$

b) $50x^2z + 60xyz + 18y^2z$

---

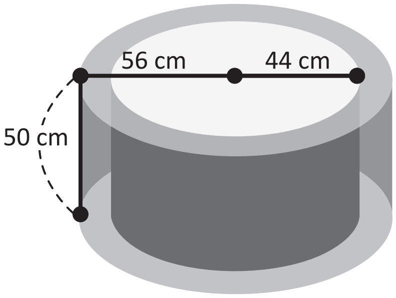
1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $55^2 - 15^2$

b) $999^2 - 1$

c) $97^2 - 9$

2. Calcula el volumen del sólido que se forma entre dos cilindros uno de radio 44 cm y otro de 56 cm, y altura 50 cm (deja expresado el resultado en términos de π).



El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi h r^2$$

Donde h es la altura del cilindro y r es el radio.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

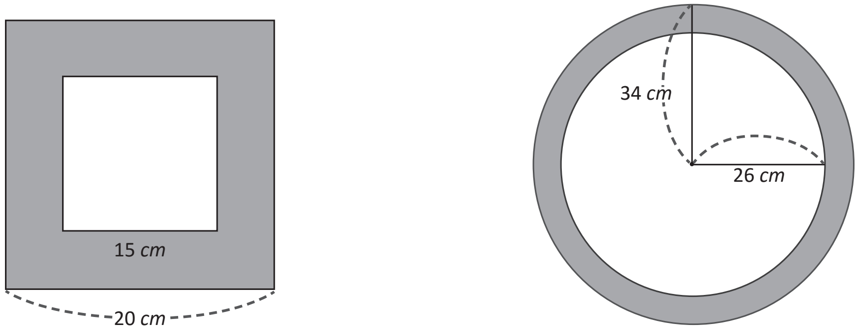
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Factorizo polinomios en productos notables. Por ejemplo: a) $16x^2 - 56xy + 49y^2$ b) $100x^2 - 9y^2$				
2. Factorizo polinomios usando cambio de variable para escribirlos como trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados. Por ejemplo: a) $(2x + 3)^2 - (5y - 2)^2$ b) $(x - 10)^2 + 2(x - 10)(2y + 7) + (2y + 7)^2$				
3. Factorizo polinomios: Identifico y extraigo factor común, luego utilizo productos notables. Por ejemplo: a) $-2x^2 + 6x + 36$ b) $3y^2 - 300$				
4. Factorizo polinomios que impliquen combinación de factorizaciones. Por ejemplo: a) $98x^2z - 18y^2z$ b) $18xy^2 - 12xy + 2x$				
5. Calculo el resultado de operaciones aritméticas utilizando factorización. Por ejemplo: a) $88^2 - 12^2$ b) $190^2 - 90^2$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Área de un marco**

Un carpintero construye marcos de madera para fotos, unos con forma cuadrada y otros con forma circular.

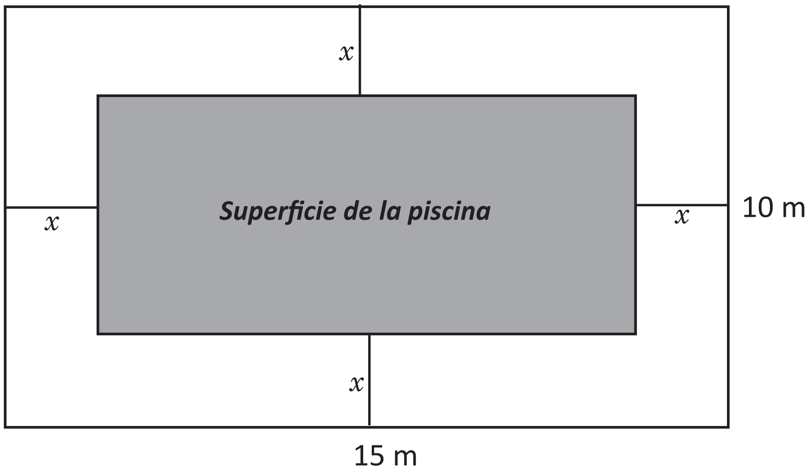


a) Encuentra el área de cada tipo de marco (el área de la región sombreada).

b) Si el carpintero fabrica 4 marcos con forma cuadrada, ¿cuántos metros de madera necesitará para poder realizarlos?

2. **Área de una piscina**

Se construye una piscina rectangular como la que se muestra en la figura:



a) expresa en función de x el área de la superficie de la piscina;

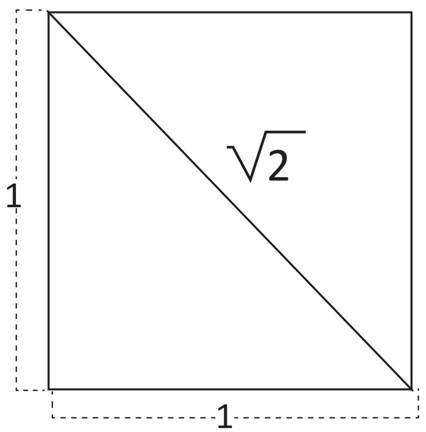
b) desarrolla la expresión obtenida;

c) si x = 2 m, ¿cuánto mide la superficie de la piscina?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 2

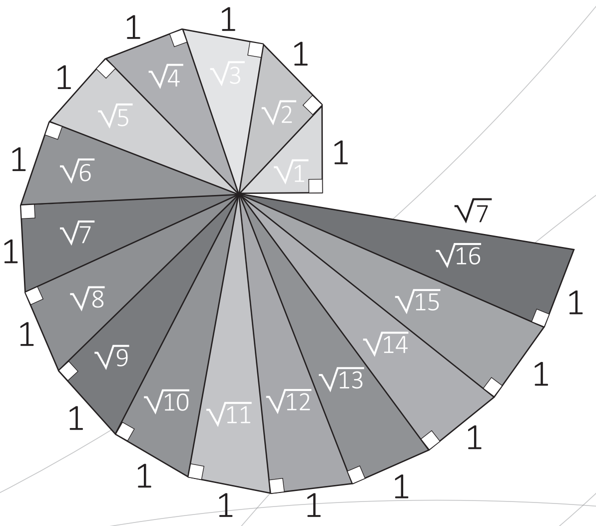
Raíz cuadrada



Raíz de 2. La diagonal de un cuadrado de lado 1.

En la historia de la matemática, el descubrimiento de un nuevo conjunto numérico no siempre fue bien recibido, tal es el caso de los números irracionales; alrededor del siglo V a. C., el matemático griego Hippasus fue el primero en demostrar la existencia de este tipo de números al descubrir que la diagonal de un cuadrado de lado 1 era un número que no puede expresarse como una fracción, esto causo mucha indignación en los pensadores de su época.

En matemática, la expansión de los números hasta los números reales y el conocimiento de que existen infinitos números permitió el desarrollo de áreas imprescindibles como el cálculo y la aritmética. Además permitió una mayor precisión en las mediciones de los objetos y potenció el desarrollo de la física y química actual. Uno de los números irracionales más importantes de la matemática es el que surge al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro, ese número es π = 3.1415926535... seguido de infinitos decimales.



Sucesión de raíces cuadradas obtenidas a través de triángulos rectángulos.

Estudiarás el concepto de número real y clasificarás un número como racional o irracional, sabrás representar números con el símbolo radical y operar con raíces cuadradas, además de aplicar el contenido a situaciones cotidianas.

1.1 Sentido y símbolo de la raíz cuadrada

El símbolo $\sqrt{\ }$ representa un número **no negativo** que al elevarlo al cuadrado da como resultado el número que está dentro del símbolo.

Se denota con el símbolo $\sqrt{\ }$ que se llama **radical** y se lee "raíz cuadrada".

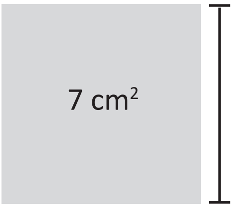
El número dentro del radical se llama **radicando**.

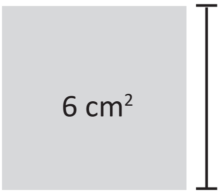
$$\text{Radical} \longrightarrow \sqrt{\alpha} \longleftarrow \text{Radicando}$$

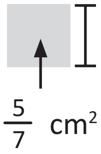
Por ejemplo:
$\sqrt{3}$ se lee "raíz cuadrada de tres" y representa un número positivo que al elevarlo al cuadrado da como resultado 3. $(\sqrt{3})^2 = 3$

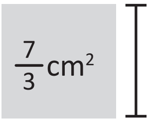
Además, no es posible escribir un número decimal que al elevar al cuadrado resulte 3.

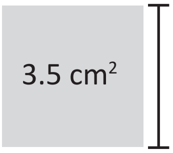
1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados.

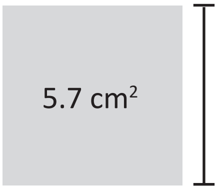
a)


b)


c)


d)


e)


f)


2. Determina qué número está siendo representado al elevar al cuadrado las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{15}$

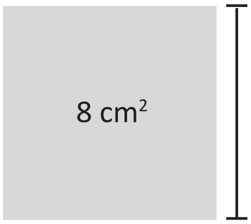
d) $\sqrt{\frac{7}{10}}$ e) $\sqrt{\frac{11}{6}}$ f) $\sqrt{\frac{5}{13}}$

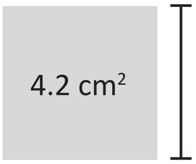
g) $\sqrt{0.7}$ h) $\sqrt{0.9}$ i) $\sqrt{1.7}$

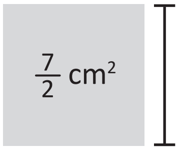
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Representación de números con el símbolo de raíz cuadrada

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados.

a)


b)


c)


2. Determina qué número está siendo representado al elevar al cuadrado las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{14}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ c) $\sqrt{1.7}$

Dentro de los números representados con el símbolo de radical, hay números que se pueden representar sin usar este símbolo.
Por ejemplo: $\sqrt{25}$ representa un número positivo que al elevarlo al cuadrado da como resultado 25.

$$\left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$$

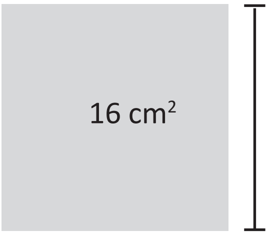
Y el número representado por $\sqrt{25}$ es 5 porque: $5^2 = 25$.

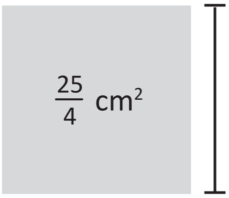
Por lo tanto, $\sqrt{25} = 5$.

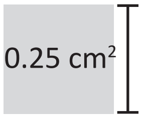
Si $a > 0$, se cumple que

$$\sqrt{a^2} = a$$

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados.

a)


b)


c)


2. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{121}$

d) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ e) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ f) $\sqrt{0.16}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Raíces cuadradas de un número

1. Determina qué número está siendo representado al elevar al cuadrado las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{\frac{10}{11}}$ c) $\sqrt{\frac{17}{5}}$ d) $\sqrt{1.9}$

2. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{25}{64}}$ d) $\sqrt{0.81}$

Se definen las **raíces cuadradas** de un número $\boldsymbol{a}$ positivo como los números que al elevarlos al cuadrado resulta $\boldsymbol{a}$.

Entonces, un número $\boldsymbol{b}$ es raíz cuadrada de $\boldsymbol{a}$ si se cumple que $b^2 = a$.

Los números que cumplen esta igualdad son b y $-b$: $(-b)^2 = b^2 = a$.

Y se dirá que las raíces cuadradas de $\boldsymbol{a}$ son $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{-b}$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 9 son 3 y –3, ya que $(-3)^2 = 9$ y $3^2 = 9$.

Para denotar tanto la raíz cuadrada positiva como negativa se utilizará el signo ± que se lee **más menos**.

Las raíces cuadradas de 9 son: ± 3.

A la raíz cuadrada con signo positivo se le conoce como **raíz cuadrada** y se denota $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$\sqrt{9}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{5}, \text{etc.}$$

A la raíz cuadrada con signo negativo se le conoce como **raíz cuadrada negativa** y es el número opuesto de $\sqrt{\boldsymbol{a}}$, es decir, $-\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$-\sqrt{9}, -\sqrt{\frac{25}{4}}, -\sqrt{5}, \text{etc.}$$

1. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números.

a) 36 b) 81 c) $\frac{49}{100}$ d) 0.25

e) 11 f) 15 g) $\frac{3}{5}$ h) 0.7

2. Completa los recuadros vacíos.

$1^2 = 1$ $2^2 = \square$ $3^2 = \square$ $4^2 = \square$ $5^2 = \square$ $6^2 = 36$ $7^2 = \square$
$8^2 = 64$ $9^2 = \square$ $10^2 = \square$ $11^2 = \square$ $12^2 = \square$

¡Para agilizar futuros cálculos es importante que memorices estas potencias!

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Orden de las raíces cuadradas

R

1. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{64}$ b) $-\sqrt{16}$ c) $\sqrt{\frac{1}{100}}$ d) $-\sqrt{\frac{64}{49}}$ e) $\sqrt{0.81}$

2. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

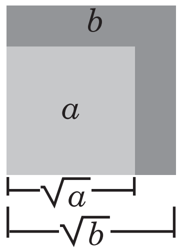
a) 100 b) 21 c) $\frac{36}{25}$ d) $\frac{3}{14}$ e) 1.44

C

Si el radicando de una raíz cuadrada es mayor que el radicando de otra, entonces la primera raíz cuadrada es mayor que la segunda, así:

Para a, $b > 0$, si $a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Por ejemplo:



¿Qué número es mayor $\sqrt{12}$ o $\sqrt{11}$?

Como 11 < 12, entonces $\sqrt{11} < \sqrt{12}$.

1. Escribe el símbolo <, >, o = según corresponda. Recuerda tener cuidado, al elevar al cuadrado observa cuál es mayor.

a) $\sqrt{8} \square \sqrt{3}$ b) $5 \square \sqrt{15}$ c) $\sqrt{5} \square 2$

d) $-\sqrt{5} \square -\sqrt{6}$ e) $\sqrt{\frac{6}{10}} \square \sqrt{0.7}$ f) $-\sqrt{\frac{1}{4}} \square -\sqrt{0.25}$

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor.

a) $\sqrt{8}$ b) -4 c) 4 d) $-\sqrt{14}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ f) $-\sqrt{2.5}$

Escribe la respuesta aquí:

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Números racionales e irracionales

1. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 25 b) 4 c) $\frac{49}{81}$ d) 0.36

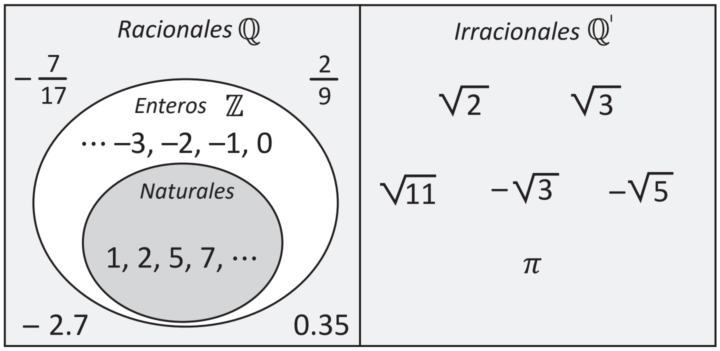
2. Escribe el símbolo <, >, o = según corresponda. Recuerda tener cuidado, al elevar al cuadrado observa cuál es mayor.

a) $\sqrt{12}$ ☐ $\sqrt{5}$ b) 3 ☐ $\sqrt{10}$ c) $-\sqrt{11}$ ☐ 2

Los números que pueden representarse como una fracción, es decir, de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y $b \neq 0$ se llaman **números racionales**, el conjunto de los cuales se representan (denotan) por $\mathbb{Q}$.

Los números que no pueden ser expresados de la forma $\frac{a}{b}$, se llaman **números irracionales,** el conjunto de los cuales se representan (denotan) por $\mathbb{Q}'$. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π.

Números



1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales, según sea el caso.

a) –3 b) 0.16 c) $-\sqrt{11}$ d) $\sqrt{5}$

2. Representa los siguientes números como fracciones.

a) 7 b) 0.05

c) –1.4 d) 0.025

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Conversión de números decimales a fracción

1. Escribe el símbolo <, > o = según corresponda. Recuerda tener cuidado, al elevar al cuadrado observa cuál es mayor.

a) $\sqrt{12} \square 3$ b) $-3 \square -\sqrt{8}$ c) $\sqrt{11} \square \sqrt{7}$

2. Representa los siguientes números como fracciones.

a) -6 b) 0.45 c) -2.5

Los números decimales cuya parte decimal tiene un número de cifras, que se repiten infinitamente se conocen como **números decimales periódicos.**

Para convertir número decimal períodico:

1. Se representa el número con x y se calcula $10x$ (o $100x$).
2. Se resta $10x$ (o $100x$) con x para eliminar la parte periódica.
3. Se despeja x y se simplifica la fracción que representa el número decimal periódico.

Por ejemplo: $2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$ $100x = 215.\overline{15}$

Período 2

2.
$$\begin{array}{rl} 100x = & 215.1515... \\ - \quad x = & 2.1515... \\ \hline 99x = & 213.0000... \end{array}$$

3. $x = \dfrac{\overset{71}{\cancel{213}}}{\underset{33}{\cancel{99}}} = \dfrac{71}{33}$

1. Realiza la división y escribe si el resultado es un número periódico o no periódico.

a) $7 \div 12$ b) $4 \div 3$ c) $31 \div 7$

2. Expresa los siguientes números decimales periódicos como fracción.

a) $0.\overline{8}$ b) $2.\overline{32}$

c) $3.\overline{5}$ d) $1.\overline{247}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Definición de los números reales

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales.

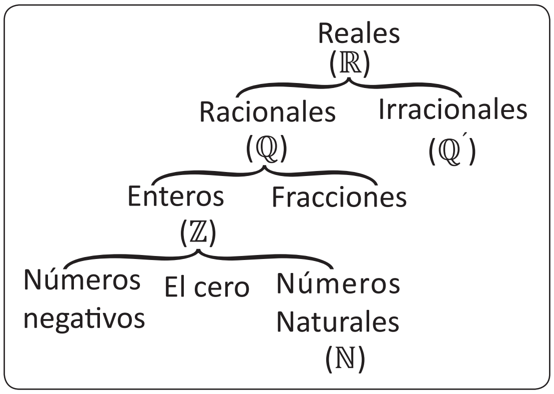
a) $\frac{1}{5}$ b) -5 c) $-\pi$

2. Expresa los siguientes números decimales periódicos como fracción.

a) $0.\overline{7}$ b) $0.\overline{23}$ c) $1.\overline{15}$

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se conoce como **números reales.**

Los números reales se representan por: $\mathbb{R}$
Por ejemplo:



- Los enteros positivos, negativos y cero son reales porque son racionales.

$$2 = \frac{2}{1}, -3 = \frac{-3}{1}, 0 = \frac{0}{1}$$

- Los números fraccionarios positivos y negativos son reales porque son racionales.

$$\frac{3}{5}, -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

- Los números decimales, porque son racionales o irracionales.
- Los números expresados con raíz cuadrada porque son racionales o irracionales.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \text{etc.}$$

Y se puede sumar, restar, multiplicar y dividir entre números reales.

Explica por qué los siguientes números son números reales y ordénalos de menor a mayor.

a) 9 b) -13 c) $\frac{2}{3}$ d) -0.07

e) 2.718281 f) $-2.3\overline{15}$ g) $2.\overline{4}$ h) $-\sqrt{25}$

Orden: ____

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Comprendo qué representan los números expresados con radical: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.				
2. Puedo expresar números sin el símbolo de radical, por ejemplo: $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ y $\sqrt{1}$.				
3. Comprendo la definición de raíces cuadradas de un número, y que existe tanto una positiva como una negativa para los números positivos.				
4. Puedo expresar tanto raíces positivas como negativas sin el símbolo de radical: $\sqrt{9}$ y $-\sqrt{49}$.				
5. Puedo convertir números como $2.\overline{15}$ a su expresión fraccionaria.				
6. Explico por qué los números 3, –1, 0, 1.2 y $\frac{3}{4}$ son racionales.				

1.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Comprendo por qué si $0 \leq a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.				
2. Puedo ordenar números de menor a mayor como: 10, –1, $\sqrt{5}$ y $\frac{3}{4}$.				
3. Identifico por qué los números: $\sqrt{2}$,1.6180339..., π; son irracionales.				
4. Puedo aproximar $\sqrt{10}$ utilizando potencias.				
5. Puedo aproximar $\sqrt{5}$ utilizando calculadora.				
6. Explico por qué los números: 1, π, 0, –1, $\sqrt{2}$, 0.5 y $\frac{3}{2}$ son reales.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Multiplicación de raíces cuadradas

Expresa el número $1.\overline{63}$ como fracción.

Para realizar $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ con $a,\ b \geq 0$, se multiplican los radicandos de cada raíz cuadrada.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Por ejemplo, $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$.

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

b) $(-\sqrt{5}) \times \sqrt{6}$

c) $(-\sqrt{14}) \times (-\sqrt{3})$

d) $(-\sqrt{7}) \times \sqrt{10}$

e) $\sqrt{2} \times \sqrt{23}$

f) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{12})$

2. Verifica si el proceso de multiplicación de raíces es correcto, si no escribe el error cometido.

a) $3\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 3 \times 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

Ten en cuenta que
$a\sqrt{3} = a \times \sqrt{b}$

b) $4\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 4 \times 5\sqrt{3 \text{ x } 3} = 4 \times 5 \times 3 = 60$

c) $-3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3 + 3} = -3\sqrt{6}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 División de raíces cuadradas

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{3}$ d) $(-\sqrt{43}) \times (-\sqrt{2})$

Para realizar $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ con $a, b > 0$, se dividen los radicandos de cada raíz cuadrada y se expresan como fracción.

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Por ejemplo: $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{6} \div \sqrt{30}$ b) $\sqrt{3} \div (-\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{5}$

d) $\sqrt{2} \div \sqrt{10}$ e) $(-\sqrt{21}) \div \sqrt{3}$ f) $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$

g) $\sqrt{2} \div (-\sqrt{10})$ h) $(-\sqrt{28}) \div (-\sqrt{7})$ i) $(-\sqrt{20}) \div \sqrt{5}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Expresión de números sin el símbolo de radical

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{7}$ b) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{11})$ c) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{50}$ d) $(-\sqrt{8}) \times (-\sqrt{8})$

2. Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{6} \div \sqrt{7}$ b) $(-\sqrt{45}) \div (-\sqrt{30})$ c) $\sqrt{6} \div (-\sqrt{24})$ d) $(-\sqrt{45}) \div \sqrt{5}$

Para expresar números sin el símbolo de radical:

1. Se encuentra la descomposición prima del radicando.
2. Se separa la raíz cuadrada en multiplicaciones de potencias cuadradas.
3. Se calcula cada raíz cuadrada y se multiplican los resultados.

Por ejemplo: $\sqrt{324}$

1. $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
   $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
3. $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{625}$ b) $\sqrt{441}$

c) $\sqrt{\frac{16}{81}}$ d) $\sqrt{\frac{441}{256}}$

e) $-\sqrt{900}$ f) $-\sqrt{\frac{25}{16}}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Multiplicación de un número racional con una raíz cuadrada

1. Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$

b) $(-\sqrt{42}) \div (-\sqrt{70})$

c) $(-\sqrt{17}) \div \sqrt{3}$

2. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{121}$

b) $-\sqrt{729}$

c) $-\sqrt{\frac{16}{49}}$

La notación $a\sqrt{b}$ simboliza la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ con $b \geq 0$.

Para realizar la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ y espresarla como la raíz cuadrada de un número:

1. Se expresa a con el símbolo de radical.

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. Se multiplican las raíces cuadradas.

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

Por ejemplo: $3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$

2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$$= \sqrt{9 \text{ x } 3}$$

$$= \sqrt{27}$$

Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número:

a) $2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{7}$

d) $5\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

g) $\frac{\sqrt{6}}{7}$

h) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Simplificación de raíces cuadradas inexactas

R

1. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{324}$ b) $-\sqrt{576}$ c) $\sqrt{\frac{196}{225}}$ d) $-\sqrt{\frac{169}{121}}$

2. Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $6\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

C

Se conoce como **simplificar** una raíz cuadrada a expresarla con un radicando menor que el inicial.

Y se dice **simplificar a la mínima expresión** una raíz cuadrada cuando se simplifica el radicando al menor valor posible.

Por ejemplo, simplificar $\sqrt{90}$ a su mínima expresión.

Utilizando la descomposición prima de 90:

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

Observa:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Y la simplificación de $\sqrt{90}$ a su mínima expresión es $3\sqrt{10}$, porque ya no se puede reducir el radicando.

Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe simplificar el resultado a la mínima expresión.

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{32}$ c) $-\sqrt{\frac{3}{49}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{16}}$

2. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

a) $\sqrt{675}$ b) $\sqrt{648}$ c) $-\sqrt{800}$ d) $-\sqrt{108}$

2.6 Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación

R

1. Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

a) $3\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

2. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

a) $\sqrt{400}$ b) $\sqrt{243}$ c) $-\sqrt{\frac{21}{75}}$

C

Para multiplicar raíces cuadradas con números grandes como radicando puedes hacer lo siguiente:

① Se simplifica cada raíz cuadrada si es posible.
② Se multiplican las raíces ya simplificadas.

Por ejemplo: $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

① $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

② $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

O también:

① Se multiplican las raíces y se deja indicada la multiplicación en factores primos.
② Se simplifica y encuentra el resultado.

Por ejemplo: $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

① $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = \sqrt{18 \times 12} = \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3}$

② $\sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2 \times 3} = 6\sqrt{6}$

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{24} \times \sqrt{63}$ b) $\sqrt{50} \times \sqrt{27}$ c) $\sqrt{40} \times (-\sqrt{27})$

d) $\sqrt{30} \times \sqrt{35}$ e) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ f) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{24})$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Racionalización de denominadores

1. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

a) $\sqrt{147}$ b) $\sqrt{\frac{6}{25}}$ c) $\sqrt{980}$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $(-\sqrt{21}\,) \times \sqrt{28}$ b) $(-\sqrt{24}) \times (-\sqrt{18})$ c) $\sqrt{30} \times (-\sqrt{42})$

El proceso en el cuál se encuentra una fracción equivalente sin raíces cuadradas en el denominador de una fracción se llama: **racionalización de raíces cuadradas.**

Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{b}{\sqrt{a}}$ donde $a > 0$ se siguen los pasos:

1. Se multiplica por la fracción $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

2. Se realiza la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\,\sqrt{a}}{a}$$

Por ejemplo, racionaliza $\frac{5}{\sqrt{3}}$:

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe racionalizar los radicales del denominador.

Racionaliza los siguientes números:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Suma y resta de raíces cuadradas

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{72} \times \sqrt{96}$ b) $\sqrt{27} \times (-\sqrt{52})$ c) $(-\sqrt{35}) \times \sqrt{10}$

2. Racionaliza los siguientes números:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{14}}$ c) $-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{7}}$

Para sumar y restar raíces cuadradas, se suman y restan los coeficientes de las raíces cuadradas que tienen igual radicando.

Ejemplos: a) $6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Identificando los números que tienen igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Sumando y restando los coeficientes de las raíces con igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + (5 - 3)\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Por lo tanto:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + 2\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{6} + 8\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 2$ e) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6}$ f) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.9 Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización

1. Racionaliza los siguientes números:

a) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}$

2. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$ c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

Para sumar y restar raíces cuadradas con radicandos diferentes:

1. Se simplifican los términos a su mínima expresión.
2. Se racionaliza las raíces que sean posibles.
3. Se efectúan las sumas y restas con raíces semejantes.

Por ejemplo:

$$\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}}$$

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

2. $\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30}{5}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

3. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

   $= 5\sqrt{5}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{45} + \sqrt{20}$ b) $\sqrt{32} + \sqrt{72} + \sqrt{50}$ c) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$

d) $\sqrt{28} + \frac{14}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{80} + \frac{35}{\sqrt{5}}$ f) $\sqrt{24} - \frac{12}{\sqrt{6}}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 1

1. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

2. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{98} + \sqrt{72}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{48}$

c) $\sqrt{180} - \frac{35}{\sqrt{5}}$

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas.

Para 3 números reales a, b y c se cumple que $a(b + c) = ab + ac$, también $(a + b)c = ac + bc$.

Por ejemplo: $\sqrt{5}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \times \sqrt{6} + (\sqrt{5})^2$

$= \sqrt{30} + 5$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas (revisa si se simplifica antes de calcular).

a) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 3)$

b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{6} - 7)$

c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{80} + 3)$

d) $(\sqrt{175} - 4)\,\sqrt{7}$

e) $(\sqrt{12} - 5)\,\sqrt{3}$

f) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})\,\sqrt{5}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.11 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 2

R

1. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

b) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

c) $\sqrt{125} - \frac{7}{\sqrt{5}}$

2. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 1)$

b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{96} + 7)$

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,\sqrt{3}$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas, también en el caso $(a + b)(c + d)$.

Para 4 números reales a, b, c y d se cumple que

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Por ejemplo: $(\sqrt{7} + \sqrt{3})\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{7}(\sqrt{2}) + \sqrt{7}(\sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2}) + (\sqrt{3})^2$$
$$= \sqrt{14} + \sqrt{21} + \sqrt{6} + 3$$

Así también:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(1) + (1)^2$

$= 2 + 2\sqrt{2} + 1$

$= 3 + 2\sqrt{2}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

c) $(\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{6})$

d) $(\sqrt{5} - 9)(\sqrt{5} - 8)$

e) $(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{3})$

f) $(\sqrt{7} + 5)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Puedo efectuar multiplicaciones con raíces cuadradas tal como $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7})$.				
2. Puedo efectuar divisiones con raíces cuadradas tal como $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$.				
3. Expreso números como $\sqrt{400}$ sin el símbolo de radical utilizando descomposición prima.				
4. Aplico la simplificación de raíces inexactas como $\sqrt{18}$.				
5. Expreso números como $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{5}$ como la raíz cuadrada de un número.				

2.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Multiplico $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$ utilizando simplificación.				
2. Racionalizo números como $\frac{1}{\sqrt{3}}$.				
3. Sumo y resto raíces cuadradas como $\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$.				
4. Puedo sumar y restar raíces cuadradas $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ utilizando simplificación.				
5. Aplico correctamente la propiedad distributiva para resolver operaciones como $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 6)$.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.14 Resolución de problemas con números reales

Para resolver una situación problemática puedes seguir los pasos:

1. Si es posible realiza un esquema de la situación del problema.

2. Identifica la información que te brinda el problema.

3. Busca un método de solución para el problema.

4. Brinda la respuesta al problema planteado.

1. La edad de Miguel es el cuadrado de la edad de Ana, su hija, y si Miguel tiene 36 años, ¿cuántos años tiene Ana?

2. Se enladrillará un terreno cuadrado con baldosas cuadradas cuyos lados miden 0.3 m. ¿Cuántas baldosas hay que comprar si el terreno tiene un área de 36 m^2?

3. Para un convivio realizado por la directiva de una colonia se gastaron $196 en almuerzos. Si el número de asistentes coincide con el precio por persona de cada almuerzo, ¿cuántas personas asistieron al convivio?

4. Un terreno cuadrado tiene un área de 1 296 m^2.

   a) Encuentra la medida del lado del terreno.
   b) Encuentra el perímetro del terreno.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.15 Autoevaluación de lo aprendido

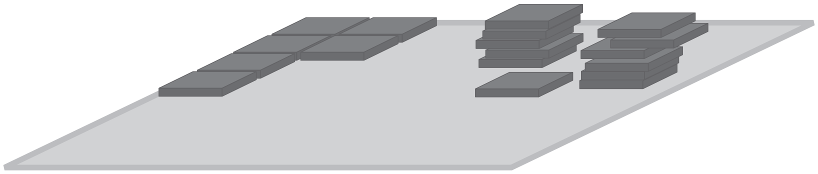
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Determina los números naturales que puede representar a para que se cumpla la siguiente relación: $2 < \sqrt{a} < 3$				
2. Considerando $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$, determina el valor de las siguientes expresiones algebraicas: a) $(x + y)^2$ b) xy				
3. Tomando en cuenta que $\sqrt{2} \approx 1.414$, aproxima el valor de los siguientes números: a) $\sqrt{8}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$				
4. Don Alberto quiere cercar un terreno cuadrado de 36 000 m^2 de área. Si cada metro cercado tiene un costo de $3.00, ¿cuánto será el costo total por cercar el terreno?				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. La albañilería es un oficio muy común en El Salvador, muchas personas lo practican y obtienen sus ingresos de él. Un albañil es el que se encarga de realizar tareas de construcción y las labores prácticas para llevar a cabo la obra.



Un albañil desea enladrillar un terreno cuadrado con baldosas cuadradas cuyos lados miden 0.6 m.

a) ¿Cuántas baldosas se deben comprar si el terreno tiene un área de 81 m^2?

b) ¿Cuánto dinero se necesita para la obra si se embaldosa con cerámica que tiene un costo de $2.00 cada una?

c) En un almacén, si se compran más de 100 baldosas, el precio disminuye $0.10 por cada una, ¿cuánto dinero se necesita para la obra con esta condición?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

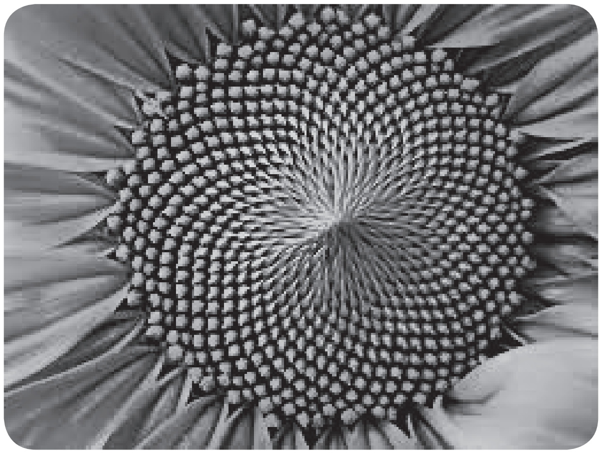
2. El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional muy conocido llamado número aúreo (número de oro) que tiene propiedades matemáticas muy interesantes, para denotarlo se utiliza el símbolo φ, ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803...$).

   En la naturaleza existen algunos estudios donde este número ha jugado un papel importante, por ejemplo, la disposición y cantidad de los petalos de las flores, la cantidad de elementos que constituyen las espirales de las inflorescencias, como en el caso de los girasoles o las piñas de los pinos.

   Realiza las siguientes operaciones:

Para todo número real se cumple que
$a^2 = a \times a$
$a^3 = a \times a \times a$
$a^4 = a \times a \times a \times a$

a) $(1-\sqrt{5})\varphi$



b) φ^2

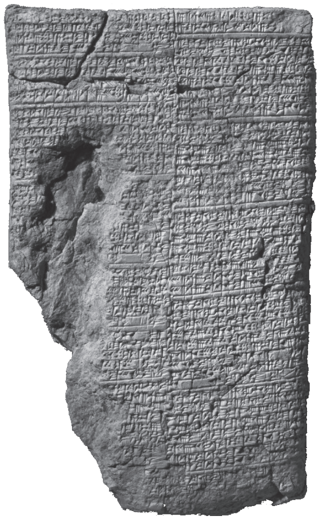
c) φ^3

d) φ^4

e) De b), c) y d), ¿qué observas?, calcula φ^5.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Ecuación Cuadrática

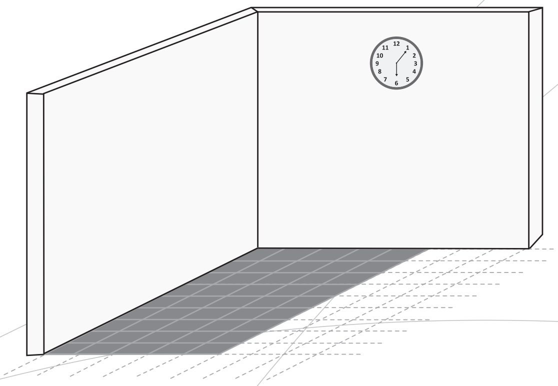


Tablilla BM 13901 es uno de los textos matemáticos más antiguos se encuentra en el Museo Británico de Londres, Inglaterra, comprende 24 problemas y sus soluciones.

En matemática, el uso de símbolos no solamente se da en notaciones para números; el primer paso hacia el razonamiento simbólico se dio en el contexto de la solución de problemas. En la antigua Babilonia lo que se hacía era presentar información sobre una cantidad desconocida y luego se presentaba su valor; un ejemplo de esto se da en la Tablilla BM 13901, que data del siglo XVIII: "He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo $6\frac{1}{4}$" a esto se le denominó "el método de falsa posición" que resulta ser el proceso de solución de la siguiente ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $c < 0$.

A pesar de que las soluciones de una ecuación cuadrática fueron conocidas por algunos matemáticos hindúes y árabes de forma verbal y a través de construcciones geométricas, fue por el matemático hindú Bhaskara nacido en el 1114 d. C., que se conoció la solución de este tipo de ecuaciones utilizando el álgebra simbólica.

Desde épocas muy remotas, muchos calculadores y prácticos utilizaban métodos que se apoyaban en las técnicas para medir tierras; en la actualidad, el algoritmo es utilizado para conocer la cantidad de materiales que se necesitarían en una construcción, en las finanzas para conocer el sueldo devengado por los trabajadores, también para conocer raciones de alimentos, reparto de herencias, entre otros.



Si se tiene una cantidad definida de ladrillos cuadrados y el área que se debe cubrir, se puede formular una ecuación cuadrática para identificar el tamaño de los ladrillos.

Con estos contenidos verás la importancia de resolver ecuaciones cuadráticas utilizando factorización y la fórmula cuadrática usando recursos geométricos. Además estudiarás si hay soluciones en una ecuación cuadrática y se plantearán ecuaciones cuadráticas para resolver problemas de aplicación.

1.1 Sentido y definición de la ecuación cuadrática

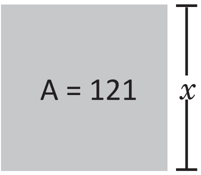
Las ecuaciones cuya incógnita está elevada al cuadrado se llaman **ecuaciones cuadráticas.**

En general se define ecuación cuadrática como las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b, c números reales y $a \neq 0$.

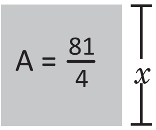
Por ejemplo: $2x^2 - 3 = 0$, $9x^2 - 3 = 0$, $(x + 5)^2 - 16 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x = 0$, etc.

1. Encuentra la ecuación que determina la longitud de la base de las siguientes figuras. Traslada la ecuación a la tabla y determina si es cuadrática o no.

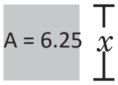
a)



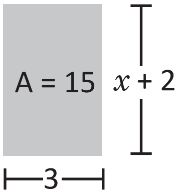
b)



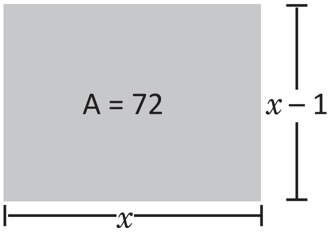
c)



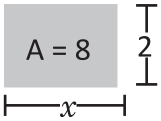
d)



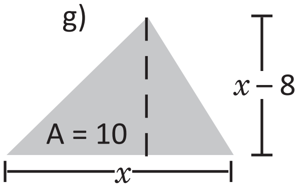
e)



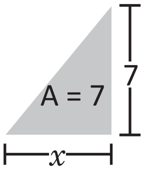
f)



g)



h)



Ecuación	¿Es cuadrática?	Ecuación	¿Es cuadrática?
a)		e)	
b)		f)	
c)		g)	
d)		h)	

2. Determina la ecuación para encontrar dos números que sumados den 5 y multiplicados –36.

1.2 Soluciones de la ecuación cuadrática

R Encierra las ecuaciones que sean cuadráticas.

a) $x^2 - 2x + 9 = 0$　　b) $3x + 8 = 0$　　c) $7x^2 - x + 5 = 0$　　d) $x^2 - 2x = 0$

e) $(x - 2)^2 = 3$　　f) $-2x + 5 = 0$　　g) $3x^2 - 9 = 0$　　h) $2x = 5$

C Los valores de la incógnita que cumplen una ecuación cuadrática se llaman **soluciones.**

Se conoce como **resolver una ecuación cuadrática** a encontrar todas las soluciones de ella.

Además, en la ecuación cuadrática puede haber hasta dos soluciones.

Por ejemplo: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3$ son: 3 y –1.

Porque:
Sustituyendo 3 en la ecuación $(3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ se cumple.
Sustituyendo –1 en la ecuación $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ se cumple.

1. Determina las soluciones de las ecuaciones utilizando los números en los paréntesis.

a) $x^2 - 4 = 0$　(–5, –2, 2, 5)　　b) $2x + 10 = 0$　(–5, –2, 2, 5)

c) $x^2 + x - 6 = 0$　(–3, –2, 2, 3)　　d) $3x - 6 = 0$　(–3, –2, 2, 3)

e) $x^2 + 12x + 35 = 0$　(–7, –5, 5, 7)　　f) $3x + 21 = 0$　(–7, –5, 5, 7)

g) $x^2 + 6x + 9 = 0$　(–3, –1, 1, 3)　　h) $4x + 4 = 0$　(–3, –1, 1, 3)

2. Determina cuáles de las ecuaciones de arriba son cuadráticas y cuáles lineales. Justifica la respuesta.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$

1. Encierra las ecuaciones que sean cuadráticas.

a) $x^2 - x + 8 = 0$　　b) $10x + 3 = 0$　　c) $2x^2 - 3x + 6 = 0$　　d) $-4x + 7 = 0$

2. Determina las soluciones de las ecuaciones utilizando los números en los paréntesis.

a) $x^2 - 25 = 0$　　(–5, –3, 3, 5)　　b) $3x - 9 = 0$　　(–5, –3, 3, 5)

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$　　(–5, –3, 3, 5)　　d) $6x - 18 = 0$　　(–5, –3, 3, 5)

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = c$ se pueden seguir los pasos:

1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de c.

$$x = \pm\sqrt{c}$$

2. Se expresa el número sin el símbolo de radical.

Por ejemplo: $x^2 = \frac{1}{4}$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

2. $x = \pm\frac{1}{2}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 36$　　b) $x^2 = 64$　　c) $x^2 = \frac{1}{16}$　　d) $x^2 = \frac{16}{49}$

e) $x^2 - 16 = 0$　　f) $x^2 - 4 = 0$　　g) $x^2 - \frac{1}{25} = 0$　　h) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$

2. Sandra tiene un hermano y una hermana, el hermano de Sandra es 7 años mayor que ella y la hermana es 7 años menor. ¿Qué edad tiene Sandra si al multiplicar las edades de sus hermanos resulta 95?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$

R

1. Determina las soluciones de las ecuaciones utilizando los números en los paréntesis.

a) $x^2 - 49 = 0$ (–7, –4, 4, 7)

b) $3x + 14 = 0$ (–7, –4, 4, 7)

c) $x^2 - x - 42 = 0$ (–7, –6, 6, 7)

d) $6x - 36 = 0$ (–5, –3, 3, 5)

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 49$

b) $x^2 = \frac{1}{81}$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $\frac{49}{36} - x^2 = 0$

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$ se pueden seguir los pasos:

Por ejemplo: $9x^2 = 4$

1. Se despeja el término x^2.

$$x^2 = \frac{a}{c}$$

1. $x^2 = \frac{4}{9}$

2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de $\frac{a}{c}$.

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$$

2. $x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

3. Se expresa sin el símbolo de radical o se simplifica a la mínima expresión.

3. $x = \pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{2}{3}$

---

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $3x^2 = 12$

b) $-16x^2 = -25$

c) $-9x^2 = -1$

d) $7x^2 = 14$

e) $-3x^2 + 48 = 0$

f) $36x^2 - 49 = 0$

g) $16x^2 - 1 = 0$

h) $16 - 4x^2 = 0$

2. Determina el día de apertura de la Olimpíada Internacional de Matemática 2017, si se cumple en el calendario que el cuadrado de la fecha de hace una semana (7 días antes de la fecha de apertura) sumado con el cuadrado de la fecha de la semana después (7 días después de la fecha de apertura) resulta 386.

Julio 2017						
L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Solución de ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = \frac{1}{64}$ c) $x^2 - \frac{4}{49} = 0$ d) $\frac{16}{81} - x^2 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 = 20$ b) $11x^2 = 11$ c) $25x^2 - 9 = 0$ d) $-5x^2 + 7 = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + m)^2 = n$ se pueden seguir los pasos:

① Se cambia la variable $x + m$ por w:
$$w^2 = n$$
② Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = n$:
$$w = \pm\sqrt{n}$$
③ Se sustituye a la variable inicial:
$$x + m = \pm\sqrt{n}$$
④ Se resuelve para la variable inicial:
$$x = -m \pm\sqrt{n}$$

Por ejemplo:
$(x - 3)^2 = 7$ Haciendo $w = x - 3$

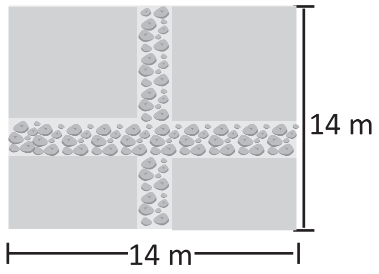
① $w^2 = 7$
② $w = \pm\sqrt{7}$
③ $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
④ $x = 3 \pm\sqrt{7}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 6)^2 = 25$ b) $(x - 3)^2 = 5$ c) $(-x - 7)^2 = 18$ d) $(x - 9)^2 = 0$

e) $(x - 9)^2 - 49 = 0$ f) $(x + 8)^2 - 7 = 0$ g) $(-x + 5)^2 - 45 = 0$ h) $(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$

2. Don Carlos desea dividir un terreno cuadrado en cuatro partes y utilizarlas para sembrar distintos tipos de hortalizas, de tal forma que exista un camino entre las divisiones. Si el ancho del camino es siempre el mismo y la longitud de los lados del terreno es 14 m, ¿cuánto debe ser el ancho del camino para que el área de sembrado sea de 144 m^2?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 = 45$ b) $x^2 = 15$ c) $36x^2 - 49 = 0$ d) $-11x^2 - 28 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x - 3)^2 = 36$ b) $(-x + 4)^2 = 40$ c) $(x + 4)^2 - 3 = 0$ d) $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = 0$ se utilizó la siguiente propiedad:

Si A x $B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$

1. Se factoriza la expresión utilizando factor común.
   $x\,(x + b) = 0$
2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio y se determinan las ecuaciones lineales a resolver.
   $x = 0$ y $x + b = 0$
3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo la ecuación lineal $x + b = 0$.
   $x = 0$ y $x + b = 0 \Longrightarrow x = -b$

Por ejemplo:

$x^2 - 3x = 0$

1. $x\,(x - 3) = 0$
2. $x = 0$ y $x - 3 = 0$
3. $x = 0$ y $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$
   $x = 0$ y $x = 3$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización.

a) $x^2 - 7x = 0$ b) $x^2 - x = 0$ c) $6x^2 + 5x = 0$ d) $8x^2 + x = 0$

e) $-x^2 + 2x = 0$ f) $-x^2 - 9x = 0$ g) $12x^2 - 2x = 0$ h) $-8x^2 + 12x = 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 3)^2 = 49$ b) $(x - 7)^2 = 49$ c) $(x + 3)^2 - 5 = 0$ d) $(-x + 5)^2 - 64 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 4x = 0$ b) $7x^2 + 3x = 0$ c) $-x^2 + 16x = 0$ d) $-x^2 - 4x = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio de la clase anterior y se determina la ecuación lineal a resolver.

$$x + a = 0$$

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática.

$$\boldsymbol{x = -a}$$

Por ejemplo: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0$$

Por lo tanto, $x = -2$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ f) $16x^2 - 4x + \frac{1}{4} = 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 - 9x = 0$　　b) $x^2 + x = 0$　　c) $10x^2 - 7x = 0$　　d) $-2x^2 + 3x = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$　　b) $16x^2 - 8x + 1 = 0$　　c) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + a)(x + b) = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se aplica la propiedad y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:

$$x + a = 0 \text{ o } x + b = 0$$

2. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo las ecuaciones lineales:

$$x = -a \text{ o } x = -b$$

Por ejemplo:
$(x + 1)(x - 4) = 0$

1. $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$
2. $x = -1$　y　$x = 4$

Además, recuerda que para factorizar expresiones de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ se factorizan como

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $(x - 5)(x - 3) = 0$　　b) $(x + 7)(x - 1) = 0$　　c) $(x - 9)(x + 8) = 0$

d) $x^2 - 8x + 15 = 0$　　e) $x^2 - x - 72 = 0$　　f) $x^2 + 7x - 30 = 0$

2. Determina dos números naturales consecutivos que al elevar cada uno al cuadrado y luego sumarlos dé como resultado 113.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.9 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas

R

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 + 22x + 121 = 0$

b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$

c) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 + 10x + 21 = 0$

b) $x^2 - 4x - 21 = 0$

c) $x^2 + x - 30 = 0$

C

Se pueden utilizar argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática.

Las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones, pero dado que se trata del lado de una figura solo se considera la positiva.

Utilizando argumentos geométricos, encuentra la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 10x = 24$

b) $x^2 + 2x = 99$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.10 Solución de ecuaciones completando cuadrados

R

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando factorización:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - x - 56 = 0$

c) $x^2 + 5x - 66 = 0$

2. Utilizando argumentos geométricos, encuentra la solución positiva de las siguiente ecuación:

$x^2 + 6x = 91$

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se siguen los pasos:

1. Se pasa el término c al miembro derecho.
2. Se completa el miembro de la derecha para ser cuadrado perfecto.
3. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos.
4. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

Por ejemplo:
$x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $x^2 + 2x = 1$
2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Soluciones: $x = -1 + \sqrt{2}$ y $x = -1 - \sqrt{2}$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando el método de completar cuadrados.

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$

b) $x^2 + 14x + 40 = 0$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 3x - 5 = 0$

e) $x^2 - 6x + 6 = 0$

f) $x^2 + 6x + 4 = 0$

1.11 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

1. Utilizando argumentos geométricos, encuentra la solución positiva de la siguiente ecuación:

$x^2 + 8x = 9$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando el método de completar cuadrados.

a) $x^2 - x - 10 = 0$

b) $x^2 + 2x - 7 = 0$

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se divide la ecuación por el coeficiente a de x^2.
2. Se pasa el término constante al miembro derecho.
3. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo, sea un trinomio cuadrado perfecto.
4. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos necesarios.
5. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

b) $2x^2 + x - 1 = 0$

c) $3x^2 + x - 1 = 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.12 Fórmula general de la ecuación cuadrática

1.Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando el método de completar cuadrados.

a) $x^2 - 6x + 2 = 0$

b) $x^2 - 4x - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando el método de la clase anterior.

a) $3x^2 - x - 3 = 0$

b) $2x^2 - x - 4 = 0$

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general de la ecuación cuadrática.** Y para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática se sustituyen los valores de a, b, c en la fórmula.

Por ejemplo: $3x^2 + 5x + 1 = 0$
Si se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

a) $2x^2 - x - 2 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

c) $4x^2 - 7x + 2 = 0$

d) $5x^2 - 9x + 3 = 0$

e) $-4x^2 + 9x - 3 = 0$

f) $3x^2 + x - 1 = 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.13 Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática

1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$5x^2 - x - 5 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

a) $5x^2 - x - 1 = 0$

b) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

c) $4x^2 - 5x - 3 = 0$

Para aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática solamente se identifican los valores de a, b, c en la ecuación cuadrática, al calcular las soluciones es posible que sea necesario simplificar o calcular los valores exactos cuando las soluciones sean racionales (cuando sea posible determinar las raíces cuadradas del radicando).

Por ejemplo: $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$a = 4,\ b = 2,\ c = -1 \Longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-\overset{1}{\cancel{2}} \pm \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $4x^2 + 2x - 1 = 0$ son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general:

a) $3x^2 - x - 2 = 0$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

e) $2x^2 - 2x - 2 = 0$

f) $6x^2 - 8x + 1 = 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.14 Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 1 = 0$

c) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

Para escoger el método más eficiente de resolver ecuaciones cuadráticas puedes:

1. Resolver usando factorización.
2. Si no es posible encontrar una factorización se puede aplicar alguno de los otros dos métodos.

