Unidad 8. Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos

Competencias de la Unidad

– Utilizar los instrumentos de geometría para hacer traslación, reflexión y rotación de figuras planas.
– Aplicar las características de los círculos que se intersecan para determinar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
– Aplicar la regla de tres simple directa para calcular la longitud de arco y el área de un segmento circular.
– Desarrollar el plano de un prisma, pirámide y cilindro para calcular su área total.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación del ángulo central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Movimiento de figuras en el plano	1	1. Puntos y rectas
	1	2. Patrones de figuras
	1	3. Traslación
	1	4. Simetría
	1	5. Rotación
	1	6. Resolución de problemas de movimiento de figuras
2. Círculos, segmentos y ángulos	1	1. Características y elementos del círculo
	1	2. Características de círculos que se intersecan
	1	3. Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás
	1	4. Rectas perpendiculares
	1	5. Distancia entre un punto y una línea recta
	1	6. Mediatriz de un segmento
	1	7. Bisectriz de un ángulo
	1	8. Tangente a una circunferencia
	1	9. Longitud de arco de un sector circular
	1	10. Área de un sector circular
	1	11. Incentro de un triángulo
3. Planos, cuerpos geométricos, área total de prisma, pirámide y cilindro	1	1. Clasificación de cuerpos geométricos
	1	2. Características de poliedros regulares
	1	3. Relación de posición entre rectas y planos
	1	4. Perpendicularidad entre un plano y una recta
	1	5. Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

Lección	Horas	Clases
	1	6. Proyección ortogonal
	1	7. Desarrollo plano de un prisma y su área total
	1	8. Desarrollo plano de una pirámide y su área total
	1	9. Desarrollo plano de un cilindro y su área total
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

27 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre.

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Movimiento de figuras en el plano
En esta lección se hace una presentación de la notación para un segmento, rectas perpendiculares, rectas paralelas y también se trabajan los tipos de movimientos de una figura en el plano: la traslación, la simetría y la rotación.

Lección 2: Círculos, segmentos y ángulos
Al inicio de la lección se hace un recordatorio de los elementos de un círculo y de un sector circular, para posteriormente utilizarlos cuando se presentan las características de dos círculos que se intersecan. Las características de los dos círculos intersecados básicamente hacen referencia a ciertas propiedades que guardan sus circunferencias. Dichas características son utilizadas para construir figuras con regla y compás, con el fin de que el estudiante visualice algunas propiedades de esas figuras intuitivamente, es decir, a partir de la construcción de ellas. Como ejemplo de estas figuras se tiene, un hexágono, un triángulo equilátero, rectas perpendiculares, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta tangente a una circunferencia e incentro de un triángulo. Al finalizar la lección se utiliza la proporcionalidad directa para deducir las fórmulas de la longitud de arco y área de un sector circular.

Lección 3: Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro
En esta lección se comienza haciendo una clasificación de los cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos, para posteriormente abordar las características de los poliedros regulares; se introducen los planos y la relación de posición que tienen dos o más rectas en ellos. Otro aspecto importante de esta lección es introducir la perpendicularidad de una recta con un plano, para retomar este concepto al introducir la altura de prismas, cilindros, pirámides y conos; también se presentan los cuerpos geométricos como el movimiento de una figura plana a través de una recta perpendicular a ella.
Como anteriormente se presentó el concepto de plano, se trabaja con la proyección ortogonal de un cuerpo geométrico como la sombra de un cuerpo geométrico en tres planos representados por paredes cuya posición es diferente: vista frontal, vista lateral y vista sobre el piso; cuando es alumbrado con una lámpara, considerando que los rayos de luz generados por la lámpara son perpendiculares a las paredes, es decir, a los planos. Para finalizar la lección se hace el desarrollo plano de prismas, pirámides y cilindros para deducir sus respectivas fórmulas para calcular su área total.

Secuencia:
Los estudiantes ya dominan los conceptos de línea recta, rectas paralelas y perpendiculares, por lo que para esta clase se hace un recordatorio; se establecen algunos conceptos nuevos y sus respectivas notaciones. La línea recta es denotada por letras como l, m, el segmento denotado con "$\overline{}$", rectas perpendiculares denotadas por "⊥" y rectas paralelas denotadas por "∥". En el caso de los segmentos se hace la aclaración de que al referirse a su longitud se omite el símbolo "$\overline{}$" en su escritura. De igual manera se hace una relación de las rectas con puntos, por ejemplo, se señala el hecho de que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta.

Propósito:
① Destacar que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta. También que existe una única recta paralela a otra dada y que pasa por un punto dado fuera de esta.

② Definir la terminología y presentar sus notaciones. En este punto se debe resaltar que al omitir el símbolo "$\overline{}$" en la escritura de un segmento se hace referencia a su longitud.

③ Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

2. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
   $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

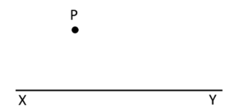
Indicador de logro: Representa con lenguaje matemático la relación entre segmentos o rectas.

1.1 Puntos y rectas

P

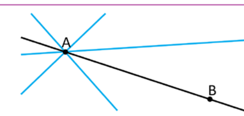
1. En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
   a) Traza líneas rectas que pasen solo por A.
   b) Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.

2. En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
   a) Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

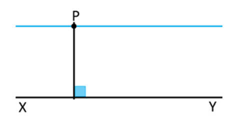


① **S**

1. a) Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.

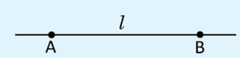


2. a) De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.

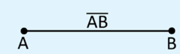


② **C**

a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.

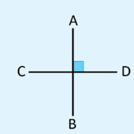


b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".

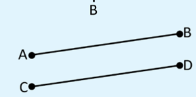


c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo ($\overline{}$) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.

d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".