Además, recuerda que la fórmula general es aplicable en todos los casos pero en ocasiones puede conllevar un cálculo más complejo que si se utiliza otro método.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{49}{4} = 0$

b) $(1 - x)^2 - 9 = 0$

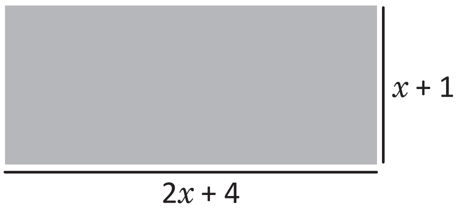
c) $x^2 - 9x - 36 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $10x^2 + 25x = 0$

f) $2x^2 - 11x + 10 = 0$

2. Encuentra el valor de x para que el rectángulo posea un área de 24 cm^2.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.15 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Identifico cuáles de las siguientes ecuaciones son cuadráticas: $x^2 - 3 = 0$, $2x + 6 = 9$, $(x + 3)2 = 8$, $5x = 5$.				
2. Identifico la diferencia entre solucionar una ecuación cuadrática como $x^2 - 4x - 3 = 0$ y solucionar una ecuación lineal como $x - 1 = 0$.				
3. Puedo resolver ecuaciones de la forma $x^2 = c$ como $x^2 = 100$.				
4. Puedo resolver ecuaciones de la forma $ax^2 = c$ como $3x^2 = 6$.				
5. Puedo resolver ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$, como $(x + 1)^2 = 25$.				
6. Puedo resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$ como $x^2 + 3x = 0$, utilizando factorización.				
7. Puedo resolver ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ como $x^2 - 6x + 9 = 0$, utilizando factorización.				

1.16 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Puedo resolver ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$ como $(x + 1)(x + 2) = 0$, utilizando factorización.				
2. Comprendo el método de factorización para solucionar ecuaciones cuadráticas.				
3. Puedo resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$, como $x^2 + 8x - 20 = 0$, completando cuadrados perfectos.				
4. Puedo resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, como $3x^2 + 8x - 2 = 0$, utilizando la fórmula general.				
5. Identifico rápidamente el método más eficiente para resolver una ecuación cuadrática.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Discriminante de la ecuación cuadrática

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{9}{16} = 0$ b) $12x^2 - 48 = 0$ c) $(4 - x)^2 - 4 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$ e) $12x^2 + 5x = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

El radicando de la fórmula general viene dado por la expresión $b^2 - 4ac$ es llamado **el discriminante** de la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

Recuerda que el discriminante puede cumplir cualquiera de los siguientes tres casos:

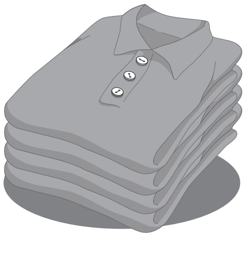
a) $b^2 - 4ac > 0$	b) $b^2 - 4ac = 0$	c) $b^2 - 4ac < 0$
$2x^2 + 3x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones**.	$4x^2 + 4x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene solo **una solución**.	$2x^2 + x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática **no tiene solución en los números reales.**

1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ b) $x^2 + 3x + 3 = 0$ c) $x^2 - 5x - 14 = 0$

d) $x^2 + 7 = 0$ e) $4x^2 - 5x + 2 = 0$ f) $5x^2 + 10x + 5 = 0$

2. Una fábrica de camisas vende mensualmente un promedio de 200 camisas a un precio de \$10 cada una, si por cada dólar que se reduce al precio se venden 28 camisas más, ¿es posible obtener una venta de \$3,000 exactos al finalizar el mes?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Uso del discriminante en resolución de problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

   a) $6x^2 - 54 = 0$ b) $49x^2 + 9x = 0$ c) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

2. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones comparando el valor del discriminante con cero.

   a) $x^2 + 2x + 3 = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Se puede utilizar el discriminante de una ecuación cuadrática para resolver diversos problemas.
Se plantea la ecuación cuadrática y se analizan sus soluciones. En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

a) $b^2 - 4ac > 0$	Existen dos soluciones reales.
b) $b^2 - 4ac = 0$	Existe una solución real.
c) $b^2 - 4ac < 0$	No existen soluciones reales.

1. Muestra que no existen dos números reales tal que su suma sea 6 y su producto sea 10.

2. Una vendedora de vienes raíces ofrece un lote en venta y asegura que este tiene forma rectangular, con perímetro de 22 metros y un área de 31 metros cuadrados.

   a) Muestra que con estos datos la vendedora está equivocada.

   b) Si se considera ahora un área de 30 m^2, ¿cuáles son las medidas del terreno?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas

1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 5x + 3 = 0$ b) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

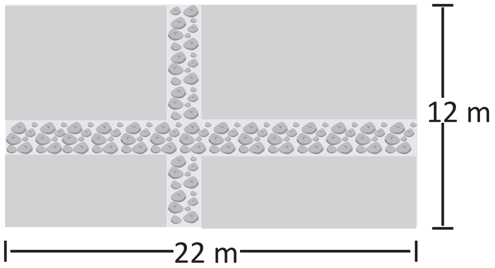
2. La suma de dos números es 6 y al multiplicarlos el resultado es c. ¿Qué valor debe tomar c de forma que la ecuación tenga una solución real?

Para resolver una situación problemática en general se pueden seguir los pasos:

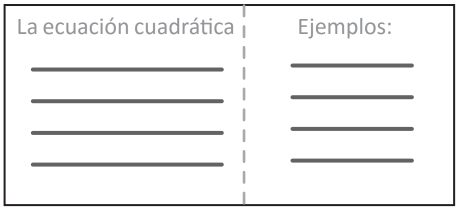
1. Si es posible realiza un esquema de la situación del problema.
2. Se identifica la información que te brinda el problema y define qué cantidad representa la incógnita.
3. Se representan todas las cantidades con la misma incógnita.
4. Se plantea la ecuación cuadrática que hay que resolver (establece la igualdad).
5. Se resuelve la ecuación cuadrática.
6. Se analiza si las soluciones son adecuadas al problema.

---

1. En un terreno rectangular de 22 m de largo y 12 m de ancho, se pondrá un camino vertical y otro horizontal como lo muestra la figura. ¿Cuánto debe ser el ancho del camino para mantener 200 m^2 de terreno para sembrar?



2. Antonio prepara una tarea en un pliego de papel bond, si divide el pliego en una parte rectangular de 0.7 m de largo para explicar el contenido y en una parte cuadrada para poner ejemplos. ¿Cuánto mide el largo y el ancho del pliego de papel si este tiene un área de 0.6 m^2?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Determino si una ecuación cuadrática tiene 0, 1 o 2 soluciones. Por ejemplo: $3x^2 - 2x + 4 = 0$				
2. Utilizo el discriminante en resolución de problemas. Por ejemplo: mostrar que no existen dos números reales cuya suma sea 3 y cuyo producto sea 4.				
3. Resuelvo problemas con ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo: se construirá una casa en un terreno de 24 m de perímetro y 35 m de área. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?				

2.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Resuelvo problemas con ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo: la diferencia entre las edades de Carlos y Julia es de 7 años y al multiplicar sus edades da 60. Determina las edades de Carlos y Julia, si Julia es mayor que Carlos.				
2. Resuelvo problemas con ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo: se utilizaron 450 ladrillos cuadrados para poner el piso de una casa de 50 m^2 de área. Determina el tamaño de los ladrillos que se usaron.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Movimiento con aceleración constante.** Una aplicación física donde se utilizan ecuaciones cuadráticas para resolver problemas surge cuando una particula se mueve en línea recta con aceleración constante, es decir, su velocidad cambia cantidades iguales en intervalos iguales, esta es una situación muy especial de la física, aunque ocurre con frecuencia en la naturaleza. Con la siguiente ecuación puede conocerse la posición a la que se encuentra un objeto en cierto tiempo conociendo la velocidad y la aceleración del mismo:

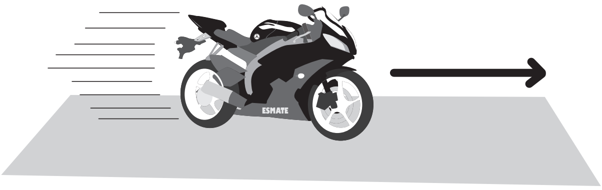
$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

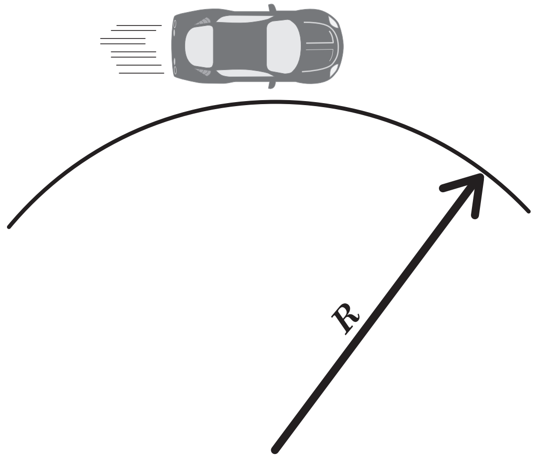
Donde x_0 es la posición inicial, v_0 la velocidad inicial y x la posición a la que se encuentra en el tiempo t.

La posición de un motociclista en cierto momento t (en segundos) esta dada por la ecuación:

$$x = 5 + 15t + 2t^2$$

Si el motociclista se encuentra a 43 m (valor de x) de la posición observada inicialmente, ¿cuántos segundos le tomó recorrer esta distanciá?





2. **Movimiento circular uniforme.** Si un objeto se mueve en un círculo y su rapidez es constante, se dice que tiene un movimiento circular uniforme. Por ejemplo, los automóviles al dar vuelta a una curva cuyo radio es constante, un satélite que describe un movimiento circular uniforme alrededor de la tierra o un tren eléctrico que da vueltas en una pista circular con rapidez constante.

Si una partícula se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio R y rapidez constante v, su aceleración, esta dada por la ecuación:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Si un automóvil posee una aceleración de 9.4 m/s^2 y el radio de la curva es 170 m, ¿cuál es la rapidez aproximada del automóvil en ese instante? Utiliza calculadora para los procedimientos y recuerda escribir el resultado de la rapidez como m/s.

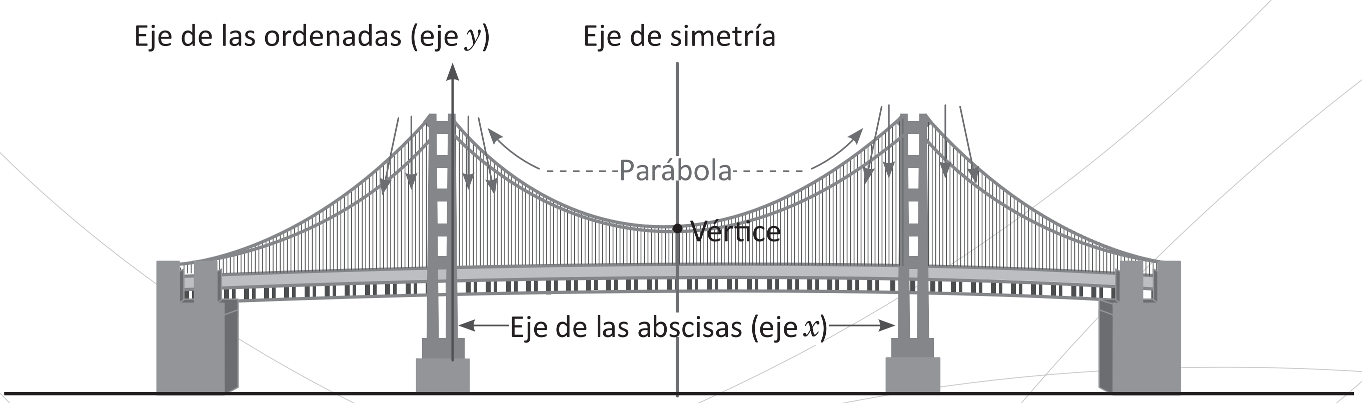
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4 Unidad

Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$

En el siglo XVI, comenzaron a introducirse los símbolos que hoy se utilizan en el planteamiento de ecuaciones. Uno de los matemáticos que mayor influencia tuvo en este cambio favorable para el desarrollo del Álgebra, fue el francés François Viète (1540-1603), con el uso de símbolos para expresar la incógnita y los coeficientes de una ecuación, facilitando el estudio de ecuaciones de grado 2, 3 y 4, que a partir de la edad moderna se les comenzó a llamar “funciones”.

Dados los hallazgos de los matemáticos, se conoce en la actualidad la utilización de las funciones cuadráticas en las diferentes ramas de las ciencias naturales (Biología, Física y Química), así como en la economía y construcciones en la arquitectura, realizando aportes significativos para la humanidad.



En esta unidad relacionarás magnitudes utilizando la proporcionalidad al cuadrado, ubicar pares ordenados en el plano cartesiano para graficar la función $y = x^2$ así como describir la variación de los valores de la función $y = ax^2$.

1.1 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 1

Para cada caso, determina si y es directamente proporcional a x y escribe el valor de la constante de proporcionalidad:

a)

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

b)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

Una magnitud **y es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud x** si $y = ax^2$. El número a es una **constante**, es decir, un número fijo.

Por ejemplo: al dejar caer una pelota desde un edificio, la distancia que recorre hasta llegar al suelo varía como lo muestra la siguiente tabla:

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

Donde x es el tiempo transcurrido (desde que se deja caer la pelota) y y es la distancia recorrida por la pelota después de x segundos. ¿Qué relación hay entre x^2 y y? ¿Cómo puede escribirse y en términos de x?

La relación entre x^2 y y puede verse en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
x^2	0 × 5	1 × 5	4 × 5	9 × 5	16 × 5
y	0	5	20	45	80

Al multiplicar por 5 cada una de las cantidades en x^2 el resultado son sus respectivas cantidades en y. Por lo tanto, $y = 5x^2$.

1. En ambos literales, la variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Completa los valores en las tablas y en cada caso expresa y en términos de x:

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	4	16	36					

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25			
y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$				

2. Utilizando los valores de x y y de las tablas, ¿es y directamente proporcional al cuadrado de x?

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	1	3	12	27	48	75

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 2

R

1. La variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Completa los valores de la tabla y expresa y en términos de x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25					
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5					

2. Con base en los siguientes datos, ¿es y directamente proporcional al cuadrado de x?

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	–2	–8	–18	–32	–50

C

Si y es directamente proporcional al cuadrado de x, entonces se dice que **y es función de x**, pues cada valor de x determina un único valor de y. El valor de la constante a en $y = ax^2$, puede encontrarse sustituyendo un par de valores particulares de x y y y resolviendo la ecuación.

Por ejemplo, si y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x y cuando $x = 3$, $y = 18$, entonces para encontrar el valor de la constante a se sustituyen $x = 3$ y $y = 18$ en $y = ax^2$ y se resuelve la ecuación:

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

Por lo tanto, $y = 2x^2$.

En general, la relación $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales ($a \neq 0$) se llama **función cuadrática**.

Las funciones **$y = ax^2$** y **$y = ax^2 + c$** son casos especiales que se estudiarán en esta unidad, la forma completa de la función cuadrática se estudiará hasta bachillerato.

En cada literal, y es directamente proporcional al cuadrado de x. Calcula el valor de la constante a para cada caso:

a) Si $x = 3$ entonces $y = 90$

b) Si $x = 8$ entonces $y = 6$

c) Si $x = 9$ entonces $y = 15$

d) Si $x = 2$ entonces $y = –20$

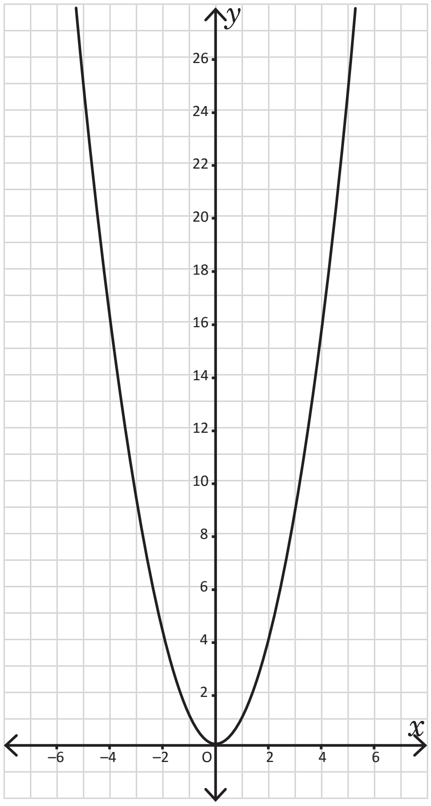
1.3 La función $y = x^2$

1. Completa la tabla y escribe y en términos de x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	8	32	72					

2. La variable y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:
   a) Si $x = 4$ entonces $y = 112$
   b) Si $x = 12$ entonces $y = -24$

La gráfica de la función $y = x^2$ se llama **parábola** y pasa por el origen (0, 0). Todas las funciones cuadráticas tienen una parábola como gráfica, y su forma es similar a la de $y = x^2$.



1. Sea $y = x^2$. ¿Qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -3$ y $x = 3$? ¿Y cuando $x = -\frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{3}$?

2. Si $y = x^2$:

   a) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = 4$?

   b) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = -\frac{1}{2}$?

   c) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = \sqrt{2}$?

1.4 La función $y = ax^2$; $a > 1$

1. Calcula el valor de la constante en $y = ax^2$, si cuando $x = 6$ entonces $y = -15$.

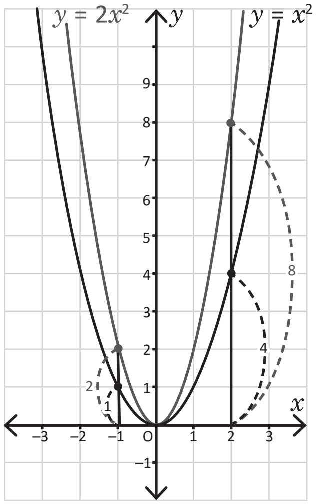
2. Sea $y = x^2$. ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que $x = \sqrt{3}$? ¿Y que $x = -\sqrt{5}$?

Si a es un número mayor que 1 ($a > 1$) entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$. El **eje de simetría**, de una parábola es la recta vertical que divide a la parábola en dos partes congruentes, en el caso de $y = ax^2$ el eje de simetría es el eje y.

Por ejemplo, la gráfica de $y = 2x^2$ resulta de multiplicar por 2 los valores de $y = x^2$:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2



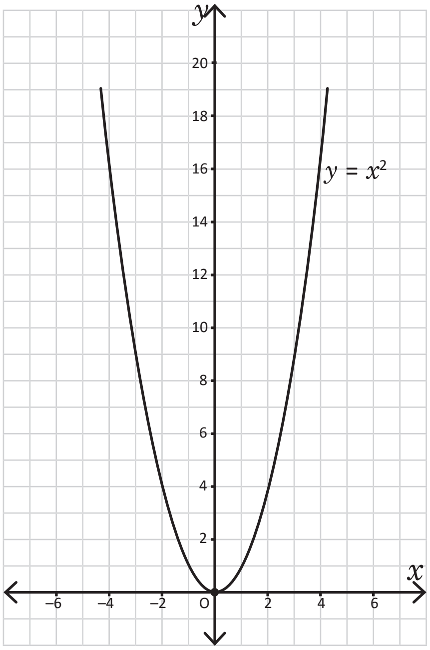
Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = 2x^2$) pasan por el origen (0, 0), son parábolas y al doblar por el eje y, la parte de la gráfica que queda del lado derecho coincide con la del lado izquierdo.

A parte del origen, los demás puntos de ambas gráficas NO coinciden; además, $y = 2x^2$ "está arriba" de $y = x^2$.

En el mismo plano y a partir de la gráfica de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2$

b) $y = \frac{5}{2}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Función $y = ax^2$; $0 < a < 1$

1. Sea $y = x^2$. ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que $x = -\sqrt{7}$? ¿Y que $x = \frac{1}{3}$?

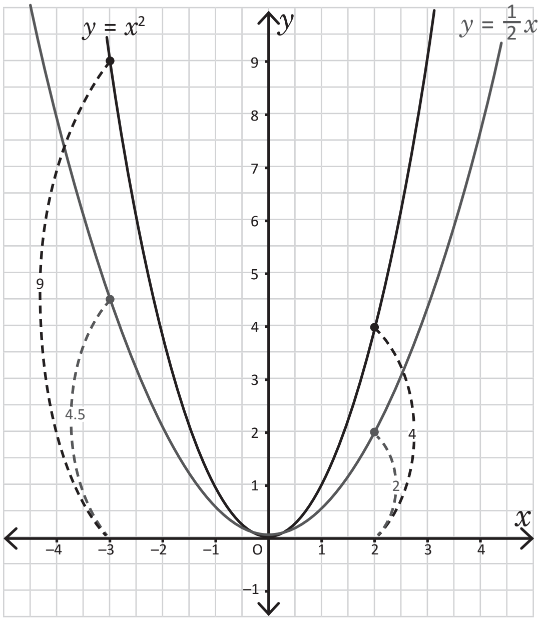
2. Grafica $y = \frac{7}{2}x^2$. Puedes utilizar la gráfica que aparece después de la conclusión y realizar tus cálculos en este espacio.

Si a es un número mayor que cero y menor que 1 ($0 < a < 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$.

Por ejemplo, la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ resulta de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los valores de $y = x^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9 $\times\frac{1}{2}$	4 $\times\frac{1}{2}$	1 $\times\frac{1}{2}$	0 $\times\frac{1}{2}$	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

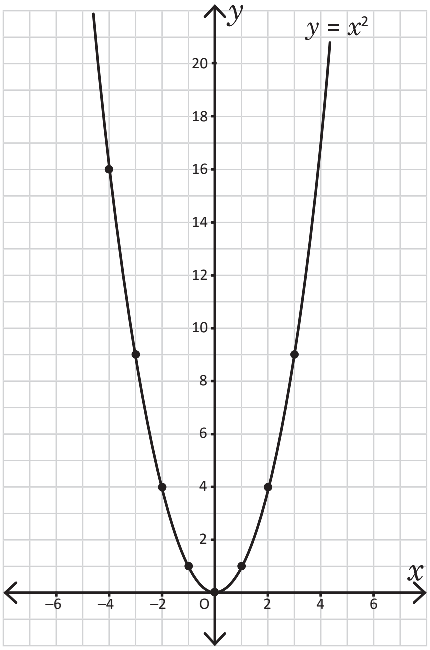
Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$) pasan por el origen (0,0), son parábolas y el eje y es eje de simetría. Los demás puntos diferentes del origen NO coinciden; además, $y = \frac{1}{2}x^2$ "está debajo" de $y = x^2$.



En el mismo plano y a partir de la gráfica de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{5}x^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

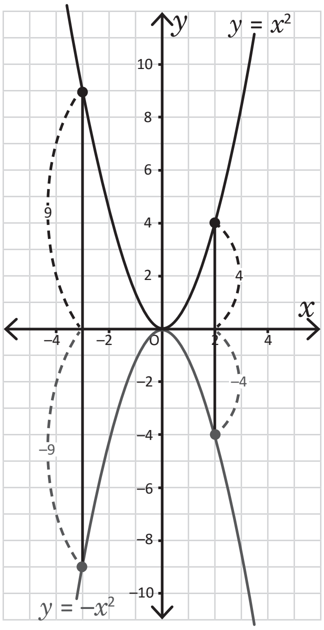
1.6 Función $y = -ax^2$; $a > 0$

A partir de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2}{3}x^2$

b) $y = 3x^2$

Si a es un número mayor que cero ($a > 0$), entonces para elaborar la gráfica de $y = -ax^2$ se multiplica por –1 todos los valores de $y = ax^2$. La función $y = -ax^2$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la función $y = ax^2$; en este caso, se dice que la parábola de $y = -ax^2$ se abre hacia abajo.



Por ejemplo, la gráfica de $y = -x^2$ resulta de multiplicar por –1 los valores de $y = x^2$:

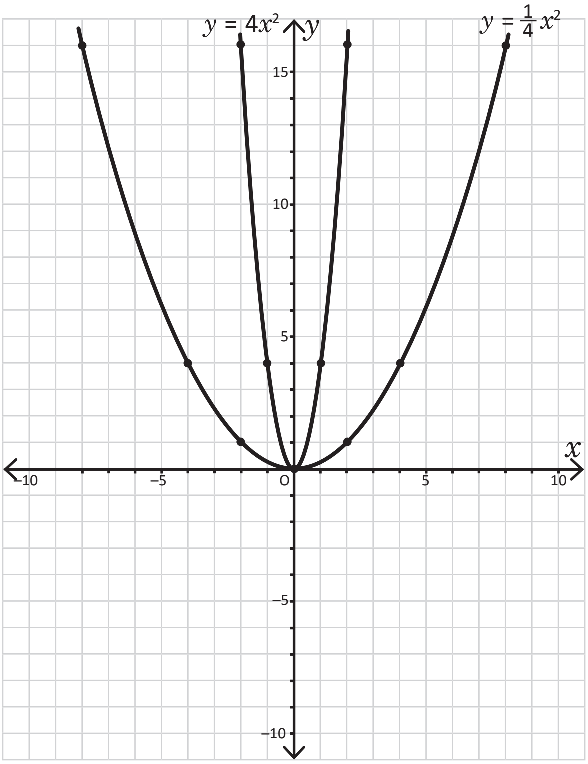
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9 × (–1)	4 × (–1)	1 × (–1)	0 × (–1)	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$) pasan por el origen (0,0), son parábolas y el eje y es eje de simetría. Los demás puntos diferentes del origen NO coinciden; además, $y = -x^2$ está debajo del eje x, es decir, la parábola continúa hacia abajo y no hacia arriba como $y = x^2$.

En el mismo plano y a partir de las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = \frac{1}{4}x^2$ grafica las siguientes funciones:

a) $y = -4x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2$



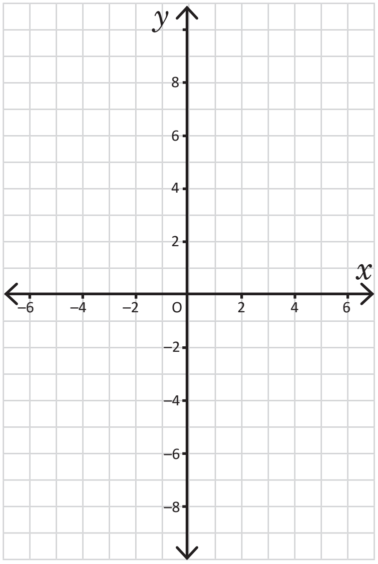
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Características de $y = ax^2$

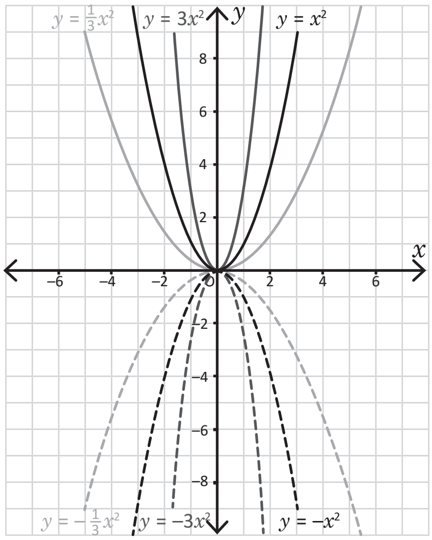
Grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -4x^2$



A la gráfica de la función $y = ax^2$ se le llama parábola, y tiene al eje y como eje de simetría. El punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se llama **vértice**; en el caso de $y = ax^2$ el vértice coincide con el origen (0,0). Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.



Por ejemplo, para las funciones $y = 3x^2$, $y = –3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$:

a) El vértice es (0,0) y tiene como eje de simetría el eje y.
b) Para las funciones $y = 3x^2$ y $y = –3x^2$, la gráfica se acerca al eje y; mientras que para $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ la gráfica se aleja del eje y.
c) Las parábolas de $y = 3x^2$ y $y = \frac{1}{3}x^2$ se abren hacia arriba.
d) Las parábolas de $y = –3x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ se abren hacia abajo.

A cada función asígnale su respectiva grafica:

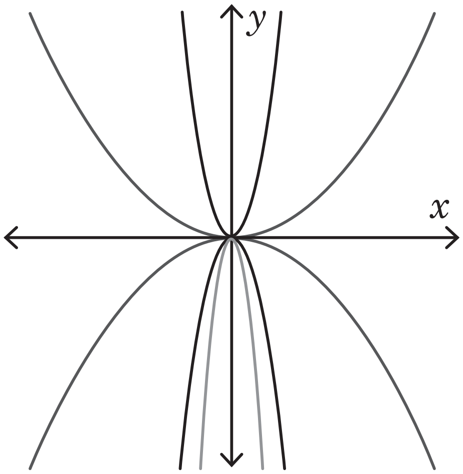
a) $y = -2x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = -5x^2$

d) $y = -\frac{1}{5}x^2$

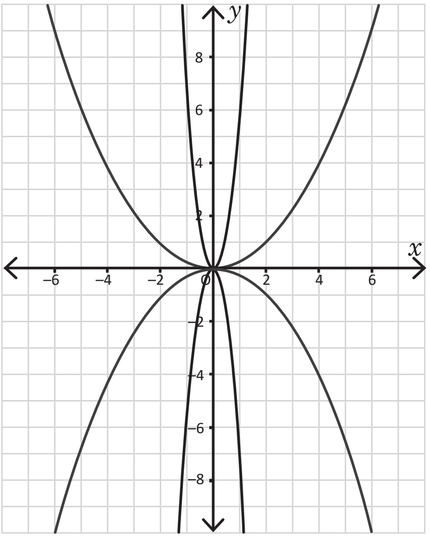
e) $y = \frac{1}{5}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Variación de $y = ax^2$, parte 1

1. Grafica $y = -2x^2$.



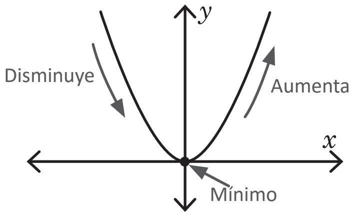
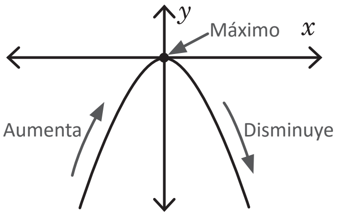
2. A cada función asígnale su respectiva grafica:
   a) $y = 6x^2$

   b) $y = -6x^2$

   c) $y = -\frac{1}{4}x^2$

   d) $y = \frac{1}{4}x^2$

Dada la función $y = ax^2$ y a un número real (positivo o negativo). Al ir aumentando el valor de x, ocurre lo siguiente:

$a > 0$	$a < 0$
a) Si $x < 0$ entonces el valor de y disminuye. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y aumenta. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **mínimo** de la función $y = ax^2$.  	a) Si $x < 0$ entonces el valor de y aumenta. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y disminuye. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **máximo** de la función $y = ax^2$. 

1. Dadas las funciones $y = 4x^2$ y $y = -4x^2$.
   a) Si el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de –4 a –2?

2. Dadas las funciones $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$.
   a) Si el valor de x aumenta de –3 a –1, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de 5 a 6?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

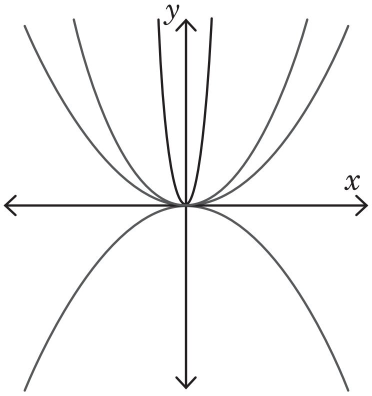
1.9 Variación de $y = ax^2$, parte 2

1. A cada función asígnale su respectiva grafica:
   a) $y = 5x^2$

   b) $y = \frac{1}{3}x^2$

   c) $y = \frac{1}{6}x^2$

   d) $y = -\frac{1}{6}x^2$



2. Sean $y = \frac{1}{5}x^2$ y $y = -\frac{1}{5}x^2$.

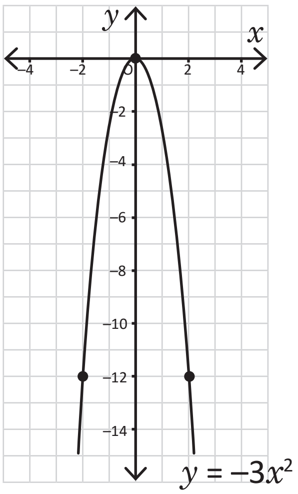
   a) Si el valor de x aumenta de 2 a 5, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de –10 a –5?

En la función $y = –3x^2$, si el valor de x se encuentra entre −2 y 1 entonces:

- El valor mínimo de y es −12 (cuando $x = −2$).
- El valor máximo de y es 0 (cuando $x = 0$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre −12 y 0.

A los valores que toma la variable y se les llama **dominio** y a los valores que toma la variable x se les llama **rango**.



1. Si $y = \frac{1}{4}x^2$ y x se encuentra entre −2 y 4, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

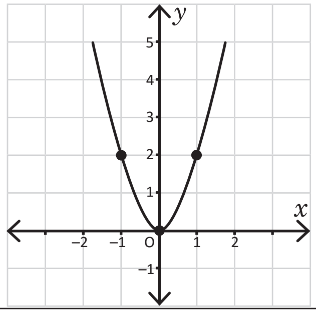
2. Si $y = −5x^2$ y x se encuentra entre −3 y 1, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

3. Encuentra el valor máximo de la función $y = \frac{1}{2}x^2$, si x está entre –4 y 3.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

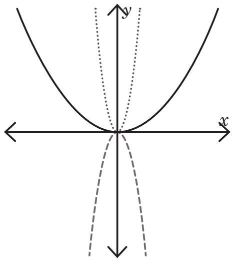
1.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro el valor de a en $y = ax^2$, dados dos valores particulares de x y y. Por ejemplo, cuando $x = 9$ y $y = 27$.				
2. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $a > 1$. Por ejemplo: $y = \frac{7}{2}x^2$.				
3. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $0 < a < 1$. Por ejemplo: $y = \frac{2}{7}x^2$.				
4. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $a < 0$. Por ejemplo: $y = -3x^2$ y $y = -\frac{1}{5}x^2$.				
5. Identifico el valor de a en $y = ax^2$ a partir de la gráfica de la función. Por ejemplo, en la gráfica siguiente:  				

1.11 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Relaciono funciones de la forma $y = ax^2$ con su respectiva gráfica. Por ejemplo, relaciono las funciones $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{5}{2}x^2$ y $y = 4x^2$ con su respectiva gráfica:  				
2. Determino el cambio en los valores de y en $y = ax^2$ cuando x aumenta. Por ejemplo, si $y = -9x^2$ y x aumenta de −5 a −3.				
3. Encuentro los valores entre los cuales está comprendida la variable y si $y = ax^2$. Por ejemplo, si $y = \frac{8}{5}x^2$ y el valor de x está entre −1 y 1.				

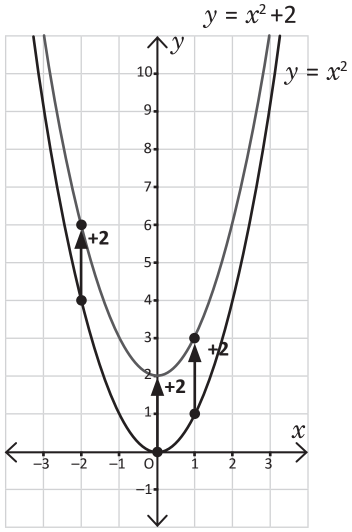
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número positivo ($c > 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia arriba) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Ejemplo: Grafica de $y = x^2 + 2$

x	–2	–1	0	1	2
x^2	4 +2	1 +2	0 +2	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

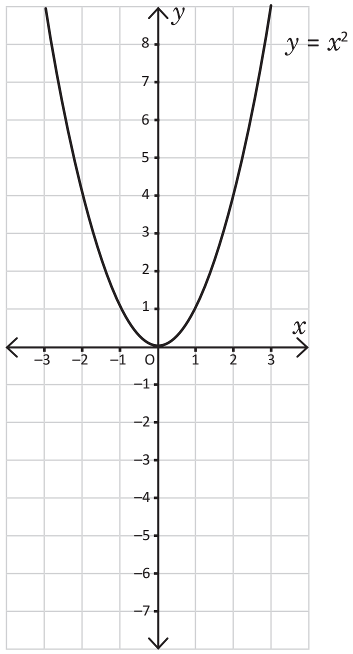


El vértice en $y = x^2$ es (0, 0); mientras que en $y = x^2 + 2$ es (0, 2), se encuentra dos unidades arriba.

La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 + 1$



b) $y = -x^2 + 1$

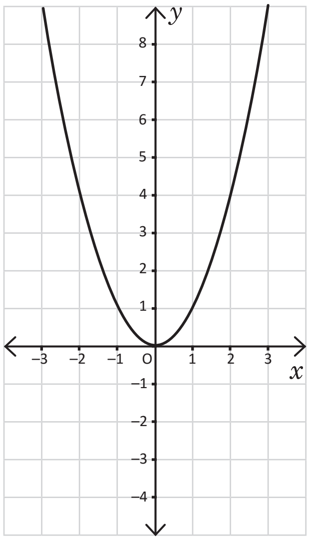
c) $y = x^2 + 5$

d) $y = -2x^2 + 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Función $y = ax^2 + c$; $c < 0$

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:



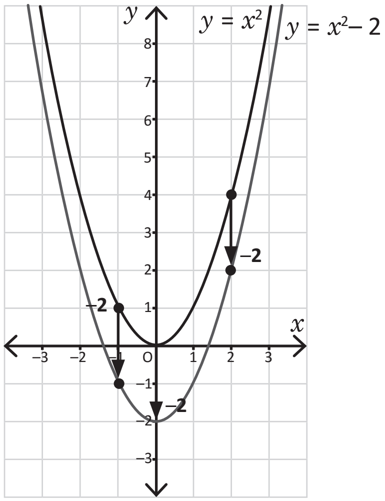
a) $y = -x^2 + 2$

b) $y = 2x^2 + 2$

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número negativo ($c < 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia abajo) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es (0, c).

Ejemplo. Gráfica de $y = x^2 - 2$

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4 −2	1 −2	0 −2	1	4
$x^2 - 2$	2	−1	−2	−1	2

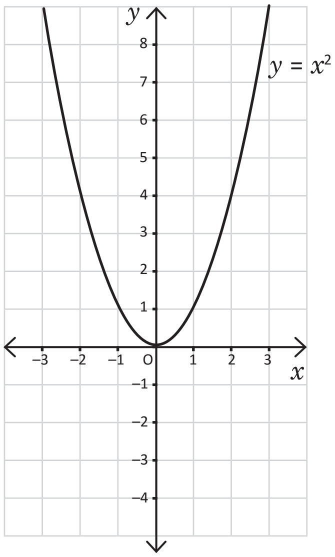


El vértice en $y = x^2$ es (0, 0); mientras que en $y = x^2 - 2$ es (0, −2), se encuentra dos unidades abajo.

La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 - 2$



b) $y = -x^2 - 2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función

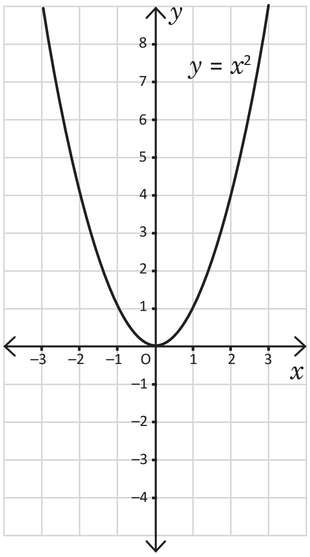
R Grafica las siguientes funciones y en cada caso escribe cuál es su vértice:

a) $y = x^2 + 4$

b) $y = -x^2 - 1$

c) $y = 2x^2 + 3$

d) $y = -2x^2 + 1$

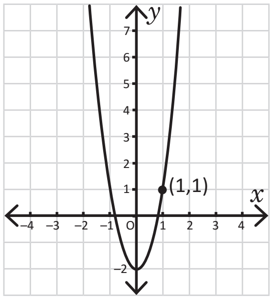


C Dada la gráfica de una función $y = ax^2 + c$ y un punto (m, n) sobre esta, entonces para encontrar los valores de a y c (que pueden ser positivos o negativos) se hace lo siguiente:

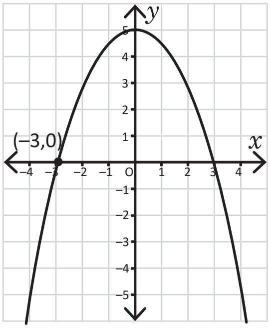
1. En la gráfica, ubicar el vértice de la parábola (0, c): si está arriba de (0, 0) entonces c es positivo, y si está debajo de (0, 0) entonces c es negativo.
2. Encontrar el valor de a sustituyendo n, m y c, quedando así: $n = am^2 + c$.

1. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas:

a)



b)



2. La gráfica de la función $y = ax^2 + c$ pasa por los puntos (1, 2) y (2, 17). Encuentra los valores de a y c.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo la gráfica de funciones de la forma, $y = ax^2 + c$; $c > 0$. Por ejemplo: $y = 2x^2 + 3$.				
2. Realizo la gráfica de funciones de la forma, $y = ax^2 + c$; $c < 0$. Por ejemplo: $y = 2x^2 - 3$.				
3. Escribo el vértice de una función cuadrática. Por ejemplo, de $y = 2x^2 + 3$ y $y = 2x^2 - 3$.				
4. Utilizo las condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función. Por ejemplo: La gráfica de la función $y = ax^2 + c$ pasa por los puntos (0, 6) y (1, 7). Encuentra los valores de a y c.				

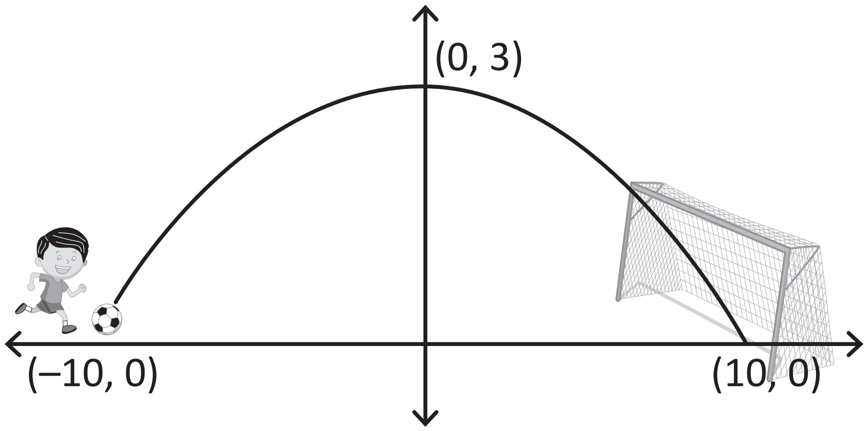
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Movimiento parabólico.** En física, al movimiento realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola se le conoce como movimiento parabólico. Para que un objeto pueda describir este tipo de movimiento, el medio en el que se mueve no debe ofrecer resistencia al avance y debe estar sujeto a un campo gravitatorio uniforme.

   La trayectoria de una pelota de golf, el disparo de un proyectil militar, el movimiento que describe un balón al realizar un tiro de dos puntos en el básquetbol y el rebote de una piedra sobre la superficie del agua, son algunos ejemplos de movimiento parabólico, en la mayoría de casos, la parábola es abierta hacia abajo.

   Carlos realizó un tiro libre desde una distancia de 20 metros de la portería y el balón alcanzó una altura máxima de 3 metros. Si se coloca el centro del plano cartesiano (0, 0), justo debajo de donde el balón alcanzó su altura máxima, encuentra la ecuación que describe el movimiento del balón, con las condiciones dadas.

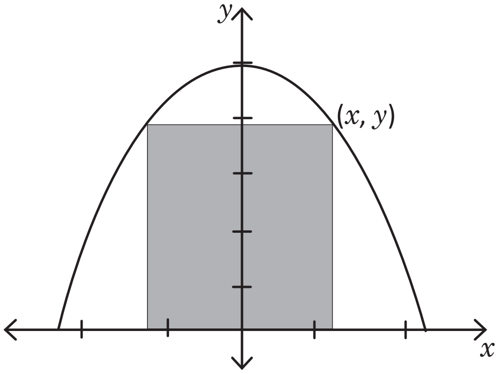


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2. **Plaza El Trovador.** En el mundo se pueden encontrar algunas estructuras que tienen forma de la función cuadrática. En nuestro país, un ejemplo de estas estructuras se encuentra en la "Plaza Matías Delgado", también conocida como "Plaza El Trovador", ubicada en San Jacinto, San Salvador. Visto frontalmente, esta estructura se asemeja a una parábola abierta hacia abajo y su arco es símbolo de bienvenida para las personas que vienen del sur de San Salvador hacia su centro histórico.

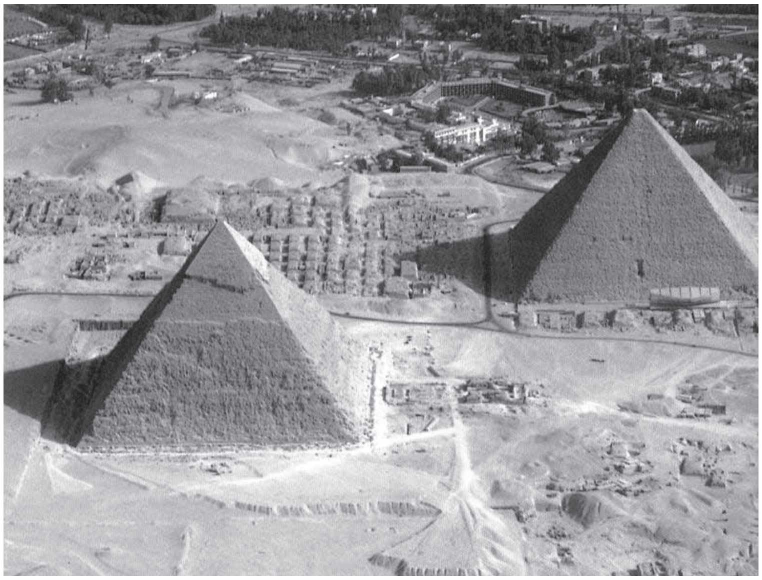
   Una estructura tiene la forma de una parábola descrita por la ecuación $y = -x^2 + 5$. Si se ajusta otra estructura con forma rectangular de modo que toque un punto (x, y) de la parábola.

   a) Expresa el área del rectángulo en términos de x.
   b) Si $x = 2$, ¿cuál es el área del rectángulo?



Unidad 5

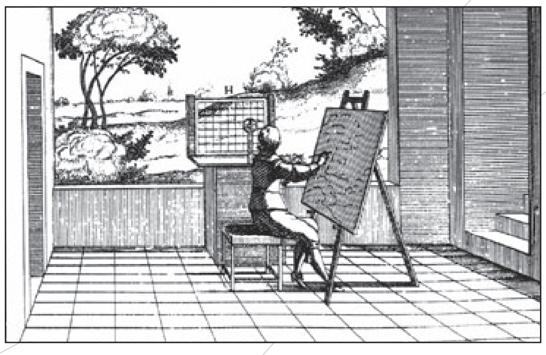
Figuras semejantes



Pirámides de Kefrén y Keops, Egipto.

El matemático griego Tales de Mileto (siglo IV a.C.) calculó la altura de la gran pirámide de Keops, en Egipto, observando las longitudes de un bastón clavado en la arena, la sombra proyectada por el bastón y la sombra de la pirámide. Tales aplicó la semejanza de triángulos para obtener la altura, asumiendo que los rayos del sol son paralelos.

Dentro de las aplicaciones de las figuras semejantes se utiliza una técnica de dibujo que permite ampliar o reducir una imagen o fotografía, así como dibujar paisajes. La técnica consiste en cuadricular la figura de referencia y el lienzo o papel en el que se dibujará o pintará, de tal manera que los rectángulos de la figura y el lienzo sean semejantes.



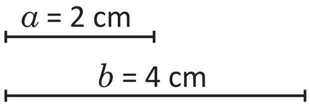
Un artista dibuja un paisaje con la técnica de la cuadrícula.

Los temas que estudiarás son los segmentos proporcionales, las figuras semejantes, sus características y cómo construirlas. Abordarás los criterios de semejanza de triángulos, propiedades como la base media, la relación entre rectas paralelas y segmentos proporcionales. Además, aplicarás la semejanza para utilizar la escala en los mapas, la relación entre las áreas de dos triángulos semejantes y el volumen de sólidos semejantes, entre otros.

1.1 Razón entre segmentos

Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

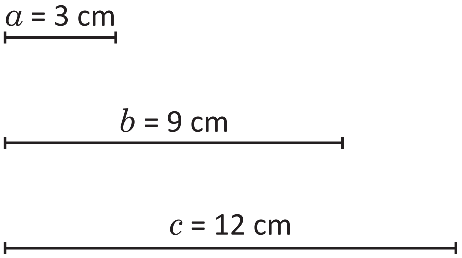
Por ejemplo, la razón entre los segmentos a y b de la izquierda es $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.



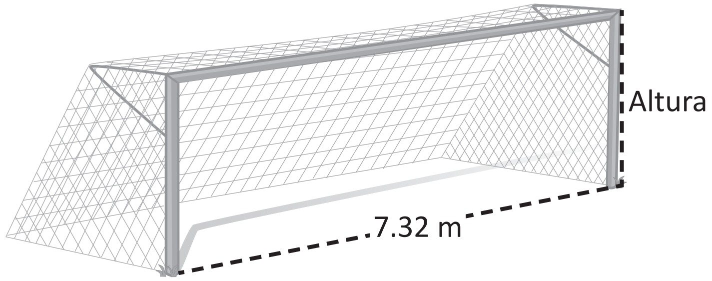
1. Con los segmentos a, b y c responde:
   a) ¿Cuántas veces es la longitud de a con respecto a la de b?

   b) ¿Cuántas veces es la longitud de a con respecto a la de c?

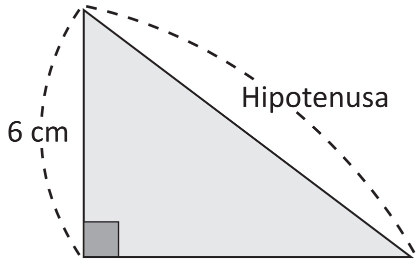
   c) Calcula la razón entre los segmentos b y c.



2. Según la Federación Internacional de Fútbol Asociado (FIFA), la altura y el ancho de las porterías deben estar a una razón 1:3; si el ancho mide 7.32 m, ¿cuánto mide la altura?



3. La altura y la hipotenusa de un triángulo rectángulo están a razón 3:5; si la altura mide 6 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?



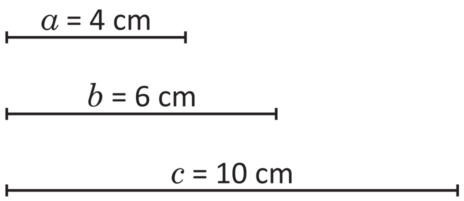
4. ¿Qué longitudes (en centímetros) pueden tener dos segmentos si deben estar a razón 2:3? Escribe tres posibles medidas.

1.2 Segmentos proporcionales

1. Con los segmentos a, b y c responde:
   a) ¿Cuántas veces es la longitud de a con respecto a la de b?

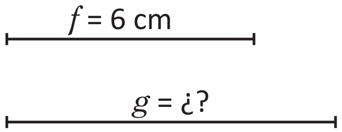
   b) ¿Cuántas veces es la longitud de b con respecto a la de c?

   c) ¿Cuál es la razón entre los segmentos a y c?



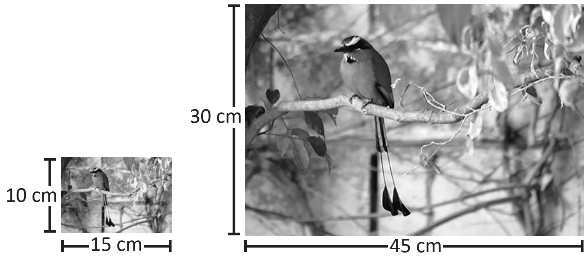
2. Dos segmentos d y e están a razón 2:5; si la longitud de e es 10 cm, ¿cuál es la longitud de d?

3. ¿Cuál debe ser la longitud del segmento g para que f y g estén a razón 3:4?



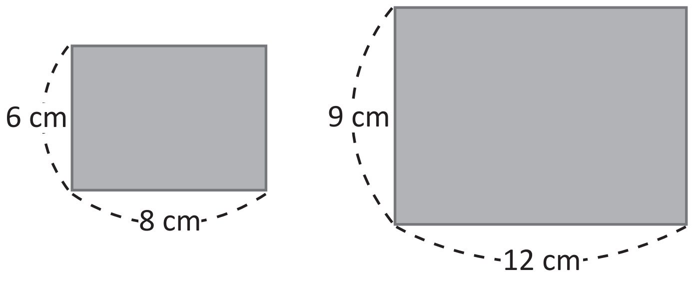
La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**.

Por ejemplo, en las fotografías de la derecha, las alturas son proporcionales a las bases, ya que $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$ y ambas pueden expresarse como $\frac{1}{3}$ o 1:3.

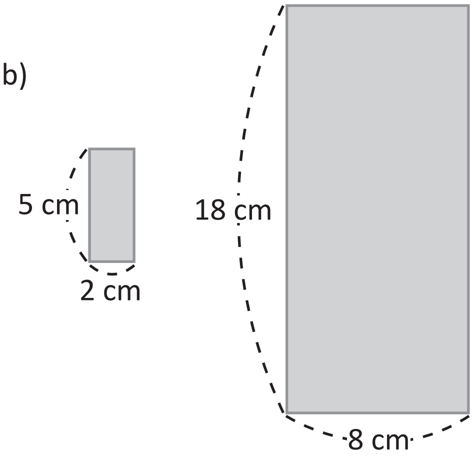


1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, determina si son proporcionales las bases y las alturas de cada una:

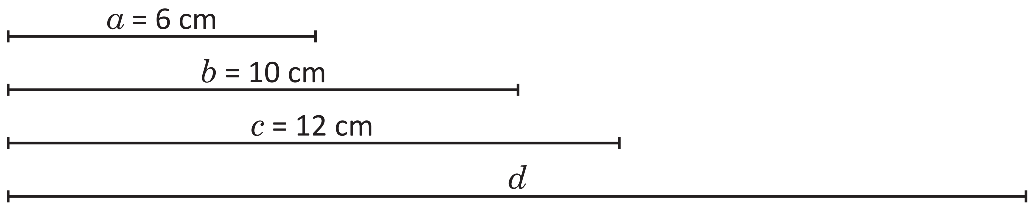
a)



b)



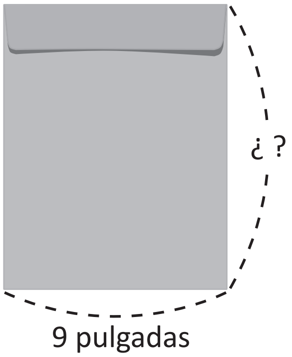
2. ¿Cuál debe ser la longitud del segmento d para que a y b sean proporcionales a c y d?



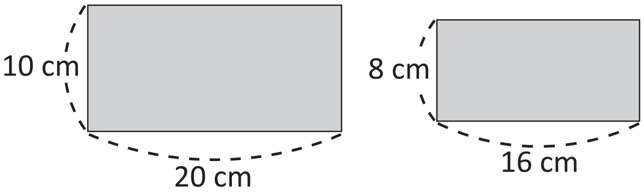
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Figuras semejantes

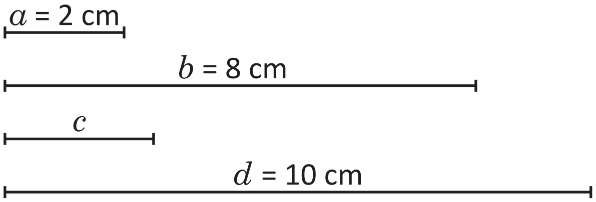
1. La base y altura de un sobre manila tamaño carta están a razón 3:4; si la base mide 9 pulgadas, ¿cuánto mide la altura del sobre?



2. ¿Son las bases de los rectángulos proporcionales a las alturas? justifica tu respuesta.

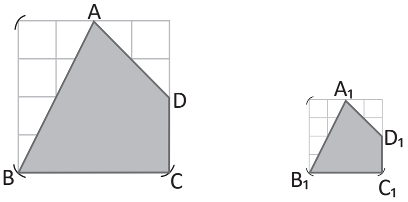


3. ¿Qué longitud debe tener el segmento c para que a y b sean proporcionales a c y d?

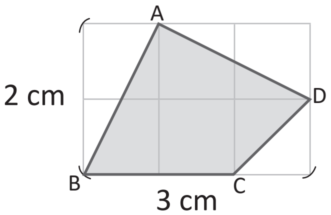


Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo ~: ABCD ~ $A_1B_1C_1D_1$ se lee "ABCD es semejante a $A_1B_1C_1D_1$" (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes).



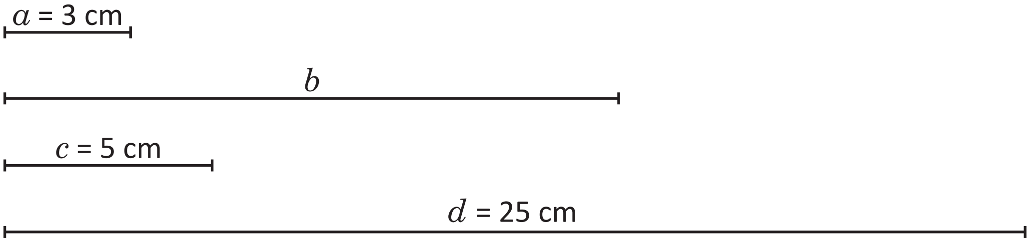
Amplía al doble el cuadrilátero ABCD, dibujando la figura resultante (nómbrala como EFGH):



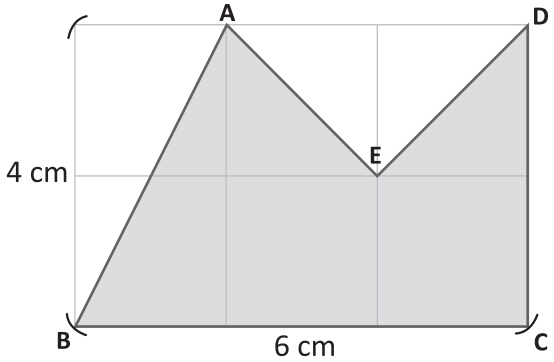
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Características de figuras semejantes, parte 1

1. ¿Qué longitud debe tener el segmento b para que a y b sean proporcionales a c y d?



2. Reduce a la mitad el polígono ABCDE, dibujando la figura resultante (nómbrala FGHIJ):

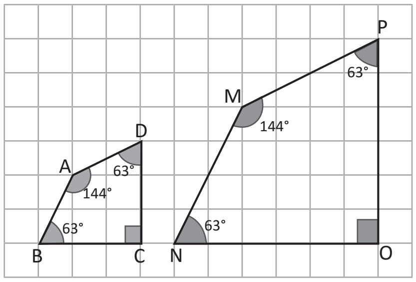


En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

Por ejemplo, los cuadriláteros ABCD y MNOP son semejantes ya que satisfacen:

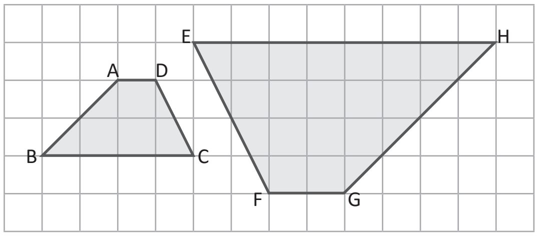
∢A = ∢M ∢B = ∢N

∢C = ∢O ∢D = ∢P

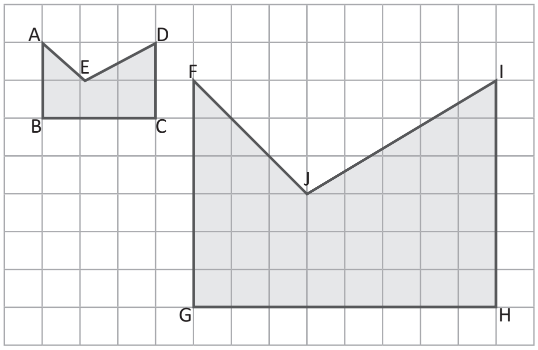


En cada pareja de polígonos semejantes, identifica los ángulos correspondientes.

1.



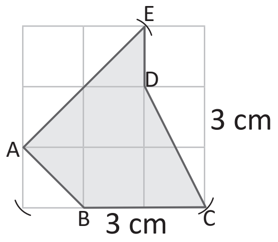
2.



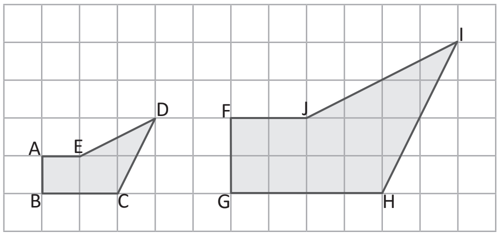
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Características de figuras semejantes, parte 2

1. Amplía al doble el polígono ABCDE (dibuja la figura resultante en tu cuaderno utilizando la cuadrícula).



2. Identifica los ángulos correspondientes en los siguientes polígonos semejantes.

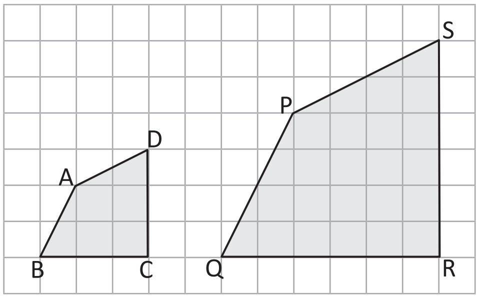


En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo, los cuadriláteros ABCD y PQRS de la derecha son semejantes y cumplen:

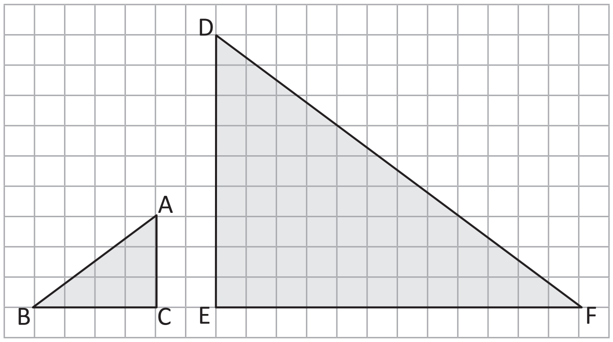
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

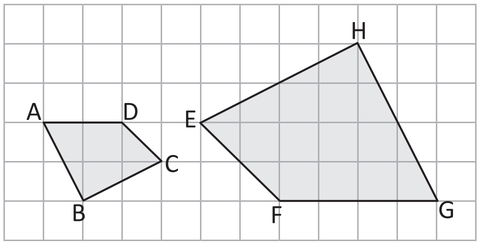
En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.



1. Los triángulos ABC y DFE son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.



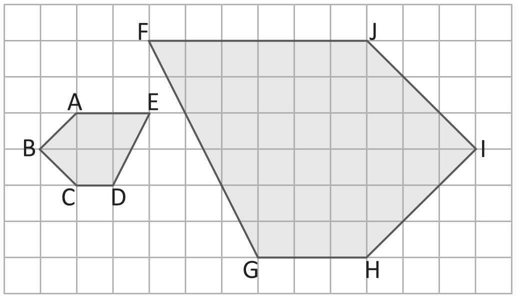
2. Los cuadriláteros ABCD y GHEF son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.



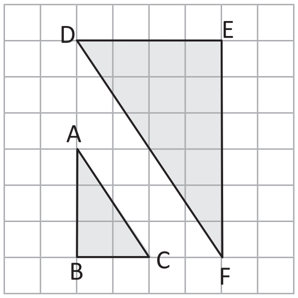
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Construcción de figuras semejantes

1. En la siguiente pareja de polígonos semejantes, identifica los ángulos correspondientes.

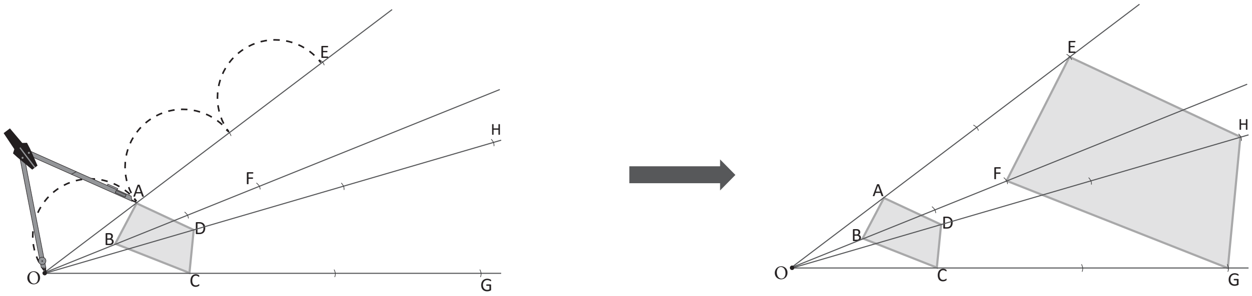


2. Los triángulos ABC y EFD son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.

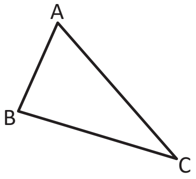


El método visto en clase para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. En las siguientes imágenes, al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos**, y la razón:

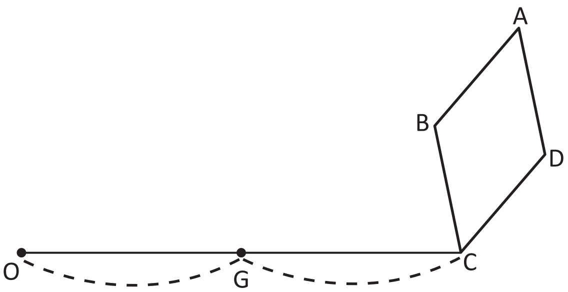
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$ se llama **razón de semejanza**.



1. Calca el triángulo ABC en tu cuaderno y dibuja otro triángulo DEF semejante al primero, cuya razón de semejanza sea 1:4.



2. Utilizando el rombo ABCD, dibuja otro rombo EFGH semejante al primero, con centro de homotecia O y razón de semejanza 2:1.

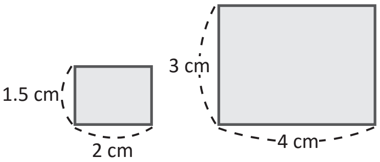
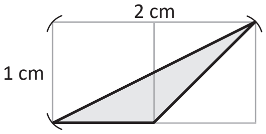
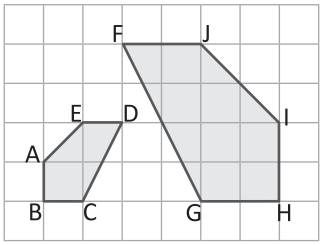
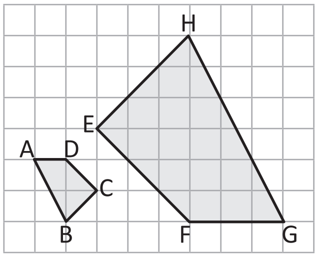


La razón 2:1 indica que debes reducir el rombo ABCD a la mitad. Observa que en la figura ya se ha colocado uno de los vértices de EFGH; para encontrarlo se traza $\overline{OC}$ y con regla o compás se encuentra su punto medio G. Haz lo mismo con los demás vértices: traza $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$, y encuentra los puntos medios de cada segmento; luego únelos para formar EFGH.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

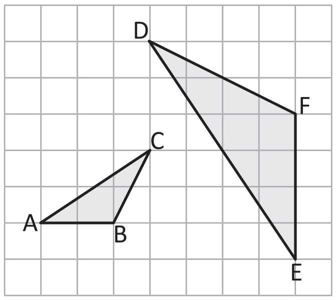
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Calculo razones entre segmentos. Por ejemplo, calculo la razón entre los segmentos a = 4 cm y b = 6 cm.				
2. Determino proporcionalidad entre segmentos. Por ejemplo, si las bases de los rectángulos son proporcionales a las alturas:  				
3. Reduzco y amplío polígonos para dibujar figuras semejantes. Por ejemplo, ampliar al doble el siguiente triángulo:  				
4. Identifico ángulos correspondientes iguales en polígonos semejantes. Por ejemplo, en la siguiente pareja de cuadriláteros:  				
5. Identifico lados correspondientes en polígonos semejantes y calculo la razón de semejanza:  				
6. Dibujo figuras semejantes. Por ejemplo, dibujar dos triángulos semejantes cuya razón de semejanza sea 2:3.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

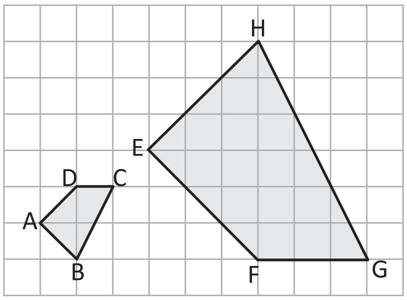
2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos

1. En cada pareja de figuras identifica: ángulos iguales y lados proporcionales; luego, determina si son semejantes (en caso que lo sean, calcula la razón de semejanza):

a)



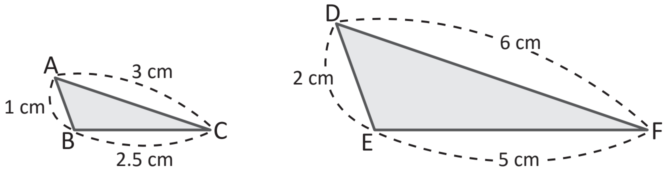
b)



2. En tu cuaderno, dibuja dos triángulos cuya razón de semejanza sea 3:4.

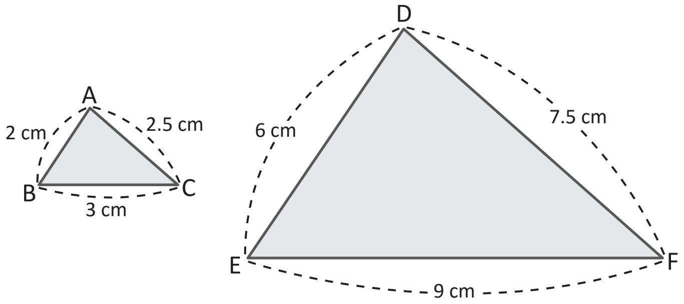
Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Criterio LLL:
Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, entonces también son semejantes. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes, ya que sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

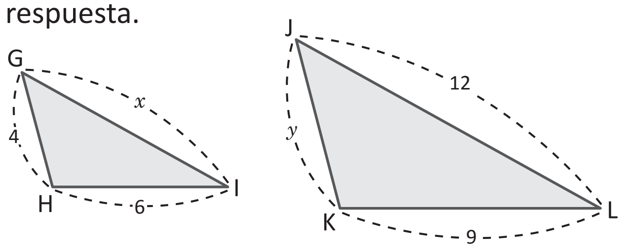


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

1. Determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes (justifica tu respuesta):



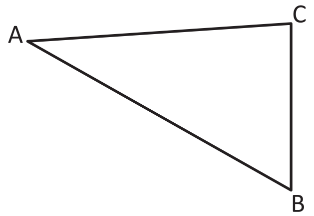
2. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes? Justifica tu respuesta.



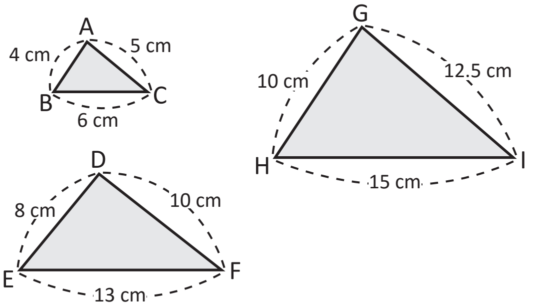
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos

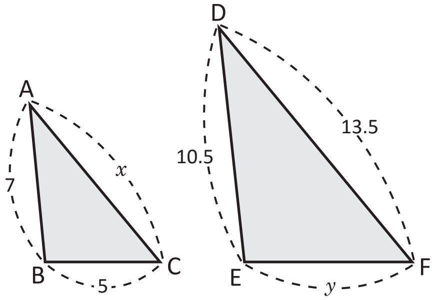
1. Calca en tu cuaderno el triángulo ABC y dibuja otro triángulo DEF semejante al primero, cuya razón de semejanza sea 3:1.



2. ¿Cuál de los triángulos es semejante al triángulo ABC? Justifica tu respuesta.



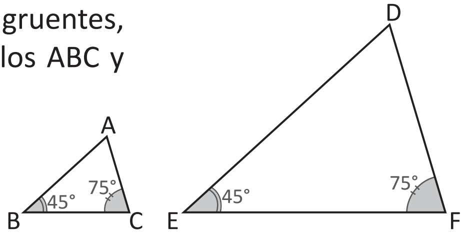
3. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?



Criterio AA:
Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes:

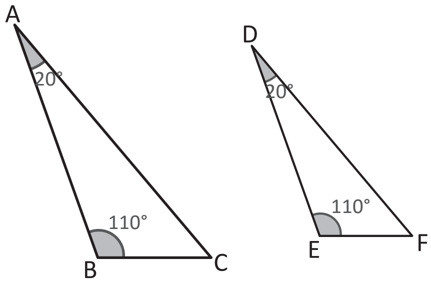
$$\sphericalangle B = \sphericalangle E$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle F$$

Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

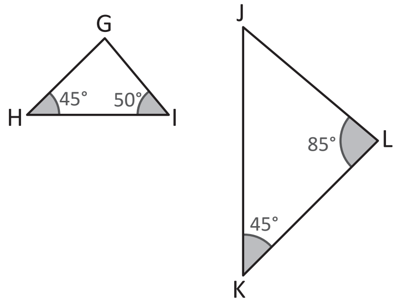


1. Determina si los siguientes triángulos son semejantes (justifica tu respuesta):

a)

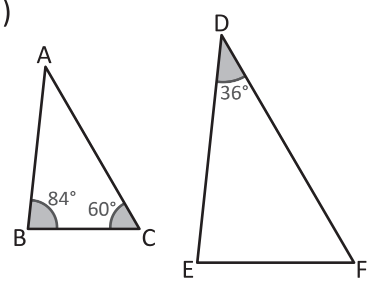


b)

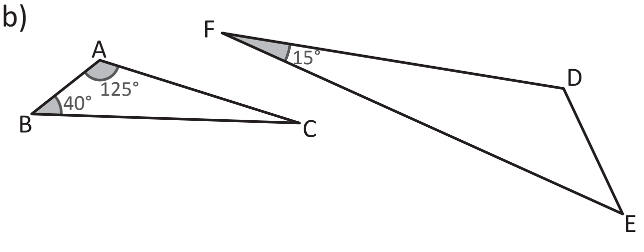


2. En cada literal, ¿cuál debe ser el valor de $\sphericalangle DEF$ para que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$? Justifica tu respuesta.

a)



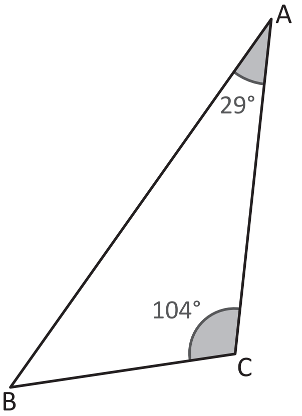
b)

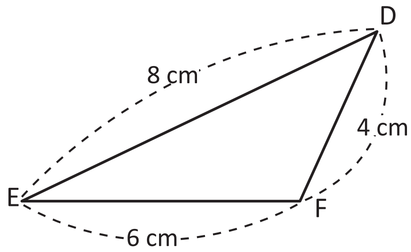


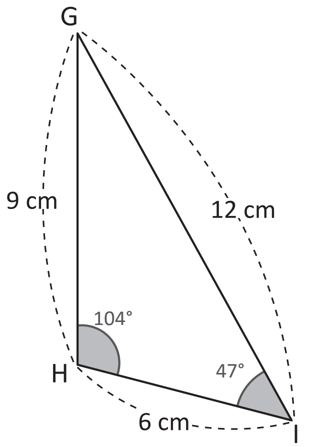
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

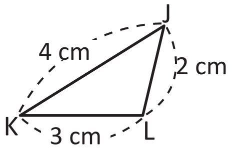
2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos

R Utiliza los criterios LLL y AA para determinar cuáles triángulos son semejantes:









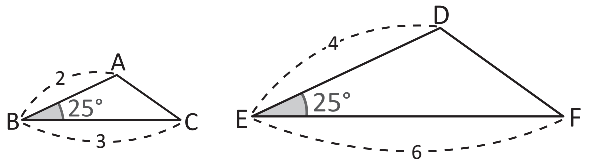
C

Criterio LAL:
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

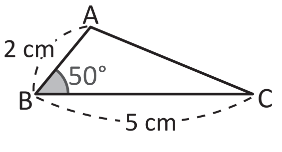
Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes, ya que tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, es decir:

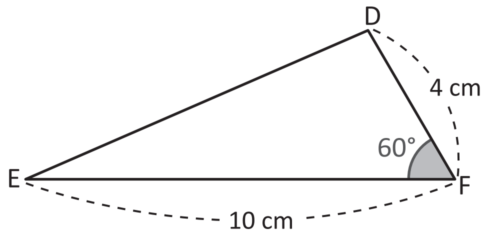
$$\sphericalangle B = \sphericalangle E$$

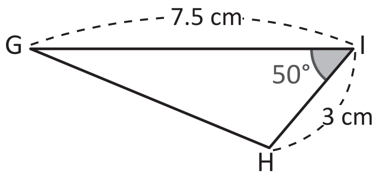
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}$$

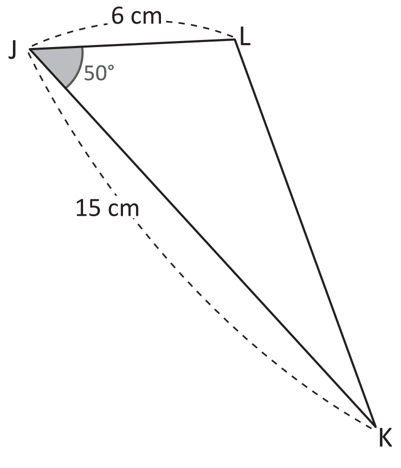


Usando el criterio LAL, determina cuáles triángulos son semejantes al triángulo ABC. Calcula la razón de semejanza en caso que sí lo sean:



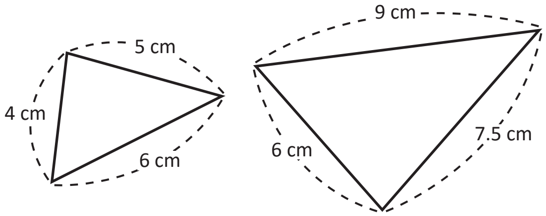
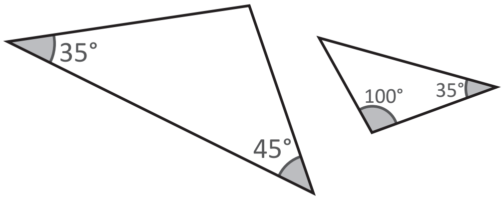
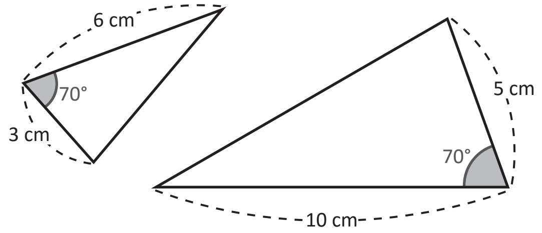
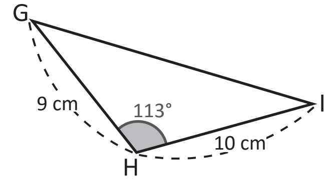
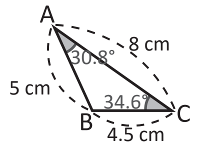
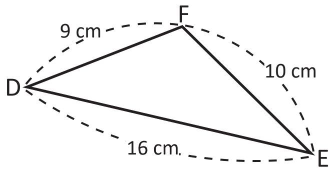
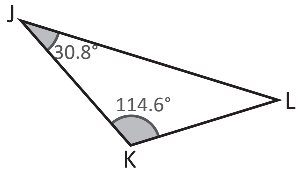






2.4 Autoevaluación de lo aprendido

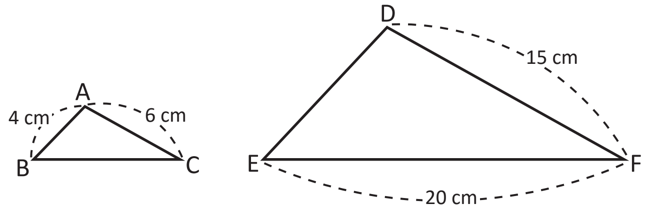
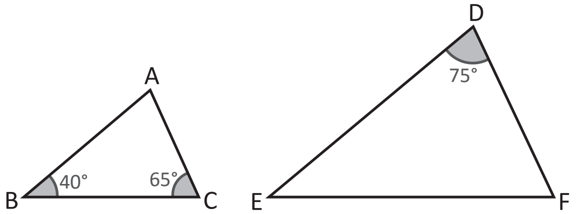
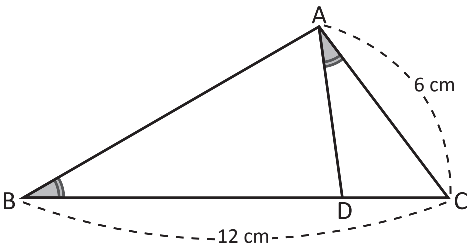
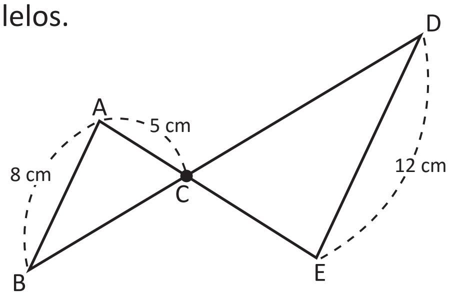
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Identifico triángulos semejantes usando el criterio LLL. Por ejemplo, en los siguientes triángulos.  				
2. Identifico triángulos semejantes usando el criterio AA. Por ejemplo, en los siguientes triángulos:  				
3. Identifico triángulos semejantes utilizando el criterio LAL. Por ejemplo, en los siguientes triángulos.  				
4. Identifico triángulos semejantes utilizando cualquiera de los tres criterios (LLL, AA, LAL). Por ejemplo, los triángulos semejantes a ΔABC son:     				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Autoevaluación de lo aprendido

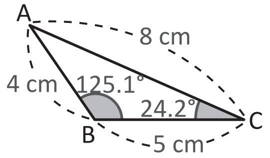
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

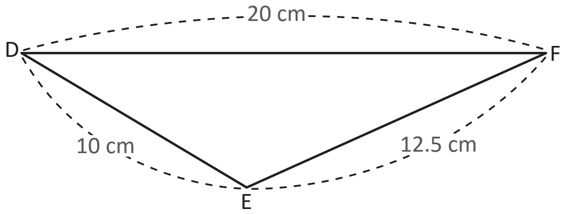
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Determino longitudes de lados para asegurar semejanza de triángulos. Por ejemplo, determinar las longitudes de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ para que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$:  				
2. Determino el valor de un ángulo para asegurar semejanza de triángulos. Por ejemplo, determinar el valor del ∢DEF para que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$:  				
3. Identifico triángulos semejantes para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo: a) Calcular la longitud de $\overline{DC}$ si ∢ABC = ∢CAD:  b) Calcular la longitud de $\overline{CE}$ si los segmentos AB y DE son paralelos.  				

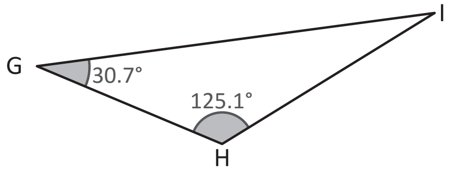
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Teorema de la base media, parte 1

Justifica por qué los triángulos DEF y GHI son semejantes al triángulo ABC:







Teorema de la base media. El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

Por ejemplo, en el triángulo ABC los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y CA, respectivamente. Entonces, el segmento MN es paralelo al lado BC y su longitud es igual a la mitad de la longitud del lado BC. Así:

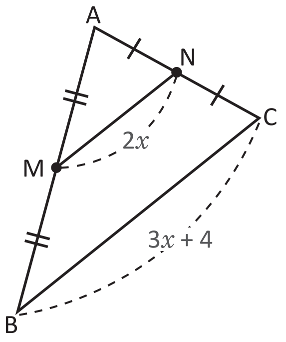
$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$

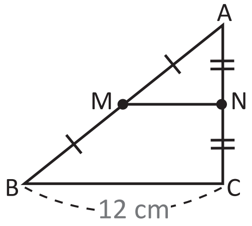
$$4x = 3x + 4$$

$$4x - 3x = 4$$

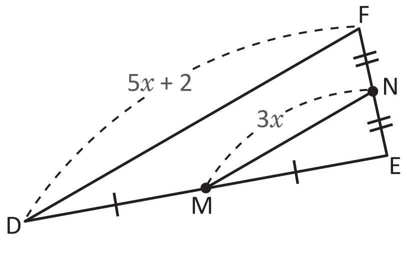
$$x = 4$$



1. En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, respectivamente. Calcula la longitud de $\overline{MN}$:



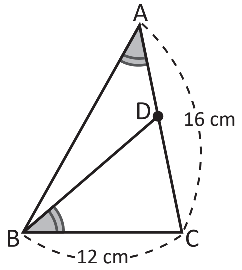
2. En el triángulo DEF, M y N son los puntos medios de $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, respectivamente. Calcula el valor de x:



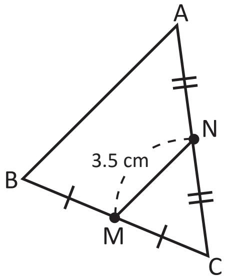
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Teorema de la base media, parte 2

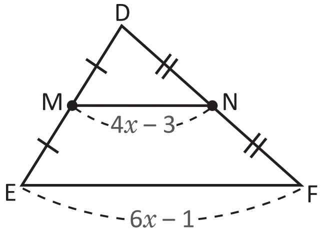
1. En el triángulo ABC, calcula la longitud de $\overline{CD}$ si ∢CBD = ∢BAC.



2. En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$. Calcula la longitud de $\overline{AB}$.



3. En el triángulo DEF, M y N son los puntos medios de $\overline{DE}$ y $\overline{FD}$, respectivamente. Calcula el valor de x:

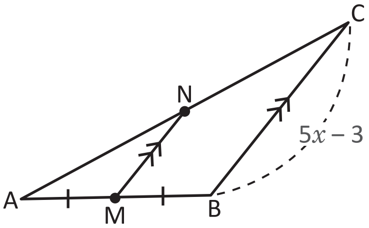


Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a uno de los lados, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

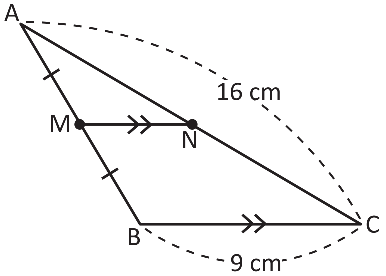
Por ejemplo, en el triángulo ABC, el punto M es punto medio de $\overline{AB}$ y a partir de este se traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$. Entonces N es punto medio de $\overline{CA}$ y se cumple $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

Luego:

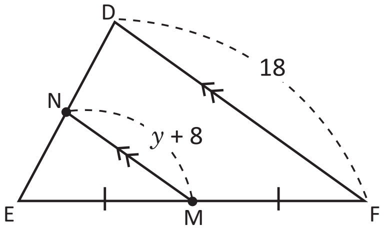
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$



1. En el triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Calcula las longitudes de $\overline{MN}$ y $\overline{NA}$.



2. En el triángulo DEF, M es punto medio de $\overline{EF}$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{FD}$. Calcula el valor de y:

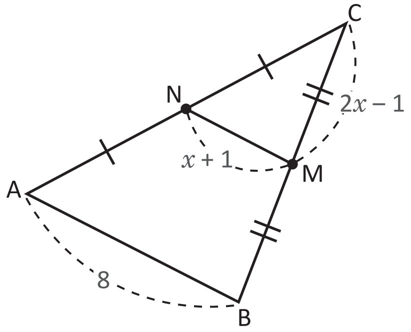


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

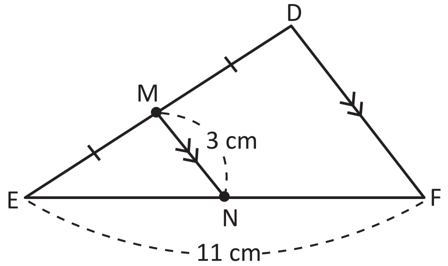
3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero

R

1. En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente. Calcula el valor de x y la longitud de $\overline{BC}$:



2. En el triángulo DEF, M es punto medio de $\overline{DE}$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{DF}$. Calcula la longitud de $\overline{DF}$ y $\overline{EN}$:

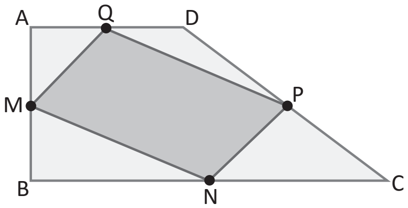


C

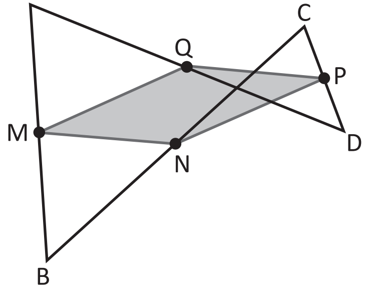
Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

Por ejemplo, en el trapecio rectangular ABCD se colocan los puntos medios de cada uno de sus lados y se denotan por M, N, P y Q. Al unir los cuatro puntos se forma el paralelogramo MNPQ:



En el polígono ABCD, los puntos M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Demuestra que MNPQ es paralelogramo:

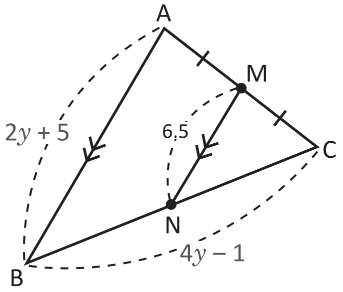


El polígono ABCD del ejercicio se llama **polígono cruzado**, ya que tiene un par de lados opuestos que se cortan: los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$.

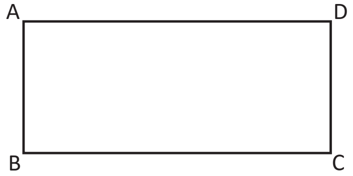
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 1

1. En ΔABC, M es punto medio de $\overline{CA}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$. Calcula el valor de y y la longitud de $\overline{BN}$:



2. ¿Qué paralelogramo se formará al unir los puntos medios del rectángulo ABCD? Justifica tu respuesta.



Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original.

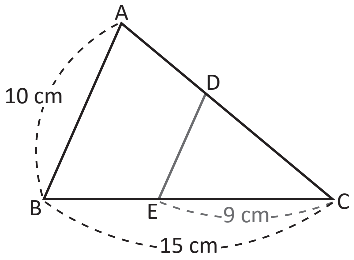
Por ejemplo, en el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB.
Entonces, el triángulo ΔDEC~ΔABC. Para calcular la longitud de $\overline{DE}$ se utiliza la proporcionalidad entre los lados correspondientes:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$DE = 6$$

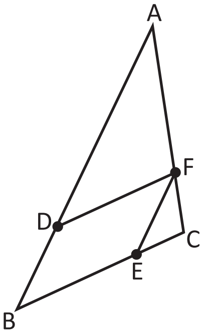


Por lo tanto, la longitud de $\overline{DE}$ es 6 cm.

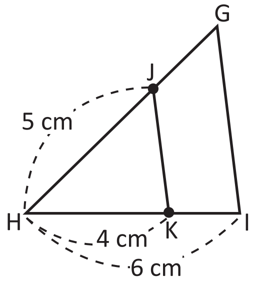
1. En el triángulo ABC que se muestra, el segmento DF es paralelo al lado BC, y el segmento FE es paralelo a AB.

   a) ¿Qué triángulos, de los que se forman, son semejantes al triángulo ABC?

   b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?



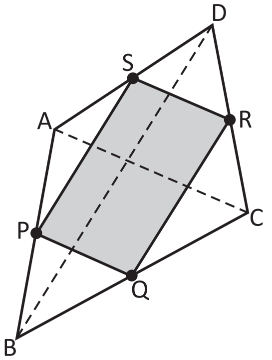
2. En el triángulo GHI, el segmento JK es paralelo al lado GI. ¿Cuál es la longitud del lado GH?



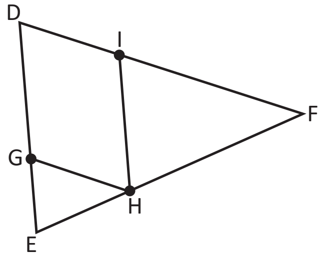
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2

1. En el cuadrilátero ABCD, los puntos P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Calcula las longitudes de los lados del paralelogramo PQRS si BD = 7 cm y CA = 4 cm.

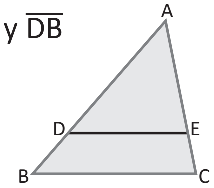


2. En el ΔDEF se cumple lo siguiente: $\overline{GH} \parallel \overline{DF}$ e $\overline{IH} \parallel \overline{DE}$. Identifica los triángulos semejantes al ΔDEF y los segmentos proporcionales:

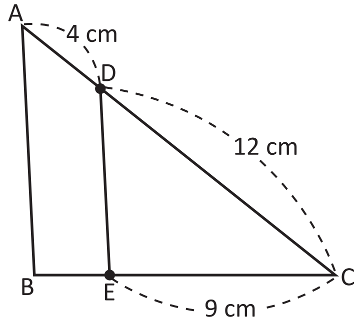


En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: DE es paralelo al lado BC. Entonces, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son proporcionales a $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$, respectivamente, es decir:

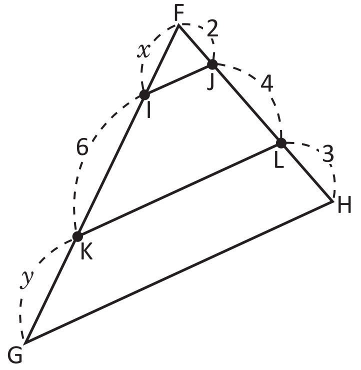
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. En el triángulo ABC, el lado AB es paralelo al segmento DE. Calcula la longitud del segmento EB:



2. En el triángulo FGH se trazan los segmentos IJ y KL paralelos al lado GH. Calcula los valores de x y y:

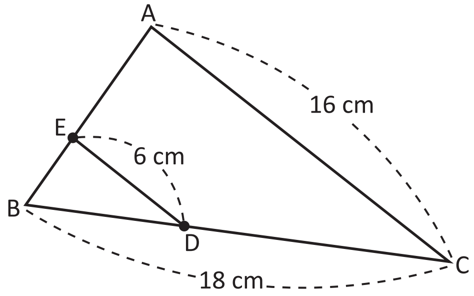


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

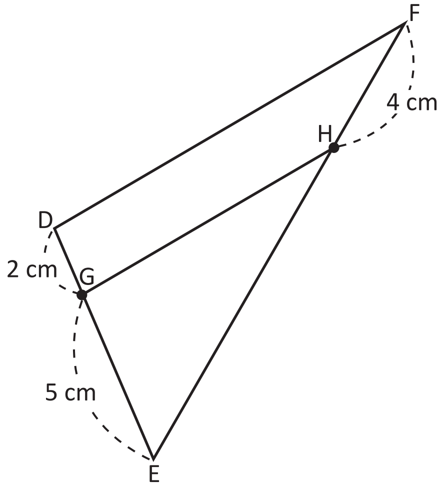
3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1

R

1. En el ΔABC se traza $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$, ¿cuál es la longitud de $\overline{BD}$?

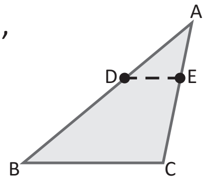


2. En el ΔDEF se traza $\overline{GH}$ paralelo a $\overline{DF}$. Calcula la longitud de $\overline{EH}$.



C

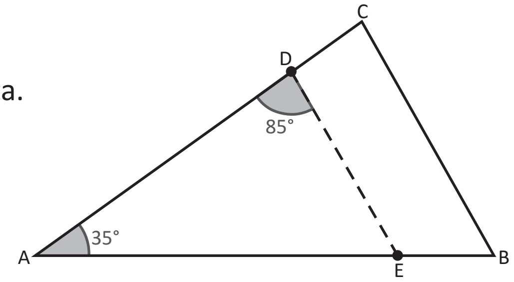
Dado un triángulo ABC, si D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



En el triángulo ABC se colocan dos puntos D y E sobre los lados AC y AB, los cuales satisfacen $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

a) ¿Cuál es la medida del ángulo ACB? Justifica tu respuesta.

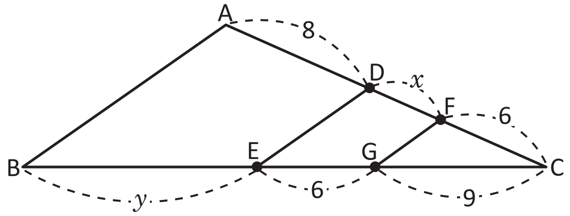
b) ¿Cuál es la medida del ángulo CBA? Justifica tu respuesta.



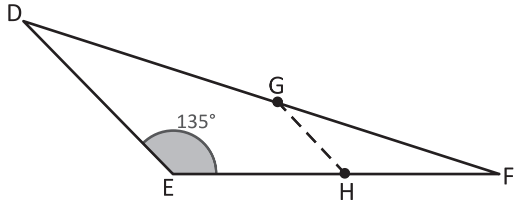
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2

R 1. En el triángulo ABC se trazan los segmentos DE y FG paralelos al lado AB. Calcula los valores de x y y:



2. En el ΔDEF, los puntos G y H están sobre $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$ respectivamente y satisfacen $\frac{FG}{FD} = \frac{FH}{FE}$. ¿Cuál es la medida del ∢FHG? Justifica tu respuesta.

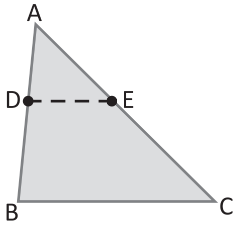


C **Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo**

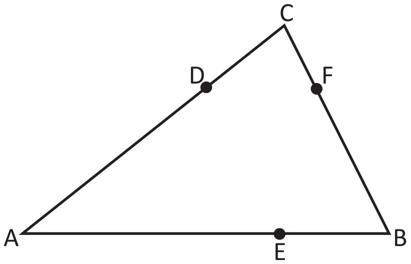
En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

a) Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b) Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



En el triángulo ABC se colocan tres puntos D, E y F (como se muestra en la figura) de tal forma que se cumple: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ y $\frac{CD}{DA} = \frac{CF}{FB}$.



a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado BC? Justifica tu respuesta.

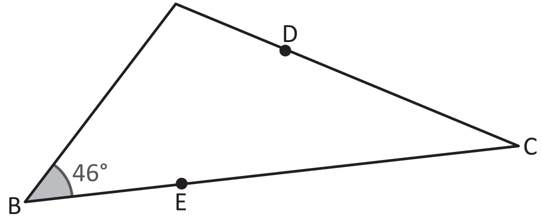
b) ¿Cuál de los segmentos que se forma con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta.

c) ¿Es $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AC}$? Justifica tu respuesta.

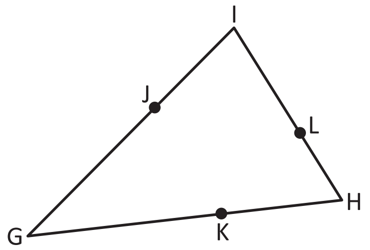
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

1. En ΔABC, los puntos D y E están sobre los lados CA y CB, respectivamente y satisfacen $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$. ¿Cuál es la medida de $\measuredangle CED$? Justifica tu respuesta.

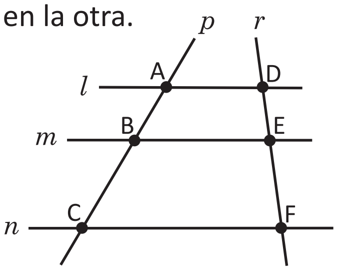


2. En ΔGHI se colocan tres puntos J, K y L que satisfacen: $\frac{GJ}{GI} = \frac{GK}{GH}$ y $\frac{HK}{KG} = \frac{HL}{LI}$.
¿Cuáles de los segmentos que se forman con los puntos J, K y L son paralelos a los lados GI y HI respectivamente? Justifica tu respuesta.



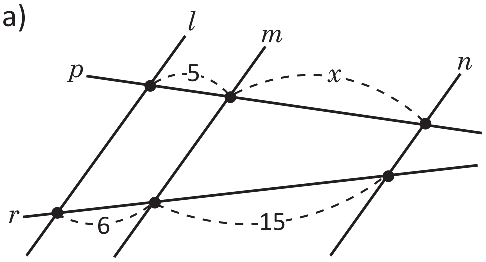
Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo (Teorema de Thales):
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Por ejemplo, en la figura que se muestra hay dos rectas p y r que son cortadas por tres rectas paralelas l, m y n. Entonces los segmentos AB y BC son proporcionales a los segmentos DE y EF, es decir: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

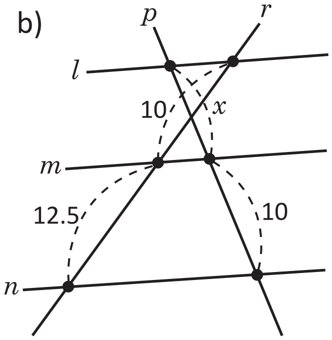


1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas l, m y n, como se muestra en las figuras. Calcula el valor de x en cada literal:

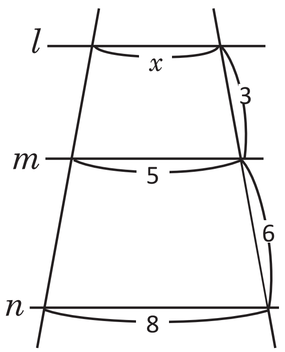
a)



b)



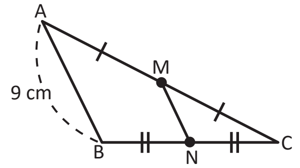
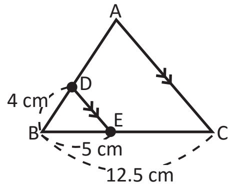
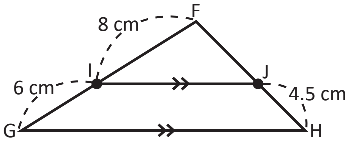
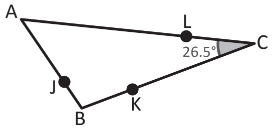
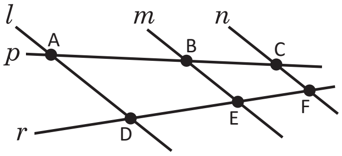
2. Encuentra el valor de x. Considerando que $l \parallel m$, $m \parallel n$.
Sugerencia: Traza una recta, de modo que se formen paralelogramos con un lado con medida x cm.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

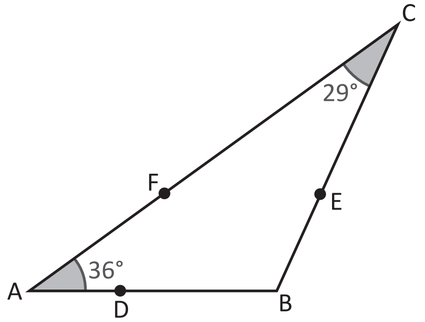
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo el teorema de la base media para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo, en el triángulo ABC calculo la longitud de $\overline{MN}$ si M y N son puntos medios de $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$. 				
2. Utilizo el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo en los siguientes casos: a) Calculo la longitud de $\overline{AB}$ si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$:  b) Calculo la longitud de $\overline{FJ}$ si $\overline{IJ} \parallel \overline{GH}$: 				
3. Utilizo el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo para identificar segmentos paralelos y medidas de ángulos. Por ejemplo, los segmentos paralelos a los lados BC y CA del triángulo y la medida de ∢ALJ, si se cumple $\frac{AJ}{AB} = \frac{AL}{AC}$ y $\frac{BJ}{JA} = \frac{BK}{KC}$. 				
4. Utilizo el teorema de Tales para calcular las longitudes de segmentos. Por ejemplo, calcular la longitud de BC si las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas l, m y n, y AB = 15 cm, DE = 12 cm, EF = 8 cm: 				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

1. En el triángulo ABC se colocan tres puntos: D, E y F (como se muestra en la figura), de tal forma que satisfacen:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \text{ y } \frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$$



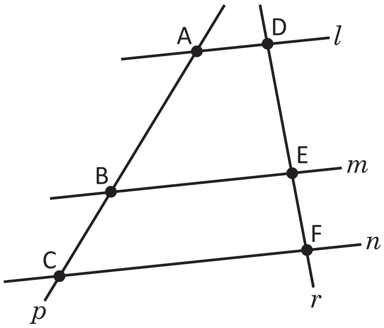
   a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo a $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

   b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo a $\overline{BC}$? Justifica tu respuesta.

   c) ¿Cuál es la medida del ∢CEF?

2. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas l, m y n como se muestra en la figura.