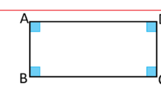


e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".

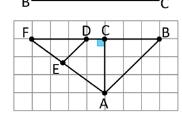


③

1. Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. $\overline{AB} \perp \overline{BC}$



2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.
   $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
   $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

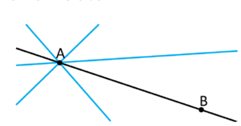


Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

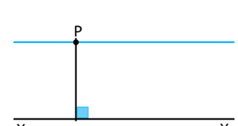
Fecha: **U8 1.1**

Ⓟ 1. Para dos puntos A y B. Traza líneas rectas que
   a) Pasen solo por A.
   b) Pasen a la vez por A y por B.
2. Para una recta XY y un punto P. Traza líneas rectas que
   a) Pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

Ⓢ 1. a) Se pueden trazar infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Hay una única línea recta que pasa por los dos puntos.



2. a) De todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.



Ⓡ
1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
2. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
   $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

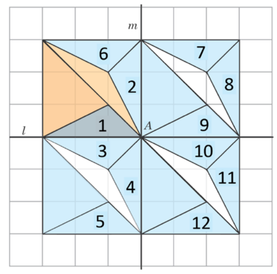
Indicador de logro: Identifica diferentes tipos de movimientos de figuras geométricas.

1.2 Patrones de figuras

① **P**

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

a) ¿Con cuál de las figuras se sobrepondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por la recta l, ¿sobre cuál figura se sobrepondrá la figura 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?



S

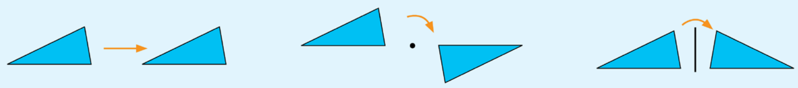
a) Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede sobreponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
b) Si se dobla la imagen por la recta l, la figura 1 se sobrepondrá sobre la figura 3.
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90°, y el giro es en sentido antihorario, se sobrepondrá sobre la figura 4.

C

El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

Traslación **Rotación** **Simetría**



E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.

Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com

Retrato de Esher en Roma. De M. C. Escher.

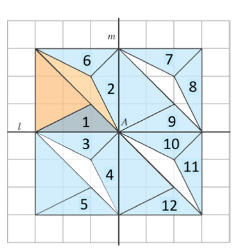
Unidad 8

153

Tarea: página 163 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.2**

Ⓟ Se movieron las figuras coloreadas con tono más fuerte para hacer la imagen. Responde:

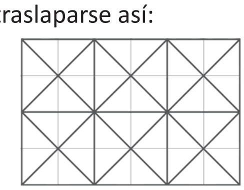


a) ¿Con cuál figura se sobrepondrá la 1 al desplazarse de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por l, ¿a cuál figura se sobrepondrá la 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario respecto a A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?

Ⓢ a) Se puede sobreponer a las figuras 9, 5 y 12.
b) Se sobrepone a la figura 3.
c) Se sobrepondrá a la figura 4.

Ⓔ Con la imagen:

Se llena una cuadrícula sin dejar espacio y sin traslaparse así:



Ⓡ 1. a) Rotación
b) 3 y 4
c) 2 y 3

Secuencia:

En grados anteriores se introdujeron los movimientos de figuras en el plano: traslación, rotación y simetría. Para esta clase se retoman los tres movimientos, abordándolos de una forma general, pero posteriormente se retomará cada uno. Para determinar la figura simétrica de otra, se hace respecto a rectas denotadas de la forma establecida en la clase anterior, por ejemplo l y m.

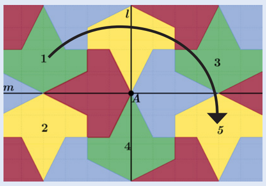
Propósito:

① Identificar una figura que se sobrepone a otra al moverla. Si los estudiantes presentan dudas en a) respecto a la expresión "si se desplaza de forma paralela", explicar que se refiere a tomar una figura de las presentadas y que esta puede moverse únicamente ya sea, a la izquierda, derecha, arriba, abajo o diagonalmente.

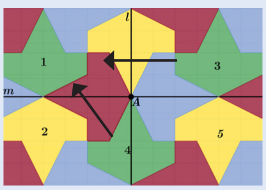
Propósito:

② Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

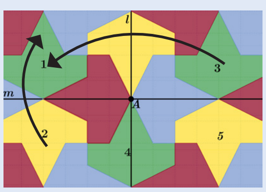
1. a) Rotación



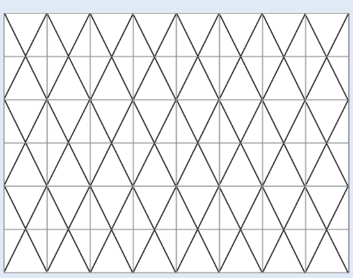
b) 3 y 4

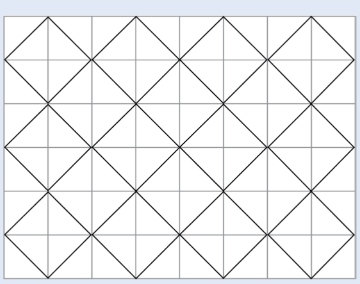


c) 2 y 3

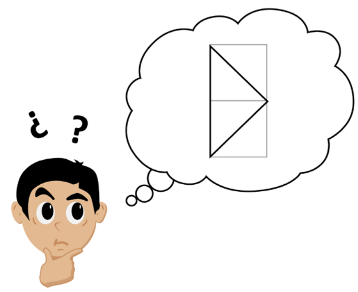


2.