   Si AB = 7.5 cm, BC = 4.5 cm y DE = 6 cm, ¿cuál es la longitud de $\overline{EF}$?



Los mapas y los planos se utilizan para representar en papel objetos de tamaño muy pequeño o muy grande. Un mapa o un plano son semejantes al territorio u objeto al cual representan. La razón entre la distancia de dos puntos cualesquiera en el mapa y su correspondiente sobre el objeto real se llama **escala numérica**.

Por ejemplo, el mapa que se muestra está a una escala numérica de 1:50 000 y se señala con dos círculos el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador. Si al medir con una regla el segmento que une los puntos, el resultado es 6 cm; y x es la distancia real entre los dos lugares, entonces:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja x de la ecuación anterior:

$$6(50\,000) = x$$
$$x = 300\,000$$

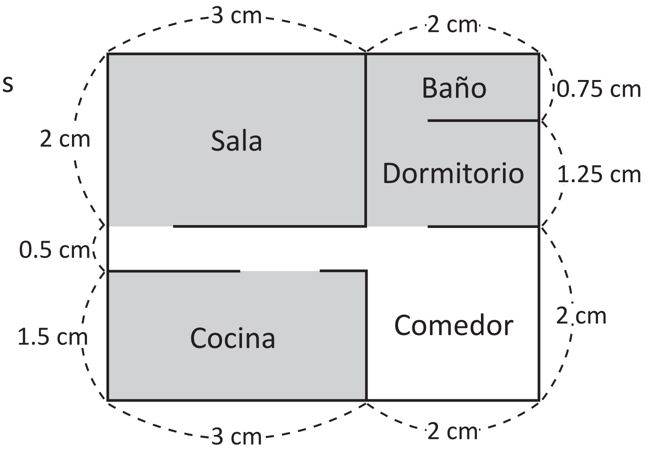
Por tanto, la distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. El mapa que se muestra se encuentra a una escala numérica de 1:2 250 000, si el segmento que une los puntos desde el volcán de Santa Ana hasta el volcán de San Vicente mide 4 cm, ¿cuál es la distancia real entre ambos volcanes?

2. Con el plano que se muestra realiza lo siguiente:

a) Calcula la escala numérica si las dimensiones reales de la sala son 4.8 m × 7.2 m.



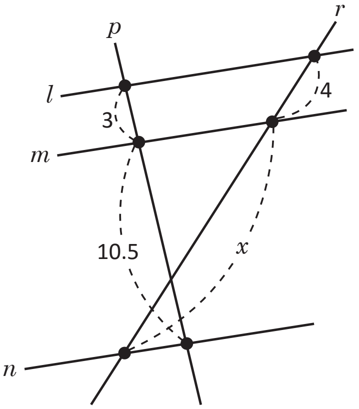
b) Calcula las dimensiones reales del baño, el comedor y la cocina.

Todas las medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.2 Áreas de polígonos semejantes

1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas l, m y n como se muestra en la figura. Calcula el valor de x:



2. La distancia entre los municipios de San Simón y San Francisco Gotera del departamento de Morazán es 20 km. ¿A qué escala numérica se encuentra elaborado el mapa que se muestra si el segmento mide 2.5 cm?

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.
Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3; el área del triángulo ABC es $\frac{(BC)(AB)}{2}$, y la del triángulo DEF es $\frac{(EF)(DE)}{2}$.

Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

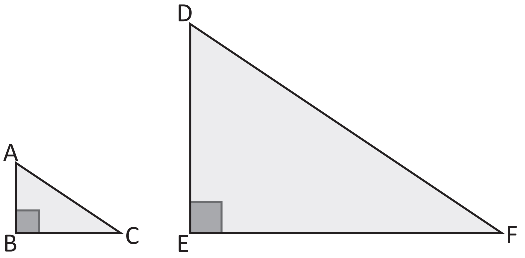
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}}$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

Como $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$ (es la razón de semejanza), entonces:

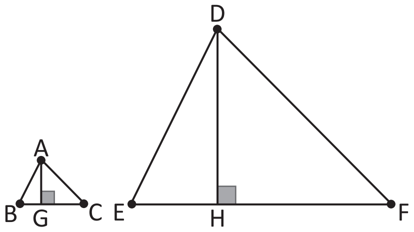
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2$$



Por lo tanto, la razón entre las áreas del ΔABC y ΔDEF es igual a $\frac{1}{9}$ (el cuadrado de la razón de semejanza).

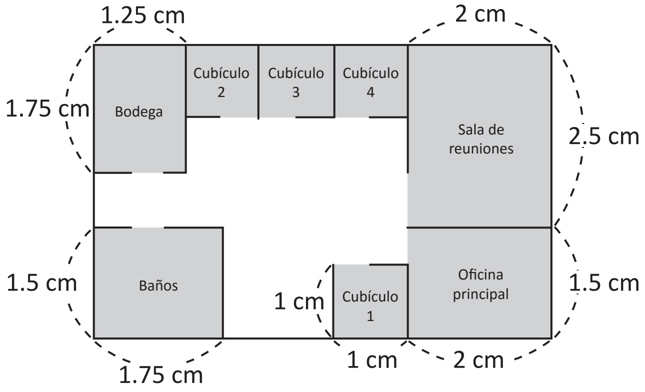
1. Los triángulos ABC y DEF que se muestran son semejantes a razón 1:4, BC = 3 cm, AG = 2 cm, EF = 12 cm y DH = 8 cm.
   a) ¿Cuál es la razón entre las áreas de los triángulos? Utiliza lo visto en clase.
   b) Comprueba la respuesta del literal anterior encontrando primero las áreas de ambos triángulos y luego la razón entre ellos.



2. Si la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es $\frac{1}{25}$, ¿cuál es la razón de semejanza? Justifica tu respuesta.

4.3 Volumen de sólidos semejantes

1. El plano que se muestra se encuentra elaborado a una escala numérica de 1:200. Calcula el área real de la bodega, los baños y la sala de reuniones.



2. Dos triángulos semejantes se encuentran a razón 2:5. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

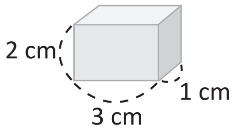
Dos o más sólidos son semejantes si son del mismo tipo y sus longitudes correspondientes (alturas, largos, anchuras o radios) son proporcionales. La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

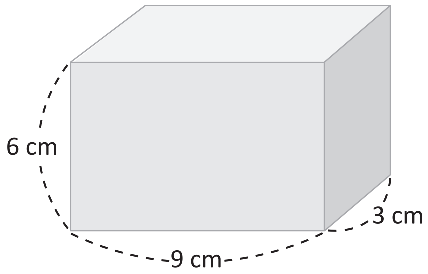
Sólidos del mismo tipo se refiere, por ejemplo, a que no es posible comparar una pirámide con un prisma rectangular.

Por ejemplo, los prismas rectangulares son semejantes, ya que sus longitudes correspondientes son proporcionales, es decir: $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Si V_1 es el volumen del prisma pequeño y V_2 el del prisma grande, entonces la razón entre ambos es:

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_2} &= \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}\\ &= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\end{aligned}$$



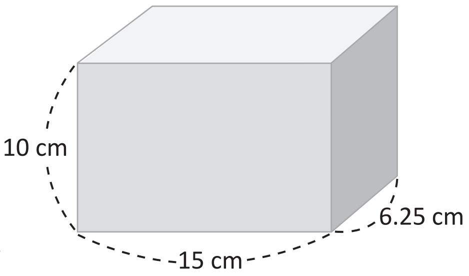


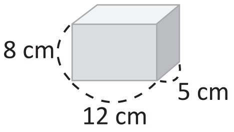
Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es $\frac{1}{27}$.

Determina si los siguientes prismas rectangulares son semejantes. En caso que lo sean, calcula la razón entre sus volúmenes:

a) Utilizando lo visto en clase:

b) Comprueba el resultado de a) encontrando primero los volúmenes y luego la razón entre ellos:





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos

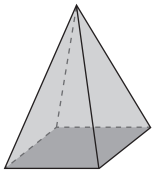
1. La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es $\frac{9}{16}$; ¿cuál es la razón de semejanza? Justifica tu respuesta.

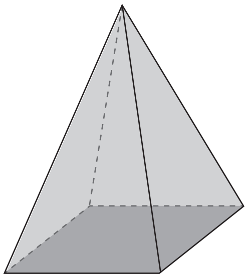
2. Las pirámides que se muestran son semejantes y tienen cuadrados por base; para la pirámide 1, la altura mide 9 cm; para la pirámide 2, la altura mide 15 cm, calcula la razón entre sus volúmenes.

El volumen de una pirámide se calcula:

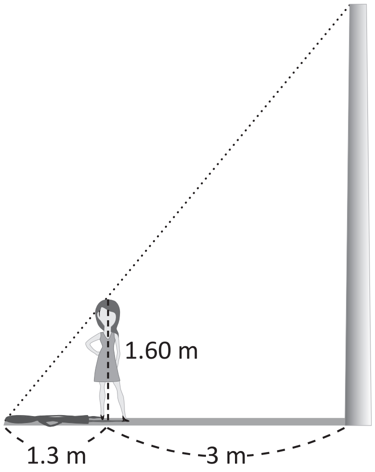
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

Donde A_B es el área de la base y h la altura de la pirámide.

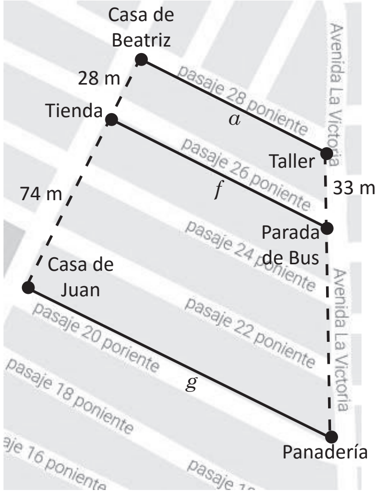

Pirámide 1


Pirámide 2

1. Julia quiere saber la altura de un poste que se encuentra cerca de su casa. Para ello, se coloca a 3 m del poste de manera que su sombra coincide con el extremo de la sombra del poste. Si la estatura de Julia es 1.60 m y la longitud de su sombra es 1.3 m, ¿cuál es la altura del poste? Aproxima hasta las centésimas.



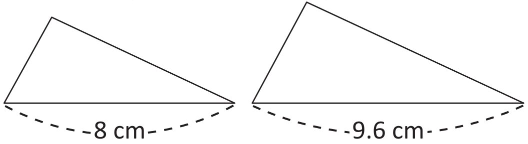
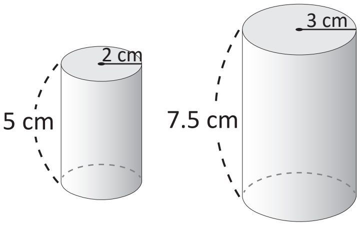
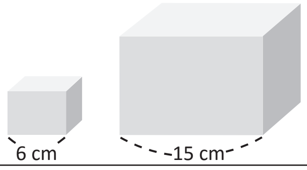
2. En el siguiente mapa, calcula la distancia entre la parada de bus y la panadería, si los segmentos a, f y g son paralelos.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

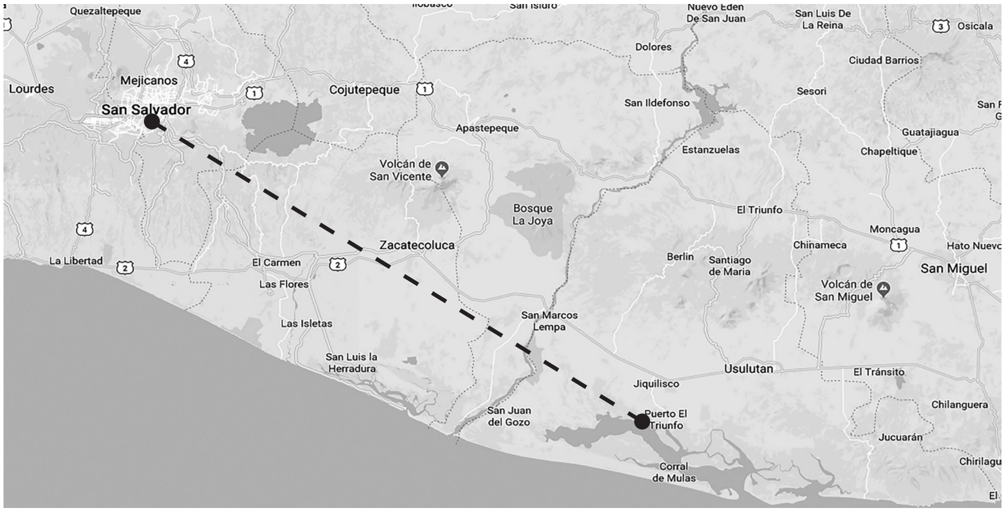
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Determino la escala numérica de un mapa. Por ejemplo, la escala numérica a la que se encuentra elaborado el siguiente mapa, si el segmento mide 2 cm y la distancia real entre San Salvador y San Marcos es 6.3 km:  				
2. Determino la razón entre las áreas de figuras semejantes. Por ejemplo, la razón entre las áreas de los siguientes triángulos son semejantes:  				
3. Identifico sólidos semejantes y calculo la razón de semejanza. Por ejemplo, determino si los siguientes cilindros son semejantes:  				
4. Determino la razón entre volúmenes de sólidos semejantes. Por ejemplo, la razón entre los volúmenes de los siguientes prismas rectangulares semejantes:  				
5. Utilizo criterios de semejanza de triángulos para resolver situaciones problema. Por ejemplo, calcular la altura del monumento al Divino Salvador del Mundo, si a cierta hora del día proyecta una sombra de longitud 9 m, mientras que una mujer de 1.68 m de estatura proyecta una sombra de 84 cm a esa misma hora.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Cartografía.** Esta ciencia se encarga del trazado y estudio de mapas geográficos. Para realizar estos trazados se utiliza la **escala** que es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo donde se representa la realidad, que puede ser un mapa o un plano.

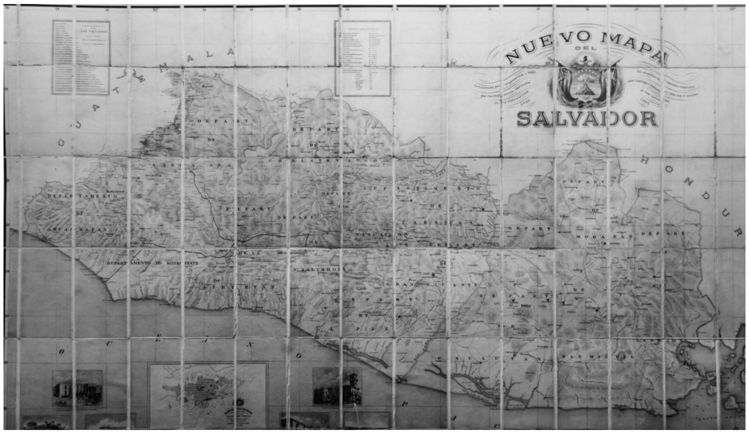
   Existen dos tipos de escalas, la escala por reducción, esta se utiliza cuando la realidad tiene mayor tamaño físico que el plano y la escala por ampliación la cual se utiliza cuando la realidad es en tamaño físico menor que el plano. Por ejemplo, si se tiene la escala 1:250, significa que por cada 1 cm en el plano hay 250 cm en la medida real. El siguiente mapa se encuentra a una escala numérica de 1:500 000, y el segmento que une dos puntos entre Puerto El triunfo y San Salvador mide 17 cm. ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos?



   En diciembre de 2008 la cartografía salvadoreña cumplió 150 años de existencia, si se toma como punto de partida el primer mapa oficial del país, elaborado por el ingeniero alemán Maximilian Von Sonnenstern.

   En la imagen puede apreciarse un mapa de El Salvador que data de 1900, impreso en Londres, con una escala aproximada de 1:200,000, cuyos primeros ejemplares llegaron a San Salvador a inicios de 1906.

   Entre los aportes del trabajo cartográfico se destacaban los detalles astronómicos y geográficos, al igual que la ubicación de las carreteras, vías férreas, salidas hacia Honduras y Guatemala, alturas, divisiones departamentales y otros elementos visuales.



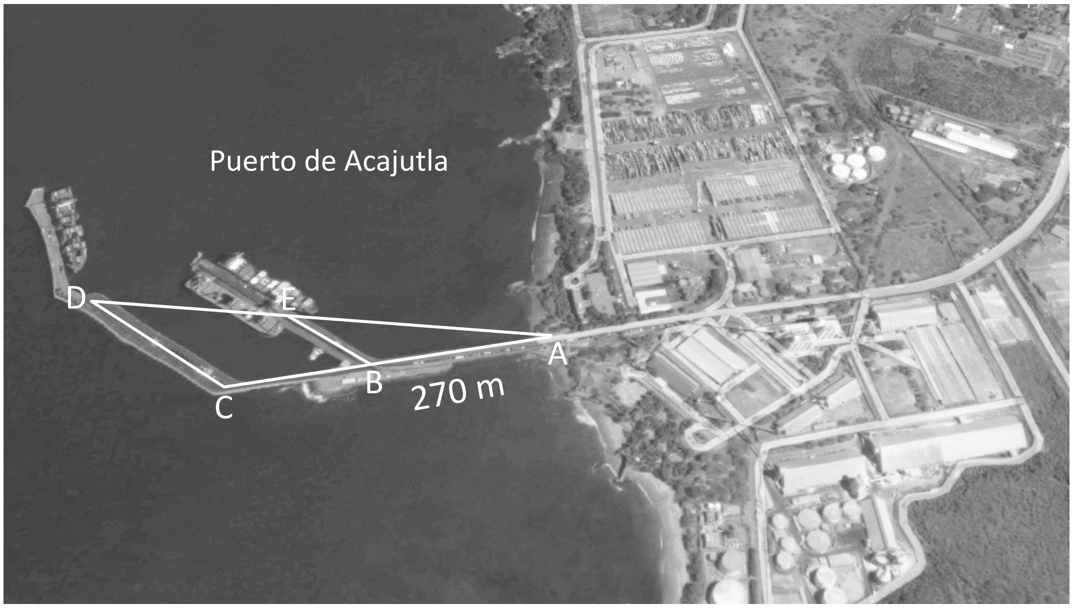
Centro Nacional de Registros (2012). Atlas Histórico Cartográfico de El Salvador.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

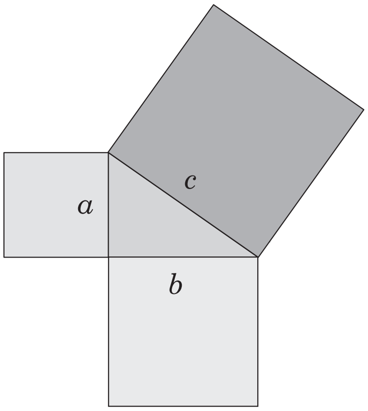
2. **Puerto de Acajutla.** Ubicado en Acajutla, Sonsonate. El puerto de Acajutla tiene una vasta historia que viene desde la época de la conquista, aunque ha sido reubicado y remodelado en varias ocasiones, es uno de los puertos más importantes para el comercio de El Salvador y de Centroamérica, cuenta con dos muelles para recibir las embarcaciones que vienen del Oceano Pacífico.

   Un automóvil está estacionado en el punto A, su conductor se encuentra observando la playa 500 m más lejos, en el punto C. En el primer muelle, un barco está anclado a una distancia de 370 m de la carretera (EB = 370 m). Suponiendo que $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$, ¿a qué distancia del segundo muelle (segmento DC) se encuentra el conductor?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

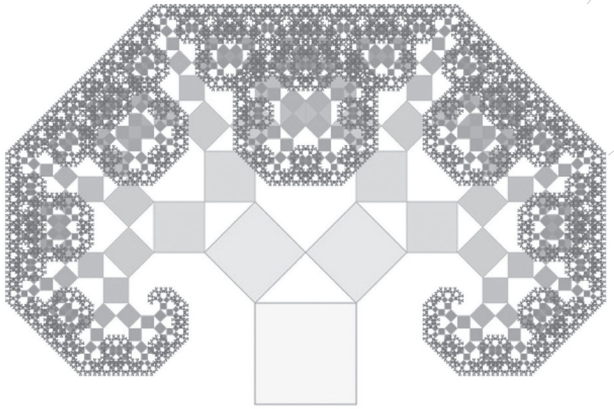
Teorema de Pitágoras



Representación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es uno de los teoremas que más ha maravillado a todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Algunos historiadores sugieren que en Babilonia por el año 1600 a.C., se calculaban las diagonales de ciertas figuras utilizando este teorema, sin embargo, la primera demostración formal conocida se le otorga usualmente al filósofo matemático griego Pitágoras de Samos, considerado el primer matemático puro. Este teorema cuenta con una gran cantidad de demostraciones realizadas por personajes importantes de la ciencia y la matemática a lo largo de toda la historia.

En la antigüedad se utilizaba el teorema de Pitágoras para medir terrenos en agricultura, la altura de ciertos objetos, obtener el volumen de sólidos como pirámides y conos. En la actualidad, el teorema sigue siendo indispensable en toda área donde es necesario el cálculo de longitudes, como en ingeniería, agricultura, física, astronomía y hasta en las artes. En la matemática, el teorema permitió el fortalecimiento de algunas áreas como la geometría y el cálculo, además del descubrimiento de los números irracionales.



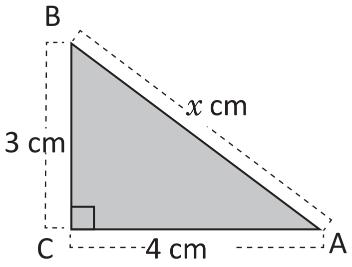
Árbol pitagórico. Construido con una sucesión de triángulos rectángulos y cuadrados sobre los lados.

En esta unidad estudiarás el teorema de Pitágoras, algunas de sus demostraciones, la resolución de problemas matemáticos por medio de este teorema y su aplicación a situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1

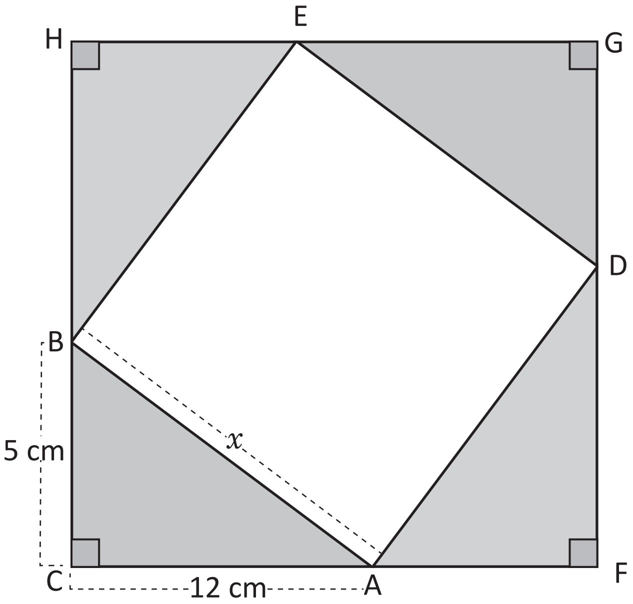
Formando cuadrados con 4 triángulos rectángulos congruentes y calculando el área, se puede calcular la medida del la hipotenusa sabiendo los catetos.

En la imagen, x = 5 cm.



LLena los espacios en blanco con la información que hace falta en el procedimiento que se realiza para obtener la medida de la hipotenusa.

a) Se construye un cuadrado cuyo lado sea la _______________ del triángulo ABC, es decir, de lado x.



b) Los triángulos Δ _____ , Δ _____ , Δ _____ , Δ _____ son congruentes al ΔABC.

c) El área del cuadrado CFGH es: ____

d) El área del triángulo ABC es: ____

e) Entonces el área del cuadrado ADEB es: ____

f) Por lo tanto la hipotenusa mide: ____

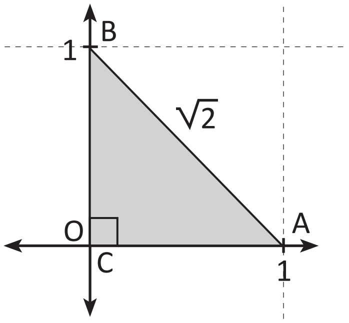
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2

Escribe la estrategia utilizada para determinar la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.

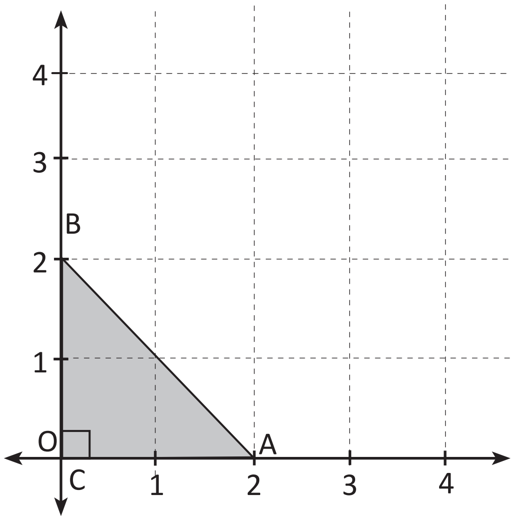
El método de la clase anterior también se puede aplicar teniendo puntos en el plano cartesiano.

Por ejemplo, en el triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0), la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

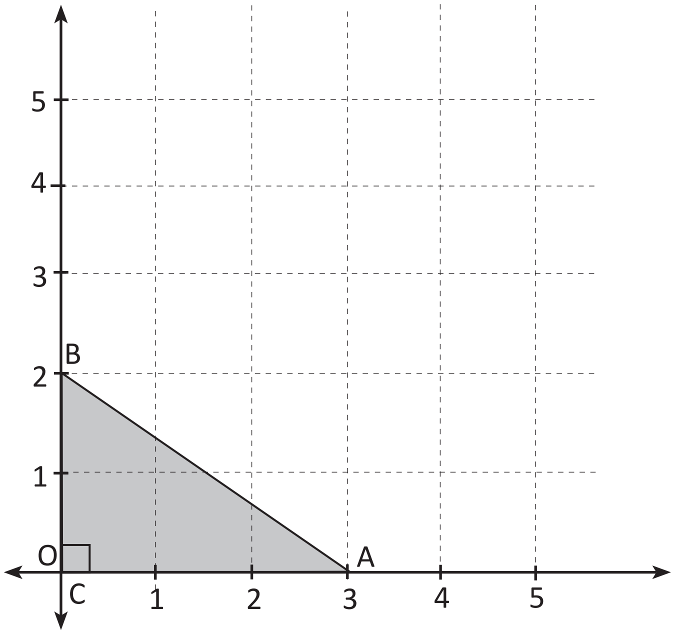


Encuentra la hipotenusa para cada uno de los triángulos formados por los vértice de cada literal.

a) A(2, 0); B(0, 2) y C(0, 0)



b) A(3, 0); B(0, 2) y C(0, 0)

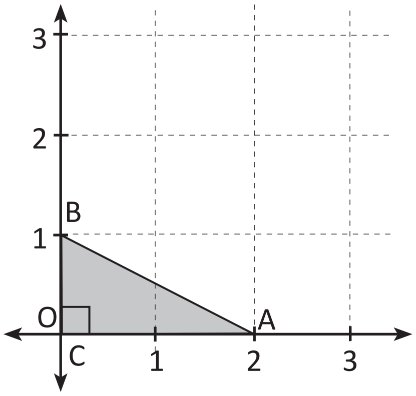


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

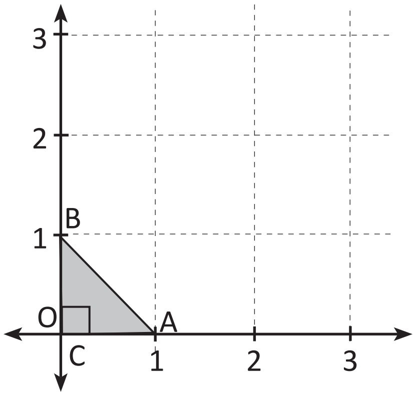
1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

Encuentra la hipotenusa para cada uno de los triángulos formados por los vértices de cada literal.

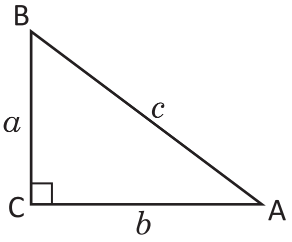
a) A(2, 0); B(0, 1) y C(0, 0)



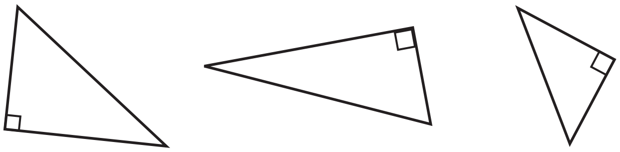
b) A(1, 0); B(0, 1) y C(0, 0)



En todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa, es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

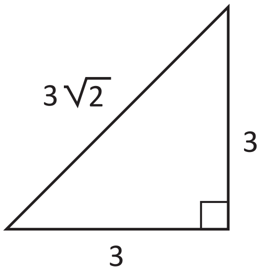


Además, el teorema de Pitágoras se cumple sin importar la posición del triángulo rectángulo.

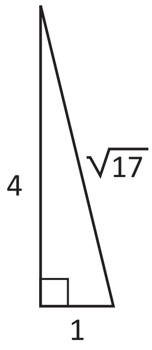


Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos:

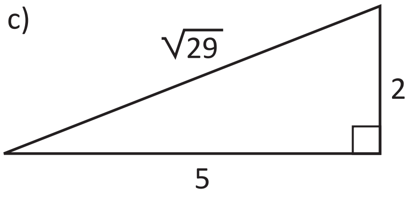
a)



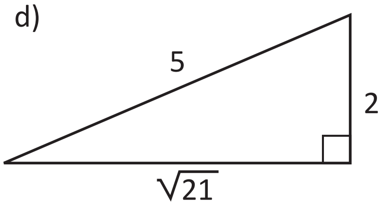
b)



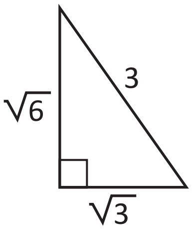
c)



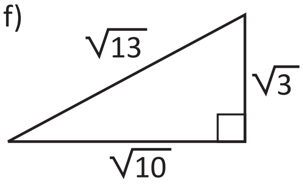
d)



e)



f)

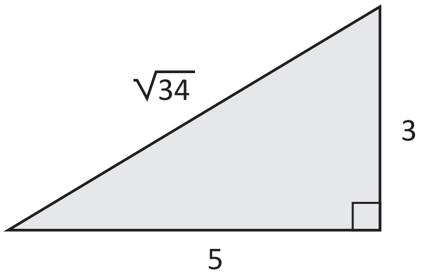


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

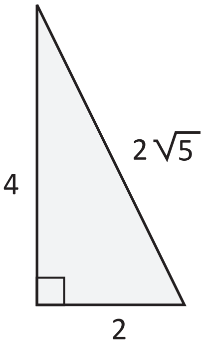
1.4 Teorema de Pitágoras, parte 2

Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

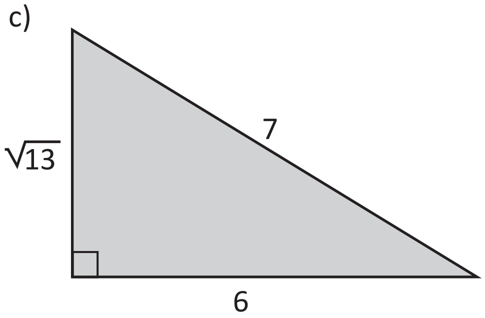
a)



b)

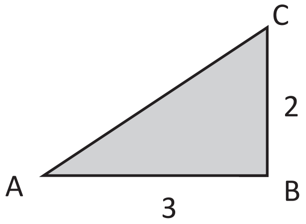


c)



El teorema de Pitágoras se puede demostrar por medio de semejanza de triángulos, y es aplicable a todo triángulo rectángulo, este enuncia que la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

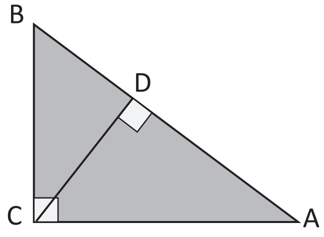
Por ejemplo, determina la longitud de la hipotenusa del siguiente triángulo:



En ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

$\Rightarrow CA = \sqrt{13}$

LLena los espacios en blanco con la información que hace falta en el procedimiento que se realiza para establecer que en el ΔABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$.



a) Se traza la altura del vertice C al lado AB, formándose los triángulos rectángulos ____________________

b) Los triángulos Δ_____ , ΔCBD son semejantes por el criterio ______.

c) $\frac{AB}{BC} = \frac{}{}$ (por semejanza de los triángulos). Entonces, $BC^2 =$ ______.

d) Los triángulos Δ_____ , ΔACD son semejantes por el criterio ______.

e) $\frac{AB}{CA} = \frac{}{}$ (por semejanza de los triángulos). Entonces, $CA^2 =$ _________

f) Luego, $BC^2 + CA^2 =$ ___________________$= AB \times (BD + DA) = AB^2$

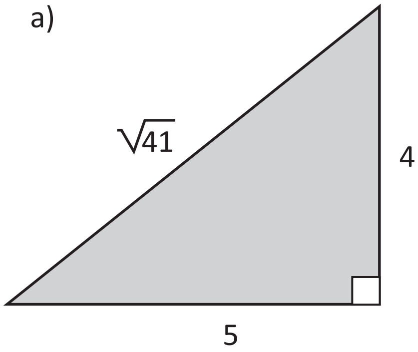
Por lo tanto, ________________

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

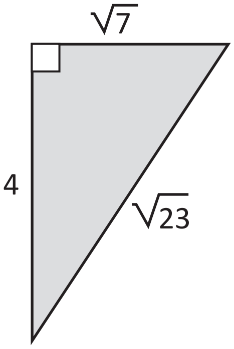
1.5 Cálculo de la medida de un cateto

Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

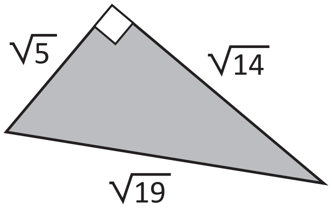
a)



b)

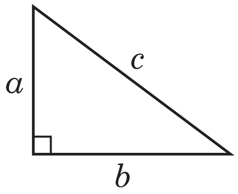


c)

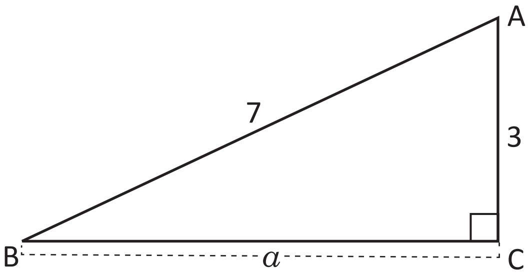


En general, en un triángulo rectángulo de lados a, b y c, debido a que se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la hipotenusa y los catetos se pueden encontrar de la siguiente manera:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$



Por ejemplo, determina el valor de a.

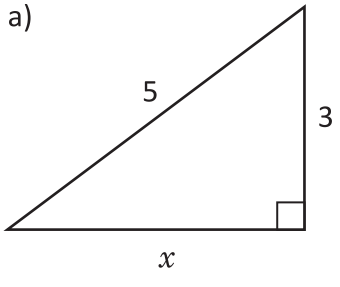


$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

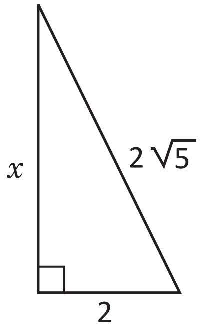
$$a = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Determina el valor de x en cada triángulo.

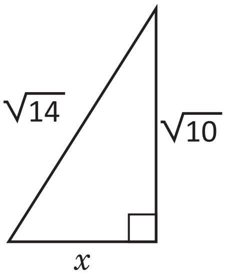
a)



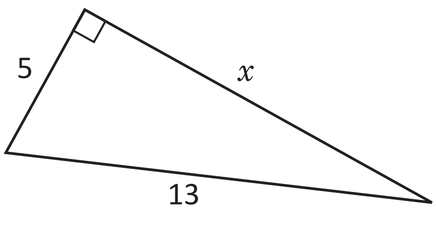
b)



c)



d)

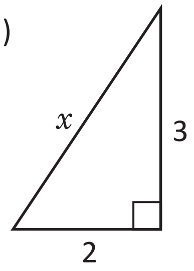


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

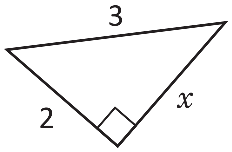
1.6 Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras

Determina el valor de x en cada triángulo.

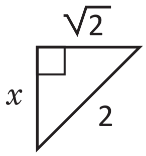
a)



b)



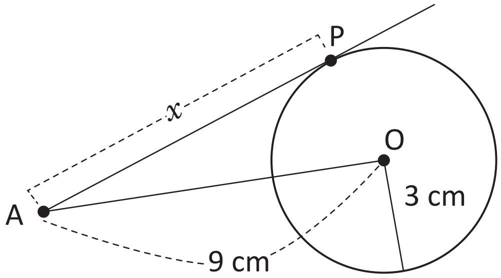
c)



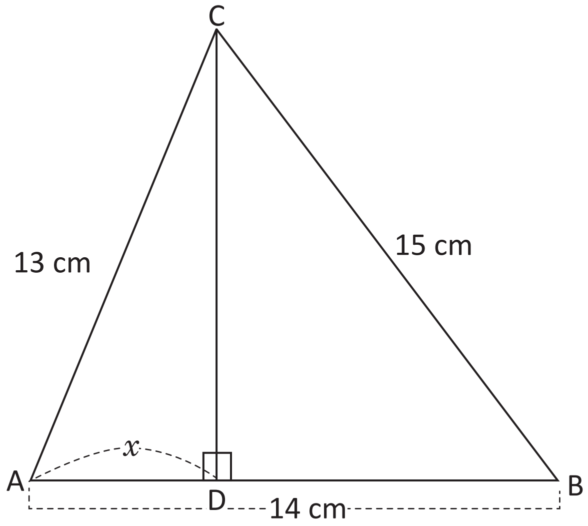
Para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras, identifica los triángulos rectángulos en la figura y utiliza los valores que se proporcionan en ella para determinar la medida de algunos segmentos.

Determina el valor de x en las siguientes figuras:

a) La recta que pasa por AP es tangente al círculo con centro O.



b)

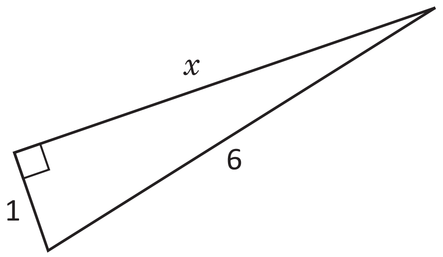


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

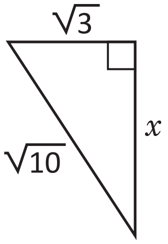
1.7 Triángulos notables

1. Determina el valor de x en cada triángulo:

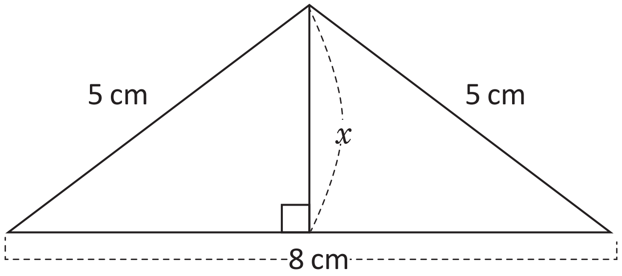
a)



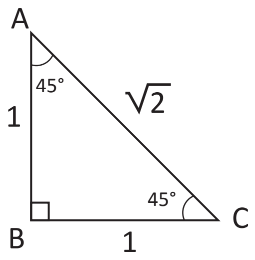
b)

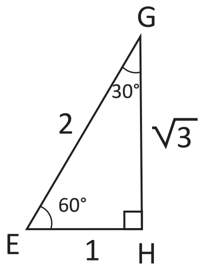


2. Determina el valor de x en la siguiente figura:



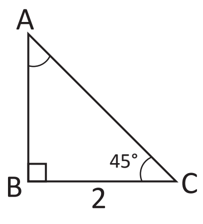
A los triángulos ABC y EHG se les denomina **triángulos notables**.



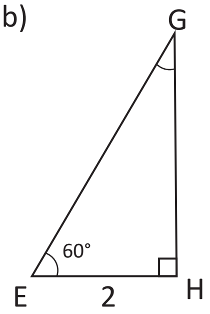


Determina todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos:

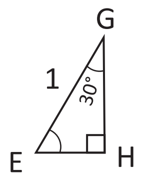
a)



b)



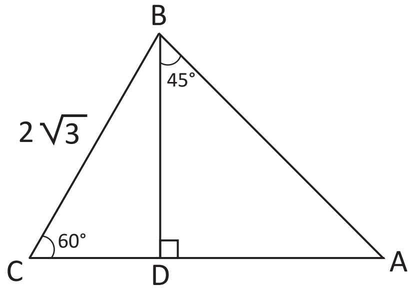
c)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Recíproco del teorema de Pitágoras

Determina todos los lados y los ángulos del triángulo ABC.



Si en un triángulo, sus lados a, b y c, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, y su hipotenusa es c. Este resultado es llamado el **recíproco del teorema de Pitágoras**.

Por ejemplo:
Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, se debe cumplir que la suma de los cuadrados de dos de ellos es igual al cuadrado del tercero.

$$15^2 + 8^2 = 289,\ 17^2 = 289, \text{ luego } 15^2 + 8^2 = 17^2$$

Por el recíproco del teorema de Pitágoras se puede concluir que el triángulo tiene un ángulo recto, y por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 12 cm, 5 cm y 13 cm

b) 3 cm, 2 cm y $\sqrt{13}$ cm

c) 3, 5, 7

d) 8, 15, y 17

e) 6, 2, y $\sqrt{41}$

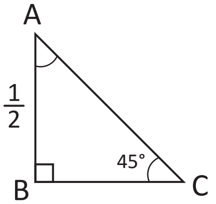
f) 3, $\sqrt{5}$, y 2

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

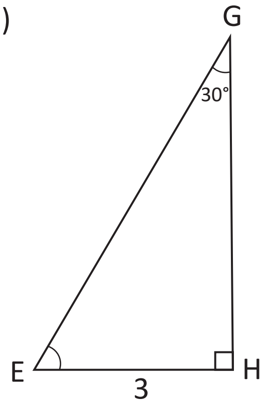
2.1 Cálculo de la altura y el volumen de un cono

1. Determina todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos:

a)



b)



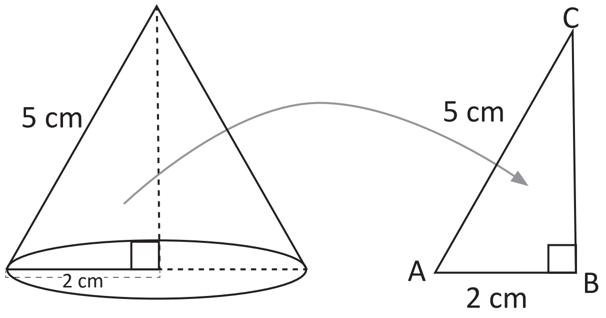
2. Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 7 cm, 25 cm y 24 cm

b) 5 , 2 y $\sqrt{29}$

Para determinar el volumen o la altura desconocida de un cono, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la altura del cono, que será igual a la medida del cateto BC en el triángulo ABC.

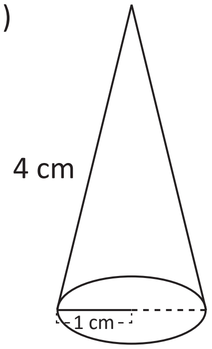


Por lo tanto, la altura del cono mide $\sqrt{21}$ cm.

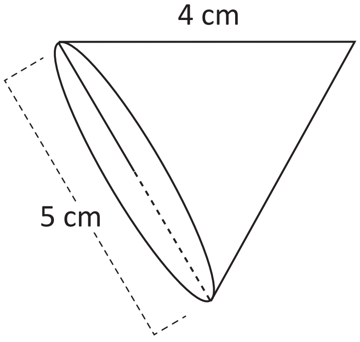
Y luego también es posible determinar el volumen del cono utilizando la fórmula $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Determina la altura y el volumen de los siguientes conos:

a)



b)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

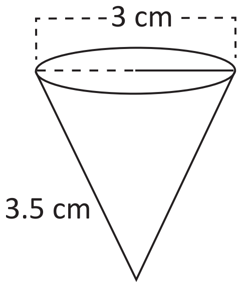
2.2 Cálculo de la medida de la altura y del volumen de la pirámide cuadrangular

1. Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

   a) 7 cm, 8 cm y 9 cm

   b) 3, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$

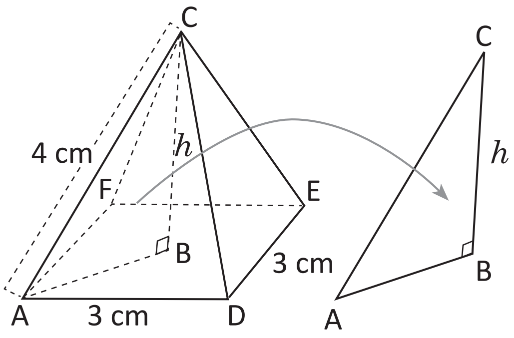
2. Determina la altura y el volumen del siguiente cono:



Para determinar el volumen o la altura desconocida de una pirámide, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la altura de la pirámide, que será igual a la medida del cateto BC en el triángulo ABC.

Y para determinar la medida del cateto AB fue necesario encontrar la mitad de la diagonal del cuadrado de la base.

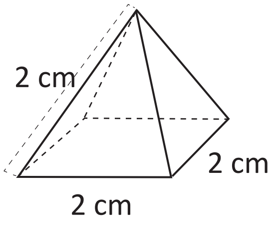


Por lo tanto, AB = $\frac{AE}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.
$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{46}{4}} = \sqrt{\frac{23}{2}}$, por lo tanto $h = \sqrt{\frac{23}{2}}$.

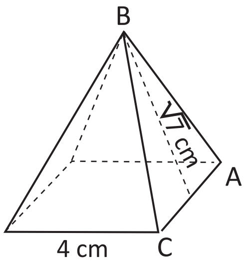
Y luego también es posible determinar el volumen de la pirámide con la fórmula $V_p = \frac{1}{3}A_B\, h$.
Donde A_B es el área de la base y h es la altura.

Determina la altura y el volumen de las pirámides cuadrangulares.

a)



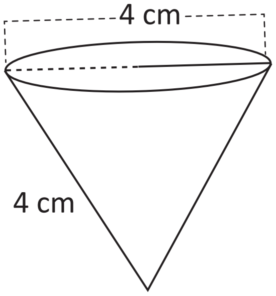
b) El triángulo ABC es isósceles.



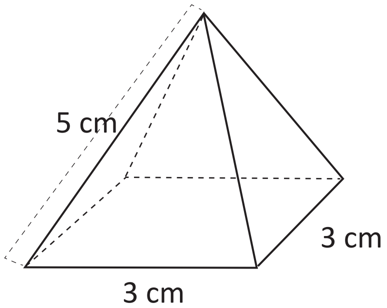
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro

1. Determina la altura y el volumen del siguiente cono:

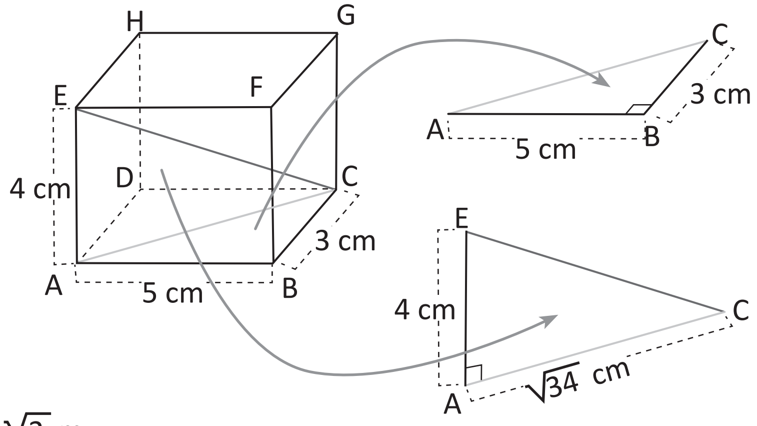


2. Determina la altura y el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular:



Para determinar la diagonal de un ortoedro, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la diagonal de la base y luego se utiliza nuevamente para calcular la diagonal del ortoedro.

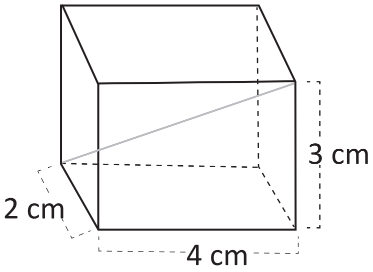


Por lo tanto, AC = $\sqrt{34}$.

⇒EC = $\sqrt{50}$ = 5 $\sqrt{2}$

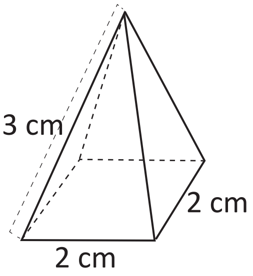
Por lo tanto, la diagonal del ortoedro mide 5 $\sqrt{2}$ m.

Calcula la medida de la diagonal del ortoedro.

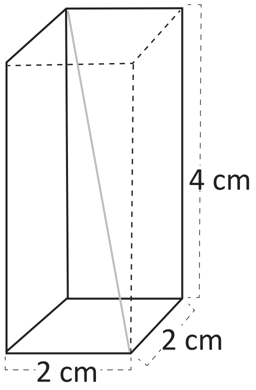


2.4 Cálculo del área de un hexágono

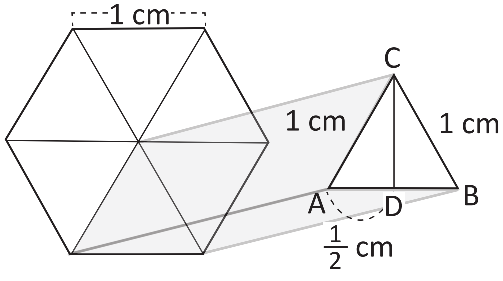
1. Determina la altura y el volumen de la pirámide cuadrangular.



2. Calcula la medida de la diagonal y el volumen del ortoedro.



Para determinar el área de un hexágono regular de 1 cm de lado, se tuvo que calcular el área de uno de los 6 triángulos equiláteros congruentes que lo conforman, en el se utilizó el teorema de Pitágoras para determinar su altura.



$AC^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2$

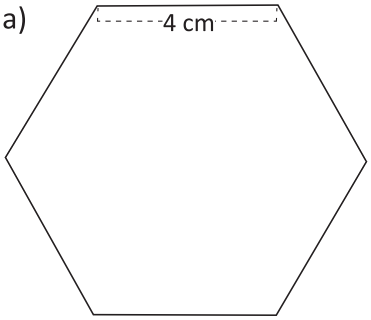
$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego, el área de ΔABC es: $(\Delta ABC) = \frac{1 \text{ cm} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

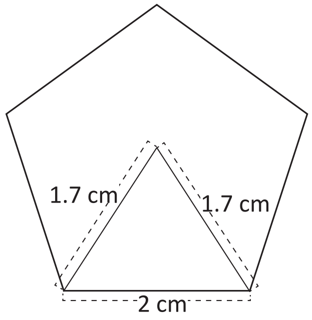
El área del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Encuentra la longitud del apotema y el área de los siguientes polígonos regulares:

a)



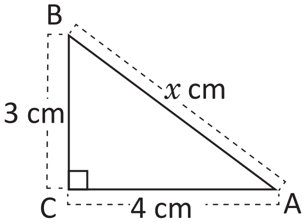
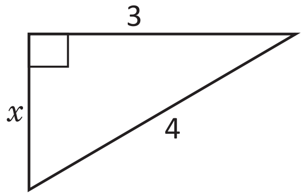
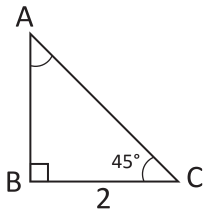
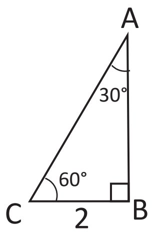
b)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

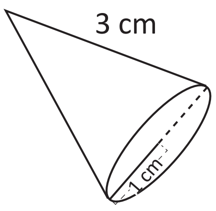
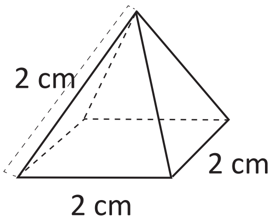
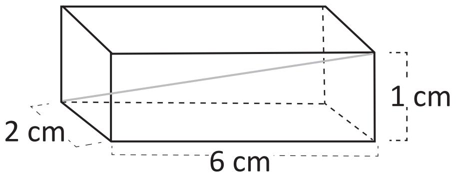
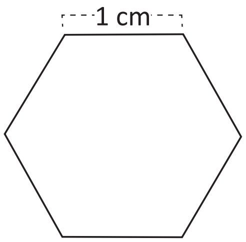
2.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Comprendo las demostraciones del teorema de Pitágoras y puedo explicarlas con mis propias palabras.				
2. Calculo la hipotenusa de un triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras, como en el siguiente caso:  				
3. Utilizo correctamente el teorema de Pitágoras para calcular el cateto de un triángulo rectángulo, como en el caso siguiente:  				
4. Determino la medida de los ángulos y los lados de un triánculo rectángulo notable como el siguiente:   				
5. Utilizo el recíproco del teorema de Pitágoras para determinar si un triángulo es rectángulo como en el siguiente caso: 12 cm, 5 cm y 13 cm				

2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la altura de un cono como el siguiente:  				
2. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la altura y el volumen de una pirámide como la siguiente:  				
3. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un ortoedro como el siguiente:  				
4. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular el área de un hexágono regular como el siguiente:  				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Aplicación del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es aplicable para medir distancias, así fue posible determinar que la distancia entre la entrada principal de la Universidad de El Salvador y la intersección entre el Bulevar de Los Héroes y la 21 calle poniente es 669.9 m.