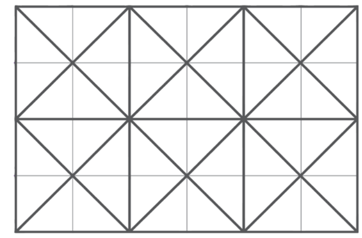




Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.

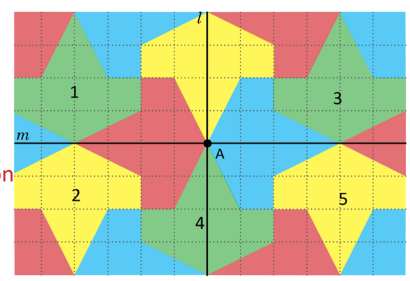


Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.

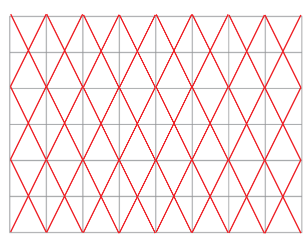


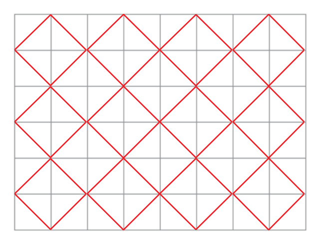
②

1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.
   Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A.
   a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5? a) Rotación
   b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación? b) 3 y 4
   c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l? c) 2 y 3



2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.





¡Compara con tus compañeros!

154

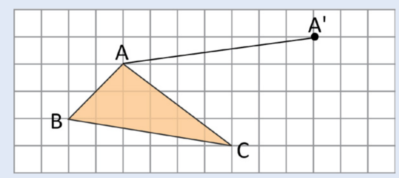
Indicador de logro: Traslada figuras mediante una dirección y un sentido de paralelismo.

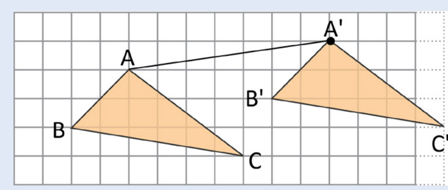
Secuencia:
En esta clase se retoma el movimiento de traslación introducido en la clase anterior, también se usan con mayor frecuencia algunos conceptos y notaciones definidas en la clase 1.1 de esta unidad, tales como los segmentos, su longitud y la notación de dos rectas perpendiculares.

Propósito:
① Establecer que en una traslación todos los segmentos correspondientes tienen la misma longitud y son paralelos. Esto incluye a los segmentos que unen los puntos correspondientes. Para el ejemplo se refiere a $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA' = CC'.

② Resolución de los ítems de la clase.

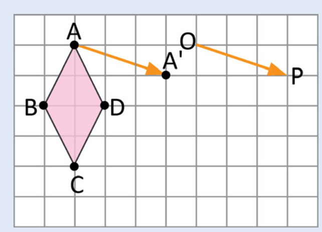
1.

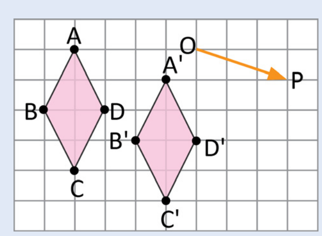




Hay que agregar una columna más a la cuadrícula.

2.

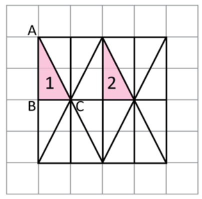




1.3 Traslación

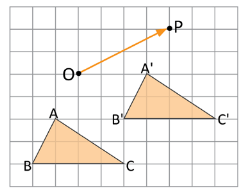
P

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C.
   b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?



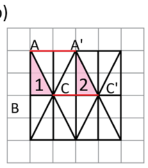
Para denotar un triángulo con vértices A, B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC, y se lee "el triángulo ABC".

2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP. Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
   a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
   b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



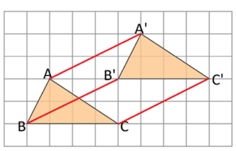
S

1. a) y b)



c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además AA'= CC'.
d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

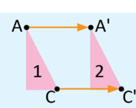
2. a)



b) La relación entre los segmentos se expresa así:
$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y AA' = BB' = CC'.

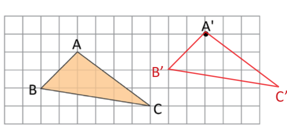
① **C**

En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.

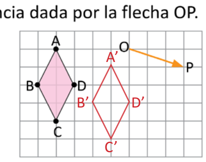


②

1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC.



2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP.



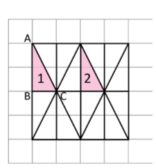
Unidad 8

155

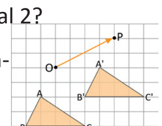
Tarea: página 164 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.3**

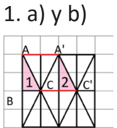
P 1. Se puede trasladar y sobreponer el triángulo 1 al 2.
a) Identifica los puntos A' y C' que son los trasladados de A y C.__ __
b) Traza AA' y CC'.
c) Expresa la relación entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
d) ¿Cómo hay que mover al triángulo 1 para sobreponerlo al 2?



2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y longitud de la flecha OP.
a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.
b) Expresa la relación entre los segmentos determinados en a).

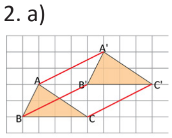


S 1. a) y b)



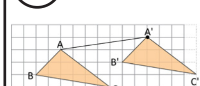
c) $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$.
Además
AA' = CC'.
d) Traslación

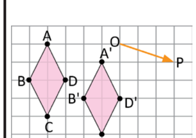
2. a)



b) $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$
y
AA' = BB' = CC'

R

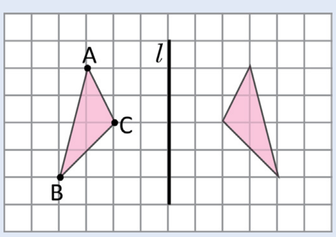


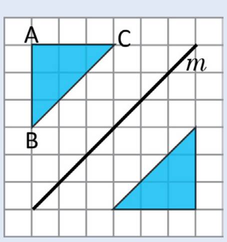


Secuencia:
Se trabaja con la simetría para seguir con el abordaje individual de los movimientos de figuras en el plano que fueron establecidos en la clase 1.2 de esta unidad. Para esta clase se hace uso de la notación de la perpendicularidad entre dos rectas que se estableció en la clase 1.1. También se introduce el concepto de mediatriz de un segmento, el cual se retoma posteriormente. Vale aclarar que en grados anteriores se ha trabajado el concepto de eje de simetría, pero en esta clase se ha tomado a bien presentarlo nuevamente.

Propósito:
① Establecer el concepto de **simetría** y **eje de simetría**. En este momento de la clase es importante hacer hincapié en cómo se denotan los segmentos iguales. También se aprovecha para introducir el término de **mediatriz de un segmento** y sus características.

② Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.



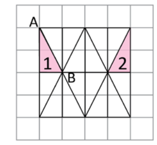


Indicador de logro: Refleja figuras respecto a una recta que es el eje de simetría.

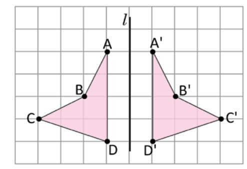
1.4 Simetría

P

1. Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
   b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

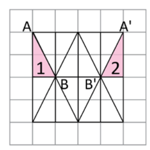


2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
   a) Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
   b) Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l.
   c) Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l.
   d) Expresa simbólicamente la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.



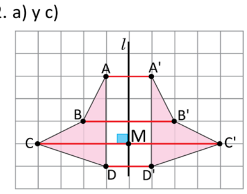
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



b) La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo (⊥). Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.
d) La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como: CM = C'M.

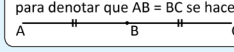
① **C**

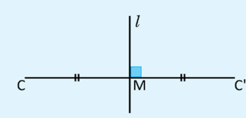
El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.

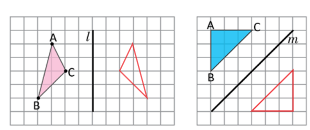
En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

En geometría se utilizan símbolos como ॥ para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:





② Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.



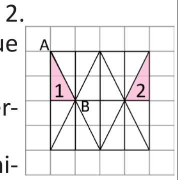
Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

156

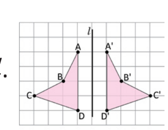
Tarea: página 165 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.4**

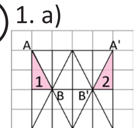
P 1. Al mover el triángulo 1 se puede sobreponer al 2.
a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se sobreponen A y B.
b) ¿Cómo hay que mover el triángulo 1 para sobreponerlo al 2?



2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el ABCD.
a) Une los vértices correspondientes con segmentos.
b) Escribe la relación de los segmentos hechos en a) y l.
c) Nombra con M la intersección de $\overline{CC'}$ y l.
d) Expresa la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.

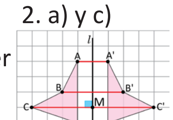


S 1. a)



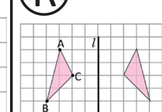
b) Se debe hacer una simetría.

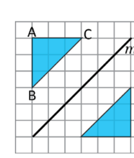
2. a) y c)



b) $\overline{AA'} \perp l$, $\overline{BB'} \perp l$, $\overline{CC'} \perp l$ y $\overline{DD'} \perp l$.
d) CM = C'M.

R





Indicador de logro: Rota figuras respecto a un punto utilizando un ángulo determinado.

Secuencia:
Para finalizar con el abordaje individual de los movimientos de las figuras en el plano se estudia la rotación.

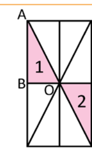
1.5 Rotación

P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.

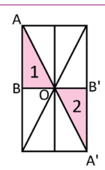
a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?



S

a)

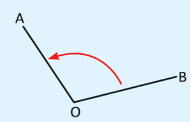


b) El triángulo 1 se puede sobreponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180°.

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

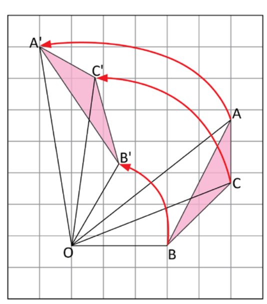


E

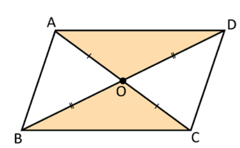
Tomando como centro de rotación el punto O, se ha rotado el ΔABC por un ángulo de 60° para llegar a ser el ΔA'B'C'.

a) ¿Qué relación hay entre $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$?

b) ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A'?



Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180°, se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el ΔAOD, respecto del punto O, este se puede sobreponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.



Solución.

a) OA = OA'

b) Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O.

Unidad 8

157

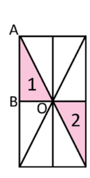
Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.5**

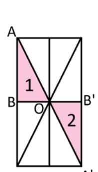
(P) Al mover el triángulo 1, se puede sobreponer al 2.

a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se sobreponen los puntos A y B al trasladar el 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al 2?

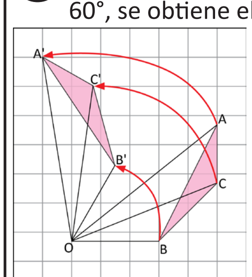


(S) a)



b) El triángulo 1 se sobrepone al 2 con una rotación respecto al punto O con ángulo de 180°.