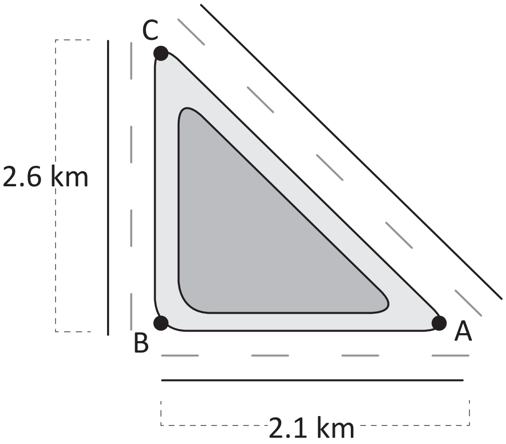
Por ejemplo:

Observando el mapa, se forma el triángulo rectángulo ABC, del cual ya se conoce la longitud de los catetos AB y BC. Utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra la longitud de la hipotenusa CA:

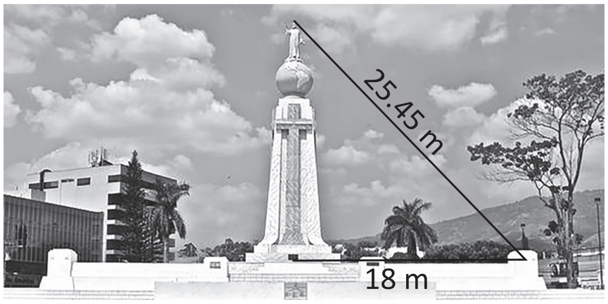
$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 = 141075.4 + 307803.04 = 448878.4$$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{448878.4} \approx 669.9$$

1. Determina qué camino es el más corto para que Marta llegue a su casa si ella está en el punto A y su casa en el punto C. Puedes utilizar calculadora.



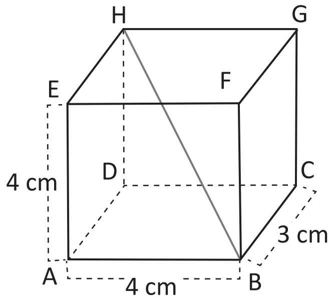
2. Calcula la altura del Monumento al Divino Salvador del Mundo, ubicado en el centro de la Plaza Salvador del Mundo. Este monumento fue develado el 26 de noviembre de 1942 y fue diseñado por el arquitecto José María Barahona Villaseñor.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Ana tiene una escalera de 10 pies de longitud y quiere cambiar una lámpara que está a 8 pies de altura en un poste, ¿a qué distancia de la base del poste se debe colocar la escalera?				
2. En una cisterna de concreto, se necesita colocar un alambre entre los puntos H y B. ¿Cuál debe ser la medida de este? 				

2.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

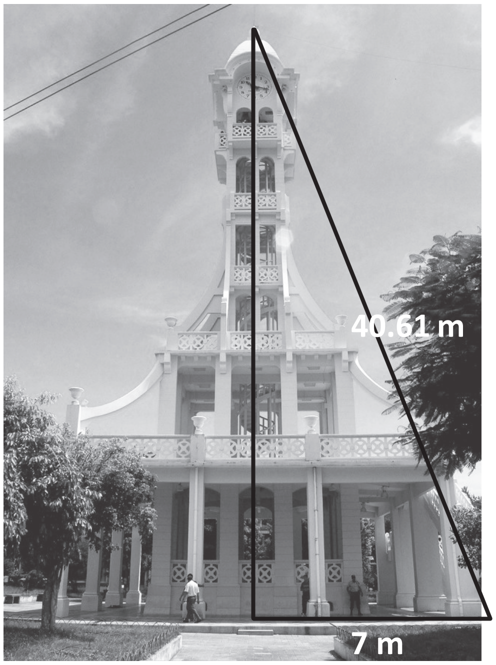
Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Una cancha de básquetbol úbicada en el centro escolar donde estudia Carlos, tiene 28 m de largo y su diagonal mide 31.77 m. ¿Cuál es el área de la cancha?				
2. La pantalla de un televisor mide 32 pulgadas en su diagonal (81.28 cm) y 24.98 pulgadas a lo largo. ¿Cuánto mide la altura del televisor?				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

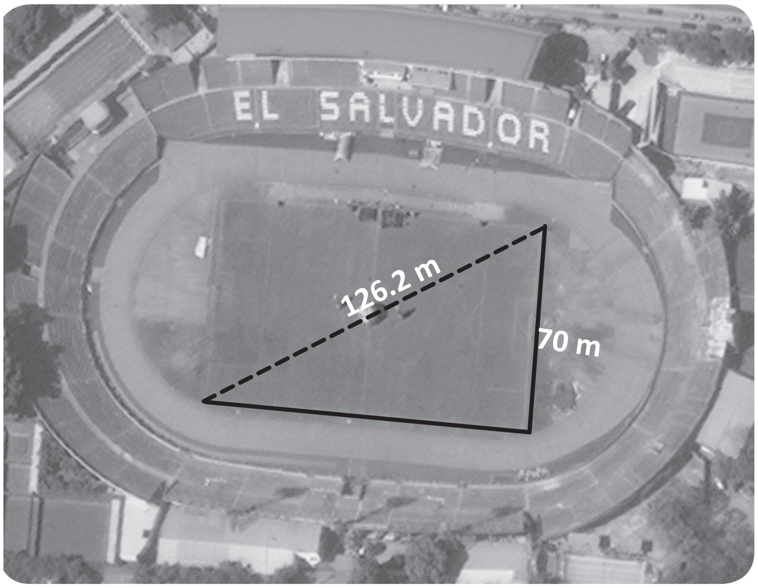
1. **La torre del reloj de San Vicente**, ubicada en el parque central Antonio José Cañas de San Vicente, su construcción inició en 1928 y finalizó en 1930, durante la presidencia del Dr. Pío Romero Bosque. En el terremoto del 13 de enero de 2001 la torre sufrió algunos daños, por lo que tuvo que ser remodelada e inagurada nuevamente en el año 2009. Esta torre es uno de los íconos turisticos de El Salvador.

   Con los datos dados en la imagen, encuentra aproximadamente la altura real de la torre del reloj de San Vicente.



2. El estadio **Jorge Mágico González**, está ubicado en la colonia Flor Blanca de San Salvador, es hasta el momento el segundo estadio más grande de El Salvador. En los años 1935 y 2002 se desarrollaron los Juegos Centroamericanos y del Caribe, para ciertas disciplinas deportivas. Fue construido durante el mandato del presidente Maximiliano Hernández Martínez, se le dió el nombre de Estadio Nacional de San Salvador Flor Blanca, fue hasta el año 2006 que se cambió su nombre a Estadio Nacional "Jorge Mágico González" en honor al futbolista salvadoreño más reconocido en este deporte.

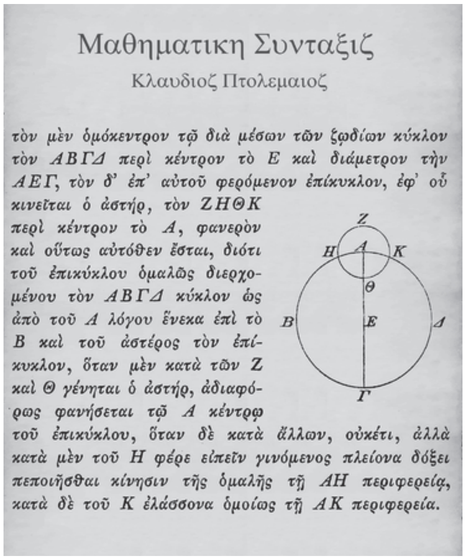
   La imagen muestra el estadio "Jorge Mágico González" desde lo alto. Utilizando las medidas dadas en la imagen, encuentra la medida real del largo de la cancha del estadio.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

Ángulo inscrito y central



Μαθηματικη Συνταξιζ

Κλαυδιοζ Πτολεμαιοζ

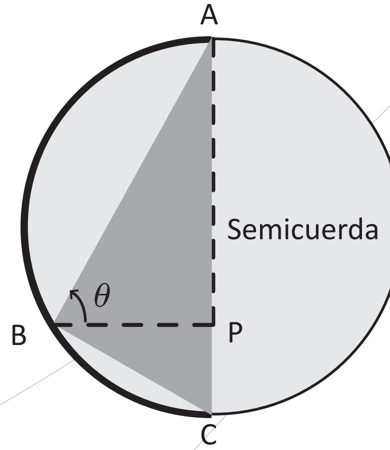
τὸν μὲν ὁμόκεντρον τῷ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλον τὸν *ΑΒΓΔ* περὶ κέντρον τὸ *Ε* καὶ διάμετρον τὴν *ΑΕΓ*, τὸν δ' ἐπ' αὐτοῦ φερόμενον ἐπίκυκλον, ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ ἀστήρ, τὸν *ΖΗΘΚ* περὶ κέντρον τὸ *Α*, φανερὸν καὶ οὕτως αὐτόϑεν ἔσται, διότι τοῦ ἐπικύκλου ὁμαλῶς διερχομένου τὸν *ΑΒΓΔ* κύκλον ὡς ἀπὸ τοῦ *Α* λόγου ἕνεκα ἐπὶ τὸ *Β* καὶ τοῦ ἀστέρος τὸν ἐπίκυκλον, ὅταν μὲν κατὰ τῶν *Ζ* καὶ *Θ* γένηται ὁ ἀστήρ, ἀδιαφόρως φανήσεται τῷ *Α* κέντρῳ τοῦ ἐπικύκλου, ὅταν δὲ κατὰ ἄλλων, οὐκέτι, ἀλλὰ κατὰ μὲν τοῦ *Η* φέρε εἰπεῖν γινόμενος πλείονα δόξει πεποιῆσϑαι κίνησιν τῆς ὁμαλῆς τῇ *ΑΗ* περιφερείᾳ, κατὰ δὲ τοῦ *Κ* ἐλάσσονα ὁμοίως τῇ *ΑΚ* περιφερείᾳ.

Una hoja del tratado astronómico Almagesto.

La astronomía fue utilizada por las civilizaciones antiguas para predecir los periodos de abundancia de la caza, la siembra o la llegada del invierno.

El matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo (siglo II) realizó, en el tratado astronómico *Almagesto*, una descripción matemática del sistema geocéntrico (en el cual los planetas giran alrededor de la Tierra). Uno de sus aportes a la matemática fue un teorema sobre cuadriláteros cíclicos, en el que se utilizan propiedades importantes de ángulo inscrito.

La trigonometría, que estudia la relación entre los lados y ángulos de un triángulo, se desarrolló por los estudios astronómicos. Los matemáticos hindúes Varahamihira (siglo VI) y Brahmagupta (siglo VII) formularon varias propiedades trigonométricas utilizando la semicuerda (un triángulo inscrito en el círculo con un lado como diámetro del círculo) y los cuadriláteros cíclicos que tienen como base el estudio de los ángulos inscritos.



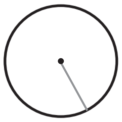
El ángulo inscrito ABC es recto. Por medio de esta construcción se obtuvieron relaciones importantes.

En los contenidos a desarrollar se abordará desde la definición hasta el teorema del ángulo inscrito, que establece una relación con el ángulo central. Estudiarás la construcción de rectas tangentes sobre la circunferencia, así como la definición del ángulo semiinscrito y la relación entre cuerdas y arcos de circunferencia.

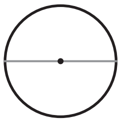
1.1 Elementos de la circuferencia

Los elementos de la circunferencia son:

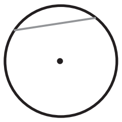
Radio: el segmento que va del centro a un punto de la circunferencia.



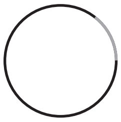
Diámetro: el segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro.



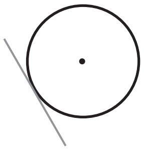
Cuerda: el segmento que va de un punto de la circunferencia a otro**.**



Arco: la parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella.



Tangente: la recta que toca la circunferencia en un punto**.**



1. Traslada los literales de los elementos de la circunferencia a los paréntesis que corresponden a su definición o alguna característica de ellos. Pueden repetirse los literales.

a) Cuerda ( ) Elemento cuya medida es la mitad de la medida del diámetro.

b) Tangente ( ) Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia.

c) Radio ( ) Elemento que es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia.

d) Arco ( ) Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia.

e) Diámetro ( ) Elemento de la circunferencia determinado por la abertura de un ángulo central.

( ) Elemento cuya longitud es el doble de la medida del radio.

( ) Cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

( ) Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella.

2. En la siguiente circunferencia, traza sus elementos según el color que se te indica.

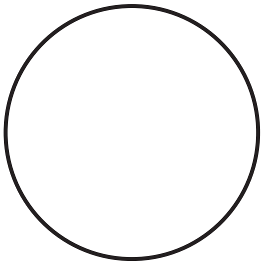
a) Cuerda: rojo

b) Tangente: azul

c) Radio: verde

d) Arco: amarillo

e) Diámetro: celeste



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

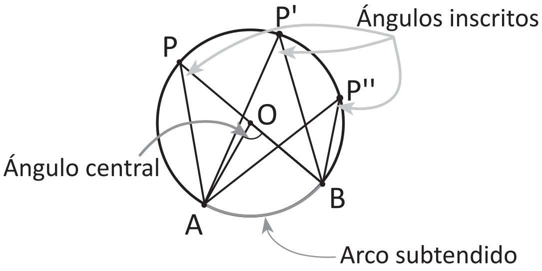
Conecta los elementos de la circunferencia con su definición.

1. Diámetro	a) Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia.
2. Tangente	b) Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia.
3. Radio	c) Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella.
4. Arco	d) Recta que toca la circunferencia en un solo punto.
5. Cuerda	e) Segmento trazado entre dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro.

Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman **ángulos inscritos**.

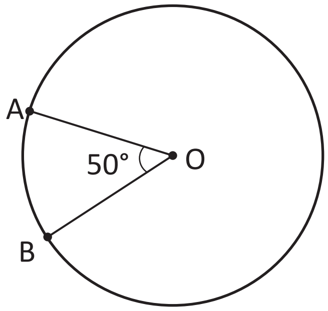
En una circunferencia se cumple que, la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

Recuerda que subtender significa compartir el mismo arco.

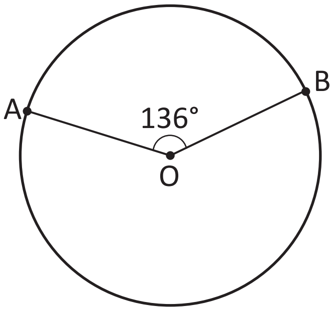


Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en las siguientes circunferencias y determina su medida.

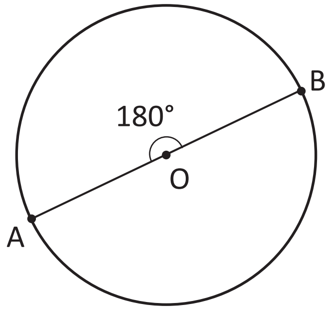
a)



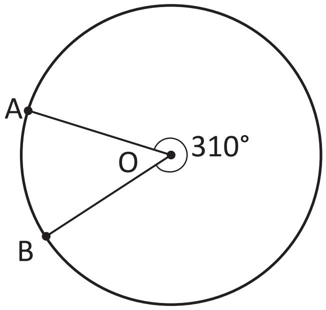
b)



c)



d)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

1. Escribe la definición de los elementos de la circunferencia.

a) Diámetro____

____

b) Tangente____

____

c) Radio____

____

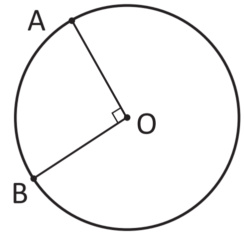
d) Arco____

____

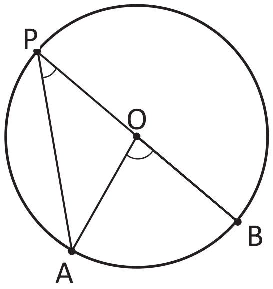
e) Cuerda____

____

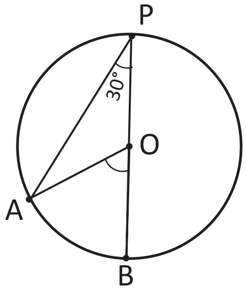
2. Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en la circunferencia y determina su medida.



En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.** Por ejemplo:



∢BOA = 2∢BPA

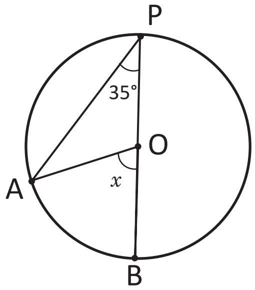


Como ∢BOA = 2∢BPA

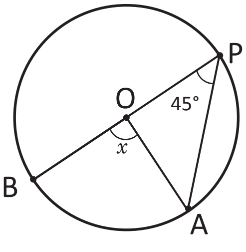
∢BOA = 2(30) = 60°

Determina el valor de x para cada caso.

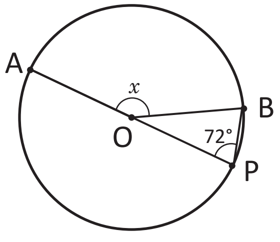
a)



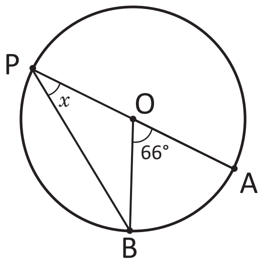
b)



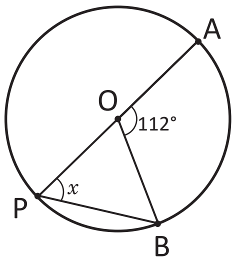
c)



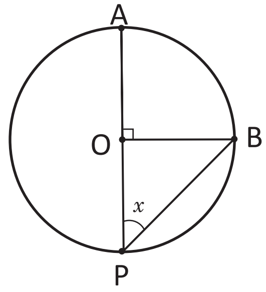
d)



e)



f)

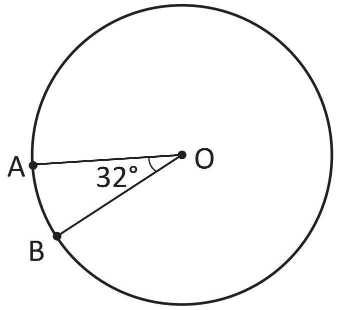


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

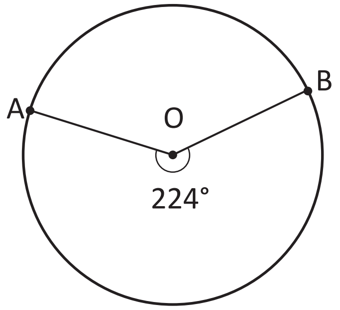
1.4 Ángulo inscrito, parte 2

1. Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en las siguientes circunferencias y determina su medida:

a)

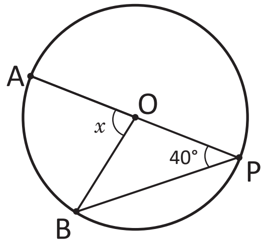


b)

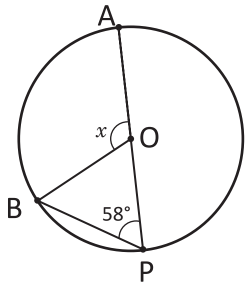


2. Determina el valor de x para cada caso:

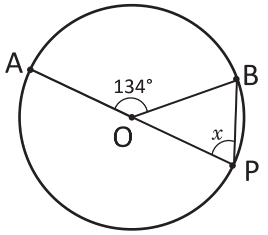
a)



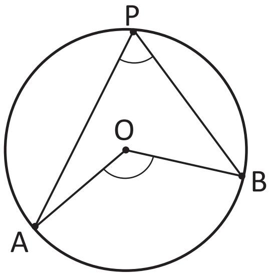
b)



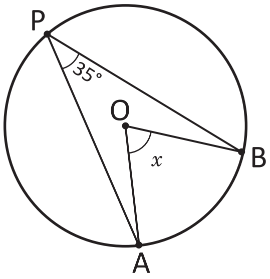
c)



En los ángulos inscritos que tienen en el interior el ángulo central que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**. Por ejemplo:



∢BOA = 2∢BPA

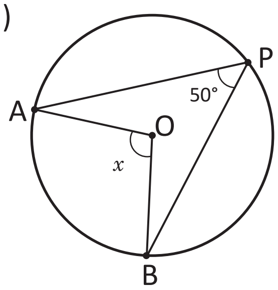


Como ∢BOA = 2∢BPA

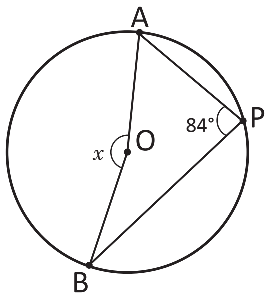
∢BOA = 2(35) = 70°

Determina el valor de x para cada caso:

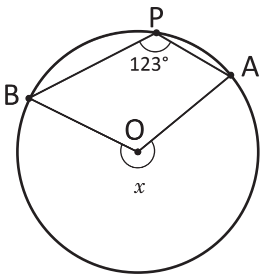
a)



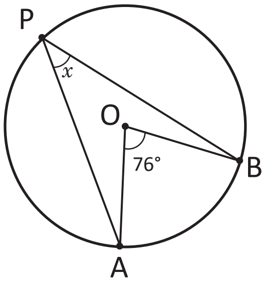
b)



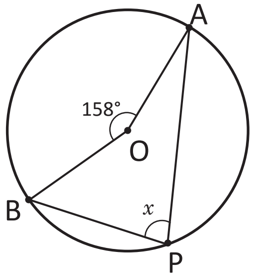
c)



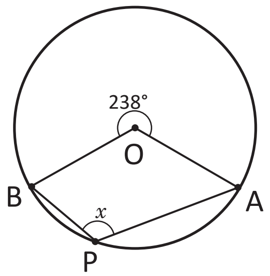
d)



e)



f)

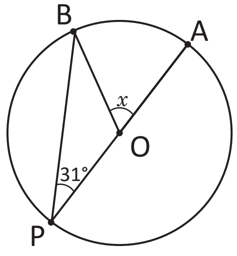


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

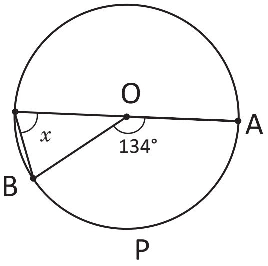
1.5 Teorema del ángulo inscrito

1. Determina el valor de x para cada caso:

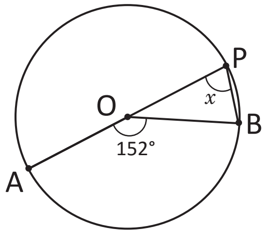
a)



b)

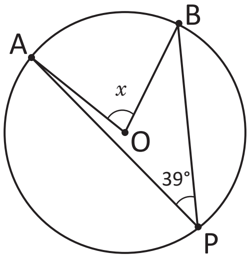


c)

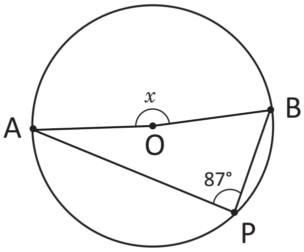


2. Determina el valor de x para cada caso:

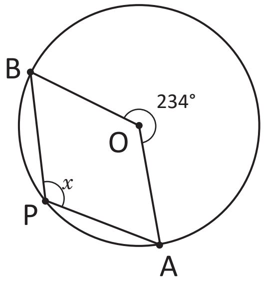
a)



b)

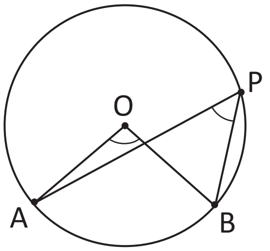


c)



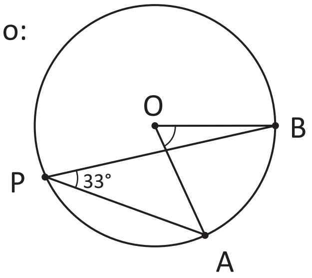
En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**. Este resultado se conoce como el Teorema del ángulo inscrito.

Además, todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.



∢BOA = 2∢BPA

Por ejemplo:

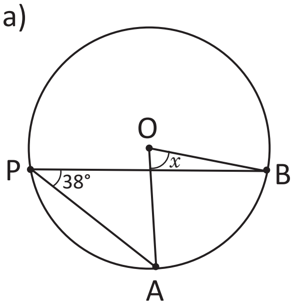


Como ∢BOA = 2∢BPA.

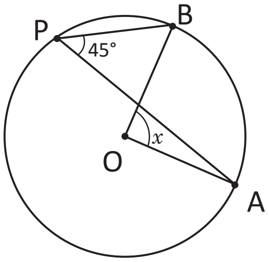
∢BOA = 2(33) = 66°.

Determina el valor de x, y y z para cada caso.

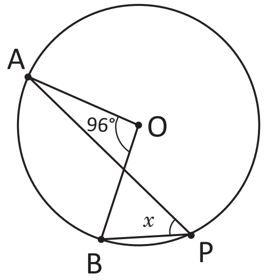
a)



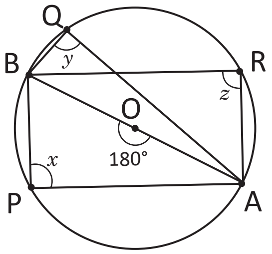
b)



c)



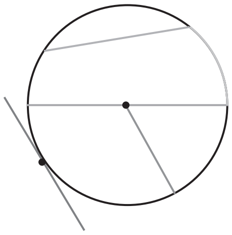
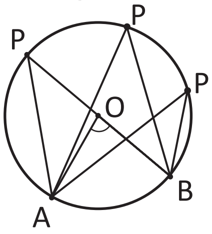
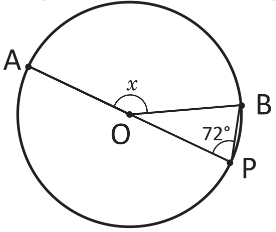
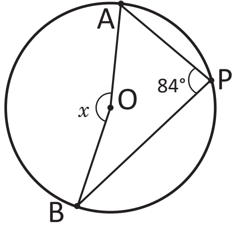
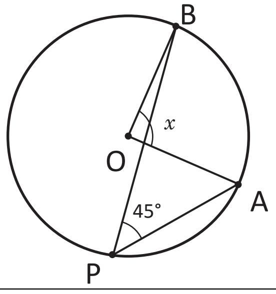
d)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

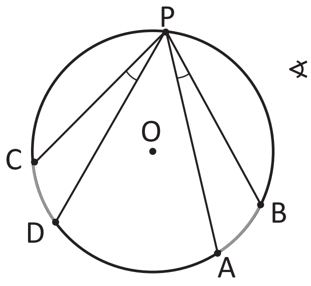
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Identifico los elementos de la circunferencia en la figura de abajo. 				
2. Comprendo la definición de ángulo inscrito e identifico su posible relación con el ángulo central del mismo arco. 				
3. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está en algún lado del ángulo como en la figura. 				
4. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está al interior del ángulo como en la figura. 				
5. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está fuera del ángulo como en la figura. 				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Arcos congruentes

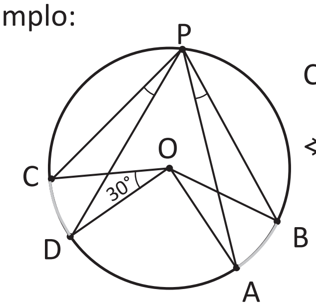
En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.



$\measuredangle BPA = \measuredangle DPC$

Por ejemplo:

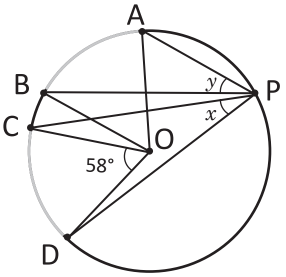


Como $\measuredangle BOA = \measuredangle DOC$.

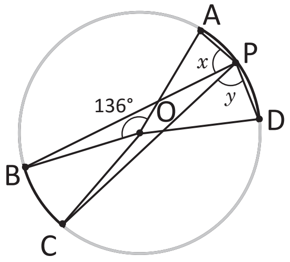
$\measuredangle BPA = \measuredangle DPC = \frac{30}{2} = 15°$.

1. Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\widehat{CD} = \widehat{AB}$.

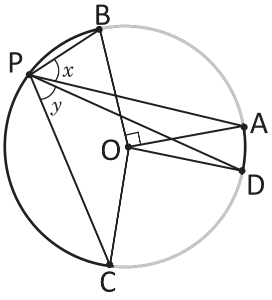
a)



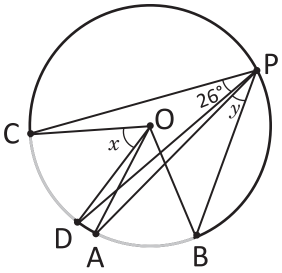
b)



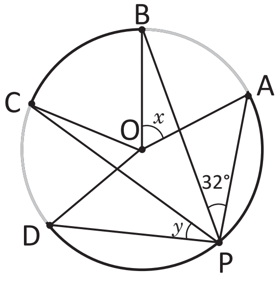
c)



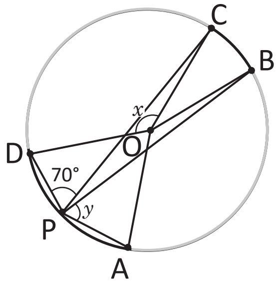
d)



e)

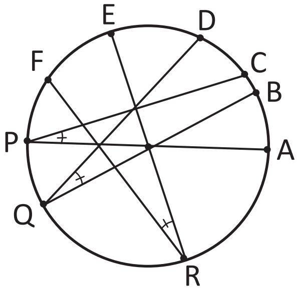


f)

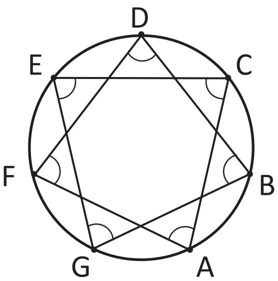


2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que son de igual medida.

a)



b)

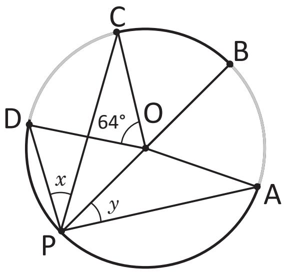


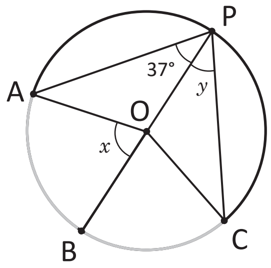
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

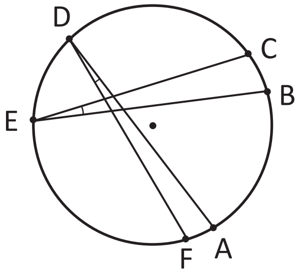
1.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

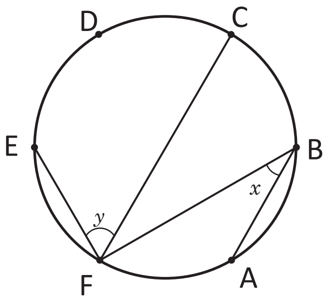
<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>no</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Aplico las propiedades de los arcos con medidas iguales para determinar las medidas de ángulos, como en las figuras.




</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Utilizo las propiedades de ángulos inscritos de igual medida para determinar qué arcos tienen igual medida como en la figura de abajo.


</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Aplico correctamente los resultados del teorema del ángulo inscrito y su recíproco para resolver problemas como el siguiente:

Determina el valor de x y y si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.


</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

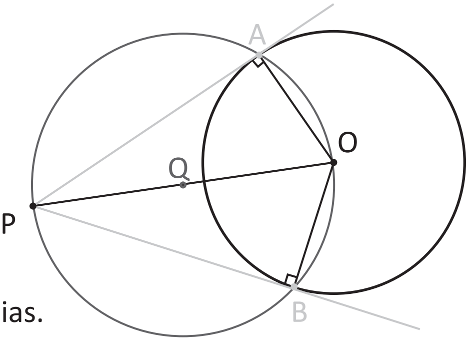
2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada, siguiendo los pasos:

1. Se toma el punto medio del segmento PO.

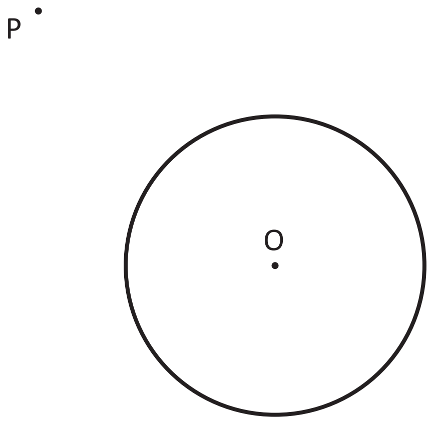
2. Se traza la circunferencia de diámetro PO.

3. Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

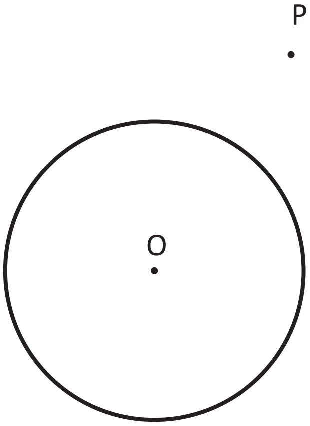


1. Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

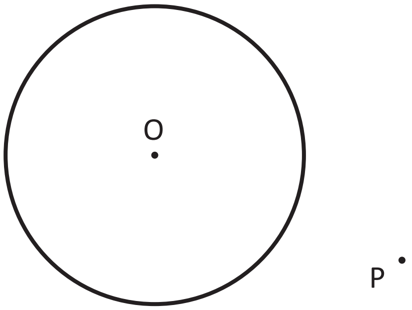
a)



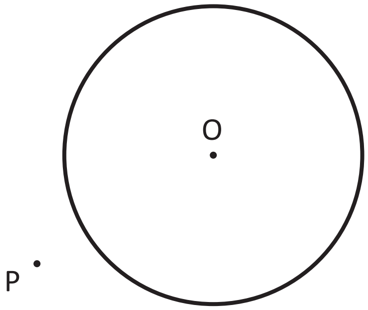
b)



c)



d)



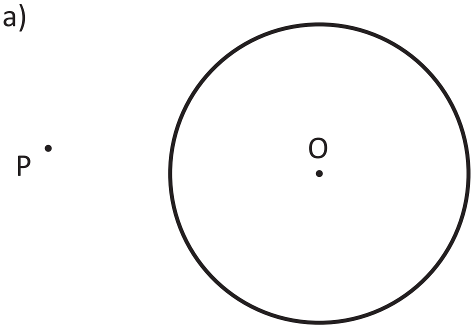
2. ¿Por qué los segmentos de la recta tangente al punto de tangencia son iguales?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

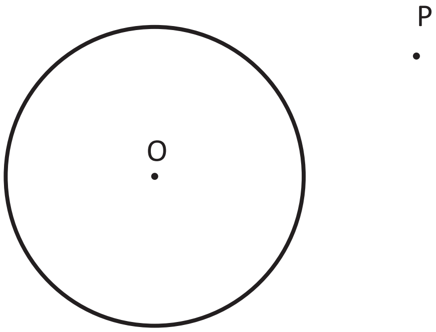
2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

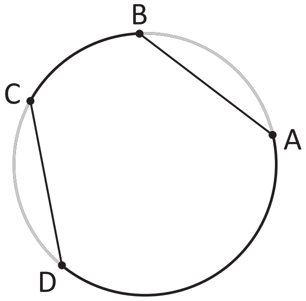
a)



b)

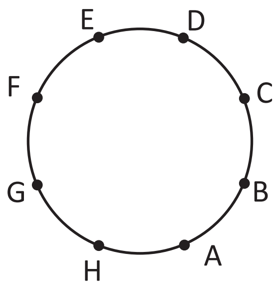


En una circunferencia, si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.



Si $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ entonces AB = CD.

Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H dividen la circunferencia en 8 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal.

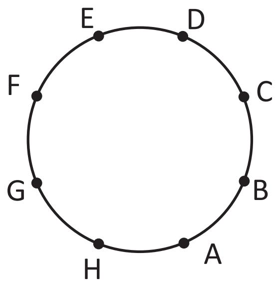


a) ACEG

b) CEG

c) CDGH

d) BFGA



e) EGA

f) BEH

g) BCF

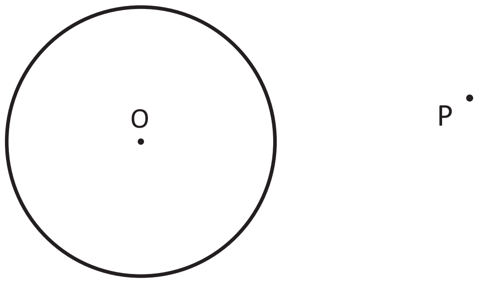
h) ABCDEFGH

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

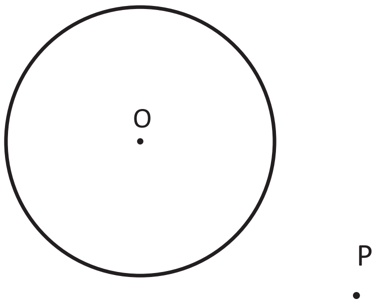
2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

1. Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

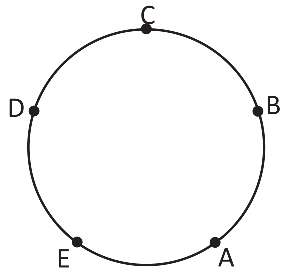
a)



b)



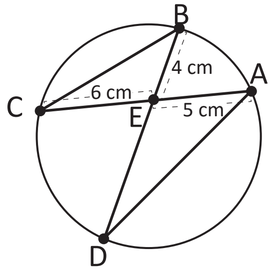
2. Los puntos A, B, C, D, E dividen la circunferencia en 5 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal. Observa el ejemplo.



a) ABD b) CDE c) ABDE d) ABCDE

Se puede determinar la semejanza entre triángulos observando los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. Y se puede utilizar para determinar la longitud de algunos segmentos.

Por ejemplo:



ΔAED ~ ΔBEC. Ya que hay dos ángulos opuestos por el vértice y además ∢DBC = ∢DAC. Por el criterio AA, se concluye que ΔAED ~ ΔBEC.

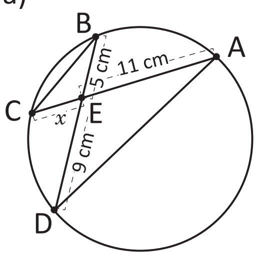
Como ΔAED ~ ΔBEC, entonces $\frac{ED}{CE} = \frac{AE}{BE}$.

Por lo tanto ED = CE×$\frac{AE}{BE}$ = 6×$\frac{5}{4}$= 7.5

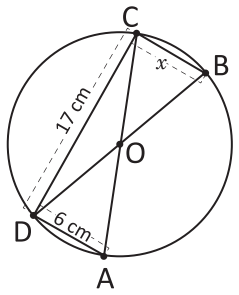
ED = 7.5 cm

Determina x en las siguientes figuras:

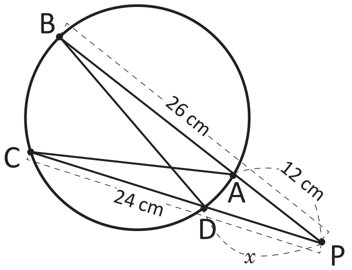
a)



b) Si $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DA}$



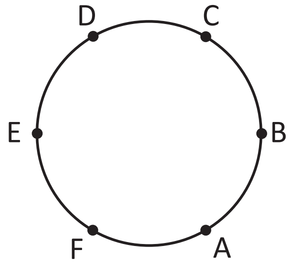
c)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Paralelismo

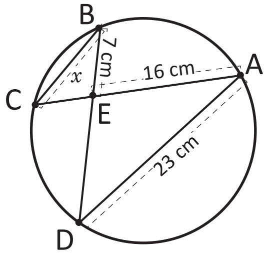
1. Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal. Observa el ejemplo.



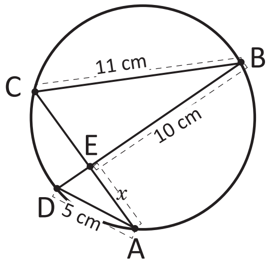
a) BDF b) ABDE c) CDEF d) ABCDEEF

2. Determina x en las siguientes figuras:

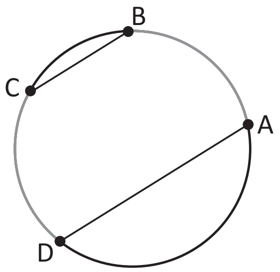
a)



b)



En una circunferencia, si se tienen dos arcos de circunferencia iguales, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.



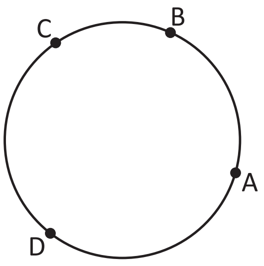
Si $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, entonces AD || BC.

Una condición A es suficiente para otra condición B si se cumple la proposición "Si A entonces B ".

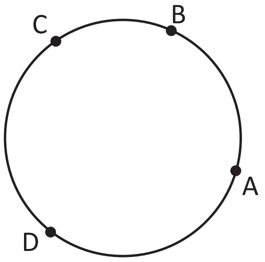
Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

$\widehat{ABC}$ denota el arco sostenido desde A hasta C, pasando por B.

a) $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ b) ∢DAC = ∢BDA c) CD = BA



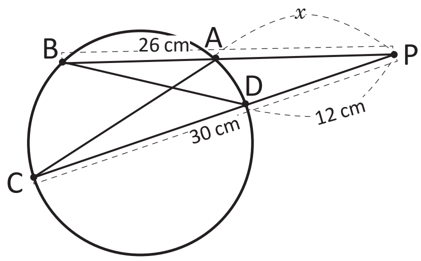
d) AC = BD e) CB = BA f) $\triangle ABC \cong \triangle DCB$



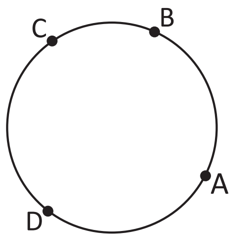
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

1. Determina x en las siguientes figuras:



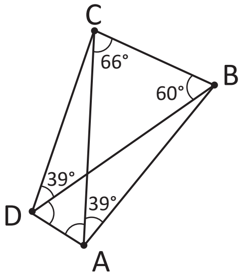
2. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.



a) $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DC}$　　b) CB = BA　　c) ΔABC ≅ ΔDCB

Si dos ángulos son iguales y además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

Por ejemplo:

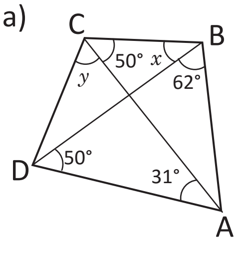


Como ∢CAB = ∢CDB y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

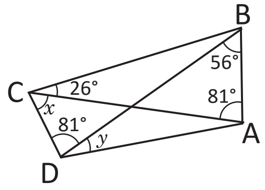
Se debe cumplir que ∢BDA = ∢BCA = 66°.
Y además se debe cumplir que ∢CAD = ∢CBD = 60°.

Determina el valor de x y y.

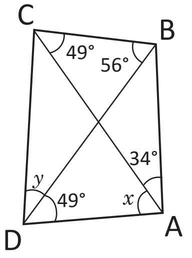
a)



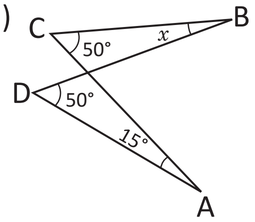
b)



c)



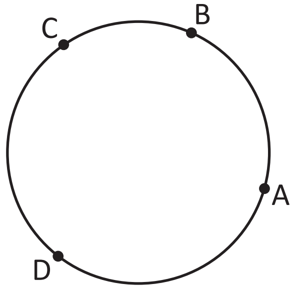
d)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Ángulo semiinscrito

1. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.



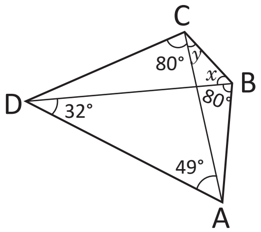
a) $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD}$

b) ∢BDA = ∢DBC

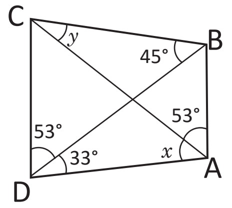
c) ΔBCD∼ΔBCA

2. Determina el valor de x y y.

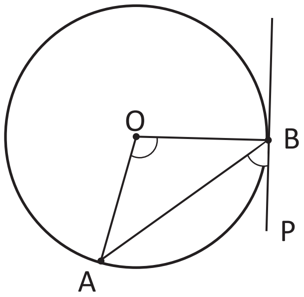
a)



b)

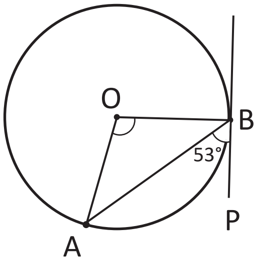


El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**. En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco.**



∢BOA = 2∢PBA

Por ejemplo:

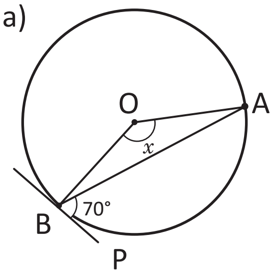


Como ∢BOA = 2∢PBA

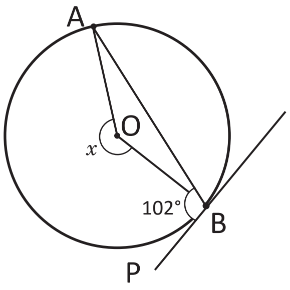
∢BOA = 2(53) = 106°

Determina el valor de x para cada caso.

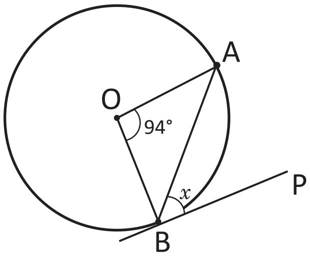
a)



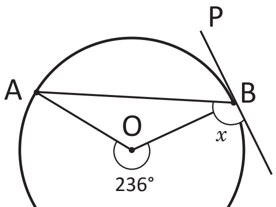
b)



c)



d)



2.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Construyo correctamente las tangentes a una circunferencia que pasan por un punto P.				
2. Aplico correctamente que cuando la medida de dos arcos es igual entonces la medida de las cuerdas es igual, para determinar qué tipo de figura se forman en una circunferencia dividida en arcos iguales.				
3. Utilizo el ángulo inscrito para encontrar triángulos semejantes y determinar medidas de lados.				
4. Puedo determinar condiciones suficientes y necesarias para que en cuatro puntos sobre una circunferencia al menos dos cuerdas sean paralelas.				

2.8 Autoevaluación de lo aprendido

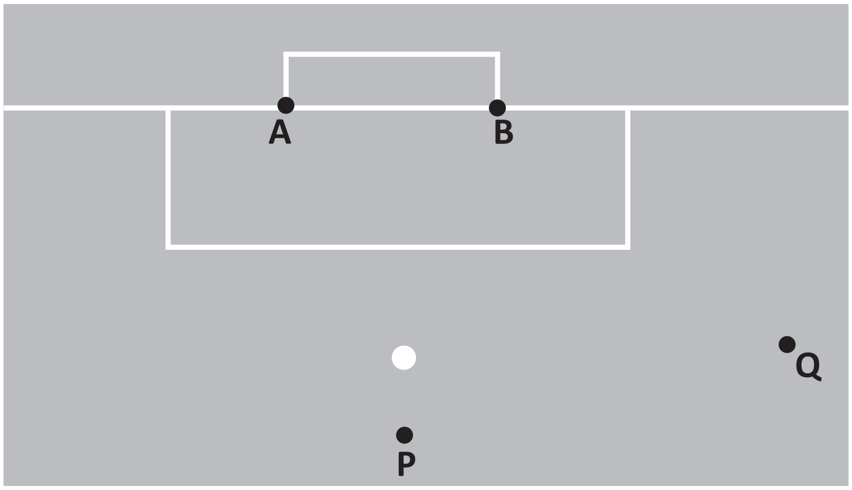
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Determino correctamente cuándo cuatro puntos están sobre una circunferencia y utilizo el resultado para encontrar las medidas de otros ángulos.				
2. Determino la relación que existe entre un ángulo semiinscrito y el ángulo central que subtiende el mismo arco.				
3. Aplico el teorema del ángulo inscrito para resolver problemas con ángulos al interior de la circunferencia.				
4. Aplico el teorema del ángulo inscrito para resolver problemas con ángulos al exterior de la circunferencia.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

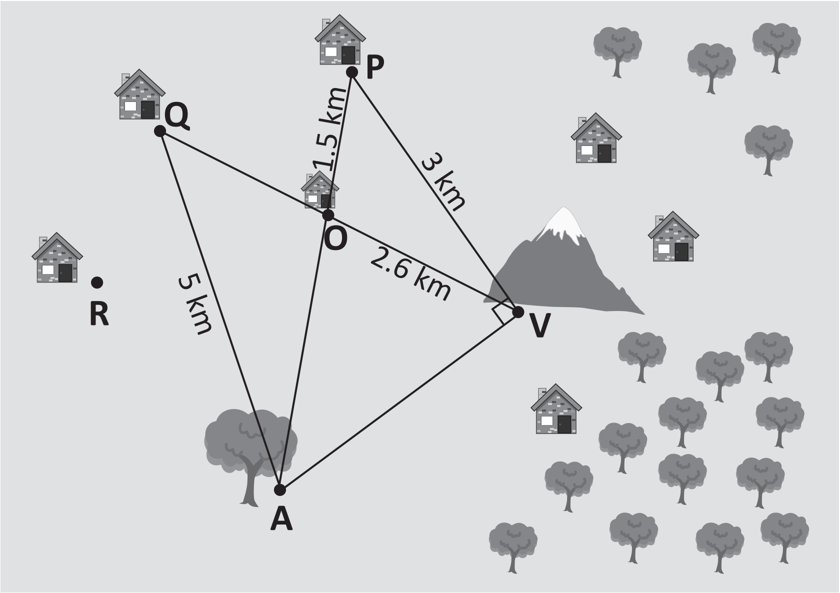
1. **Ángulo de tiro.** En un juego de tiros libres un jugador se ubica en el punto P y otro en el punto Q. Mide los ángulos ∢APB, ∢AQB y responde:
   a) Según el ángulo de tiro, ¿cuál de ellos tiene mayores posibilidades de anotar?
   b) Marca otro punto P' que tenga el mismo ángulo de tiro que P.



Dibuja una circunferencia que pase por A, B y P, además considera $\widehat{AB}$ y los ángulos inscritos que tienen igual medida que el ∢APB.

2. Mapa. Un turista cuenta con el mapa a escala que se muestra en la imagen y necesita saber algunos datos faltantes. Ayuda al turista siguiendo estos pasos:

a) Utilizando transportador comprueba que la medida de los ángulos ∢VPA y ∢VQA es 45°.
b) Encuentra la distancia entre el gran árbol y el volcán.
c) Justifica que los puntos P, Q, A y V están en una circunferencia sobre el mapa.
d) ¿Cuál es la distancia entre la comunidad Q y el volcán?



8 Unidad

Medidas de dispersión

La ilustración representa la población en países que son objeto de estudio según sus características.