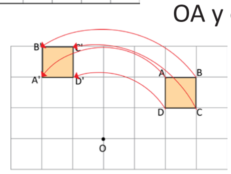
(E) Al rotar el ΔABC respecto a O en 60°, se obtiene el ΔA'B'C'.



a) La relación de $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$ es OA = OA'

b) Al mover el punto A hasta A' se forma una parte de la circunferencia de radio OA y centro O.

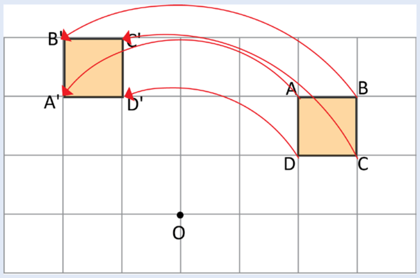
(R) 1.



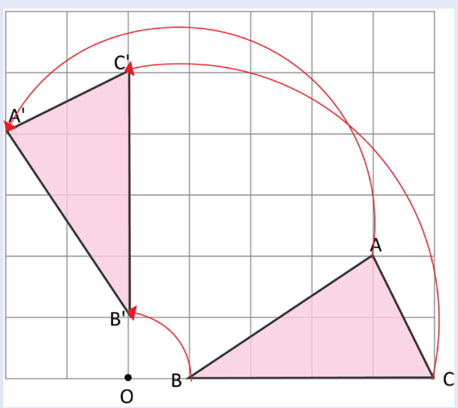
Propósito:

① Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

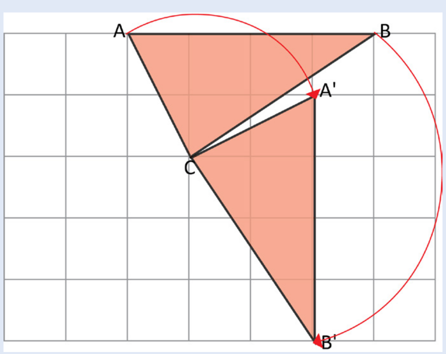
1.



2.

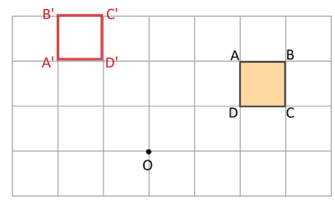


3. Una rotación puede ser:

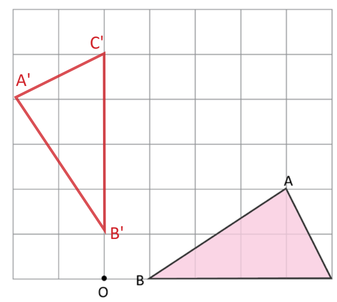


①

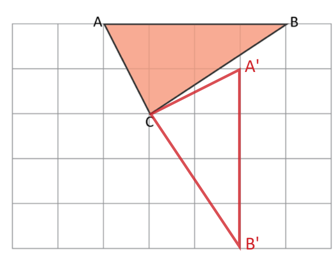
1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°.



3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C:



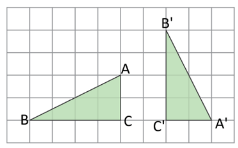
158

1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

Indicador de logro: Utiliza los movimientos de una figura para sobreponerla en otra y determinar si son congruentes.

1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

P ¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?

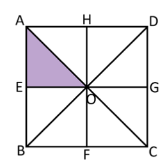


S Un ejemplo de solución es, primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

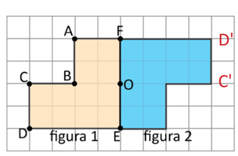
C Como en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

①

1. En la siguiente figura:
   a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?
   b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?
   c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?
   a) Simetría
   b) Rotación
   c) Traslación o simetría

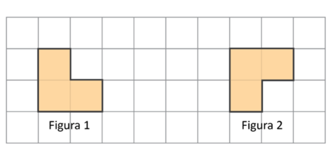


2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.
   a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1.
   b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



Rotación

3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?



1° Rotación
2° Traslación
El orden en que se hacen los movimientos puede cambiar.

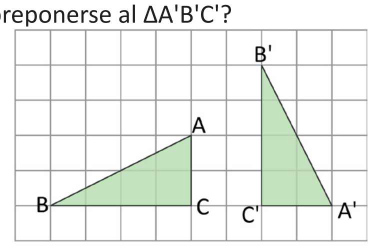
Unidad 8

159

Tarea: página 167 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.6**

P ¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?

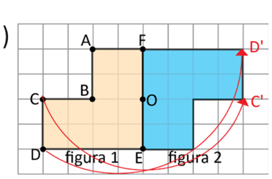


S Un ejemplo de solución es: primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

R

1. a) Simetría
   b) Rotación
   c) Traslación o simetría

2. a)

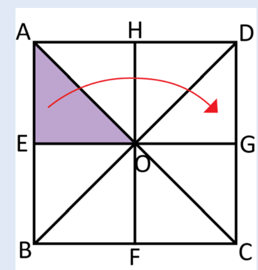


b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento.

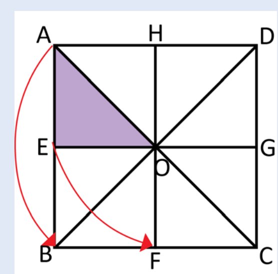
Secuencia:
Anteriormente se abordaron a detalle cada uno de los movimientos de las figuras en el plano. Por tanto, en esta clase se presentan problemas en los que se deben aplicar los movimientos. También se aprovecha para introducir el concepto de **figuras congruentes**.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven algunos ítems de la clase.

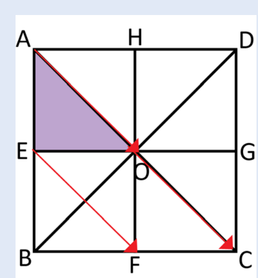
1. a) Simetría:



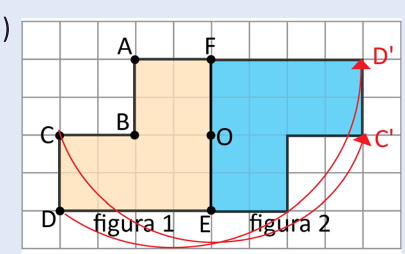
b) Rotación:



c) Traslación o simetría:



2. a)



b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento.

2.1 Características y elementos del círculo

Secuencia:
Los estudiantes ya han trabajado el círculo, el sector circular y sus elementos. También es importante tener en cuenta que cuando se habla de circunferencia se hace referencia al contorno de un círculo, esto ya fue definido en sexto grado. Para esta clase se retoman las nociones básicas que los estudiantes tienen de estos contenidos para facilitar la comprensión de una explicación más detallada del sector circular; también se hace la presentación de la notación del arco. Como en la clase 1.4 se confirmó el significado de eje de simetría, ya se puede hacer uso de esa idea para establecer que un sector circular es simétrico respecto al eje que pasa por el punto en el que se unen sus radios (O) y por el punto medio de su arco. En esta clase también se explica que el diámetro representa un eje de simetría para la circunferencia.

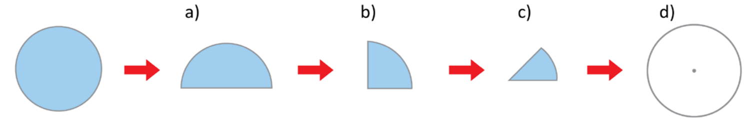
Propósito:
① Recordar a los estudiantes que el término circunferencia hace referencia al contorno de un círculo, en palabras sencillas, "el borde del círculo".

Indicador de logro: Identifica los elementos de un círculo.

2.1 Características y elementos del círculo

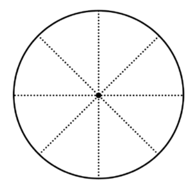
P Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).

a) b) c) d)



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S
1.

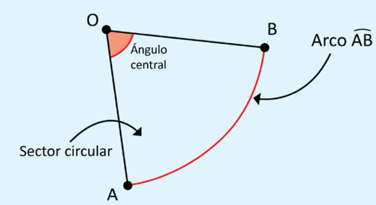


2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

① **C** Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\widehat{AB}$.

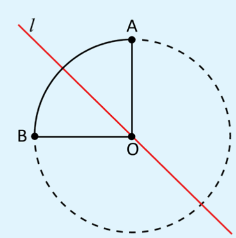
La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular.**

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**



Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje *l* que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\widehat{AB}$.

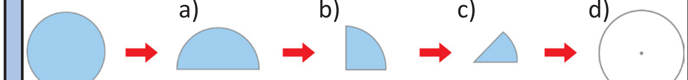


Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.1**

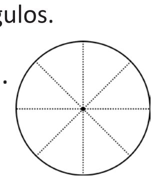
P Se dobla un círculo con los pasos de a), b) y c), sobreponiéndose.
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo de d).

a) b) c) d)



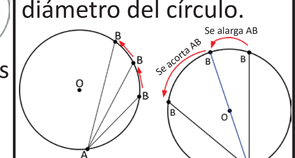
2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra sus ángulos.

S 1.



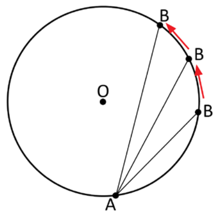
2. Los ángulos son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

E Si A es fijo y B se mueve en la circunferencia, la mayor longitud de $\widehat{AB}$ es cuando pasa por O convirtiéndose en eje de simetría. Por tanto es diámetro del círculo.



R 1. Ángulo central
2. Arco
3. Cuerda
4. Sector circular

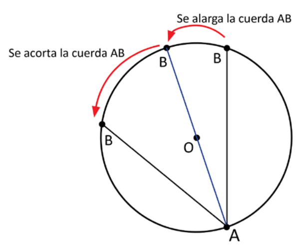
② En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda AB, si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará $\overline{AB}$ su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



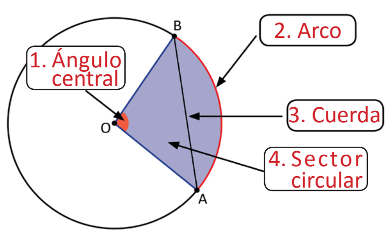
Elementos de un círculo
Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.
Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

$\overline{AB}$ alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O, es decir, cuando $\overline{AB}$ sea el diámetro de la circunferencia.

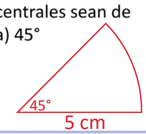


③ 1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.

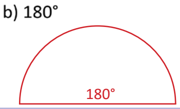


2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de

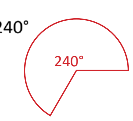
a) 45°



b) 180°



c) 240°



Unidad 8

161

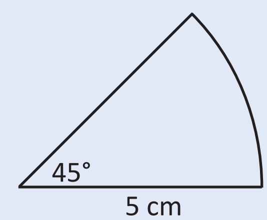
Propósito:

② Determinar que la cuerda de mayor longitud que es un eje de simetría de la circunferencia es el diámetro. En este punto de la clase es importante recalcar que el radio es el segmento que conecta el centro del círculo con cualquier punto de la circunferencia; el diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro del círculo y la cuerda es el segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre la circunferencia.

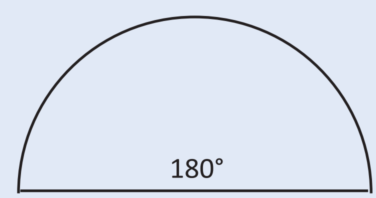
③ Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven algunos ítems de la clase.