Desde la antigüedad la estadística resultó ser muy útil a todas las ciencias; esta se constituyó en una herramienta importante en los procesos de investigación, ya que permite planear, recolectar y organizar información referente a individuos u observaciones de un fenómeno, al cuál se le estudian características en común en una población o muestra.

Para analizar una serie de datos no basta con conocer las medidas de tendencia central, que son las que indican donde se sitúan la mayoría de datos, también es necesario estudiar las medidas de dispersión o variabilidad, para saber qué tan próxima está entre si la información. Estas medidas tienen sus aplicaciones en las tarifas sobre servicios públicos; temperaturas por semanas; estudios sobre comportamientos de cierta población, longitudes recorridas por corredores, entre otros.

Al finalizar esta unidad sabrás cómo agrupar datos en una tabla de distribución de frecuencias, conocerás la media aritmética, la varianza y la desviación típica; para datos agrupados y no agrupados, esto se abordará con problemas de la vida cotidiana.

1.1 Rango para datos no agrupados

R Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de las siguientes series de datos:

a) La cantidad de pares de zapatos vendidos en un almacén durante una semana:

Día	Cantidad de pares vendidos
lunes	10
martes	14
miércoles	15
jueves	12
viernes	16
sábado	18
domingo	16
Media (μ)	
Mediana	
Moda	

b) La duración en horas de la batería de 10 modelos de teléfonos celulares:

Modelo	Duración batería (en horas)
1	18
2	16
3	19
4	16
5	17
6	16
7	14
8	15
9	15
10	16.5
Media (μ)	
Mediana	
Moda	

C Las **medidas de dispersión** indican qué tanto se dispersan o agrupan los datos con respecto a su media aritmética. El **rango** es una medida de dispersión que para una serie de datos no agrupados, es igual a la diferencia del dato mayor y el dato menor.

Al rango también se le llama **amplitud**.

Por ejemplo, las tablas de la derecha presentan la tarifa mensual (en dólares) por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador. Para la residencial 1, la tarifa más alta (dato mayor) es $18, la más baja (dato menor) es $11 y el rango es: 18 – 11 = 7.

Para la Residencial 2, la tarifa más alta (dato mayor) es $14, la más baja (dato menor) es $10 y el rango es: 14 – 10 = 4.

Residencial 1	
Casa	Tarifa Mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa Mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

Por lo tanto, las tarifas de la Residencial 1 se encuentran más dispersas, ya que el rango es mayor.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. En la tabla de la derecha se presentan las calificaciones de Beatriz y Miguel en 8 tareas. Completa la tabla y responde: ¿en cuál serie los datos están más dispersos? Justifica tu respuesta.

   Escribe los procedimientos:

Tarea	**Beatriz**	**Miguel**
1	9.3	8.0
2	10.0	8.6
3	9.5	9.0
4	9.6	9.5
5	9.5	8.5
6	9.7	9.0
7	10.0	9.0
8	10.0	10.0
Media (μ)		
Mediana		
Moda		
Rango		

2. Juan registra el tiempo en minutos que tarda para llegar a su escuela durante dos semanas, los resultados aparecen en la tabla de la derecha. Completa la tabla y responde: ¿en cuál semana los datos se encuentran más dispersos?

   Escribe los procedimientos:

Día	**Tiempo en minutos**	
	Semana 1	**Semana 2**
lunes	28	29
martes	26	27
miércoles	30	27
jueves	27	28
viernes	15	30
Media (μ)		
Mediana		
Rango		

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Desviación respecto a la media

En la tabla se presenta el número de goles anotados en 6 partidos de fútbol por los equipos A y B. Completa la tabla y responde: ¿cuál equipo tiene los datos más dispersos? Justifica tu respuesta.

Partido	Equipo A	Equipo B
1	3	1
2	2	4
3	1	0
4	2	1
5	1	1
6	3	2
Media (μ)		
Mediana		
Rango		

En una distribución, a la diferencia de cada uno de los datos (x) y su media aritmética (μ) se le llama **desviación respecto a la media** (o simplemente **desviación**), se simboliza por $x - \mu$ e indica la distancia de cada uno de los datos a la media aritmética. La suma de todas las desviaciones se simboliza por $\sum(x - \mu)$ y siempre es igual a cero: *Suma de todas las desviaciones* = 0.

Es decir: $\boldsymbol{\sum(x - \mu) = 0}$

Utilizando los datos calculados en el problema 1 de la clase anterior.

a) Completa las tablas.
b) Con base en la suma de los valores absolutos de las desviaciones responde: ¿en cuál distribución los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media?

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Beatriz</th></tr>
<tr><th></th><th>x</th><th>$x - \mu$</th><th>$|x - \mu|$</th></tr>
<tr><td></td><td>9.3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Media (μ)</td><td></td><td>Suma:</td><td>Suma:</td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Rango</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Miguel</th></tr>
<tr><th></th><th>x</th><th>$x - \mu$</th><th>$|x - \mu|$</th></tr>
<tr><td></td><td>8.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8.6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8.5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10.0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Media (μ)</td><td></td><td>Suma:</td><td>Suma:</td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Rango</td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Varianza para datos no agrupados

1. Las mareas son ondas largas que se generan por el potencial gravitacional de la Luna y el Sol, su expresión más evidente es el ascenso y descenso del nivel del mar. La marea alta es la altura máxima del nivel del mar; durante seis días seguidos del mes de enero de 2017 se registró marea alta en los puertos La Unión (ubicado en el departamento de La Unión) y El Triunfo (ubicado en el departamento de Usulután), obteniendo los datos de la tabla que se presenta; completa cada una de ellas y determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos:

Día	**Altura (en metros) marea alta**	
	La Unión	**El Triunfo**
día 1	2.7	2.5
día 2	2.8	2.4
día 3	2.8	2.5
día 4	2.6	2.1
día 5	2.8	2.6
día 6	2.5	2.3
Media (μ)		
Mediana		
Rango		

2. Completa cada una de las tablas utilizando los datos calculados en el problema 2 de la clase 1.1, y con base en las desviaciones con respecto a la media responde: ¿en cuál distribución los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media?

	Semana 1		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
	28		
	26		
	30		
	27		
	15		
Media (μ)		**Suma:**	**Suma:**
Mediana			
Rango			

	Semana 2		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
	29		
	27		
	27		
	28		
	30		
Media (μ)		**Suma:**	**Suma:**
Mediana			
Rango			

A la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones se le llama **varianza**, se denota por σ^2 y se calcula:

$$\textit{Varianza} = \frac{\textit{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\textit{Número de datos}}$$

Es decir, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$.

Donde n es el número total de datos y μ es la media aritmética de la serie de datos. Esta medida es sensible a cada uno de los datos de la serie, la varianza revela aspectos en la dispersión que no refleja el rango. Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como dato representativo de la distribución.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Completa cada una de las tablas utilizando los datos del problema 1 de la clase 1.2 y calcula la varianza de cada serie (aproxima hasta las centésimas). Con base en ella, justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos. Compáralo con el resultado de la clase anterior.

a)

Beatriz		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
9.3		
10.0		
9.5		
9.6		
9.5		
9.7		
10.0		
10.0		

Varianza (σ^2)	

b)

Miguel		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8.0		
8.6		
9.0		
9.5		
8.5		
9.0		
9.0		
10.0		

Varianza (σ^2)	

1.4 Desviación típica para datos no agrupados

1. Completa cada una de las tablas utilizando los datos de la clase 1.3 y justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media aritmética.

	La Unión		
	x	$x-\mu$	$\lvert x-\mu \rvert$
día 1	2.7		
día 2	2.8		
día 3	2.8		
día 4	2.6		
día 5	2.8		
día 6	2.5		
Media (μ)		**Suma:**	**Suma:**
Mediana			
Rango			

	El Triunfo		
	x	$x-\mu$	$\lvert x-\mu \rvert$
día 1	2.5		
día 2	2.4		
día 3	2.5		
día 4	2.1		
día 5	2.6		
día 6	2.3		
Media (μ)		**Suma:**	**Suma:**
Mediana			
Rango			

2. Utilizando los resultados de la clase 1.3, completa cada una de las tablas y calcula la varianza de cada serie (aproxima hasta las centésimas); con base en ella, justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos:

Semana 1		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
28		
26		
30		
27		
15		

Varianza (σ^2)	

Semana 2		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
29		
27		
27		
28		
30		

Varianza (σ^2)	

A la raíz cuadrada de la varianza se le denomina **desviación típica**, se denota por σ y se calcula:

$$\textit{Desviación típica} = \sqrt{\textit{Varianza}}$$

$$= \sqrt{\frac{\textit{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\textit{Número de datos}}}$$

A la desviación típica también se le llama **desviación estándar**.

Es decir, $$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$$

La desviación típica da un tipo de promedio de las distancias de cada dato a su media aritmética, algo que no hace la varianza por expresarse en unidades cuadradas. Cuanto mayor sea la desviación típica, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como medida representativa de la serie de datos. La desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será negativa.

Calcula la desviación típica de las calificaciones de Beatriz y Miguel (revisa el problema de la clase 1.3), aproxima hasta las centésimas.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Agrupación de datos

1. Utilizando los resultados de la clase 1.4, calcula la varianza de cada serie de datos de los puertos La Unión y El Triunfo (aproxima hasta las centésimas). Justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos y compáralo con el resultado obtenido en la clase anterior:

La Unión		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
2.7		
2.8		
2.8		
2.6		
2.8		
2.5		

Varianza (σ^2)	

El Triunfo		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
2.5		
2.4		
2.5		
2.1		
2.6		
2.3		

Varianza (σ^2)	

2. Utilizando los resultados de la clase 1.4 calcula la desviación típica, en cada semana, del tiempo que tardó Juan para llegar a su escuela (aproxima hasta las centésimas).

Día	**Tiempo en minutos**	
	Semana 1	**Semana 2**
lunes	28	29
martes	26	27
miércoles	30	27
jueves	27	28
viernes	15	30

La tabla en que se organizan los grupos de datos de una serie como la que aparece a la derecha se llama **tabla de distribución de frecuencias**, a los grupos de datos formados se les llama **clases** y el total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**. Al tamaño de una clase se le llama **ancho de clase** y a los valores extremos **límites de clase**; por ejemplo, para la primera clase los límites de clase son 5 y 10, el **límite inferior** es 5, el **límite superior** es 10 y el ancho de clase es 5. El número que está en el centro de cada clase se le llama **punto medio**, se denota por *Pm* y se determina mediante la ecuación:

Cantidad de cuadernos vendidos	**Número de días**	
	Carlos	**Antonio**
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

$$Pm = \frac{\text{Límite superior} + \text{Límite inferior}}{2}$$

El punto medio de la primera clase es: $Pm = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$

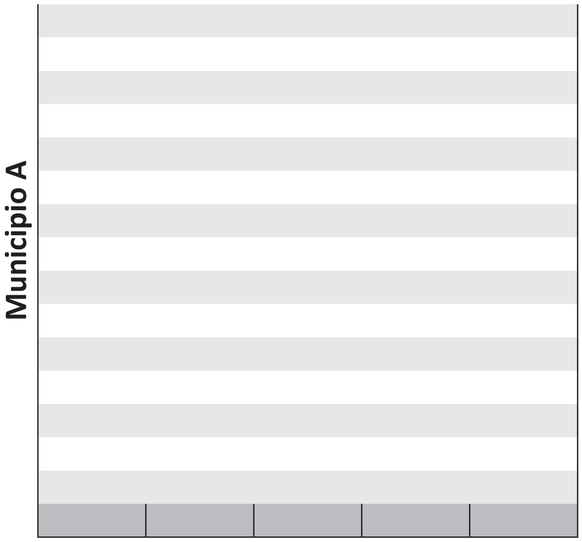
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

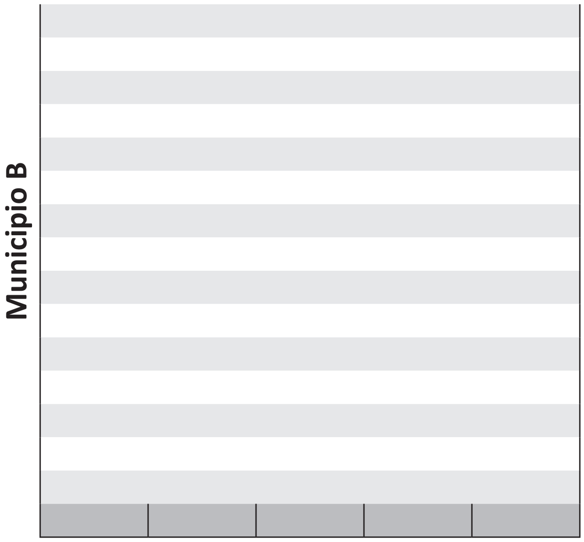
En dos municipios de San Salvador se realizó un estudio a 40 niños sobre la edad en meses en que comenzaron a caminar, obteniendo los siguientes resultados:

Municipio A (edad en meses)				
10	14	13	15	14
14	13	16	11	15
17	14	13	14	12
10	13	14	13	16
14	10	13	12	10
11	10	11	11	12
12	11	12	13	13
10	12	10	11	13

Municipio B (edad en meses)				
9	15	13	14	15
10	10	16	13	11
12	14	11	14	12
11	10	13	9	13
13	13	16	13	11
13	14	11	12	10
16	15	12	13	11
15	14	15	14	15

a) Clasifica la edad en meses de los niños de cada municipio en 5 grupos de 2 en 2, inicia en 8 y termina en 18.





b) Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

Edad en meses	Cantidad de niños	
	Municipio A	Municipio B
TOTAL		

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Media aritmética y rango para datos agrupados

1. Utiliza los resultados de la clase 1.5 para calcular la desviación típica de cada serie (aproxima hasta las centésimas).

La Unión	**El Triunfo**
2.7	2.5
2.8	2.4
2.8	2.5
2.6	2.1
2.8	2.6
2.5	2.3

Varianza (σ^2)		
Desviación típica (σ)		

2. Se hace un estudio de la estatura en centímetros de los estudiantes de noveno grado de dos escuelas de El Salvador, obteniendo los siguientes resultados:

Escuela A (estatura en centímetros)				
164	168	167	160	178
170	155	172	169	165
176	167	164	158	173
160	165	157	168	165
165	174	165	164	170
167	166	163	167	162
162	169	161	164	166

Escuela B (estatura en centímetros)				
160	169	169	165	163
167	167	163	170	177
163	160	172	174	178
170	165	174	165	167
166	164	165	168	169
163	173	160	172	164
157	162	170	162	166
172	168	164	174	160

Clasifica las estaturas de los estudiantes de cada escuela en 5 grupos de 5 en 5, inicia en 155 y termina en 180. Luego organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

Escuela A

Escuela B

Estatura en cm	Cantidad de estudiantes	
	Escuela A	Escuela B
Total		

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

El **rango** para una serie de datos agrupados es la diferencia del límite superior de la última clase con frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase con frecuencia distinta de cero. La **media aritmética** para series de datos agrupados se calcula de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f \times Pm}{\textit{Número de datos}}$$

Por ejemplo, en la tabla se presenta una serie de datos agrupados. El límite superior de la última clase con frecuencia distinta de cero es **30** y el límite inferior de la primera clase con frecuencia distinta de cero es **5**. El rango de la serie es:

30 – 5 = **25**

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días
	Antonio (f_x)
5 a 10	4
10 a 15	8
15 a 20	9
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	0
Total	30

Con los datos del estudio realizado en dos municipios de San Salvador sobre la edad en meses en que comenzaron a caminar 40 niños (ver clase 1.5) realiza lo siguiente:

a) Completa la siguiente tabla y calcula la media aritmética de cada municipio.

Edad en meses	Número de niños		Punto medio de cada clase (*Pm*)	$f_A \times Pm$	$f_B \times Pm$
	Municipio A (f_A)	Municipio B (f_B)			
Total					

b) Calcula el rango de cada municipio, ¿en cuál serie los datos se encuentran más dispersos? Justifica tu respuesta.

1.7 Varianza para datos agrupados

1. Durante el mes de noviembre se registró cada día la cantidad de lluvia en milímetros en los departamentos de Santa Ana y San Salvador, obteniendo los siguientes datos:

Cantidad de lluvia (en mm) por día, Santa Ana					
400	100	0	200	100	250
300	50	50	0	0	0
300	100	150	160	260	100
200	400	100	150	0	0
250	160	100	100	360	100

Cantidad de lluvia (en mm) por día, San Salvador					
450	250	180	50	100	0
300	200	90	200	0	100
400	150	50	100	120	0
360	160	100	50	0	100
400	200	60	80	0	100

En tu cuaderno, clasifica la cantidad de lluvia en 5 grupos, inicia en 0 y termina en 500. Luego organiza los datos en la tabla de distribución de frecuencias.

Cantidad de lluvia	Número de días	
	Santa Ana	San Salvador
Total		

2. Con los datos de las estaturas en centímetros de los estudiantes de noveno grado de las Escuelas A y B (ver la clase 1.6) realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla de abajo y calcula la media aritmética de cada escuela:

Estaturas en centímetros	Cantidad de estudiantes		Punto medio de cada clase (*Pm*)	$f_A \times Pm$	$f_B \times Pm$
	Escuela A (f_A)	Escuela B (f_B)			
Total					

b) Calcula el rango de cada escuela. ¿Es suficiente para determinar en cuál escuela los datos se encuentran más dispersos? Justifica tu respuesta.

La **varianza** de una serie de datos agrupados se calcula de la siguiente forma:

$$Varianza = \frac{\textit{Suma de los productos } f \times (Pm - \mu)^2}{\textit{Número de datos}}$$

Es decir, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f \times (Pm - \mu)^2}{n}$.

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, *Pm* es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos. Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontraran los datos con respecto a su media aritmética.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Por ejemplo, en la tabla aparecen los datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos durante 30 días; además, se han calculado las diferencias $Pm - \mu$, los cuadrados $(Pm - \mu)^2$ y los productos $f_C\,(Pm - \mu)^2$ como se muestra en las últimas tres columnas:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	Punto medio (Pm)	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_C\,(Pm - \mu)^2$
	Carlos (f_C)				
5 a 10	3	7.5	7.5 – 17.5 = –10	$(-10)^2 = 100$	3(100) = 300
10 a 15	7	12.5	–5	25	175
15 a 20	10	17.5	0	0	0
20 a 25	8	22.5	5	25	200
25 a 30	1	27.5	10	100	100
30 a 35	1	32.5	15	225	225
Total	30				
Media aritmética (μ)	17.5				

La varianza para la serie de Carlos se calcula sumando los resultados de la última columna y dividiendo por el total de los datos, es decir:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225}{30}\\ &= \frac{1{,}000}{30}\\ &\approx 33.33 \quad \text{Por lo tanto, la varianza es } 33.33\end{aligned}$$

Completa las siguientes tablas con los datos del estudio realizado en dos municipios de San Salvador, sobre la edad en meses en que comenzaron a caminar 40 niños (revisa la clase 1.6). Luego calcula la varianza de cada serie (aproxima hasta las centésimas) y determina en cuál municipio los datos se encuentran más dispersos:

Edad en meses	**Número de niños**	**Punto medio (Pm)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A \times (Pm - \mu)^2$
	Municipio A (f_A)				
Total					
Media (μ)					

Edad en meses	**Número de niños**	**Punto medio (Pm)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_B\,(Pm - \mu)^2$
	Municipio B (f_B)				
Total					
Media (μ)					

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Desviación típica para datos agrupados

1. Con los datos registrados en noviembre sobre la cantidad de lluvia en milímetros, por día, en los departamentos de Santa Ana y San Salvador (revisa la clase 1.7) realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y calcula la media aritmética de cada departamento.

Cantidad de lluvia en milímetros	**Cantidad de días**		**Punto medio (*Pm*)**	$f_A \times Pm$	$f_S \times Pm$
	Santa Ana (f_A)	**San Salvador (f_S)**			
Total					

b) Calcula el rango de cada departamento. ¿Puedes determinar en cuál de los departamentos los datos se encuentran más dispersos? Justifica tu respuesta.

2. Completa las siguientes tablas con los datos de las estaturas de los estudiantes de 9° grado de las Escuelas A y B (ver la clase 1.7). Calcula la varianza en cada escuela (aproxima hasta las centésimas) y determina en cuál de ellas los datos se encuentran más dispersos:

Estaturas (*cm*)	**Cantidad de estudiantes**	**Punto medio (*Pm*)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A(Pm - \mu)^2$
	Escuela A (f_A)				
Total					
Media (μ)					

Estaturas (*cm*)	**Cantidad de estudiantes**	**Punto medio (*Pm*)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_B(Pm - \mu)^2$
	Escuela B (f_B)				
Total					
Media (μ)					

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

La **desviación típica** de una serie de datos agrupados se calcula:

$$\textit{Desviación típica} = \sqrt{\textit{Varianza}}$$

$$= \sqrt{\frac{\textit{Suma de los productos } f(Pm - \mu)^2}{\textit{Número de datos}}}$$

Es decir, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f(Pm - \mu)^2}{n}$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, *Pm* es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos. Tanto para datos agrupados como no agrupados, la desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será un número negativo.

Por ejemplo, dos series de datos agrupados tienen varianzas 33.33 y 29 respectivamente. Para la primera, la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

Y para la segunda es:

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.40$$

Como la desviación típica de la primera serie es mayor que la de la segunda entonces los datos de la primera se encuentran más dispersos con respecto a su media aritmética.

Calcula la desviación típica de las series de datos agrupados de los dos municipios de San Salvador, sobre la edad en meses en que comenzaron a caminar 40 niños (ver clase anterior), aproxima hasta las centésimas. Con base en ello, justifica en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos.

1.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Calculo media aritmética, mediana, moda y rango en series de datos no agrupados. Por ejemplo, en la siguiente serie: 60, 55, 54, 54, 56, 53, 58.
<table>
<tr><td>Media aritmética (μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td></td></tr>
<tr><td>Moda</td><td></td></tr>
<tr><td>Rango</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Identifico series de datos no agrupados que se encuentran más dispersos con respecto a su media aritmética, comparando las desviaciones respecto a la media. Por ejemplo, en las siguientes series:
<table>
<tr><th colspan="2">Serie 1</th><th colspan="2">Serie 2</th></tr>
<tr><th>x</th><th>$x - \mu$</th><th>x</th><th>$x - \mu$</th></tr>
<tr><td>15.5</td><td></td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td></td><td>16.5</td><td></td></tr>
<tr><td>16.5</td><td></td><td>14.5</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td></td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td></td><td>16</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Identifico series de datos no agrupados que se encuentren más dispersos con respecto a su media aritmética, utilizando la varianza. Por ejemplo, en las siguientes series:
<table>
<tr><th>Serie 1</th><th>Serie 2</th></tr>
<tr><td>165</td><td>174</td></tr>
<tr><td>166</td><td>170</td></tr>
<tr><td>170</td><td>172</td></tr>
<tr><td>168</td><td>169</td></tr>
<tr><td>172</td><td>165</td></tr>
<tr><td>166</td><td>168</td></tr>
<tr><td>168</td><td>162</td></tr>
<tr><td>162</td><td>167</td></tr>
<tr><td>168</td><td>165</td></tr>
<tr><td>165</td><td>168</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Varianza (σ^2)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Desviación típica (σ)</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Clasifico y ordeno datos en tablas de distribución de frecuencias. Por ejemplo, clasifica y ordena los siguientes datos en 6 grupos de 4 en 4, iniciando en 15 y terminando en 39:
<table>
<tr><td>15</td><td>22</td><td>30</td><td>28</td><td>24</td></tr>
<tr><td>16</td><td>23</td><td>32</td><td>36</td><td>32</td></tr>
<tr><td>17</td><td>25</td><td>15</td><td>35</td><td>25</td></tr>
<tr><td>20</td><td>35</td><td>18</td><td>30</td><td>23</td></tr>
<tr><td>22</td><td>20</td><td>22</td><td>20</td><td>21</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Calculo la media aritmética y el rango de las series de datos agrupados. Por ejemplo, en las siguiente series:
<table>
<tr><th></th><th>Serie</th></tr>
<tr><td>10 a 14</td><td>13</td></tr>
<tr><td>14 a 18</td><td>15</td></tr>
<tr><td>18 a 22</td><td>12</td></tr>
<tr><td>22 a 26</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Media (μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>Rango</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Calculo la varianza en series de datos agrupados. Por ejemplo, en la siguiente serie:
<table>
<tr><th></th><th>Serie</th></tr>
<tr><td>5 a 10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>10 a 15</td><td>7</td></tr>
<tr><td>15 a 20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>20 a 25</td><td>11</td></tr>
<tr><td>25 a 30</td><td>7</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Varianza (σ^2)</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Calculo la varianza en series de datos agrupados. Por ejemplo, en la siguiente serie:
<table>
<tr><th></th><th>Serie</th></tr>
<tr><td>100 a 106</td><td>2</td></tr>
<tr><td>106 a 112</td><td>4</td></tr>
<tr><td>112 a 118</td><td>10</td></tr>
<tr><td>118 a 124</td><td>8</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Desviación típica (σ)</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Desviación típica de una variable más una constante

R Con los datos registrados sobre la cantidad de lluvia (en milímetros) durante el mes de noviembre en los departamentos de Santa Ana y San Salvador (revisa la clase 1.8) realiza lo siguiente:

a) Completa las tablas:

Cantidad de lluvia (*mm*)	**Cantidad de días**	**Punto medio (*Pm*)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A(Pm - \mu)^2$
	Santa Ana (f_A)				
Total					
Media (μ)					

Cantidad de lluvia (*mm*)	**Cantidad de días**	**Punto medio (*Pm*)**	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_S(Pm - \mu)^2$
	San Salvador (f_S)				
Total					
Media (μ)					

b) Calcula la varianza y la desviación típica en cada serie (aproxima hasta las centésimas). ¿En cuál departamento los datos se encuentran más dispersos?

C Si a cada uno de los datos de una distribución A se les suma la misma constante c (c es un número cualquiera) dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a la desviación típica de la distribución A. Por ejemplo, en la tabla, a cada uno de los datos de la distribución 1 se le ha sumado 50, dando como resultado la distribución 2:

	Distribución 1	**Distribución 2**
	485	535
	488	538
	486	536
	489	539
	486	536
	485	535
Media (μ)	**486.5**	**536.5**

Se calcula la desviación típica de la distribución 1:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(485 - 486.5)^2 + (488 - 486.5)^2 + (486 - 486.5)^2 + (489 - 486.5)^2 + (486 - 486.5)^2 + (485 - 486.5)^2}{6}}$$

$$= 1.5$$

Entonces la desviación típica de la distribución 2 es 1.5, igual a la de la distribución 1.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. Determina si las series A y B tienen la misma desviación típica. Justifica tu respuesta y calcula el valor de la misma.

Serie A	Serie B
100.3	105.4
101.2	106.3
100.5	105.6
100.8	105.9
101.1	106.2

2. Con los datos presentados en la tabla, determina cuál de las series (2, 3 o 4) tiene igual desviación típica que la serie 1. Justifica tu respuesta.

Serie 1	Serie 2	Serie 3	Serie 4
25	28	35.5	30
24	27	34.5	29
25	26	35.5	30
26	29	36.5	31
23	26	33.5	28
21	21	31.5	26
22	28	32.5	27

3. En una serie de datos, la media aritmética es 61 y la desviación típica es 0.89. Si a todos los datos se les suma 5.5, ¿cuál será el nuevo valor de la media aritmética y de la desviación típica?

2.2 Desviación típica de una variable multiplicada por una constante

R

1. Con las series de datos presentadas en la tabla realiza lo siguiente:
   a) Calcula la desviación típica de los datos de la serie A.

   b) A partir de los resultados del literal anterior y sin utilizar la fórmula, calcula la desviación típica de las series de datos B y C.

Serie A	Serie B	Serie C
12.5	15	15.8
12.4	14.9	15.7
12.6	15.1	15.9
12.5	15	15.8
12.3	14.8	15.6
12.7	15.2	16

2. En el mes de mayo, seis comerciantes registran los precios por quintal de café que aparecen en la tabla de la derecha.
   a) Calcula la media aritmética y la desviación típica.

   b) Si para el mes de julio se prevé que el precio del quintal de café aumente $4.50, ¿cuál será el nuevo valor de la media aritmética y de la desviación típica?

Comerciante	Precio del quintal de café (en dólares)
1	142.75
2	142.00
3	143.90
4	141.90
5	142.50
6	143.00

C

Si a cada uno de los datos de una distribución A se les multiplica por la misma constante c (c es un número cualquiera) dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a multiplicar la desviación típica de la distribución A por la constante c.

1. Con las series de datos presentadas en la tabla realiza lo siguiente:

   a) Calcula la desviación típica de la serie 1.

   b) A partir del literal anterior y sin utilizar calculadora, determina la desviación típica de las series de datos 2 y 3:

Serie 1	Serie 2	Serie 3
55	220	605
52	208	572
54	216	594
51	204	561
53	212	583
50	200	550

2. En una serie de datos, la media aritmética es 105 y la desviación típica es 1.45. Si todos los datos se multiplican por 6, ¿cuál será el nuevo valor de la media aritmética y de la desviación típica?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

Estadísticas nacionales. La Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC) es un organismo nacional que se encarga de estudiar, analizar y producir información estadística para diferentes usuarios nacionales e internacionales, entre algunas de sus funciones se encuentran: plantear, levantar y publicar los censos de población, edificios y vivienda, agropecuario, industrial y comercial y cualesquiera otros que demanden las necesidades del país; además de publicar continuamente estadísticas demográficas, culturales, de transporte, industriales, entre otros, con el fin de ampliar sus campos de investigación estadística cuando las conveniencias y necesidades públicas así lo exijan.

1. **Población de 0 a 4 años.** En la siguiente tabla se muestra el porcentaje que representan los niños y niñas de 0 a 4 años respecto a la población total, desde 2006 hasta el 2013 según el área de residencia en El Salvador.

Puedes encontrar datos estadísticos nacionales en la siguiente dirección:
www.digestyc.gob.sv

Encuentra la desviación típica para cada serie. ¿En que serie están más dispersos los datos?

Año	Rural (x_R)	Urbana (x_U)	$x_R - \mu$	$(x_R - \mu)^2$	$x_U - \mu$	$(x_U - \mu)^2$
2006	10.8	8.7				
2007	9.7	7.9				
2008	9.9	8.2				
2009	9.6	8.3				
2010	9.4	7.9				
2011	9.2	7.3				
2012	9.3	7.2				
2013	9.4	7.4				
Total						
μ						

2. **Tratamiento de enfermedades.** En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de la población nacional que se enfermó y no consultó con ninguna persona sobre su enfermedad, para los años desde 2006 hasta 2013, se incluyen las personas que tuvieron enfermedad, solo síntomas o lesión.
   a) Calcula la desviación típica para cada serie. ¿En qué serie están más dispersos los datos?
   b) ¿Qué conclusión puedes obtener con los datos proporcionados?

Año	Rural (x_R)	Urbana (x_U)	$x_R - \mu$	$(x_R - \mu)^2$	$x_U - \mu$	$(x_U - \mu)^2$
2006	48.5	38.8				
2007	18.8	15.3				
2008	53.3	45.0				
2009	45.2	35.1				
2010	46.7	36.9				
2011	46.2	39.6				
2012	44.5	38.2				
2013	43.3	35.6				
Total						
μ						

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Autoevaluación de los trimestres

En esta sección se presenta una autoevaluación que se debe realizar al finalizar cada trimestre, donde debes evaluar aspectos relacionados con tu estudio diario para esta asignatura, además, debes plantear tu compromiso para el próximo trimestre o para el próximo grado según corresponda. Existe también, un apartado donde tus padres y tu maestro de matemática pueden escribir un breve comentario sobre tu rendimiento en cada trimestre.

Autoevaluación del primer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____
____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____
____

Autoevaluación del segundo trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____
____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____
____

Autoevaluación del tercer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo grado: ____
____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____
____

Solucionario

En la siguiente sección se presentan las soluciones de todos los ítems, separados por unidad, número de página y número de clase, en algunos casos se detallan solo las respuestas y en otros se escribe también un procedimiento posible para llegar a ella. Además, se utilizan los siguientes símbolos:

R Se plantea la solución de los ítems que corresponden a una o dos clases anteriores.

✎ Se plantea la solución de los ítems correspondientes a la clase del día.

Unidad 1

Página 2, Clase 1.1

R

a) $5x^2$

b) $-6y^2$

c) $3x(-\frac{1}{4}xy) = -\frac{3}{4}x^2y$

d) $18xy^2$

e) $(5yz)(-6xyz) = -30xy^2z^2$

f) $15x^2y^2z$

✎

1. Primera forma: $x(2x + 4)$

Segunda forma: $2x^2 + 4x$

2. a) $5x(3x - 4)$

$= 5x(3x) - 5x(4)$

$= 15x^2 - 20x$

b) $5x^2y + 10xy^2$

c) $3x^2y^2 - 3xy^2$

d) $-4x^2y^2 + 6x^2y - 8xy^2$

Página 3, Clase 1.2

R

a) $-18xy^2z$

b) $10xy^2z^2$

c) $2xy(-7x + 10y)$

$= 2xy(-7x) + 2xy(10y)$

$= -14x^2y + 20xy^2$

d) $12x^2y + 21xy^2$

✎

1. Primera forma: $(x + 3)(y + 2)$

Segunda forma: $xy + 2x + 3y + 6$

2. a) $(3x + 4)(5x + 11)$

$= 3x(5x) + 3x(11) + 4(5x) +$

$4(11)$

$= 15x^2 + 33x + 20x + 44$

$= 15x^2 + 53x + 44$

b) $30xy^2 + 25xy + 54y + 45$

c) $12x^2y + 12x^2 + 18xy^2 + 18xy$

d) $20x^2y + 18xy^2 + 30x + 27y$

Página 4, Clase 1.3

R

1. a) $(-10xy)(-7xy - 5)$

$= 70x^2y^2 + 50xy$

b) $-28x^2y^2 - 63x^2y + 21xy^2$

2. a) $24x^2 + 30x + 40xy + 50y$

b) $(xy + 8)(4x + 5y)$

$= xy(4x) + xy(5y) + 8(4x) + 8(5y)$

$= 4x^2y + 5xy^2 + 32x + 40y$

✎

a) $(4x - 6)(3y + 8)$

$= [4x + (-6)](3y + 8)$

$= 4x(3y) + 4x(8) + (-6)(3y)$

$+ (-6)(8)$

$= 12xy + 32x - 18y - 48$

b) $56xy - 7x + 72y - 9$

c) $x^2y + xy - xy^2 - y^2$

d) $6x^2y - 4xy - 3x^2 + 2x$

e) $20xy^2 - 35y - 36xy + 63$

f) $-20x^2y + 50xy^2 + 6x - 15y$

Página 5, Clase 1.4

R

1. a) $(9x + 10y)(8y + 7)$

$= 9x(8y) + 9x(7) + 10y(8y) + 10y(7)$

$= 72xy + 63x + 80y^2 + 70y$

b) $5x^2y + 8x + 55xy^2 + 88y$

2. a) $(-6x + 1)(2y - 7)$

$= (-6x + 1)[2y + (-7)]$

$= (-6x)(2y) + (-6x)(-7) + 1(2y)$

$+ 1(-7)$

$= -12xy + 42x + 2y - 7$

b) $6x^2y - 4xy - 3x^2 + 2x$

✎

1. Primera forma: $(x + 1)(x + y + 2)$

Segunda forma:

$x^2 + xy + 3x + y + 2$

2. a) $(3x + 5)(-2x - 7y + 11)$

$= (3x + 5)[-2x + (-7y) + 11]$

$= 3x(-2x) + 3x(-7y) + 3x(11)$

$+ 5(-2x) + 5(-7y) + 5(11)$

$= -6x^2 - 21xy + 33x - 10x$

$-35y + 55$

$= -6x^2 - 21xy + 23x - 35y + 55$

b) $2xy + 3y^2 - 20x - 21y - 90$

c) $20x^2 - 18xy - 15x - 18y^2 - 9y$

d) $-x^2y - 2x^2 + 7xy + 20x + 30y$

Página 6, Clase 1.5

R

1. a) $(7x + 5y)(2xy - 7)$

$= 7x(2xy) + 7x(-7) + 5y(2xy)$

$+ 5y(-7)$

$= 14x^2y - 49x + 10xy^2 - 35y$

b) $-25xy^2 - 20y + 30xy + 24$

2. a) $(4x + 7y)(2x + 10y - 7)$

$= 4x(2x) + 4x(10y) + 4x(-7)$

$+ 7y(2x) + 7y(10y) + 7y(-7)$

$= 8x^2 + 54xy - 28x + 70y^2 - 49y$

b) $2x^2 - 8xy - 7x - 90y^2 + 63y$

✎

a) $(x - 2y + 4)(2x - 4y - 4)$

$= x(2x) + x(-4y) + x(-4) + (-2y)(2x)$

$+ (-2y)(-4y) + (-2y)(-4) + 4(2x)$

$+ 4(-4y) + 4(-4)$

$= 2x^2 - 8xy + 4x + 8y^2 - 8y - 16$

b) $-3x^2 + 15y^2 + 4xy - 10x - 26y$

$+ 8$

c) $-5x^2y + 3xy^2 + 21xy - 25x^2 + 45x$

$- 9y - 18$

Página 8, Clase 2.1

R

a) $(2x + 9)(-6xy + 7x - 2)$

$= 2x(-6xy) + 2x(7x) + 2x(-2) +$

$9(-6xy) + 9(7x) + 9(-2)$

$= -12x^2y + 14x^2 - 4x - 54xy$

$+ 63x - 18$

b) $40x^2y^2 - 18xy^2 - 2xy - 40y^2$

$+ 23y - 3$

✎

1. Primera forma: $(x + 2)(x + 3)$

Segunda forma: $x^2 + 5x + 6$

2. a) $(y + 7)(y + 6)$

$= y^2 + (6 + 7)y + 6(7)$

$= y^2 + 13y + 42$

b) $x^2 - 5x + 6$

c) $y^2 - y - 6$

d) $x^2 - 7x - 18$

Página 9, Clase 2.2

a) $(x - 10)(x + 4)$
$= x^2 + (-10 + 4)x + 4(-10)$
$= x^2 - 6x - 40$
b) $y^2 - y + \frac{2}{9}$

1. Primera forma: $(z + 3)^2$
Segunda forma: $z^2 + 6z + 9$
Primera forma: $(y + b)^2$
Segunda forma: $y^2 + 2by + b^2$
2. a) $(y + 4)^2$
$= y^2 + 2(4)y + (4)^2$
$= y^2 + 8y + 16$
b) $x^2 + 18x + 81$
c) $y^2 + 4y + 16$
d) $x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{81}$

Página 10, Clase 2.3

1. a) $y^2 + 5y - 24$
b) $(y - \frac{1}{5})(y - \frac{1}{10})$
$= y^2 + (-\frac{1}{5} - \frac{1}{10})x + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$
$= y^2 - \frac{3}{10}y + \frac{1}{50}$
2. a) $x^2 + 20x + 100$
b) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$

a) $(x - 2)^2$
$= x^2 - 2(2)x + 4$
$= x^2 - 4x + 4$
b) $y^2 - 10y + 25$
c) $y^2 - \frac{1}{5}y + \frac{1}{100}$
d) $y^2 - 5y + \frac{25}{4}$

Página 11, Clase 2.4

1. a) $y^2 + 22y + 121$
b) $x^2 + 10x + 25$
2. a) $(x - 10)^2$
$= x^2 - 2(10)x + 10^2$
$= x^2 - 20x + 100$
b) $y^2 - \frac{2}{7}y + \frac{1}{49}$

a) $(x + 5)(x - 5)$
$= x^2 - 5^2$
$= x^2 - 25$
b) $y^2 - 36$
c) $y^2 - \frac{25}{36}$
d) $x^2 - \frac{49}{4}$

Página 12, Clase 2.5

a) $(x - 3)^2$
$= x^2 - 2(3)x + 3^2$
$= x^2 - 6x + 9$
b) $x^2 + 10x + 25$
c) $(x - 8)(x + 8)$
$= x^2 - 8^2$
$= x^2 - 64$
d) $(y + 2)(y - 5)$
$= y^2 + (2 + (-5))y + (-5)(2)$
$= y^2 - 3y - 10$

a) $(4x - 3)(4x + 5)$
Tomando $4x = w$
$(w - 3)(w + 5)$
$= w^2 + ((-3) + 5)w - 15$
$= w^2 + 2w - 15$
$= (4x)^2 + 2(4x) - 15$
$= 16x^2 + 8x - 15$
b) $4x^2y^2 - 25$
c) $9y^2z^2 + 48yz + 64$
d) $25y^2z^2 - 60yz + 36$

Página 13, Clase 2.6

1. a) $(x - 7)(x + 7)$
$= x^2 - 7^2$
$= x^2 - 49$
b) $81 - x^2$
2. a) $(3x - 7y)(3x + 7y)$
Tomando $3x = w$, $7x = z$
$= w^2 - z^2$
$= (3x)^2 - (7y)^2$
$= 9x^2 - 49y^2$
b) $25x^2y^2 - 100xy + 100$

a) $(x + y + 5)(x + y - 5)$
Tomando $x + y = w$
$= (w + 5)(w - 5)$
$= w^2 - 25$
$= (x + y)^2 - 25$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 25$
b) $3y^2 - 2y - 10$
c) $4x^2 + y^2 - 50$

Página 14, Clase 2.7

1. a) $(5yz - 6)(5yz + 6)$
$= (5yz)^2 - 6^2$
$= 25y^2z^2 - 36$
b) $\frac{x^2}{9} - \frac{4}{25}$
2. a) $x^2 + 2xy + y - 4$
b) $16x^2 + 80xy + 100y^2 - 3x + 9y$

a) $(x + 5y + 4)^2$
$= x^2 + (5y)^2 + 4^2 + 2(x)(5y) + 2(5y)(4) + 2(4)(x)$
$= x^2 + 25y^2 + 16 + 10xy + 40y + 8x$
$= x^2 + 10xy + 25y^2 + 8x + 40y + 16$
b) $64x^2 - 48xy + 9y^2 + 32x - 12y + 4$
c) $x^2 - 12xy + 36y^2 - 8x + 48y + 16$

Página 15, Clase 2.8

1. $149x^2 - 42xy + 5y^2$
2. $9x^2 - 6xy + y^2 - 42x + 14y + 49$

1. a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$= a^2 + b^2 - 2ab$
$= 125 - 2(50)$
$= 25$

Por tanto, $(a-b)^2 = 25$

b) 21

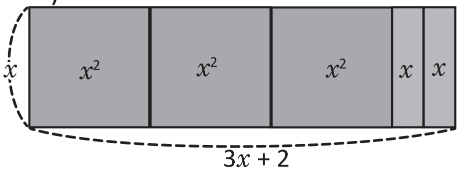
c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 81$

2. a) $(100 - 1)(100 + 1) = 9\,999$
   b) $(100 + 11)^2 = 12\,321$
   c) $45 \times 55 = (50 - 5)(50 + 5)$
   $= 50^2 - 5^2$
   $= 2475$
   d) $(100 + 3)(100 + 1) = 10\,403$

Página 18, Clase 3.1

a) $2x^2y + 3xy^2 - 5xy$
b) $4x^2 + 36xy + 81y^2$
c) $25x^2 - 70xy + 49y^2$
d) $(4x + 3y)(4x - 3y)$
Tomando $4x = w$, $3y = z$
$(w + z)(w - z)$
$= w^2 - z^2$
$= (4x)^2 - (3y)^2$
$= 16x^2 - 9y^2$

1. a)



Área: $x(3x + 2)$

b) Área: $x(x + 4)$

2. a) Los factores son:
   $-1, 2, x, 3x + 9, 4y + 6$
   b) Hay 6 factores:
   $-1, x, y, (x - 1),(2x + 7), (y - 7)$

Página 19, Clase 3.2

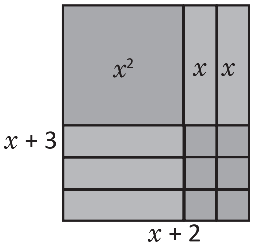
a) Área: $x(5x + 2)$
b) Área: $x(2x + 4)$

a) $x(9x + 5y)$
b) $y(-2x + 3y)$
c) $-3x^2 - 15xy$
$-3x^2 = (-1)(3)(x)(x)$
$-15xy = (-1)(3)(5)(x)(y)$
Se extraen los factores comunes $-3x^2 - 15xy = -3x(x + 5y)$
d) $3x(2y + 4x + 5)$
e) $-2y(2x + 3y + 7)$
f) $2xy(-3x + 4y + 7)$

Página 20, Clase 3.3

a) $5y(-3x + 7)$
b) $4xy(6x - 5y - z)$

1.



2. a) $x^2 + 7x + 10$

Pareja	Producto	Suma
1 y 10	+10	+11
2 y 5	**+10**	**+7**

Por tanto:
$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

b) $(y + 8)(y + 2)$
c) $(y + 6)(y + 3)$
d) $(x + 4)(x + 10)$

Página 21, Clase 3.4

1. a) $6xy^2 = (3)(2)(x)(y)(y)$
   $9x^2yz = (3)(3)(x)(x)(y)(z)$
   $-15x^2y = (-1)(3)(5)(x)(x)(y)$
   Se extraen los factores comunes $6xy^2 + 9x^2yz - 15x^2y$
   $= 3xy(2y + 3xz - 5x)$
   b) $10xyz(3 - 5y - 4x)$

2. a) $(x + 9)(x + 2)$
   b) $(x + 7)(x + 3)$

a) $x^2 - 5x + 6$

Pareja	Producto	Suma
−1 y −6	+6	−7
−2 y −3	**+6**	**−5**

Por tanto:
$x^2 - 5x + 6 = [(x + (-2)][(x + (-3)]$
$= (x - 2)(x - 3)$

b) $(x - 6)(x + 4)$
c) $(y - 5)(y - 3)$
d) $(y - 3)(y + 1)$

Página 22, Clase 3.5

1. a) $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

Pareja	Producto	Suma
1 y 12	+12	+13
3 y 4	**+12**	**+7**

b) $(x + 7)(x + 5)$

2. a) $(y - 4)(y + 3)$
   b) $(y - 5)(y - 2)$

1. a) $x^2 + 4x + 4$
   c) $(x + 2)^2$

2. a) $x^2 + 2x + 1$
   El término independiente, $1^2 = 1$.
   El coeficiente de x es el doble de 1, $2(1) = 2$.
   Entonces $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
   b) $(x - 3)^2$
   c) $(y - 10)^2$
   d) $\left(y + \frac{2}{3}\right)^2$

Página 23, Clase 3.6

1. a) $y^2 - y - 30$

Pareja	Producto	Suma
+1 y −30	−30	−31
+2 y −15	−30	−13
+3 y −10	−30	−7
+5 y −6	**−30**	**−1**

Por tanto:
$y^2 - y - 30 = (y + 5)(y - 6)$
b) $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$

2. a) $x^2 - 4$
El término independiente 4 es igual a 2^2.
$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$= (x + 2)(x - 2)$
b) $(x + 6)(x - 6)$
c) $(y + 7)(y - 7)$
d) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$
e) $(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$
f) $(x + \frac{4}{5})(x - \frac{4}{5})$

Página 25, Clase 3.8

a) $(y - 7)^2$
b) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.
El coeficiente de x es el doble de $\frac{1}{3}$, $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.
Entonces $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$
c) $(x + 10)(x - 10)$
d) $(y + 8)(y - 8)$

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2$
$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$
Tomando $w = 3x$, $z = 4y$
$w^2 + 2wz + z^2$
$= (w + z)^2$.
Sustituir nuevamente
$= (3x + 4y)^2$
b) $(5x + 6y)(5x - 6y)$
c) $(8x + y)(8x - y)$
d) $(2x + 5)^2$

Página 26, Clase 3.9

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
$= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
Tomando $w = 2x$, $z = 3y$
$w^2 + 2wz + z^2$
$= (w + z)^2$
Sustituir nuevamente
$= (2x + 3y)^2$
b) $(y + 9x)(y - 9x)$
c) $(5x - 3y)^2$
d) $(7x + 9y)(7x - 9y)$

a) $[(x - 2) + (y - 3)][(x - 2) + (y - 3)]$
$= (x + y - 5)(x - y + 1)$
b) $[(x + 5) + (y - 1)]^2$
$= (x + y + 4)^2$
c) $[3x - (y + 3)]^2 = (3x - y + 3)^2$
d) $(x - 2)^2 - 16y^2$
Tomando $w = x - 2$, $z = 4y$
$= w^2 - z^2$
$= (w + z)(w - z)$
Sustituyendo nuevamente
$= (x - 2 + 4y)(x - 2 - 4y)$
$= (x + 4y - 2)(x - 4y - 2)$

Página 27, Clase 3.10

1. a) $25y^2 + 30y + 9$
$= (5y)^2 + 2(5y)(3) + 3^2$
Tomando $w = 5y$.
$= w^2 + 2(w)(3) + 3^2$
$= (w + 3)^2$
Sustituyendo nuevamente
$= (5y + 3)^2$
b) $(4x + 9y)(4x - 9y)$
2. a) $(x - 2)^2 - (y + 2)^2$
Tomando $w = x - 2$, $z = y + 2$
$= w^2 - z^2$
$= (w - z)(w + z)$
$= (x - 2 + y + 2)(x - 2 - y - 2)$
$= (x - y)(x - y - 4)$
b) $[(x + 1) + (y - 1)]^2 = (x + y)^2$

a) $7x^2 - 28x + 35$
$= 7(x^2) + (7)(-4x) + (7)(5)$
$= 7(x^2 - 4x + 5)$
$= 7(x + 1)(x - 5)$
b) $-3(x^2 - 5x + 6)$
$= -3(x - 2)(x - 3)$
c) $6x(y^2 - 8y + 16) = 6x(y - 4)^2$
d) $3y(x^2 - 8x + 16) = 3y(x - 4)^2$

Página 28, Clase 3.11

1. $[(x + 2) + (y - 2)]^2 = (x + y)^2$
2. $3x(y^2 - 6y + 9) = 3x(y - 3)^2$

a) $5z(x^2 - 9y^2) = 5z(x - 3y)(x + 3y)$
b) $5z(9x^2 - 4y^2)$
$= 5z(3x - 2y)(3x + 2y)$
c) $3m(9n^2 - 6n + 1) = 3m(3n - 1)^2$
d) $28xy^2 - 84xy + 63x$
$= 7x(4y^2 - 12y + 9)$
$= 7x((2y)^2 - 2(2y)(3) + 3^2)$
$= 7x(2y - 3)^2$

Página 29, Clase 3.12

1. a) $2x^2 + 8x - 10$
$= 2(x^2 + 4x - 5)$
$= 2(x + 5)(x - 1)$
b) $4y(x^2 - 6x + 9) = 4y(x - 3)^2$
2. a) $2z(9x^2 - 100y^2)$
$= 2z(3x - 10y)(3x + 10y)$
b) $2z(25x^2 + 30xy + 9y^2)$
$= 2z(5x + 3y)^2$

1. a) $55^2 - 15^2$
$= (55 - 15)(55 + 15)$
$= (40)(70)$
$= 2\,800$
b) $999^2 - 1 = (999 + 1)(999 - 1)$
$= 998\,000$
c) $97^2 - 3^2 = (97 + 3)(97 - 3)$
$= 9\,400$
2. $\pi 56^2 \times 50 - \pi 44^2 \times 50$
$= 50\pi(56^2 - 44^2)$
$= 50\pi(56 + 44)(56 - 44)$
$= 50\pi \times 100 \times 12$
$= 60\,000\pi$

Unidad 2

Página 34, Clase 1.1

✎

1. a) $\sqrt{7}$ cm b) $\sqrt{6}$ cm

c) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ cm d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm

e) $\sqrt{3.5}$ cm f) $\sqrt{5.7}$ cm

2. a) $(\sqrt{5})^2 = 5$

El número representado es 5.

b) 11 c) 15 d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{11}{6}$ f) $\frac{5}{13}$ g) 0.7

h) 0.9 i) 1.7

Página 35, Clase 1.2

R

1. a) $\sqrt{8}$ cm

b) $\sqrt{4.2}$ cm

c) $\sqrt{\frac{7}{2}}$ cm

2. a) 14 b) $\frac{5}{3}$ c) 1.7

✎

1. a) El lado del cuadrado mide, $\sqrt{16}$. Pero $(\sqrt{16})^2 = 16$ y como $4^2 = 16$, $\sqrt{16} = 4$.

b) $\frac{5}{2}$

c) 0.5

2. a) Dado que $7^2 = 49$

$\sqrt{49} = 7$

b) 8 c) 11 d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{4}$ f) 0.4

Página 36, Clase 1.3

R

1. a) 19 b) $\frac{10}{11}$ c) $\frac{17}{5}$ d) 1.9

2. a) Dado que $5^2 = 25$

$\sqrt{25} = 5$

b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{8}$ d) 0.9

✎

1. a) Determinando los números: $\sqrt{36} = 6$, $-\sqrt{36} = -6$. Y las raíces cuadradas son 6 y –6.

b) 9 y –9

c) $\frac{7}{10}$ y $-\frac{7}{10}$

d) 0.5 y –0.5

e) $\sqrt{11}$ y $-\sqrt{11}$

f) $\sqrt{15}$ y $-\sqrt{15}$

g) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ y $-\sqrt{\frac{3}{5}}$

h) $\sqrt{0.7}$ y $-\sqrt{0.7}$

2. $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$.

Página 37, Clase 1.4

R

1. a) Dado que $8^2 = 64$

$\sqrt{64} = 8$

b) –4 c) $\frac{1}{10}$ d) $-\frac{8}{7}$ e) 0.9

2. a) Determinando los números: $\sqrt{100} = 10$, $-\sqrt{100} = -10$. Las raíces cuadradas son 10 y –10.

b) $\sqrt{21}$ y $-\sqrt{21}$

c) $\frac{6}{5}$ y $-\frac{6}{5}$

d) $\sqrt{\frac{3}{14}}$ y $-\sqrt{\frac{3}{14}}$

e) 1.2 y –1.2

✎

1. a) Como 8 > 3 entonces:

$\sqrt{8} > \sqrt{3}$

b) Dado que $5 = \sqrt{25}$. Comparando $\sqrt{25}$ con $\sqrt{15}$, 25 > 15 entonces $\sqrt{25} > \sqrt{15}$ o lo que es igual $5 < \sqrt{15}$.

c) $\sqrt{5} > 2$

d) $-\sqrt{5} > -\sqrt{6}$

e) $\sqrt{\frac{6}{10}} < \sqrt{0.7}$

f) $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\sqrt{0.25}$

2. Ordenados de menor a mayor

$-4, -\sqrt{14}, -\sqrt{2.5}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{8}, 4$

Página 38, Clase 1.5

R

1. a) Determinando los números: $\sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{25} = -5$. Las raíces cuadradas son 5 y –5.

b) 2 y –2

c) $\frac{7}{9}$ y $-\frac{7}{9}$

d) 0.6 y –0.6

2. a) Como 12 > 5 entonces:

$\sqrt{12} > \sqrt{5}$

b) $3 < \sqrt{10}$

c) $-\sqrt{11} < 2$

✎

1. a) –3 es racional.

Porque $-3 = \frac{-3}{1}$

b) 0.16 es racional.

Porque $0.16 = \frac{16}{100}$

c) $-\sqrt{11}$ es irracional. Porque no puede expresarse como fracción.

d) $\sqrt{5}$ es irracional. Porque no puede expresarse como fracción.

2. a) $\frac{7}{1}$

b) 0.05

$0.05 \times \frac{100}{100} = \frac{5}{100}$

$= \frac{1}{20}$

c) $-1.4 = -\frac{7}{5}$

d) $0.025 = \frac{1}{40}$

Página 39, Clase 1.6

R

1. a) Dado que $3 = \sqrt{9}$. Comparando $\sqrt{12}$ con $\sqrt{9}$, 12 > 9 entonces $\sqrt{12} > \sqrt{9}$ o lo que es igual $\sqrt{12} > 3$.

b) $-3 < -\sqrt{8}$

c) $\sqrt{11} > \sqrt{7}$

2. a) $-\frac{6}{1}$

b) 0.45

$0.45 \times \frac{100}{100} = \frac{45}{100}$

$= \frac{9}{20}$

c) $-2.5 = -\frac{5}{2}$

1. a) $7 \div 12 = 0.58\overline{3}$, es periódico.
   b) $4 \div 3 = 1.\overline{3}$, es periódico.
   c) $31 \div 7 = 4.\overline{428571}$, es periódico.
2. a) $0.\overline{8}$. Considerando:
   $x = 0.888888...$
   Analizando:

$$\begin{array}{rr} & 10x = 8.88888... \\ - & x = 0.88888... \\ \hline & 9x = 8.0 \end{array}$$

   Despejando $x = \frac{8}{9}$
   Por tanto, $0.\overline{8} = \frac{8}{9}$
   b) $2.\overline{32} = \frac{230}{99}$
   c) $3.\overline{5} = \frac{32}{9}$
   d) $1.\overline{247} = \frac{1\,246}{999}$

Página 40, Clase 1.7

1. a) $\frac{1}{5}$ es racional.
   b) $-5 = -\frac{5}{1}$, es racional.
   c) $-\pi$ es irracional.
2. a) $0.\overline{7}$
   $x = 0.77777...$
   Analizando

$$\begin{array}{rr} & 10x = 7.77777... \\ - & x = 0.77777... \\ \hline & 9x = 7.0 \end{array}$$

   Despejando $x = \frac{7}{9}$
   Por tanto, $0.\overline{7} = \frac{7}{9}$
   b) $0.\overline{23} = \frac{23}{99}$
   c) $1.\overline{15} = \frac{38}{33}$

a) Es real porque es natural.
b) Es real porque es entero.
c) Es real porque es racional.
d) Es real porque es racional.
e) Es real porque es racional.
f) Es real porque es racional.
g) Es real porque es racional.
h) Es real porque es irracional.
Orden:
$-13, -\sqrt{25}, -2.3\overline{15}, -0.07, \frac{2}{3}, 2.\overline{4}$, 2.718281, 9.

Página 42, Clase 2.1

$1.\overline{63}$. Considerando:
$x = 1.63636363...$
Analizando

$$\begin{array}{rr} & 100x = 163.6363... \\ - & x = 1.636363... \\ \hline & 99x = 162.0 \end{array}$$

Despejando $x = \frac{162}{99} = \frac{18}{11}$
Por tanto, $1.\overline{63} = \frac{18}{11}$.

1. a) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$
   $= \sqrt{2 x 5}$
   $= \sqrt{10}$
   b) $-\sqrt{30}$
   c) $\sqrt{42}$
   d) $-\sqrt{70}$
   e) $\sqrt{46}$
   f) $-\sqrt{36} = -6$
2. a) El proceso es incorrecto. Debería ser:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} \times 5\sqrt{5} &= 3 \times 5\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3 \times 3} \\ &= 15 \times 3 = 45 \end{aligned}$$

   b) El proceso es correcto.
   c) El proceso es incorrecto.
   El error es sumar cuando debería ser un producto. Así:

$$\begin{aligned} -3\sqrt{3} \times \sqrt{3} &= -3\sqrt{3 \times 3} \\ &= -3 \times 3 = -9 \end{aligned}$$

Página 43, Clase 2.2

a) $\sqrt{21}$
b) $-\sqrt{21}$
c) -3
d) $\sqrt{86}$

a) $\sqrt{6} \div \sqrt{30} = \sqrt{\frac{6}{30}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$
b) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ c) $-\sqrt{\frac{6}{5}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{5}}$
e) $-\sqrt{7}$ f) 2 g) $-\sqrt{\frac{1}{5}}$
h) 2 i) -2

Página 44, Clase 2.3

1. a) $\sqrt{6} \times \sqrt{7}$
   $= \sqrt{6 \times 7}$
   $= \sqrt{42}$
   b) $-\sqrt{33}$
   c) -10
   d) 8
2. a) $\sqrt{6} \div \sqrt{7} = \sqrt{\frac{6}{7}}$
   b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
   c) $-\frac{1}{2}$
   d) -3

a) $\sqrt{625}$
Expresando 625 en su descomposición prima.
$625 = 5^2 \times 5^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{625} = \sqrt{5^2 \times 5^2} &= \sqrt{5^2} \times \sqrt{5^2} \\ &= 5 \times 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

b) $\sqrt{441} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2} = 21$
c) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$
d) $\sqrt{\frac{441}{256}} = \frac{21}{16}$
e) $-\sqrt{900} = -30$
f) $-\sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{5}{4}$

Página 45, Clase 2.4

1. a) $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$
   b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$
   c) $-\sqrt{\frac{17}{3}}$
2. a) 11
   b) $729 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{729} &= \sqrt{3^2 \times 3^2 \times 3^2} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} = 27 \end{aligned}$$

   c) $-\sqrt{\frac{16}{49}} = -\frac{4}{7}$

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$
b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{28}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{\frac{2}{9}}$

f) $\sqrt{\frac{3}{25}}$ g) $\sqrt{\frac{6}{49}}$ h) $\sqrt{\frac{5}{4}}$

Página 46, Clase 2.5

1. a) $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
$= 2 \times 3 \times 3$
$= 18$
b) -24, c) $\frac{14}{15}$, d) $-\frac{13}{11}$
2. a) $4\sqrt{3}$
$= \sqrt{16} \times \sqrt{3}$
$= \sqrt{16 \times 3}$
$= \sqrt{48}$
b) $\sqrt{40}$ c) $\sqrt{72}$ d) $\sqrt{\frac{2}{49}}$

1. a) $\sqrt{125}$
$\sqrt{125} = \sqrt{5^2 \times 5}$
$= \sqrt{5^2} \times \sqrt{5}$
$= 5\sqrt{5}$
b) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
c) $\sqrt{\frac{3}{49}} = -\frac{\sqrt{3}}{7}$
d) $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$
2. a) $\sqrt{675}$
$\sqrt{675} = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 3}$
$= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$
$= 15\sqrt{3}$
b) $\sqrt{648} = 18\sqrt{2}$
c) $-\sqrt{800} = -20\sqrt{2}$
d) $-\sqrt{108} = -6\sqrt{3}$

Página 47, Clase 2.6

1. a) $3\sqrt{6}$
$= \sqrt{9} \times \sqrt{6}$
$= \sqrt{54}$
b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{\frac{2}{25}}$
2. a) $\sqrt{400}$
$= \sqrt{20^2}$
$= 20$
b) $\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

c) $-\sqrt{\frac{21}{75}} = -\sqrt{\frac{7}{25}} = -\frac{\sqrt{7}}{5}$

a) $\sqrt{24} \times \sqrt{63}$
$\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \times 6} = 2\sqrt{6}$
$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$
$\sqrt{24} \times \sqrt{63} = 2 \times 3\sqrt{6} \times \sqrt{7}$
$= 6\sqrt{42}$
b) $\sqrt{50} \times \sqrt{27} = 15\sqrt{6}$
c) $\sqrt{40} \times (-\sqrt{27}) = -6\sqrt{30}$
d) $\sqrt{30} \times \sqrt{35} = 5\sqrt{42}$
e) $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$
f) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{24}) = -12\sqrt{2}$

Página 48, Clase 2.7

1. a) $\sqrt{147}$
$= \sqrt{7^2 \times 3}$
$= 7\sqrt{3}$
b) $\sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$
c) $\sqrt{980} = 14\sqrt{5}$
2. a) $(-\sqrt{21}) \times \sqrt{28}$
$= -\sqrt{3 \times 7} \times \sqrt{4 \times 7}$
$= -\sqrt{2^2 \times 3 \times 7^2}$
$= -(\sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7^2})$
$= -(2 \times \sqrt{3} \times 7)$
$= -14\sqrt{3}$
b) $(-\sqrt{24}) \times (-\sqrt{18}) = 12\sqrt{3}$
c) $\sqrt{30} \times (-\sqrt{42}) = -6\sqrt{35}$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
b) $-\frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$
e) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Página 49, Clase 2.8

1. a) $\sqrt{72} \times \sqrt{96}$
$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{96} = \sqrt{4^2 \times 6} = 4\sqrt{6}$
$\sqrt{72} \times \sqrt{96} = 6 \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{6}$
$= 48\sqrt{3}$
b) $\sqrt{27} \times (-\sqrt{52}) = -6\sqrt{39}$
c) $(-\sqrt{35}) \times \sqrt{10} = -5\sqrt{14}$
2. a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$
$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$
b) $-\frac{1}{\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{14}}{14}$
c) $-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{154}}{7}$

a) $\sqrt{6} + 8\sqrt{6} = (1 + 8)\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$
b) $2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = (2 - 7)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$
c) $\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 2 = -5\sqrt{3} - 2$
e) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = 3\sqrt{3} + 9\sqrt{6}$
f) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$

Página 50, Clase 2.9

1. a) $\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$
b) $-\frac{5}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$
2. a) $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (1 + 4)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
b) $\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = -\sqrt{7}$
c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$

a) $\sqrt{45} + \sqrt{20}$
$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$\sqrt{45} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
$= 5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{32} + \sqrt{72} + \sqrt{50} = 15\sqrt{2}$

c) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{75} = 7\sqrt{3}$

d) $\sqrt{28} + \frac{14}{\sqrt{7}}$

$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{28} + \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

e) $\sqrt{80} + \frac{35}{\sqrt{5}} = 11\sqrt{5}$

f) $\sqrt{24} - \frac{12}{\sqrt{6}} = 0$

Página 51, Clase 2.10

1. a) $\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

2. a) $\sqrt{98} + \sqrt{72}$

$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{98} + \sqrt{72} = 13\sqrt{2}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{48} = 6\sqrt{3}$

c) $\sqrt{180} - \frac{35}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

a) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3) = (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2}$

$= 2 + 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{6} - 7) = 6 - 7\sqrt{6}$

c) $\sqrt{5}(\sqrt{80} + 3) = 20 + 3\sqrt{5}$

d) $(\sqrt{175} - 4)\sqrt{7}$

$= \sqrt{175} \times \sqrt{7} - 4\sqrt{7}$

$= \sqrt{5^2 \times 7^2} - 4\sqrt{7}$

$= 35 - 4\sqrt{7}$

e) $(\sqrt{12} - 5)\sqrt{3} = 6 - 5\sqrt{3}$

f) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})\sqrt{5} = \sqrt{30} + 5$

Página 52, Clase 2.11

1. a) $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{75} + \sqrt{12} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= 7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{72} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{125} - \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$

2. a) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1) = 5 + \sqrt{5}$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{96} + 7) = 24 + 7\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3} = 3 - \sqrt{6}$

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

$= \sqrt{2}(\sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{2}) + \sqrt{7}(\sqrt{3})$

$+ \sqrt{7}(\sqrt{2})$

$= \sqrt{6} + \sqrt{21} + \sqrt{14} + 2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

$= 3\sqrt{2} + \sqrt{15} + \sqrt{30} + 6$

c) $(\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{6})$

$= \sqrt{6}(\sqrt{3}) - \sqrt{6}(\sqrt{6}) - \sqrt{7}(\sqrt{3})$

$+ \sqrt{7}(\sqrt{6})$

$= 3\sqrt{2} - 6 - \sqrt{21} + \sqrt{42}$

d) $(\sqrt{5} - 9)(\sqrt{5} - 8)$

$= 77 - 17\sqrt{5}$

e) $(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{3})$

$= (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 8 - 3$

$= 5$

f) $(\sqrt{7} + 5)^2$

$= 32 + 10\sqrt{7}$

Página 54, Clase 2.14

1. La edad de Ana es 6 años.
2. Como el terreno es cuadrado y su área es 36 m², la medida de sus lados es $\sqrt{36} = 6$ m. En un lado caben $6 \div 0.3 = 20$ baldosas, como el terreno es cuadrado por todas habrán $20^2 = 20 \times 20 = 400$ baldosas. Por tanto, se deben comprar 400 baldosas
3. $\sqrt{196} = 14$ personas
4. a) $\sqrt{1296} = 36$ m

   b) 144 m

Página 60, Clase 1.1

1. a) Es cuadrática $x^2 = 121$

b) Es cuadrática $x^2 = \frac{81}{4}$

c) Es cuadrática $x^2 = 6.25$

d) No es cuadrática $3x + 6 = 9$

e) Es cuadrática $x^2 - x = 72$

f) No es cuadrática $2x = 8$

g) Es cuadrática $x^2 - 8x = 20$

h) No es cuadrática $7x = 14$

2. Según el problema. Si x y y son los dos números:

$x + y = 5$, $xy = -36$.

Si $x + y = 5$ entonces $y = 5 - x$

Sustituyendo en $xy = -36$

$x(5 - x) = -36$

$5x - x^2 = -36$

$x^2 - 5x = 36$

$x^2 - 5x - 36 = 0$. Es la ecuación.

Página 61, Clase 1.2

a) $x^2 - 2x + 9 = 0$. Es cuadrática.

b) $3x + 8 = 0$. No es cuadrática.

c) $7x^2 - x + 5 = 0$. Es cuadrática.

d) $x^2 - 2x = 0$. Es cuadrática.

e) $(x - 2)^2 = 0$. Es cuadrática.

f) $-2x + 5 = 0$. No es cuadrática.

g) $3x^2 - 9 = 0$. Es cuadrática.

h) $2x = 5$. No es cuadrática.

1. a) $x^2 - 4 = 0$

$(-5)^2 - 4 = 21$

$(5)^2 - 4 = 21$

-5 y 5 no son soluciones

$(-2)^2 - 4 = 0$

$2^2 - 4 = 0$

-2 y 2 son soluciones de la ecuación.

b) -5 es la única solución.

c) -3 y 2 son soluciones.

d) 2 es la única solución.

e) -7 y -5 son soluciones.

f) -7 es la única solución.

g) –3 es la única solución.
h) –1 es la única solución.

2. a) Es cuadrática.
   b) Es lineal.
   c) Es cuadrática.
   d) Es lineal.
   e) Es cuadrática.
   f) Es lineal.
   g) Es cuadrática.
   h) Es lineal.

Página 62, Clase 1.3

R

1. a) Es cuadrática.
   b) Es lineal.
   c) Es cuadrática.
   d) Es lineal.
2. a) –5 y 5 son soluciones.
   b) 3 es solución única.
   c) 5 y 3 son soluciones.
   d) 3 es solución única.

✎

1. a) $x^2 = 36$

   $x = \pm\sqrt{36}$

   $x = \pm 6$

   b) $x = \pm 8$ c) $x = \pm\frac{1}{4}$ d) $x = \pm\frac{4}{7}$

   e) $x = \pm 4$ f) $x = \pm 2$ g) $x = \pm\frac{1}{5}$

   h) $x = \pm\frac{4}{5}$

2. Sea s la edad de Sandra, se cumple que

   $(s + 7)(s - 7) = 95$

   $s^2 - 49 = 95$

   $s^2 = 144$

   $s = \pm\sqrt{144}$

   $s = \pm 12$

   Dado que $s > 0$, la edad de Sandra es 12 años.

Página 63, Clase 1.4

R

1. a) –7 y 7
   b) Ningún valor es solución
   c) –6 y 7
   d) Ningún valor es solución
2. a) $x^2 = 49$

   $x = \pm\sqrt{49}$

   $x = \pm 7$

   b) $x = \pm\frac{1}{9}$ c) $x = \pm 6$ d) $x = \pm\frac{7}{6}$

✎

1. a) $3x^2 = 12$

   $x^2 = \frac{12}{3}$

   $x^2 = 4$

   $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

   b) $x = \pm\frac{5}{4}$ c) $x = \pm\frac{1}{3}$

   d) $x = \pm\sqrt{2}$ e) $x = \pm 4$

   f) $x = \pm\frac{7}{6}$ g) $x = \pm\frac{1}{4}$

   h) $x = \pm 2$

2. Sea x el día de la apertura de la olimpiada. Se obtiene la ecuación:

   $(x - 7)^2 + (x + 7)^2 = 386$

   Resolviendo, $x = 12$.

   La fecha fue 12 de julio del 2017.

Página 64, Clase 1.5

R

1. a) $x = \pm 4$ b) $x = \pm\frac{1}{8}$

   c) $x = \pm\frac{2}{7}$ d) $x = \pm\frac{4}{9}$

2. a) $x = \pm 2$ b) $x = \pm 1$

   c) $x = \pm\frac{3}{5}$ d) $x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$

✎

1. a) $(x + 6)^2 = 25$

   Sea $w = x + 6$

   $w^2 = 25$

   $w = \pm\sqrt{25}$

   $w = \pm 5$

   $x + 6 = \pm 5$ Sustituyendo w

   $x + 6 = 5$ y $x + 6 = -5$

   $x = -1$ y $x = -11$

   b) $x = 3 + \sqrt{5}$ y $x = 3 - \sqrt{5}$

   c) $x = -7 + 3\sqrt{2}$ y $x = -7 - 3\sqrt{2}$

   d) $x = 9$

   e) $(x - 9)^2 - 49 = 0$

   $(x - 9)^2 = 49$

   Sea $w = x - 9$

   $w^2 = 49$

   $w = \pm 7$

   $x - 9 = \pm 7$ Sustituyendo w

   $x - 9 = 7$ y $x - 9 = -7$

   $x = 16$ y $x = 2$

   f) $x = -8 + \sqrt{7}$ y $x = -8 - \sqrt{7}$

   g) $x = 5 + 3\sqrt{5}$ y $x = 5 - 3\sqrt{5}$

   h) $x = 3$ y $x = 2$

2. Sea x el ancho del camino, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

   $(14 - x)^2 = 144$

   $14 - x = 12$ $14 - x = -12$

   $x = 2$ $x = 26$

Se descarta la segunda respuesta porque entonces el ancho del camino es mayor que el lado del terreno. Por tanto, el ancho debe ser 2 m.

Página 65, Clase 1.6

R

1. a) $5x^2 = 45$

   $x^2 = \frac{45}{5}$

   $x = \pm 9$

   $x = \pm 3$

   b) $x = \pm\sqrt{15}$

   c) $x = \pm\frac{7}{6}$

   d) $\pm\frac{2\sqrt{77}}{11}$

2. a) $(x - 3)^2 = 36$

   $x - 3 = 6$ y $x - 3 = -6$

   $x = 9$ y $x = -3$

   b) $4 + 2\sqrt{10}$ y $4 - 2\sqrt{10}$

   c) $-4 - \sqrt{3}$ y $-4 + \sqrt{3}$

   d) $x = \frac{6}{5}, x = \frac{2}{5}$

✎

a) $x^2 - 7x = 0$

   $x(x - 7) = 0$

   $\Rightarrow x = 0$ y $x - 7 = 0$

   $\Rightarrow x = 0$ y $x = 7$

b) $x = 0$ y $x = 1$

c) $x = 0$ y $x = -\frac{5}{6}$

d) $x = 0$ y $x = -\frac{1}{8}$

e) $-x^2 + 2x = 0$

   $x(-x + 2) = 0$

   $\Rightarrow x = 0$ y $-x + 2 = 0$

   $\Rightarrow x = 0$ y $x = 2$

f) $x = 0$ y $x = -9$

g) $x = 0$ y $x = \frac{1}{6}$

h) $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$

Página 66, Clase 1.7

R

1. a) $(x+3)^2 = 49$
   $x + 3 = 7$ y $x + 3 = -7$
   $x = 4$ y $x = -10$
   b) $x = 0$ y $x = 14$
   c) $x = -3 + \sqrt{5}$ y $x = -3 - \sqrt{5}$
   d) $x = -3$ y $x = 13$
2. a) $x^2 - 4x = 0$
   $x(x - 4) = 0$
   $\Rightarrow x = 0$ y $x - 4 = 0$
   $\Rightarrow x = 0$ y $x = 4$
   b) $x = 0$ y $x = -\frac{3}{7}$
   c) $x = 0$ y $x = 16$
   d) $x = 0$ y $x = -4$

✎

a) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$
$\Rightarrow x - 5 = 0$
$x = 5$
b) $x = -1$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{3}$
e) $x = -\frac{3}{2}$ f) $x = \frac{1}{8}$

Página 67, Clase 1.8

R

1. a) $x^2 - 9x = 0$
   $x(x - 9) = 0$
   $\Rightarrow x = 0$ y $x - 9 = 0$
   $\Rightarrow x = 0$ y $x = 9$
   b) $x = 0$ y $x = -1$
   c) $x = 0$ y $x = \frac{7}{10}$
   d) $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$
2. a) $x^2 - 8x + 16 = 0$
   $(x - 4)^2 = 0$
   $x - 4 = 0$
   $x = 4$
   b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = \frac{1}{3}$

✎

1. a) $(x - 5)(x - 3) = 0$
   $x - 5 = 0$ y $x - 3 = 0$
   $x = 5$ y $x = 3$
   b) $x = -7$ y $x = 1$
   c) $x = 9$ y $x = -8$
   d) $x^2 - 8x + 15 = 0$
   $(x - 5)(x - 3) = 0$
   $x = 5$ y $x = 3$
   e) $x = 9$ y $x = -8$
   f) $x = 3$ y $x = -10$
2. Sea x el primero de los números $x^2 + (x + 1)^2 = 113$ y los números que cumplen son $x = 7$ y $x = -8$.

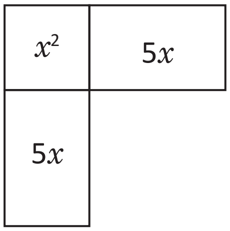
Página 68, Clase 1.9

R

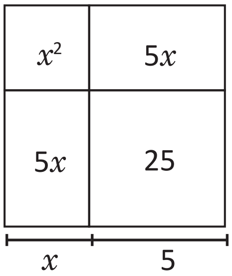
1. a) $x^2 + 22x + 121 = 0$
   $(x + 11)^2 = 0$
   $x = -11$
   b) $x = -\frac{4}{5}$ c) $x = \frac{1}{5}$
2. a) $x^2 + 10x + 21 = 0$
   $(x + 3)(x + 7) = 0$
   $x + 3 = 0$ y $x + 7 = 0$
   $x = -3$ y $x = -7$
   b) $x = -3$ y $x = 7$
   c) $x = -6$ y $x = 5$

✎

a) $x^2 + 10x = 24$
Se forma la figura



Área: $x^2 + 10x = 24$



Completando:
$x^2 + 10x + 25 = 24 + 25$
$(x + 5)^2 = 49$
Esto se cumple si $x = 2$
b) $x = 9$, es la solución positiva.

Página 69, Clase 1.10

R

1. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   $(x - 3)(x - 2) = 0$
   $x - 3 = 0$ y $x - 2 = 0$
   $x = 3$ y $x = 2$
   b) $x = -7$ y $x = 8$
   c) $x = -11$ y $x = 6$
2. $x = 7$, es la solución positiva.

✎

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$
$x^2 + 4x = 1$
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$x^2 + 4x + 2^2 = 1 + 2^2$
$x^2 + 2(2x) + 2^2 = 5$
$(x + 2)^2 = 5$
$x + 2 = \pm\sqrt{5}$
$x = -2 \pm \sqrt{5}$
$\Rightarrow x = -2 + \sqrt{5}$ y $x = -2 - \sqrt{5}$
b) $(x + 7)^2 = 9 \Rightarrow x = -4$ y $x = -10$
c) $(x - 3)^2 = 8$
$\Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}$ y $x = 3 - 2\sqrt{2}$
d) $x^2 - 3x - 5 = 0$
$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{20}{4} + \frac{9}{4}$
$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$ y $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$
e) $(x - 3)^2 = 3$
$\Rightarrow x = 3 + \sqrt{3}$ y $x = 3 - \sqrt{3}$
f) $(x + 3)^2 = 5$
$\Rightarrow x = -3 + \sqrt{5}$ y $x = -3 - \sqrt{5}$

Página 70, Clase 1.11

R

1. $x = 1$, es la solución positiva
2. a) $x^2 - x - 10 = 0$
   $x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{40}{4} + \frac{1}{4}$
   $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{41}}{2}$
   $\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$ y $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$
   b) $(x + 1)^2 = 8$
   $\Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{2}$ y $x = -1 - 2\sqrt{2}$

a) $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$

b) $x = \frac{1}{2}$ y $x = -1$

c) $3x^2 + x - 1 = 0$

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$
$$x^2 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{2(3)}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2(3)}\right)^2$$
$$x^2 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$
$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$
$$x + \frac{1}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}}$$
$$x = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Página 71, Clase 1.12

1. a) $x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x^2 - 6x = -2$$
$$x^2 - 6x + 3^2 = -2 + 3^2$$
$$(x - 3)^2 = 7$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{7}$$
$$\Rightarrow \; x = 3 + \sqrt{7} \text{ y } x = 3 - \sqrt{7}$$

b) $(x - 2)^2 = 5$

$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{5} \text{ y } x = 2 - \sqrt{5}$$

2. a) $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$

b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$

a) $2x^2 - x - 2 = 0$

Si se sustituye $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

b) $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -1$

c) $x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$

d) $x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10}$

e) $x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{8}$

f) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$

Página 72, Clase 1.13

1. $x = \frac{1 \pm \sqrt{101}}{10}$

2. a) $5x^2 - x - 1 = 0$

$a = 5$, $b = -1$, $c = -1$;

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{10}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$$

b) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

c) $x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$

a) $3x^2 - x - 2 = 0$

$a = 3$, $b = -1$, $c = -2$;

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{6}$$
$$x = 1 \text{ y } x = -\frac{2}{3}$$

b) $x = 3$ y $x = \frac{1}{2}$

c) $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = -\frac{1}{3}$

e) $2x^2 - 2x - 2 = 0$

$a = 2$, $b = -2$, $c = -2$;

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{4}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{4}$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{4}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

f) $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$

Página 73, Clase 1.14

1. a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

$a = 2$, $b = 3$, $c = -1$;

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{4}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

b) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$

c) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$

2. a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$a = 2$, $b = 5$, $c = -3$;

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$
$$\Rightarrow \; x = -3 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

b) $x = -1$ y $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = -1$ y $x = \frac{1}{6}$

1. a) $x^2 - \frac{49}{4} = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$$
$$x = \pm\frac{7}{2}$$

b) $x = 4$ y $x = -2$

c) $x = 12$ y $x = -3$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

$a = 1$, $b = 1$, $c = -1$;

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e) $x = 0$ y $x = -\frac{5}{2}$

f) $x = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{4}$

2. Se plantea la ecuación: $(2x + 4)(x + 1) = 24$. Dado que $2x + 4 > 0$ y $x + 1 > 0 \Rightarrow x = 2$.

Página 75, Clase 2.1

a) $x^2 - \frac{9}{16} = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{16}}$$
$$x = \pm\frac{3}{4}$$

b) $x = 2$ y $x = -2$

c) $x = 6$ y $x = 2$

d) $x = 1$ y $x = -2$

e) $x = 0$ y $x = -\frac{5}{12}$
f) $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

1. a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
Utilizando el discriminante
$b^2 - 4ac$
$6^2 - 4(1)(9) = 0$.
Por tanto, la ecuación tiene 1 solución.
b) Discriminante = –3
La ecuación tiene 0 soluciones.
c) Discriminante = 81
La ecuación tiene 2 soluciones.
d) Discriminante = –28
La ecuación tiene 0 soluciones.
e) Discriminante = –7
La ecuación tiene 0 soluciones.
f) Discriminante = 0
La ecuación tiene 1 solución.
2. Sea $\$x$, el número de dólares que se reducen del precio original.
Se obtiene la ecuación:
$(200 + 28x)(10 - x) = 3\,000$
$28x^2 - 80x + 1\,000 = 0$
$7x^2 - 20x + 250 = 0$
El discriminante es un número negativo. Por lo tanto, no es posible obtener una ganancia de $3,000.

Página 76, Clase 2.2

1. a) $6x^2 - 54 = 0$
$x^2 = \frac{54}{6}$
$x^2 = 9$
$\Rightarrow x = 3$ y $x = -3$
b) $x = 0$ y $x = -\frac{9}{49}$
c) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$
2. a) Discriminante –8, 0 soluciones.
b) Discriminante 0, 1 solución.
c) Discriminante 25, 2 soluciones.

1. Sean x y y los dos números.
Se cumple que
$x + y = 6$, $xy = 10$.
Utilizando la primera ecuación:
$x + y = 6$
Multiplicando por x:
$x^2 + xy = 6x$
Sustituyendo $xy = 10$
$x^2 + 10 = 6x$
$x^2 - 6x + 10 = 0$
Analizando el discriminante
$(-6)^2 - 4(1)(10) = -4 < 0$.
La ecuación no tiene soluciones en los números reales, por tanto, no existen dos números que cumplan estas condiciones.
2. a) Sean x m y y m las longitudes de los lados del terreno. Se puede plantear:
$2(x + y) = 22$ y $xy = 31$
Se obtiene la ecuación:
$x^2 - 11x + 31 = 0$
Analizando el discriminante
$(-11)^2 - 4(1)(31) = -3 < 0$
b) Se puede plantear la ecuación, $x^2 - 11x + 30 = 0$.
Luego de resolver, se obtiene que las longitudes de los lados son 6 m y 5 m.

Página 77, Clase 2.3

1. a) Discriminante 13, 2 soluciones.
b) Discriminante 0, 1 solución.
c) Discriminante –4, 0 soluciones.
2. $c = 9$

1. Sea x m el ancho del camino. Se plantea la ecuación:
$(12 - x)(22 - x) = 200$. Al resolver se obtiene que la longitud del ancho del camino debe ser 2 m.
2. Sea x el largo de la sección destinada para ejemplos.
$(0.7 + x)x = 0.6$
Se puede transformar en
$10x^2 + 7x - 6 = 0$
Al resolver, $x = 0.5$ m.
El largo del papel es 1.2 m y el ancho 0.5 m.

Unidad 4

Página 82, Clase 1.1

a) y es directamente proporcional a x. La constante de proporcionalidad es 2.
b) y es directamente proporcional a x. La constante de proporcionalidad es 3.

1. a) $y = 4x^2$

x	1	3	4	5	6	7	8
x^2	1	9	16	25	36	49	64
y	4	36	64	100	144	196	256

b) $y = \frac{1}{3}x^2$

x	1	3	4	5	6	7	8
x^2	1	9	16	25	36	49	64
y	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{16}{3}$	$\frac{25}{3}$	12	$\frac{49}{3}$	$\frac{64}{3}$

2. De los datos de la tabla, y se puede escribir en términos de x, como $y = 3x^2$.
Por tanto, y es directamente proporcional al cuadrado de x.

Página 83, Clase 1.2

1. $y = 0.2x^2$

x	6	7	8	9	10
x^2	36	49	64	81	100
y	7.2	9.8	12.8	16.2	20

2. De los datos de la tabla, y se puede escribir en términos de x, como $y = -2x^2$.
Por tanto, y es directamente proporcional al cuadrado de x.

a) $y = ax^2$
$90 = a(3)^2$
$a = \frac{90}{9}$
$a = 10$

b) $a = \frac{3}{32}$

c) $a = \frac{5}{27}$

d) $a = -5$

Página 84, Clase 1.3

1. $y = 8x^2$

x	3	4	5	6	7	8
x^2	9	16	25	36	49	64
y	72	128	200	288	392	512

2. a) $y = ax^2$

$$112 = a(4)^2$$
$$a = \frac{112}{16}$$
$$a = 7$$

b) $a = -\frac{1}{6}$

1. Si $x = -3$, $y = 9$
   Si $x = 3$, $y = 9$
   Los valores de y son iguales.
   Si $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{9}$
   Si $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{9}$
   Los valores de y son iguales.
2. a) -4
   b) $\frac{1}{2}$
   c) $-\sqrt{2}$

Página 85, Clase 1.4

1. $a = -\frac{5}{12}$
2. $x = -\sqrt{3}$
   $x = \sqrt{5}$

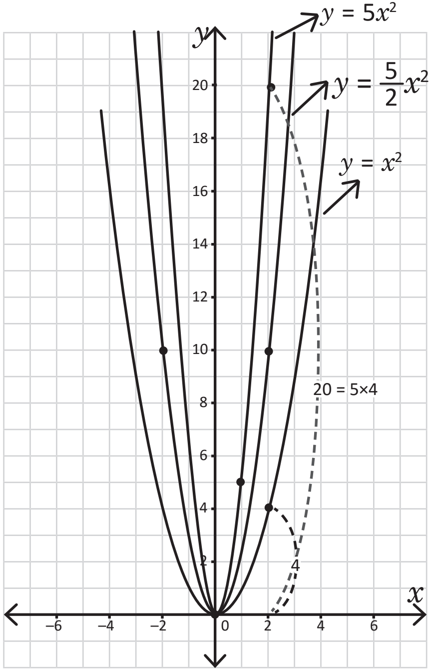
a) La gráfica de $y = 5x^2$ resulta de multiplicar por 5 los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4 ×5	1 ×5	0 ×5	1 ×5	4 ×5
$5x^2$	20	5	0	5	20

Ambas gráficas pasan por el origen

Además $y = 5x^2$ está por arriba de $y = x^2$.

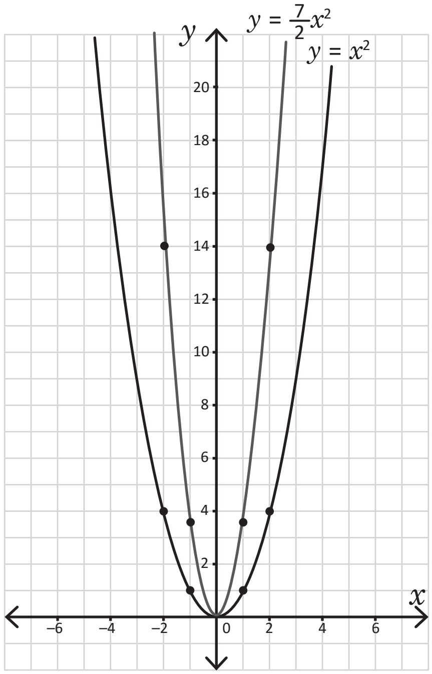
Gráfica de a) y b)



Página 86, Clase 1.5

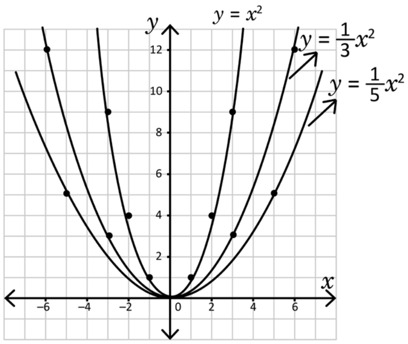
1. $x = \sqrt{7}$, $x = -\frac{1}{3}$
2. La gráfica de $y = \frac{7}{2}x^2$ resulta de multiplicar por $\frac{7}{2}$ los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4 $\times\frac{7}{2}$	1 $\times\frac{7}{2}$	0 $\times\frac{7}{2}$	1 $\times\frac{7}{2}$	4 $\times\frac{7}{2}$
$\frac{7}{2}x^2$	14	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	14



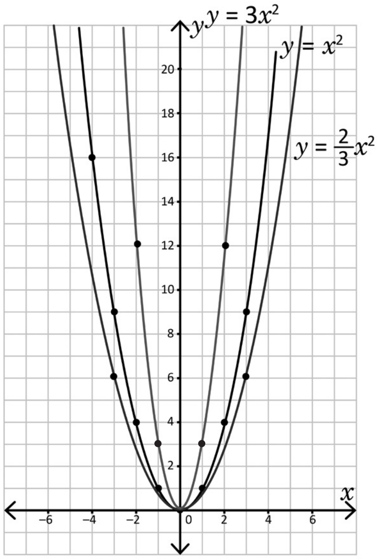
Además $y = \frac{7}{2}x^2$ está por debajo de $y = x^2$.

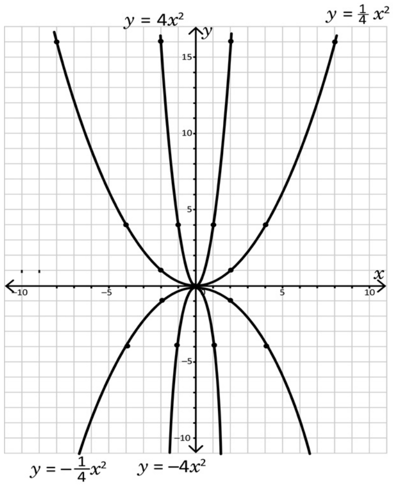
Gráfica de a) y b)



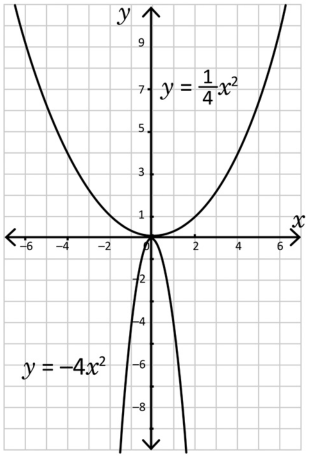
Página 87, Clase 1.6

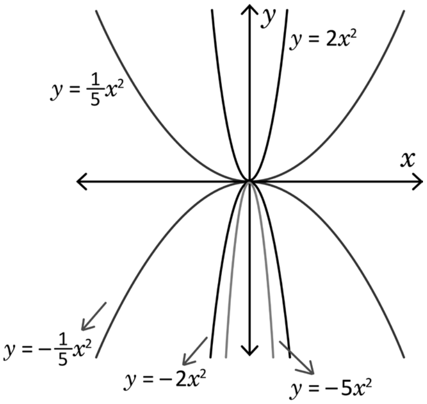
Gráfica de a) y b)



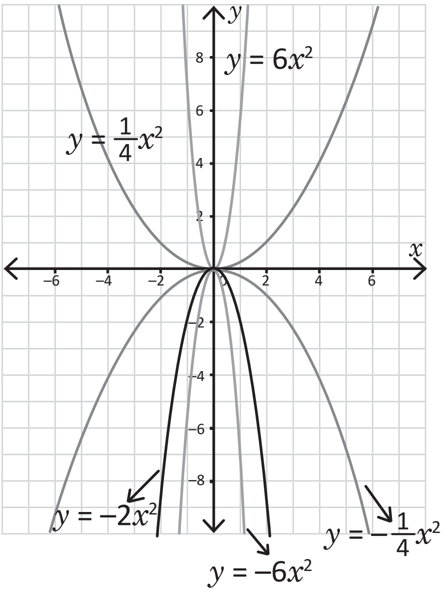


Página 88, Clase 1.7



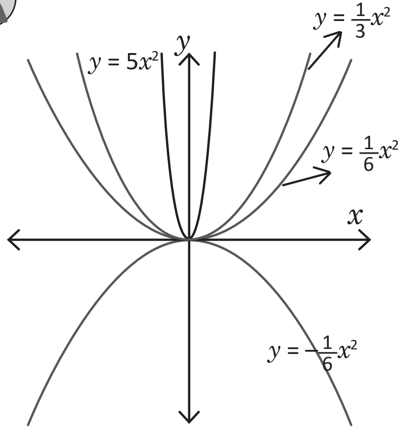


Página 89, Clase 1.8



1. a) Si $y = 4x^2$, y aumenta de 4 a 16.
   Si $y = -4x^2$, y disminuye de –4 a –16.
   b) Si $y = 4x^2$, y disminuye de 64 a 16.
   Si $y = -4x^2$, y aumenta de –64 a –16.
2. a) Si $y = \frac{1}{3}x^2$, y disminuye de 3 a $\frac{1}{3}$
   Si $y = -\frac{1}{3}x^2$, y aumenta de –3 a $-\frac{1}{3}$
   b) Si $y = \frac{1}{3}x^2$, y aumenta de $\frac{25}{3}$ a 12.
   Si $y = -\frac{1}{3}x^2$, y disminuye de $-\frac{25}{3}$ a –12.

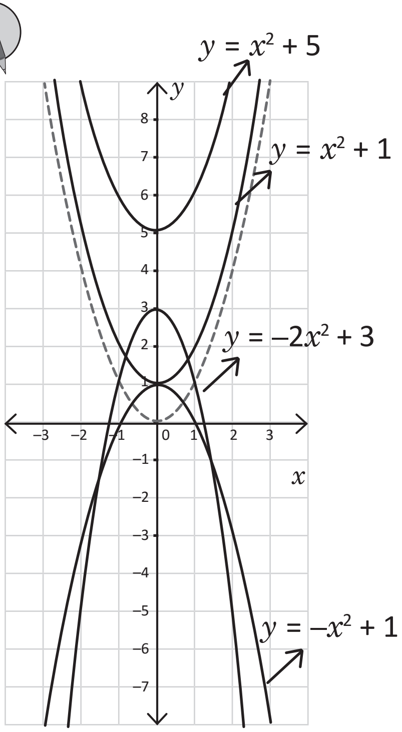
Página 90, Clase 1.9



2. a) Si $y = \frac{1}{5}x^2$, y aumenta de $\frac{4}{5}$ a 5.
   Si $y = -\frac{1}{5}x^2$, y disminuye de $-\frac{4}{5}$ a –5.
   b) Si $y = \frac{1}{5}x^2$, y disminuye de 20 a 5.
   Si $y = -\frac{1}{5}x^2$, y aumenta de –20 a –5.

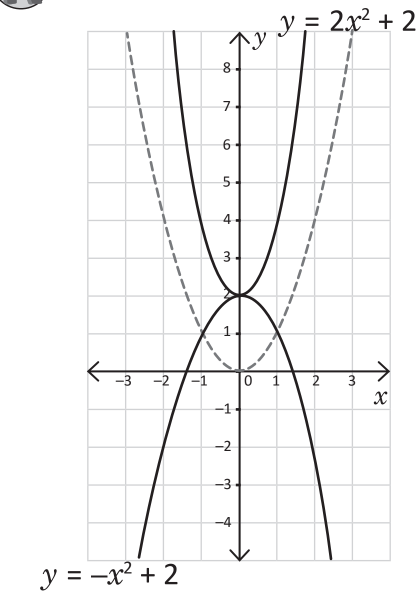
1. El valor mínimo de y es 0 (cuando x = 0), el valor máximo de y es 4 (cuando x = 4).
   Por tanto, y se encuentra entre 0 y 4.
2. y se encuentra entre –45 y 0.
3. El valor máximo de la función sucede cuando x = –4, en este caso y = 8.

Página 92, Clase 2.1

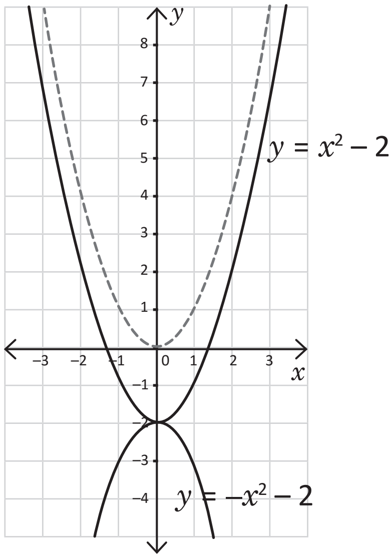


a) Vértice:(0,1)
b) Vértice:(0,1)
c) Vértice:(0,5)
d) Vértice:(0,3)

Página 93, Clase 2.2

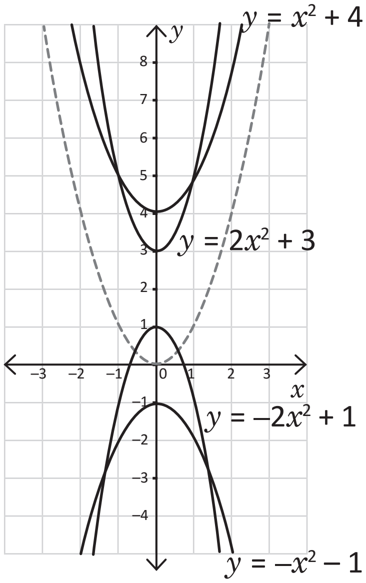


Vértice para a) y b): (0,2)



Vértice para a) y b): (0,–2)

Página 94, Clase 2.3



a) Vértice: (0, 4)
b) Vértice: (0, –1)
c) Vértice: (0, 3)
d) Vértice: (0, 1)

1. a) $c = -2$, $a = 3$; $y = 2x^2 + 3$
   b) $c = 5$, $a = -\frac{5}{9}$; $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$

2. Con los datos del problema, se pueden formar las ecuaciones: $a + c = 2$ y $4a + c = 17$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores $a = 5$ y $c = -3$. Por tanto, la ecuación es $y = 5x^2 - 3$.

Página 100, Clase 1.1

1. a) a es $\frac{1}{3}$ de b.
   b) a es $\frac{1}{4}$ de b.
   c) b es $\frac{9}{12}$ de c. Simplificando, b es $\frac{3}{4}$ de c.
2. La altura de la portería debe ser $7.32 \times \frac{1}{3} = 2.44$ m
3. La hipotenusa del triángulo mide $6 \times \frac{5}{3} = 10$ cm.
4. Tres posibles medidas: sean a y b los dos segmentos.
   Se cumple, $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, expresado de otra forma $a = \frac{2}{3}b$.
   Si $b = 3$ entonces $a = 2$.
   Si $b = 6$ entonces $a = 4$.
   Si $b = 9$ entonces $a = 6$.

Página 101, Clase 1.2

1. a) a es $\frac{2}{3}$ de b.
   b) b es $\frac{3}{5}$ de c.
   c) a es $\frac{2}{5}$ de c.
2. $\frac{d}{e} = \frac{2}{5}$, entonces $d = \frac{2}{5}e = 4$.
3. $g = \frac{4}{3}f = 8$.

1. a) Razón entre alturas:
   $\frac{6}{9}$. Simplificando $\frac{2}{3}$
   Razón entre las bases:
   $\frac{8}{12}$. Simplificando $\frac{2}{3}$
   Las razones coinciden, por tanto son proporcionales.
   b) No son proporcionales.
2. Como se menciona a y b, es proporcional a c y d , debe escribirse:

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{6}{10} = \frac{12}{d}$
   $\frac{10}{6} = \frac{d}{12}$

   Luego $d = \frac{10}{6} \times 12 = 20$.
   La longitud del segmento d debe ser 20 cm.

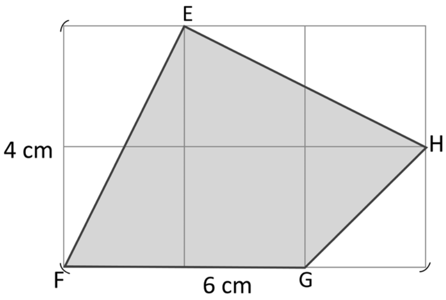
Página 102, Clase 1.3

1. Sea b la base y a la altura.

$$b:a = 3:4$$
$$9:a = 3:4$$
$$9 \times 4 = 3 \times a$$
$$36 = 3a$$
$$a = 12$$

2. Son proporcionales, la razón entre los lados es 5:4.
3. $c = \frac{5}{2}$

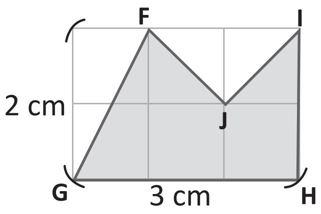
Para ampliar al doble, debes realizar una cuadrícula donde cada celda tenga por lado 2 cm, ya que en la figura original, cada celda tiene 1 cm por lado.



La imagen mostrada, no tiene las medidas reales.

Página 103, Clase 1.4

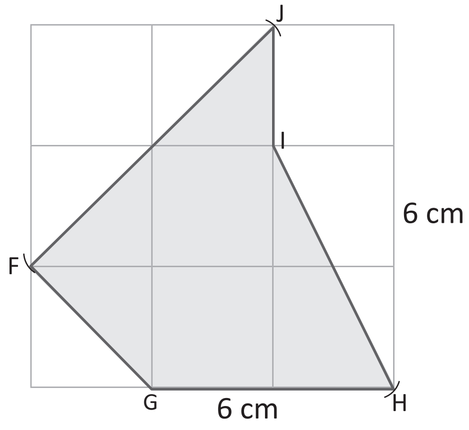
1. $b = 15$
2. Ejemplo de esquema resultante



1. Las figuras están rotadas
   ∢A es correspondiente con ∢G
   ∢B es correspondiente con ∢H
   ∢C es correspondiente con ∢E
   ∢D es correspondiente con ∢F
2. ∢A es correspondiente con ∢F
   ∢B es correspondiente con ∢G
   ∢C es correspondiente con ∢H
   ∢D es correspondiente con ∢I
   ∢E es correspondiente con ∢J

Página 104, Clase 1.5

1. El esquema de la figura resultante, ampliada al doble.



2. ∢A es correspondiente con ∢F
   ∢B es correspondiente con ∢G
   ∢C es correspondiente con ∢H
   ∢D es correspondiente con ∢I
   ∢E es correspondiente con ∢J

1. Los lados correspondientes son:
   AB con DF
   BC con FE
   CA con ED

De la imagen. DF = 3AB ⇒ $\frac{AB}{DF} = \frac{1}{3}$

FE = 3BC ⇒ $\frac{BC}{FE} = \frac{1}{3}$

ED = 3CA ⇒ $\frac{CA}{ED} = \frac{1}{3}$

La razón de semejanza es $\frac{1}{3}$.