2.

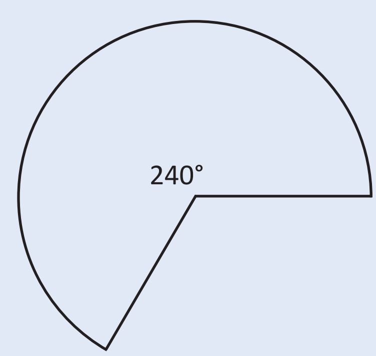
a)



b)



c)

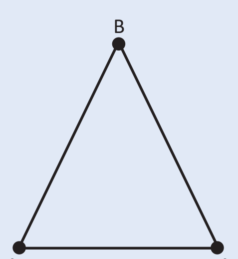


Secuencia:
En sexto grado fue definido el concepto de circunferencia como el contorno de un círculo, en la clase 1.4 se introdujo el significado de eje de simetría, y en la clase anterior se utilizó para establecer que un sector es una figura simétrica; por tanto los estudiantes ya están familiarizados con los conceptos de circunferencia, eje de simetría y figura simétrica, de modo que ahora se puede presentar como característica la simetría de la figura de dos círculos que se intersecan, respecto a un eje. También se presentan como características de dos círculos que se intersecan, las consecuencias de la simetría, por ejemplo la igualdad en la longitud de algunos segmentos y abertura de algunos ángulos, y la perpendicularidad entre el segmento que une los radios con el que une las intersecciones de los círculos.

Propósito:
① Determinar que el segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular al que une sus centros y está dividido en dos partes iguales por este segmento. En la Ⓒ se hace referencia a que la recta que pasa por los centros es un eje de simetría de los círculos, por lo que se debe aclarar que en el Ⓔ el segmento que une los centros es eje de simetría por coincidir o estar incluido en la recta que pasa por los centros.

② Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

Se utiliza el compás para copiar la medida del segmento y hacer los lados del triángulo isósceles. Se pueden hacer muchos triángulos diferentes, el que se muestra a continuación es un ejemplo:

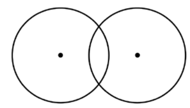


Indicador de logro: Identifica las características de dos círculos que se intersecan.

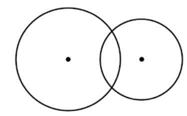
2.2 Características de círculos que se intersectan

P Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

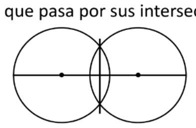
a) Cuando los radios son iguales



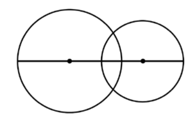
b) Cuando los radios son diferentes



S a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.

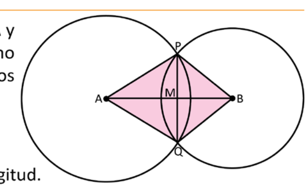


b) La recta que pasa por los centros.



C Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

① **E** En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



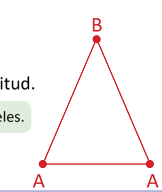
Con respecto al cuadrilátero AQBP:
a) Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.
b) ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el ∢PAB?
c) ¿Qué relación hay entre $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$?

Solución.
Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:
a) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, $\overline{PM}$ y $\overline{QM}$
b) ∢QAB
c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$
El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.

② 1. En el problema anterior:
a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB? Los círculos son de igual radio.
b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP? Rombo.

2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.

Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.

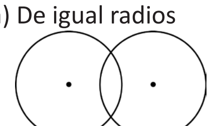


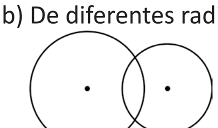
162

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

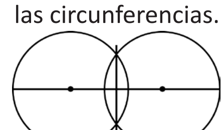
Fecha: **U8 2.2**

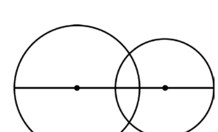
Ⓟ Dibuja los ejes de simetría para los círculos intersecados en a) y b).
a) De igual radios b) De diferentes radios



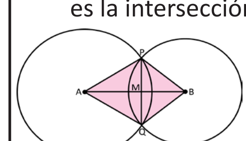


Ⓢ
a) La recta que pasa por sus centros y la que pasa por las intersecciones de las circunferencias.
b) La recta que pasa por sus centros.





Ⓔ Círculos intersecados de centros A y B. Con puntos de intersección de las circunferencias P y Q. M es la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$.



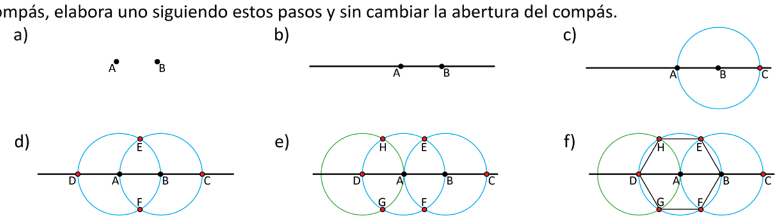
Como $\overline{AB}$ es eje de simetría de la figura, por tanto:
a) AP = AQ, BP = BQ, PM = QM
b) ∢PAB = ∢QAB
c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

Ⓡ
1. a) Los círculos son de igual radio
b) Rombo

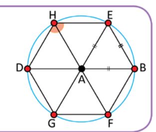
Indicador de logro: Dibuja figuras geométricas utilizando regla y compás.

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

① **P** Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.



S Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono.

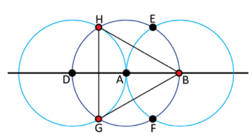


C Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

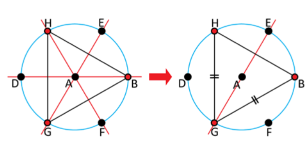
E Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

a) Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.

b) A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



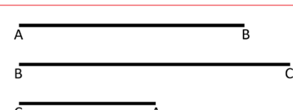
Solución.
Como ∢GAH = 120° = ∢GAB (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el ΔGBH 120° respecto al punto A.