2. Los lados correspondientes son:
   DC con FE
   DA con FG
   AB con GH
   BC con HE

De la imagen. FE = 2DC ⇒ $\frac{DC}{FE} = \frac{1}{2}$

FG = 2DA ⇒ $\frac{DA}{FG} = \frac{1}{2}$

GH = 2AB ⇒ $\frac{AB}{GH} = \frac{1}{2}$

HE = 2BC ⇒ $\frac{BC}{HE} = \frac{1}{2}$

La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Página 105, Clase 1.6

1. Las figuras están rotadas
   ∢E = ∢F, ∢D = ∢G, ∢C = ∢H,
   ∢B = ∢I, ∢A = ∢J.
2. Los lados homólogos son:
   BC con ED
   CA con DF
   AB con FE

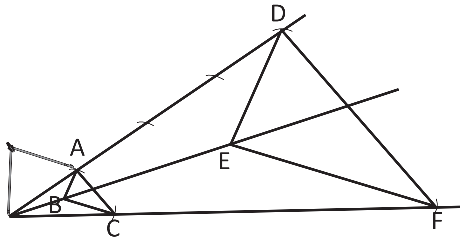
De la imagen. ED = 2BC ⇒ $\frac{BC}{ED} = \frac{1}{2}$

CA = 2DF ⇒ $\frac{CA}{DF} = \frac{1}{2}$

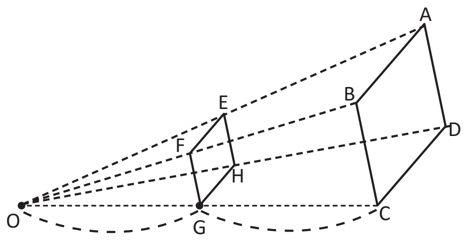
FE = 2AB ⇒ $\frac{AB}{FE} = \frac{1}{2}$

La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

1. Utilizando regla y compás.



2. Ejemplo de solución.
   Utilizando regla y compás.

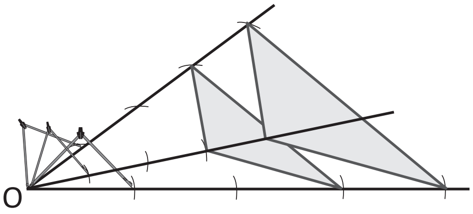


Página 107, Clase 2.1

1. a) Ángulos iguales:
   ∢A con ∢E, ∢B con ∢F, ∢C con ∢D.
   Lados proporcionales:
   AC con ED, AB con EF, BC con FD.
   Son semejantes, ya que
   ∢A = ∢E, ∢B = ∢F, ∢C = ∢D y los lados son proporcionales.
   La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.
   b) Ángulos iguales:
   ∢B con ∢H, ∢C con ∢G, ∢D con ∢F, ∢A con ∢E.
   Lados proporcionales:
   DC con FG, CB con GH, BA con HE, AD con EF.
   Las figuras son semejantes, ya que ∢B = ∢H, ∢C = ∢G, ∢D = ∢F, ∢A = ∢E y los lados son proporcionales.
   La razón de semejanza es $\frac{1}{3}$.

2. Si la razón de semejanza es 3:4, significa que por cada 3 distancias del primer triángulo, hay 4 distancias del segundo.

   Ejemplo de solución:
   Se fija un punto O y se trazan tres rectas desde O, en cada recta se toman distancias arbitrarias, utilizando el compás.



1. Se cumple que
   $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{3}$, esta razón se obtiene luego de simplificar.
   Por tanto, sus lados son proporcionales. Y por el criterio LLL, ΔABC~ΔDEF.

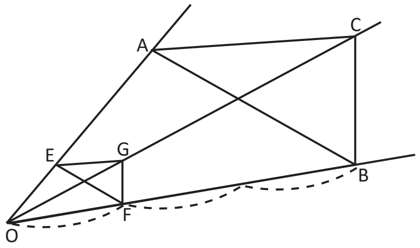
2. Para que sean semejantes, se debe cumplir que

$$\frac{4}{y} = \frac{6}{9} = \frac{x}{12}$$

   Tomando la primera igualdad:
   $\frac{4}{y} = \frac{6}{9}$ y resolviendo $y = 6$.
   Tomando la segunda igualdad:
   $\frac{6}{9} = \frac{x}{12}$ y resolviendo $x = 8$.

Página 108, Clase 2.2

1. La razón 3:1 significa que por cada 3 partes del triángulo ABC hay 1 parte del triángulo DEF, es decir los lados de ΔDEF son la tercera parte de sus correspondientes homólogos en ΔABC.



2. ΔGHI ~ ΔABC por LLL, pero ΔDEF no lo es, ya que, un par de lados correspondientes no son proporcionales.
3. Los valores son, $x = 9$ y $y = 7.5$.

1. a) Como ∢A = ∢D, ∢B = ∢E. Por el criterio AA, los triángulos son semejantes.
   b) Utilizando que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°, pueden encontrarse los ángulos faltantes y se observa que son iguales, luego, por el criterio AA los triángulos son semejantes.
2. a) En el ΔABC:
   ∢A + 84° + 60° = 180°, entonces ∢A = 36°.
   Por tanto, ∢A = ∢D y ∢DEF = ∢ABC = 84°.
   b) Las figuras están rotadas.
   ∢DEF = 40°

Página 109, Clase 2.3

Luego de encontrar todos los ángulos de ΔABC y ΔGIH. Por el criterio AA, ΔABC~ΔGIH.
ΔDEF~ΔIGH por el criterio LLL, la razón de semejanza es $\frac{2}{3}$.
ΔDEF~ΔJKL por el criterio LLL, la razón de semejanza es 2.
Nota: Si ΔDEF~ΔIGH y ΔDEF~ΔJKL entonces ΔIGH~ΔJKL. De igual forma: ΔABC~ΔEDF y ΔABC~ΔKJL.
Todos los triángulos son semejantes.

Para ΔABC y ΔHIG, se tiene que ∢B = ∢I, también $\frac{AB}{HI} = \frac{BC}{IG} = \frac{2}{3}$. Por el criterio LAL, ΔABC~ΔHIG.
Para ΔABC y ΔLJK, se tiene que ∢J= ∢B, también $\frac{AB}{LJ} = \frac{BC}{JK} = \frac{1}{3}$. Por el criterio LAL, ΔABC~ΔJKL.
Por tanto, únicamente ΔABC~ΔJKL, ΔABC~ΔHIG y ΔJKL~ΔHIG.
La razón de semejanza correspondiente es $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y 2.

Página 112, Clase 3.1

Para ΔGHI, se tiene que ∢I = 24.2°, y dado que ∢I = ∢C y ∢H = ∢B, por el criterio AA, ΔABC~ΔGHI.
Para ΔDEF, se tiene que
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{5}$.
Por el criterio LLL, ΔABC~ΔDEF.

1. Como M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ se puede utilizar el teorema de la base media. Por tanto, $\overline{MN} = \frac{12}{2} = 6$.
2. Utilizando el teorema sobre la base media, se puede concluir que $x = 2$.

Página 113, Clase 3.2

1. Observando los triángulos ΔABC y ΔBDC, se sabe que $\sphericalangle A = \sphericalangle CBD$ y comparten $\sphericalangle C$. Luego, por el criterio AA $\Delta ABC \sim \Delta BDC$. Se cumple entonces:
$$\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$
$$CD = \frac{BC}{AC} \times BC$$
$$CD = \frac{12}{16} \times 12$$
$$CD = 9$$
2. AB = 7
3. $x = \frac{5}{2}$

1. Como M es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ entonces:
$$\overline{MN} = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}$$
Como $\sphericalangle N = \sphericalangle C$ por ser correspondientes entre paralelas y comparten $\sphericalangle A$, $\Delta ABC \sim \Delta AMN$. Así que
$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$
$$AN = \frac{MN}{BC} \times AC$$
$$AN = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$
2. $y = 1$

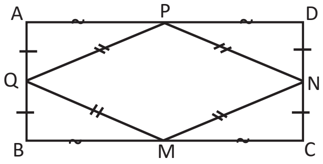
Página 114, Clase 3.3

1. $x = 3$, BC = 10.
2. DF = 6 cm, $EN = \frac{11}{2}$

Se traza la diagonal $\overline{BD}$.
Como M es punto medio de $\overline{AB}$ y Q es punto medio de $\overline{AD}$.
Por el teorema de la base media:
$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$, $\overline{PN} \parallel \overline{BD}$ entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{PN}$.
Se traza la diagonal $\overline{AC}$.
Por el teorema de la base media
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. Entonces, $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$.
Como $\overline{MQ} \parallel \overline{PN}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$, el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.
Puede utilizarse también que un cuadrilátero es un paralelogramo si un par de lados opuestos son paralelos y congruentes.
Por el teorema de la base media:
$MQ = \frac{1}{2}BD$ y $MQ \parallel BD$, $NP = \frac{1}{2}BD$ y $NP \parallel BD$
Luego, MNPQ es paralelogramo.

Página 115, Clase 3.4

1. $y = 4$, $BN = \frac{15}{2}$.
2. Sean M, N, P, Q los puntos medios de $\overline{BM}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Por el resultado de la clase anterior:
$PQ = \frac{1}{2}BD = MN$.
$QM = \frac{1}{2}AC = PN$.
Si ABCD es rectángulo, AC = BD.
Entonces, PQ = QM = MN = NP.
Por tanto PQMN es rombo.



1. a) Como $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, $\Delta ABC \sim \Delta ADF$.
Como $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\Delta ABC \sim \Delta FEC$.
b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$, $\frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{EF}{AB}$.
2. Se puede concluir que $\Delta GHI \sim \Delta JHK$. Utilizando los resultados de semejanza se obtiene $GH = \frac{15}{2}$.

Página 116, Clase 3.5

1. Utilizando el teorema de la base media repetidas veces se puede mostrar que, SR = PQ = 2 cm y también $PS = QR = \frac{7}{2}$.
2. $\Delta GEH \sim \Delta DEF$ y $\Delta IHF \sim \Delta DEF$.
También $\frac{GE}{DE} = \frac{GH}{DF} = \frac{EH}{EF}$.
Y además $\frac{IF}{DF} = \frac{IH}{DE} = \frac{HF}{EF}$.

1. Utilizando el resultado de la clase
$$\frac{DC}{AD} = \frac{EC}{BE}$$
$$\frac{12}{4} = \frac{9}{BE}$$
$$BE = \frac{4}{12} \times 9$$
$$BE = 3$$
2. Ya que $\overline{IJ} \parallel \overline{KL}$ se puede utilizar el resultado de la clase y se tiene $\frac{x}{6} = \frac{2}{4}$, entonces $x = 3$, también $\overline{KL} \parallel \overline{GH}$ y se obtiene $\frac{y}{9} = \frac{3}{6}$, de donde $y = \frac{9}{2}$.

Página 117, Clase 3.6

1. $\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{AC}$, $BD = \frac{27}{4}$
2. $\frac{EH}{HF} = \frac{EG}{GD}$, EH = 10

Utilizando el resultado de la clase puede justificarse que $DE \parallel CB$. Por lo tanto, $\sphericalangle ACB = 85°$ y $\sphericalangle CBA = 60°$.

Página 118, Clase 3.7

1. $x = 4$, $y = 12$.
2. Como $GH \parallel DE$, $\sphericalangle FHG = 135°$

Utilizando el resultado de la clase:
a) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
b) $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$
c) No puede concluirse que $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ ya que no se describe ninguna proporción entre los lados AE, EB, Y CF, FB.

Página 119, Clase 3.8

1. Utilizando el resultado de la clase 3.6 se puede mostrar que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces $\sphericalangle CED = 46°$.

2. Utilizando el resultado de la clase anterior se puede demostrar que $\overline{KJ} \parallel \overline{HI}$ y $\overline{KL} \parallel \overline{GI}$.

1. a) Utilizando el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo.

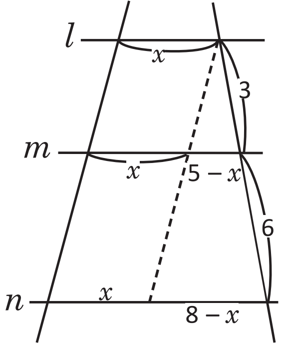
$$\frac{x}{5} = \frac{15}{6}$$
$$x = \frac{15}{6} \times 5$$
$$x = \frac{25}{2}$$

b) Aunque las rectas se crucen puede utilizarse el teorema visto en la clase, obteniendo la relación:

$$\frac{x}{10} = \frac{10}{12.5}$$

Resolviendo, $x = 8$.

2. Utilizando la sugerencia:



En el triángulo formado se cumple la relación:

$$\frac{5 - x}{8 - x} = \frac{3}{9}$$

Resolviendo, $x = \frac{7}{2}$.

Página 121, Clase 4.1

1. a) Utilizando $\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$ se concluye que $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$.

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$, $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$

c) De a), $\sphericalangle CEF = 180° - (36° + 29°)$
$= 115°$.

2. Establecer $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, de donde se obtiene EF = 3.6 cm.

1. Sea x la distancia real, en centímetros, que hay entre los dos volcanes.

$4 \text{ cm} : x = 1 : 2\,250\,000$

Resolviendo:

$x = 9\,000\,000$. Pasando la escala de cm a Km, la distancia entre los dos volcanes es 90 km.

2. a) Tomando cualquier lado y escribiendo la razón entre las escalas del plano y las medidas reales en cm, se tiene: $\frac{2}{480} = \frac{1}{240}$ Tomando el otro lado también se llega a la misma razón. Por tanto, la escala es 1:240.

b) Utilizando la escala obtenida en el literal anterior se pueden obtener las medidas, por ejemplo, para el baño:

Sea x la altura del rectángulo que representa el baño, dada en cm:

$$0.75 : x = 1 : 240$$

De donde $x = 180$ cm = 1.8 m

Sea y la otra medida real en cm:

$$2 : y = 1 : 240,$$

De donde $y = 480$ cm = 4.8 m.

Por tanto, las dimensiones reales del baño son: 1.8 m × 4.8 m.

De igual forma pueden obtenerse las otras dimensiones.

Dimensiones del comedor:
4.8 m × 4.8 m

Dimensiones de la cocina:
7.2 m × 3.6 m

Página 123, Clase 4.2

1. $x = 14$
2. La escala es $\frac{1}{800\,000}$.

1. a) Como la razón entre los triángulos es 1:4. La razón entre las áreas es $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

b) (ABC) = 3, (DEF) = 48,
$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{1}{16}$.

2. La razón es $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$.

Página 124, Clase 4.3

1. Dimensiones de la bodega:
2.5 m × 3.5 m
Dimensiones de los baños:
3.5 m × 3 m
Dimensiones de la sala de reuniones:
4 m × 5 m
2. La razón de sus áreas es $\frac{4}{25}$.

a) La razón entre cada lado correspondiente da $\frac{4}{5}$ por tanto son semejantes y la razón de sus volúmenes es $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$.

b) $V_1 = 480$
$V_2 = 937.5$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{480}{937.5} = \frac{480 \times 2}{937.5 \times 2} = \frac{64}{125}$$

Página 125, Clase 4.4

1. La razón de semejanza es $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.
2. La razón entre las alturas es $\frac{3}{5}$, la razón entre sus volúmenes es: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$.

1. Sea x la altura del poste, se cumple la relación: $1.60 : x = 1.3 : 4.3$, de donde $x \approx 5.29$ m.
2. Utilizando el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo.
Sea x la distancia entre la parada de bus y la panadería, se cumple: $28 : 74 = 33 : x$, de donde, al resolver $x \approx 87.21$.
Por tanto, la distancia entre la parada de bus y la panadería es aproximadamente 87.21 m.

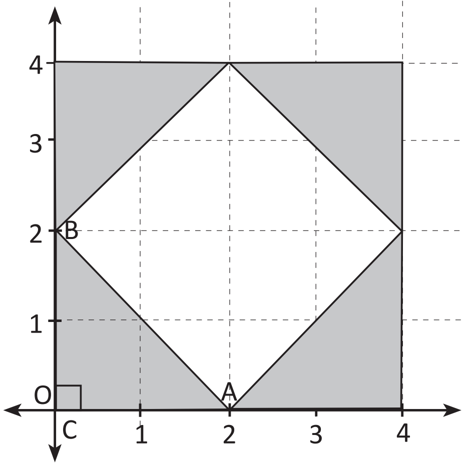
Página 130, Clase 1.1

x = 13 cm. Se sigue un procedimiento similar al realizado en la clase.

Página 131, Clase 1.2

Recordar el procedimiento utilizado en la clase anterior para determinar la hipotenusa de un triángulo.

a)



De la figura:

$(4)^2 - \frac{2 \times 2}{2} \times 4 = 8$

Luego, $AB^2 = 8$ y $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $AB = \sqrt{13}$

Página 132, Clase 1.3

a) $AB = \sqrt{5}$

b) $AB = \sqrt{2}$

a) $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 = 9 + 9 = 3^2 + 3^2$

Se cumple el teorema de Pitágoras.

b) $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$

$(\sqrt{17})^2 = 17$

Se cumple el teorema de Pitágoras.

Verificando las igualdades de modo similar a los literales anteriores, en todos los demás literales se cumple el teorema de Pitágoras.

Página 133, Clase 1.4

a) $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$(\sqrt{34})^2 = 34$

Se cumple el teorema de Pitágoras.

Verificar b) y c) de forma similar.

Conclusión: $AB^2 = BC^2 + CA^2$

Recordar el procedimiento realizado en clase.

Página 134, Clase 1.5

a) $5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

$(\sqrt{41})^2 = 41$

Se cumple el teorema de Pitágoras.

Verificar b) y c) de forma similar.

a) Dado que es un triángulo rectángulo se puede aplicar el Teorema de Pitágoras. Se cumple:

$$x^2 + 3^2 = 5^2$$
$$x^2 = 5^2 - 3^2$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16} = 4$$

b) $x = 4$

c) $x = 2$

d) $x = 12$

Página 135, Clase 1.6

a) Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 2^2$$
$$x^2 = 9 + 4$$
$$x^2 = 13$$
$$x = \sqrt{13}$$

b) $x = \sqrt{5}$

c) $x = \sqrt{2}$

a) Recordando que las rectas tangentes a la circunferencia forman un ángulo de 90° con el radio y trazando el radio OP, puede establecerse:

$$AO^2 = OP^2 + x^2$$
$$x^2 = AO^2 - OP^2$$
$$x^2 = AO^2 - OP^2$$
$$x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

b) Utilizando los dos triángulos rectángulos que se forman.

Para ΔBCD:

$CD^2 + (14 - x)^2 = 15^2$

Para ΔADC:

$CD^2 + x^2 = 13^2$

Resolviendo estas dos igualdades se obtiene que x = 5 cm.

Página 136, Clase 1.7

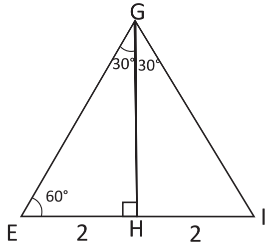
1. a) $\sqrt{35}$
   b) $\sqrt{7}$
2. Utilizando propiedad de los triángulos isósceles, el cateto del triángulo de la izquierda mide 4 cm. Luego x = 3 cm.

a) $\sphericalangle A = 45°$, ΔABC es isósceles, por tanto AB = 2. Utilizando el teorema de Pitágoras:

$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b) ∢G = 30°. Puede considerarse ΔEHG como la mitad de un triángulo equilátero.



Luego, EG = 4, por ser ΔEIG equilátero. Para encontrar GH se utiliza el teorema de Pitágoras y se obtiene GH = $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

c) ∢E = 60°, EH = $\frac{1}{2}$, GH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Página 137, Clase 1.8

Ángulos:

∢A = 45°, ∢B = 75°, ∢C = 60°.

Lados:

AC = $\sqrt{3} + 3$, AB = $3\sqrt{2}$.

a) $13^2 = 169$

$12^2 + 5^2 = 169$

Por el recíproco del teorema de Pitágoras, es un triángulo rectángulo.

b) Es un triángulo rectángulo.

c) No es un triángulo rectángulo.

d) Es un triángulo rectángulo.

e) No es un triángulo rectángulo.

f) Es un triángulo rectángulo.

Página 138, Clase 2.1

1. a) ∢A = 45°, ∢B = 90°, ∢C = 45°.

   AB = BC = $\frac{1}{2}$, AC = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

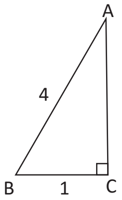
   b) ∢G = 30°, ∢H = 90°, ∢E = 60°.

   EH = 3, EG = 6, GH = $3\sqrt{3}$

2. a) Es un triángulo rectángulo.

   b) Es un triángulo rectángulo.

a) La altura del cono será igual a la medida del cateto AC.



$AC^2 = 4^2 - 1 = 15$, AC = $\sqrt{15}$.

Utilizando la fórmula para determinar el volumen del cono.

$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Sustituyendo

$V_c = \frac{1}{3}\pi(1)^2(\sqrt{15}) = \frac{\sqrt{15}\,\pi}{3}$ cm³

b) $V_c = \frac{25\sqrt{39}\pi}{24}$ cm³, $h = \frac{\sqrt{39}}{2}$

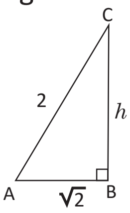
Página 139, Clase 2.2

1. a) No es un triángulo rectángulo.

   b) No es un triángulo rectángulo.

2. $V_c = \frac{3\sqrt{10}\pi}{4}$ cm³, altura = $\sqrt{10}$ cm.

a) Sea AE, la diagonal del cuadrado base. AE = $2\sqrt{2}$. Si AB es la mitad de AE, se puede calcular la altura de la pirámide utilizando el siguiente triángulo.



Luego, BC = $h = \sqrt{2}$. Utilizando la fórmula para calcular el vólumen de una pirámide.

$V_p = \frac{1}{3}A_B h$. Sustituyendo

$V_p = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm³

b) $V_p = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm³.

Altura = $\sqrt{3}$ cm.

Página 140, Clase 2.3

1. $V_c = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³, altura = $2\sqrt{3}$ cm
2. $V_p = 3\sqrt{\frac{41}{2}}$ cm³, altura = $\sqrt{\frac{41}{2}}$ cm

Utilizando el teorema de Pitágoras dos veces se concluye que la medida de la diagonal del ortoedro es:
$\sqrt{29}$ cm.

Página 141, Clase 2.4

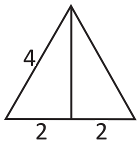
1. $V_p = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ cm³, altura = $\sqrt{7}$ cm
2. Medida de la diagonal:

   $2\sqrt{6}$ cm

   Volumen del ortoedro:

   2 × 2 × 4 = 16 cm³

a) Trazando las diagonales del hexágono se pueden formar seis triángulos equiláteros congruentes.



Longitud del apotema: $2\sqrt{3}$ cm.

Área: $24\sqrt{3}$ cm².

b) Medidas aproximadas.

Longitud del apotema: 89 cm

Área: 11.34 cm².

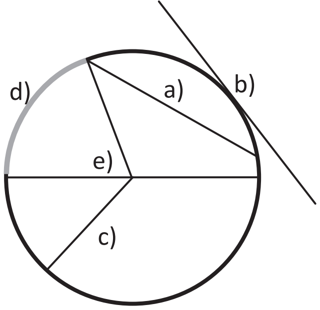
Página 144, Clase 2.7

1. Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que AC ≈ 3.34 km, se puede concluir que el camino de menos longitud es AC.
2. La altura del monumento Divino Salvador del Mundo es aproximadamente 17.99 m.

Unidad 7

Página 148, Clase 1.1

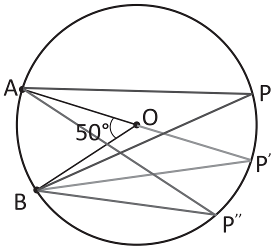
1. Orden de respuestas:
   c, a, b, c, d, e, e, d.
2. Ejemplo de solución.



Página 149, Clase 1.2

Orden de respuestas:
1-e), 2-c), 3-d), 4-b), 5-a)

a) Ejemplo de solución:

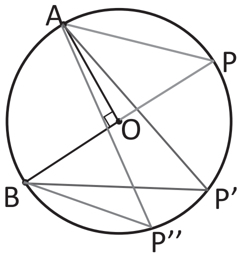


En cada caso el valor del ángulo inscrito es ∢AOB ÷ 2 = 25°.

b) La medida de los ángulos inscritos es 68°.
c) La medida de los ángulos inscritos es 90°.
d) La medida de los ángulos inscritos es 155°.

Página 150, Clase 1.3

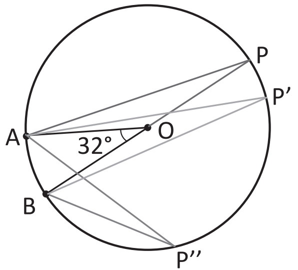
1. Referirse a la clase 1.1, página 144.
2. Ejemplo de solución:
   En cada caso el valor del ángulo inscrito es ∢AOB ÷ 2 = 45°.



a) ∢BOA = 2∢BPA
   ∢BOA = 2(35°) = 70°
b) x = 90°
c) x = 144°
d) x = 33°
e) x = 56°
f) x = 45°

Página 151, Clase 1.4

1. a) Ejemplo de solución:



En cada caso el valor del ángulo inscrito es ∢AOB ÷ 2 = 16°.

b) La medida de los ángulos inscritos es 112°.

2. a) x = 80°
   b) x = 116°
   c) x = 67°

a) x = 100°
b) x = 168°
c) x = 246°
d) x = 38°
e) x = 79°
f) x = 119°

Página 152, Clase 1.5

1. a) x = 62°
   b) x = 67°
   c) x = 76°
2. a) x = 78°
   b) x = 174°
   c) x = 117°

a) x = 76°
b) x = 90°
c) x = 48°
d) x = 90°, y = 90°, z = 90°.

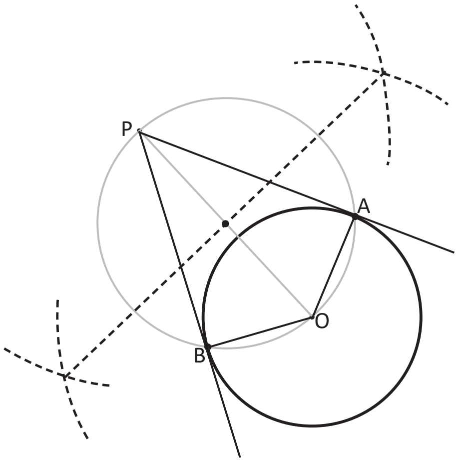
Página 154, Clase 1.7

1. a) x = 29°. Por ser ángulo inscrito. Como $\overset{\frown}{CD}$ = $\overset{\frown}{AB}$, ∢APB = ∢CPD = 29°. Por tanto, y = 29°.
   b) x = 68°, y = 68°.
   c) x = 45°, y = 45°.
   d) x = 52°, y = 26°.
   e) x = 64°, y = 32°.
   f) x = 140°, y = 70°.

2. a) $\overset{\frown}{FE}$ = $\overset{\frown}{DB}$ = $\overset{\frown}{CA}$
   b) $\overset{\frown}{AE}$ = $\overset{\frown}{GD}$ = $\overset{\frown}{FC}$ = $\overset{\frown}{EB}$ = $\overset{\frown}{DA}$ = $\overset{\frown}{CG}$ = $\overset{\frown}{BF}$.
   También, como $\overset{\frown}{AE}$ = $\overset{\frown}{GD}$ entonces $\overset{\frown}{AG}$ = $\overset{\frown}{ED}$, de la misma forma puede obtenerse la siguiente cadena de igualdades.
   $\overset{\frown}{AG}$ = $\overset{\frown}{GF}$ = $\overset{\frown}{FE}$ = $\overset{\frown}{ED}$ = $\overset{\frown}{DC}$ = $\overset{\frown}{CB}$ = $\overset{\frown}{BA}$
   Pueden obtenerse otras igualdades utilizando las ya encontradas pero para nuestros fines solo se utilizarán estas.

Página 156, Clase 2.1

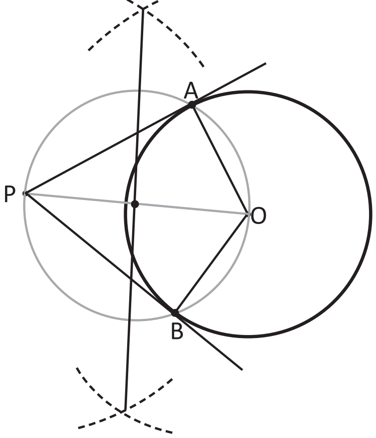
1. a) En la imagen, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia. Para obtener el punto medio, se deben trazar dos circunferencias de radio PO y marcar sus intercepciones, como se muestra:



2. Como OA = OB, por ser radios, además los triángulos OAP Y OBP son rectángulos y comparten la misma hipotenusa, ΔAOP y ΔOBP son congruentes (criterios de congruencia de triángulos rectángulos, octavo grado).
   Por tanto, PA = PB.

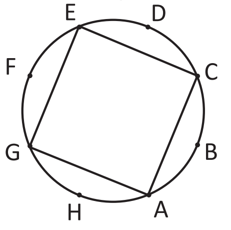
Página 157, Clase 2.2

a) Las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia.



b) Sigue de forma similar.

a) Se forma la siguiente figura.

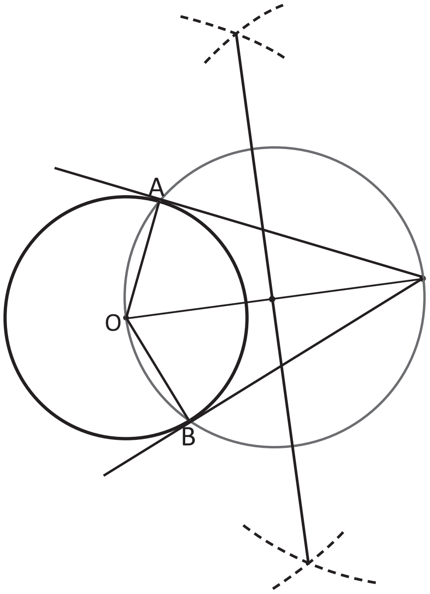


Como $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{EG} = \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{GA}$ entonces AC = EG y CE = GA. Por tanto, ACEG es cuadrado.

b) CEG es un triángulo isósceles.
c) CDGH es un rectángulo.
d) BFGA es un trapecio isósceles.
e) EGA es un triángulo rectángulo isósceles.
f) BEH es un triángulo isósceles.
g) BCF es un triángulo rectángulo.
h) ABCDEFGH es un octágono.

Página 158, Clase 2.3

1. a)



Las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia.

2. a) ABD es un triángulo isósceles.
   b) CDE es un triángulo isósceles.
   c) ABDE es un trapecio isósceles.
   d) ABCDE es un pentágono regular.

a) ∢CEB = ∢AED (Son opuestos por el vértice).
   ∢DAC = ∢DBC, sostienen el mismo arco. Luego, ΔAED ~ ΔBEC.
   Entonces:

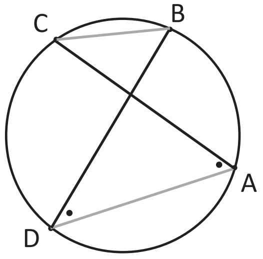
$$\frac{EC}{ED} = \frac{EB}{EA}$$
$$\frac{x}{9} = \frac{5}{11}$$
$$x = \frac{45}{11}$$

b) x = 6 cm.
   Demuestra y utiliza la semejanza de ΔDAC y ΔCBD.
c) x = 13 cm.
   Demuestra y utiliza la semejanza de ΔDPB y ΔAPC.

Página 159, Clase 2.4

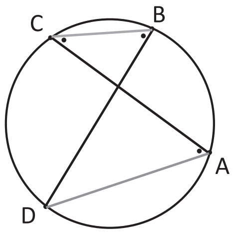
1. a) BDF es un triángulo equilátero.
   b) ABDE es un rectángulo.
   c) CDEF es un trapecio isósceles.
   d) ABCDEEF es un hexágono regular.
2. a) $\frac{x}{23} = \frac{7}{16}$, entonces $x = \frac{161}{16}$.
   Demuestra y utiliza la semejanza de ΔECB y ΔEDA.
   b) $\frac{x}{10} = \frac{5}{11}$, entonces $x = \frac{50}{11}$.
   Demuestra y utiliza la semejanza de ΔEBC y ΔEAD.

a) $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, de ahí que ∢CBD = ∢BDA ⇒ AD||BC.
b) ∢DAC = ∢BDA.



Si ∢DAC = ∢BDA, $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$. Como ∢CBD subtiende $\overset{\frown}{CD}$, se tiene que ∢CBD = ∢BDA, por tanto son alternos internos, por tanto DA||BC.
Por tanto, es condición suficiente.

c) CD = BA ⇒ $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$. Es condición suficiente. Por tanto AD||BC.
d)



Si AC = BD, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Por tanto, AD||BC.

e) CB = BA, es no suficiente.

f) ΔABC ≅ ΔDCB es condición suficiente.
Observa que ∢ACB = ∢BDA.

Página 160, Clase 2.5

R

1. $\frac{x}{12} = \frac{30}{26}$, entonces $x = \frac{180}{13}$.
   Demuestra que ΔACP ∼ ΔDBP.
2. a) Si $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DC}$, ∢CAD = ∢ACB, los ángulos son alternos internos. Por tanto, CB||DA.
   b) No es condición suficiente. (D puede moverse en cualquier lugar de la circunferencia).
   c) ΔABC ≅ ΔDCB ⇒ AB = CD, por tanto, AD||BC.

a) Dado que ∢ADB = ∢ACB y comparten AB, los puntos A, B, C, D están sobre una circunferencia. Y x = ∢CAD = 31° y y = ∢ABD = 62°.
b) x = 56°, y = 26°.
c) x = 56°, y = 34°.
d) x = 15°.

Página 161, Clase 2.6

R

1. a) $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Por tanto, BC||AD.
   b) ∢BDA = ∢DBC es condición suficiente, CB||DA.
   c) ΔBCD∼ΔBCA es condición suficiente, CB||DA.
2. a) x = 49°, y = 32°.
   b) x = 45°, y = 33°.

a) x = 2(70°) = 140°.
b) x = 204°.
c) x = 47°.
d) x = 118°.

Página 166-167, Clase 1.1

R

a) Media (μ):

$$\mu = \frac{10 + 14 + 15 + 12 + 16 + 18 + 16}{7}$$
$$= \frac{101}{7}$$
$$\mu \approx 14.43$$

Datos ordenados de menor a mayor: 10, 12, 14, 15, 16, 16, 18.
Mediana:
Dado que hay 7 datos, la mediana se encuentra en la posición 4 con los datos ya ordenados, es decir, 15.
Moda:
El dato que más se repite es 16.

b) Datos ordenados: 14, 15, 15, 16, 16, 16, 16.5, 17, 18, 19.
Media: μ = 16.25 horas
Mediana: $\frac{16 + 16}{2}$ = 16 horas
Moda: 16 horas

1.

Tarea	Beatriz	Miguel
1	9.3	8.0
2	10.0	8.6
3	9.5	9.0
4	9.6	9.5
5	9.5	8.5
6	9.7	9.0
7	10.0	9.0
8	10.0	10.0
Media (μ)	9.7	8.95
Mediana	9.65	9
Moda	10	9
Rango	10 – 9.3 = 0.7	10 – 8 = 2

La serie de datos para Miguel es la más dispersa, el rango es mayor.

2.

Media (μ)	25.2	28.2
Mediana	27	28
Rango	15	3

En la semana 2 los datos están más dispersos pues el rango es mayor.

Página 168, Clase 1.2

R

	A	B
Media (μ)	2	1.5
Mediana	2	1
Rango	2	4

El equipo B tiene rango mayor, por tanto tiene los datos más dispersos.

a)

	Beatriz		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
	9.3	–0.4	0.4
	10.0	0.3	0.3
	9.5	–0.2	0.2
	9.6	–0.1	0.1
	9.5	–0.2	0.2
	9.7	0	0
	10.0	0.3	0.3
	10.0	0.3	0.3
Media (μ)	9.7	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	9.65	0	1.8
Rango	0.7		

	Miguel		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
	8.0	–0.95	0.95
	8.6	–0.35	0.35
	9.0	0.05	0.05
	9.5	0.55	0.55
	8.5	–0.45	0.45
	9.0	0.05	0.05
	9.0	0.05	0.05
	10.0	1.05	1.05
Media (μ)	8.95	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	9	0	3.5
Rango	2		

Los datos están más dispersos en la tabla de Miguel.

Página 169-170, Clase 1.3

1.

	La Unión	El Triunfo
Media (μ)	2.7	2.4
Mediana	2.75	2.45
Rango	0.3	0.5

2.

	Semana 1		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
	28	2.8	2.8
	26	0.8	0.8
	30	4.8	4.8
	27	1.8	1.8
	15	–10.2	10.2
Media (μ)	25.2	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	27	0	20.4
Rango	15		

	Semana 2		
Media (μ)	28.2	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	28	**0**	5.2
Rango	3		

La semana 1 tiene los datos más dispersos.

a) $\mu = \frac{9.3+10+9.5+9.6+9.5+9.7+10+10}{7}$

$\mu = 9.7$

Beatriz		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
9.3	–0.4	0.16
10.0	0.3	0.09
9.5	–0.2	0.04
9.6	–0.1	0.01
9.5	–0.2	0.04
9.7	0	0
10.0	0.3	0.09
10.0	0.3	0.09

$\sigma^2 = \frac{0.16+0.09+0.04+0.01+0.04+0.09+0.09}{8}$

$\sigma^2 = 0.065$

b) $\mu = 8.95$

$\sigma^2 \approx 0.34$

Página 171, Clase 1.4

1. Para la primer tabla:

	La Unión		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
Media (μ)	2.7	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	2.75	0	0.6
Rango	0.3		

Para la segunda tabla:

	El Triunfo		
	x	$x - \mu$	$\lvert x - \mu \rvert$
Media (μ)	2.4	**Suma:**	**Suma:**
Mediana	2.45	0	0.8
Rango	0.5		

El valor del rango es mayor en la segunda tabla y además la suma de los valores absolutos de las desviaciones es mayor también, por tanto, los datos se encuentran más dispersos en la segunda tabla.

2. Para la semana 1:

$\mu = \frac{28 + 26 + 30 + 27 + 15}{5}$

$\mu = 25.2$ minutos

$\sigma^2 = \frac{7.84 + 0.64 + 23.04 + 3.24 + 104.04}{8}$

$\sigma^2 = 27.76$

Semana 1		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
28	2.8	7.84
26	0.8	0.64
30	4.8	23.04
27	1.8	3.24
15	–10.2	104.04

Varianza (σ^2)	27.76

Para la semana 2:

$\mu = 28.2$ minutos

$\sigma^2 = 1.36$

Utilizando las respuestas de la clase 1.3

En la serie de datos para Beatriz:

$\sigma^2 = 0.065$

$\sigma = \sqrt{0.065}$

$\sigma \approx 0.25$

En la serie de datos para Miguel:

$\sigma^2 \approx 0.34$

$\sigma \approx \sqrt{0.34}$

$\sigma \approx 0.58$

Página 172-173, Clase 1.5

1. Utilizando las respuestas de la clase 1.4.

   Para La Unión:

La Unión		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
2.7	0	0
2.8	0.1	0.01
2.8	0.1	0.01
2.6	–0.1	0.01
2.8	0.1	0.01
2.5	–0.2	0.04

Varianza (σ^2)	0.013

Para El Triunfo: $\sigma^2 = 0.027$.

La varianza es mayor para los datos de Puerto El Triunfo, por tanto, los datos están más dispersos para El Triunfo.

2. Utilizando los resultados de la clase 1.4.

   Para la semana 1: $\sigma^2 = 27.76$.
   Por tanto, $\sigma \approx 5.27$ minutos.

   Para la semana 2: $\sigma^2 = 1.36$.
   Por tanto, $\sigma \approx 1.17$ minutos.

a)

Municipio A

		13		
		13		
	10	12		
	11	12		
	11	13		
	11	12		
	10	13	15	
	11	12	14	
	11	13	14	
	10	13	15	
	10	13	14	
	10	12	14	
	11	13	14	16
	10	13	14	16
	10	12	14	17
8 – 10	10 – 12	12 - 14	14 – 16	16 – 18

b)

Para el municipio B, se completa de forma similar.

Edad en meses	Cantidad de niños	
	Municipio A	Municipio B
8 – 10	0	2
10 – 12	13	10
12 – 14	15	13
14 – 16	9	12
16 – 18	3	3
TOTAL	40	40

Página 174-175, Clase 1.6

1. Para La Unión: $\sigma^2 \approx 0.013, \sigma \approx 0.11.$
   Para El Triunfo: $\sigma^2 \approx 0.027, \sigma \approx 0.16.$
2. Organizando los datos en una distribución de frecuencias.

Escuela A

		166		
		165		
		165		
		167		
		168		
	162	169		
	164	165		
	164	167		
	160	169		
	161	166		
	163	165	170	
	164	167	173	
158	162	168	172	
157	160	167	174	178
155	164	165	170	176
155 - 160	160 - 165	165 - 170	170 - 175	175 - 180

La tabla para la escuela B se completa de forma similar.

Estatura en cm	Cantidad de estudiantes	
	Escuela A	Escuela B
155 - 160	3	1
160 - 165	10	13
165 - 170	15	14
170 - 175	5	10
175 - 180	2	2
TOTAL	35	40

a)

Edad	Pm	$f_A \times Pm$	$f_B \times Pm$
8 – 10	9	0 × 9 = 0	2 × 9 = 18
10 – 12	11	13 × 11 = 143	10 × 11 = 110
12 – 14	13	195	169
14 – 16	15	135	180
16 – 18	17	51	51
Suma		524	528

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f{\times}Pm}{\textit{Número de datos}}$$

Para el municipio A:

$\mu = \frac{524}{40}$ = 13.1 meses.

Para el municipio B:

μ = 13.2 meses.

b) De la tabla:

Edad en meses	Cantidad de niños	
	Municipio A	Municipio B
8 – 10	0	2
10 – 12	13	10
12 – 14	15	13
14 – 16	9	12
16 – 18	3	3
TOTAL	40	40

Para el municipio A.
Rango: 18 – 10 = 8 meses.
Para el municipio B.
Rango: 10 meses.

Por tanto, los datos están más dispersos para el municipio B.

Página 176-177, Clase 1.7

1. Para Santa Ana:

Santa Ana

	100			
	100			
	100			
	100			
0	150			
0	160			
0	100			
0	100	250		
0	150	260		
50	160	200	360	
0	100	250	300	400
50	100	200	300	400
0–100	100–200	200–300	300–400	400–500

Para San Salvador se resuelve de forma similar.

Tabla de distribución de frecuencias:

Cantidad de lluvia	Número de días	
	Santa Ana	San Salvador
0 - 100	8	11
100 - 200	12	10
200 - 300	5	4
300 - 400	3	2
400 - 500	2	3
TOTAL	30	30

2. a) Para la escuela A.

Estaturas en centímetros	f_A	Pm	$f_A \times Pm$
155 - 160	3	157.5	472.5
160 - 165	10	162.5	1625
165 - 170	15	167.5	2512.5
170 - 175	5	172.5	862.5
175 - 180	2	177.5	355
TOTAL	**35**		

Suma de $f_A \times Pm$ = 5 827.5

$\mu = \frac{5\,827.5}{35} = 166.5$ cm

Para la escuela B.

Estaturas en centímetros	f_B	Pm	$f_B \times Pm$
155 - 160	1	157.5	157.5
160 - 165	13	162.5	2112.5
165 - 170	14	167.5	2345
170 - 175	10	172.5	1725
175 - 180	2	177.5	355
TOTAL	**40**		

Suma de $f_A \times Pm$ = 6 695

$\mu = \frac{6\,695}{40} = 167.375$ cm.

b) En ambos casos el rango es el mismo 180 – 155 = 25 cm. Por tanto, no es suficiente para determinar en qué escuela los datos están más dispersos. Es por ello que se utilizan otras medidas de dispersión, como la varianza.

Para el municipio A.

Edad en meses	f_A	Pm	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A \times (Pm - \mu)^2$
8 – 10	0	9	–4.1	16.81	0
10 – 12	13	11	–2.1	4.41	57.33
12 – 14	15	13	–0.1	0.01	0.15
14 – 16	9	15	1.9	3.61	32.49
16 – 18	3	17	3.9	15.21	45.63
TOTAL	**40**				
μ	13.1				

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f \times (Pm - \mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{0 + 57.33 + 0.15 + 32.49 + 45.63}{40}$$

$$\sigma^2 = 3.39$$

Para el municipio B.

$\mu = 13.2$

$$\sigma^2 = \frac{35.28 + 48.4 + 0.52 + 38.88 + 43.32}{40}$$

$$\sigma^2 = 4.16$$

Edad en meses	f_B	Pm	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_B \times (Pm - \mu)^2$
8 – 10	2	9	–4.2	17.64	35.28
10 – 12	10	11	–2.2	4.84	48.4
12 – 14	13	13	–0.2	0.04	0.52
14 – 16	12	15	1.8	3.24	38.88
16 – 18	3	17	3.8	14.44	43.32
TOTAL	**40**				
μ	13.2				

La varianza es mayor para el municipio B. Por tanto, los datos están más dispersos para el municipio B.

Página 178-179, Clase 1.8

R

1. a)

Cantidad de lluvia	Cantidad de días		Pm	$f_A \times Pm$	$f_S \times Pm$
	f_A	f_S			
0 - 100	8	11	50	400	550
100 - 200	12	10	150	1800	1500
200 - 300	5	4	250	1250	1000
300 - 400	3	2	350	1050	700
400 - 500	2	3	450	900	1350
TOTAL	**30**	**30**			

Para Santa Ana:
Suma de los productos.

$f_A \times Pm = 5\,400$

$\mu = \frac{5\,400}{30} = 180$ mm

Para Santa Salvador:
Suma de los productos.

$f_A \times Pm = 5\,100$

$\mu = \frac{5\,100}{30} = 170$ mm

b) El rango para ambos casos es el mismo 500 – 0 = 500 mm. Por tanto, no es posible determinar en cuál departamento se encuentran más dispersos.

2. Para la escuela A:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f \times (Pm - \mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{243 + 160 + 15 + 180 + 242}{35}$$

$$\sigma^2 = 24$$

Estaturas	f_A	Pm	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A \times (Pm - \mu)^2$
155 - 160	3	157.5	–9	81	243
160 - 165	10	162.5	–4	16	160
165 - 170	15	167.5	1	1	15
170 - 175	5	172.5	6	36	180
175 - 180	2	177.5	11	121	242
TOTAL	**35**				
μ	166.5				

Para la escuela B:

Estaturas	f_B	Pm	$(Pm - \mu)^2$	$f_B \times (Pm - \mu)^2$
155 - 160	1	157.5	97.52	97.52
160 - 165	13	162.5	23.77	309.01
165 - 170	14	167.5	0.02	0.28
170 - 175	10	172.5	26.27	262.7
175 - 180	2	177.5	102.52	205.04
TOTAL	**40**			
μ	167.375			

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f \times (Pm - \mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{97.52 + 309.01 + 0.28 + 262.7 + 205.04}{40}$$

$$\sigma^2 \approx 21.86$$

La varianza de los datos para la escuela A es mayor, por tanto, estos datos se encuentran más dispersos.

En el ejercicio 2 del recuerda de la clase 1.7 aún no se podía concluir cuáles datos están más dispersos.

Utilizando los datos de la clase anterior.

Municipio A:

$\sigma^2 = 3.39$, $\sigma = \sqrt{3.39}$

$\sigma \approx 1.84$ meses

Municipio B:

$\sigma^2 = 4.16$, $\sigma = \sqrt{4.16}$

$\sigma \approx 2.04$ meses

Página 182-183, Clase 2.1

a) Santa Ana

Lluvia (mm)	f_A	Pm	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_A(Pm - \mu)^2$
0 - 100	8	50	–130	16900	135200
100 - 200	12	150	–30	900	10800
200 - 300	5	250	70	4900	24500
300 - 400	3	350	170	28900	86700
400 - 500	2	450	270	72900	145800
TOTAL	30				
μ	180				

San Salvador

Lluvia (mm)	f_S	Pm	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_S(Pm - \mu)^2$
0 - 100	11	50	–120	14400	158400
100 - 200	10	150	–20	400	4000
200 - 300	4	250	80	6400	25600
300 - 400	2	350	180	32400	64800
400 - 500	3	450	280	78400	235200
TOTAL	30				
μ	170				

b) Para Santa Ana:

$\sigma^2 \approx 13433.33$

$\sigma \approx 115.90$ mm

Para San Salvador:

$\sigma^2 \approx 16266.67$

$\sigma \approx 127.54$ mm

1. Para la serie A:

$$\mu = \frac{503.9}{5} = 100.78$$

$$\sigma^2 = \frac{0.588}{5} = 0.1176$$

Serie A	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
100.3	–0.48	0.2304
101.2	0.42	0.1764
100.5	–0.28	0.0784
100.8	0.02	0.0004
101.1	0.32	0.1024
μ = 100.78		

$\sigma = \sqrt{0.1176} \approx 0.34$

Para la serie B:

Cada dato de la serie B se obtiene sumando 5.1 a cada dato de la serie A.

Serie B
100.3 + 5.1 = 105.4
101.2 + 5.1 = 106.3
100.5 + 5.1 = 105.6
100.8 + 5.1 = 105.9
101.1 + 5.1 = 106.2

Según el resultado de esta clase la desviación típica para la serie B será $\sigma \approx 0.34$.

2. En la serie 3, cada dato se obtiene sumando 10.5 a los datos de la serie 1, por tanto, ambas series tienen igual desviación típica.

De igual forma, si se suma 5 a cada dato de la serie 1 se obtiene cada dato de la serie 4, por tanto, su desviación típica es igual.

La serie 2 no tiene esta característica con respecto a la serie 1. Entonces, no se puede decir nada acerca de la relación entre la desviación típica de ambas series hasta que se calculen.

3. $\mu = 61 + 5.5 = 66.5$

$\sigma = 0.89$

Página 184, Clase 2.2

1. a) Para la serie A: $\mu = 12.5$

$$\sigma^2 = \frac{0.1}{6} \approx 0.17$$

$$\sigma \approx \sqrt{0.17} \approx 0.13$$

b) La serie B y la serie C poseen la misma desviación típica que la serie A.

2. a) $\mu = 142.675$

$\sigma^2 \approx 0.45$, $\sigma \approx 0.67$.

b) $\mu = 142.675 + 4.50 = 147.175$

$\sigma \approx 0.67$.

1. Para la serie 1:

$\mu = 52.5$, $\sigma^2 \approx 2.92$, $\sigma \approx 1.71$.

Los datos de la serie 2 se obtienen al multiplicar por 4 los datos de la serie 1 y los datos de la serie 3 se obtienen multiplicando por 11 los datos de la serie 1, por el resultado de esta clase, la desviación típica de la serie 2 es

$\sigma \approx 1.71 \times 4 = 6.28$

y de la serie 3 es

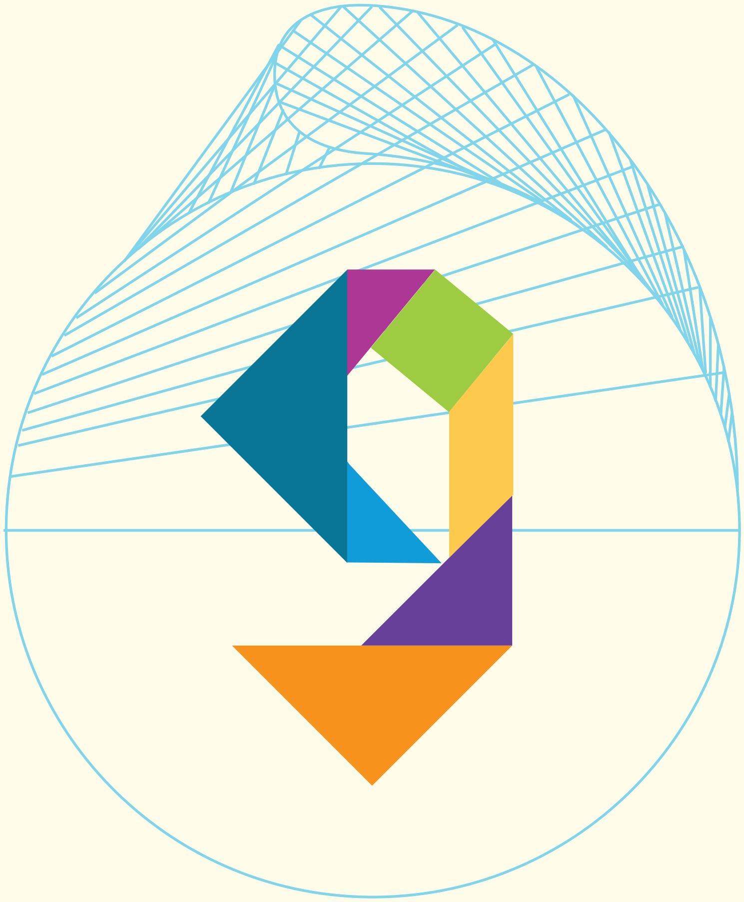
$\sigma \approx 1.71 \times 11 = 18.81$.

2. $\mu = 105 \times 6 = 630$.

$\sigma = 1.45 \times 6 = 8.7$.

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

GOBIERNO
DE EL SALVADOR



EL SALVADOR
Grande como su gente

JICA