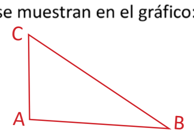


Cumpliéndose entonces, GH = GB = HB. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además ∢HGB = ∢GBH = ∢BHG = 60°.

② Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:





Unidad 8

163

Tarea: página 170 del Cuaderno de Ejercicios.

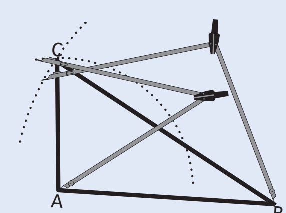
Secuencia:
Con esta clase se busca que los estudiantes al construir con regla y compás diferentes figuras planas, intuitivamente confirmen o conozcan las propiedades de algunas de estas figuras. Además de lo anterior se establece que el compás puede ser utilizado para copiar longitudes de segmentos.

Propósito:
① Mostrar la construcción de un hexágono regular usando regla y compás. En este punto de la clase se establece que los triángulos que forman el hexágono son triángulos equiláteros, por tanto es un hexágono regular. A continuación se presenta la demostración utilizada para concluir que los triángulos que forman el hexágono son equiláteros.

1. $\overline{DH} = \overline{HA} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BA}$
2. ΔAEB y ΔAHD son equiláteros por 1.
3. ∢EAB + ∢EAH + ∢HAD = 180° por formar un ángulo llano.
4. ∢EAB = ∢HAD = 60° por 2.
5. ∢EAH = 60° por 3 y 4.
6. ∢AHE = ∢AEH = 60° por 1 y 5. Por tanto, ΔHAE es equilátero.

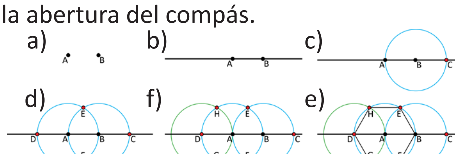
Dado que $\overline{DB}$ es diámetro del círculo, también el ΔAGF es equilátero por la simetría respecto a $\overline{DB}$.

② Resolver el ítem de la clase. Puede haber varias soluciones, por lo que se presenta solo un ejemplo.
Se puede utilizar un compás para copiar las longitudes de los segmentos para dibujar el triángulo tal como se muestra en la ilustración.



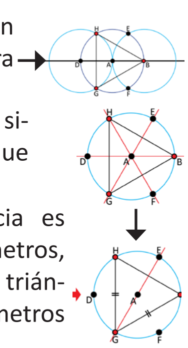
Fecha: **U8 2.3**

Ⓟ Utilizando regla y compás, elabora un hexágono siguiendo los pasos y sin cambiar la abertura del compás.

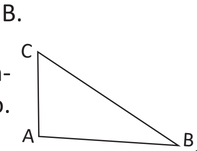


Ⓢ Se forman seis triángulos, la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Por tanto son equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono regular.

Ⓔ También se pueden elegir tres puntos para formar un triángulo.
Se trazan los ejes de simetría del triángulo que pasan por A.
Como la circunferencia es simétrica por los diámetros, los ejes de simetría del triángulo resultan ser diámetros de la circunferencia.
Entonces, GH = GB = HB.



Ⓡ Por tanto el triángulo es equilátero.



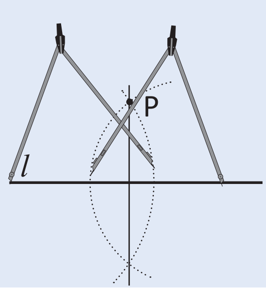
Secuencia:
En la clase 2.2 los estudiantes determinaron que dos círculos que se intersecan poseen algunas características, tales como la perpendicularidad del segmento que une sus centros y el segmento que une los puntos en las intersecciones de las circunferencias. También en la clase anterior los estudiantes dibujaron figuras planas utilizando regla y compás. Ahora se combinará lo aprendido en las clases antes mencionadas, para trazar rectas perpendiculares con regla y compás guiándose por el hecho de que la recta que se dibujará pasa por el segmento que une los puntos de las intersecciones de las circunferencias.

Propósito:
① Construir una recta perpendicular a la recta *l* utilizando las características de círculos que se intersecan. En este punto es adecuado recordar a los estudiantes que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular al segmento que une sus centros, a manera de aclaración, es igualmente válido decir que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias. La selección de la ubicación del punto B es arbitraria, es decir, puede ser cualquiera en la recta, lo importante es que sea el centro de una circunferencia que pase por P, sin importar si los dos círculos intersecados tienen radios diferentes.

② Construir una recta perpendicular a la recta *l*, que pase por P; en este procedimiento siempre se utilizan las propiedades de círculos que se intersecan, con la diferencia de que a través de este proceso se asegura que los dos círculos tengan igual radio.

③ Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

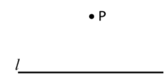
1. a)



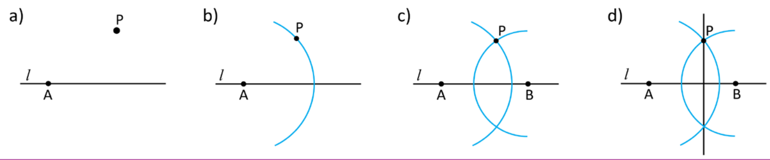
Indicador de logro: Aplica características de dos círculos que se intersecan para trazar rectas perpendiculares.

2.4 Rectas perpendiculares

① **P** En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta *l* y que pase por el punto P.

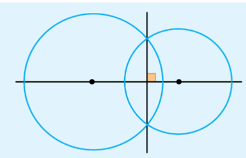


S Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:



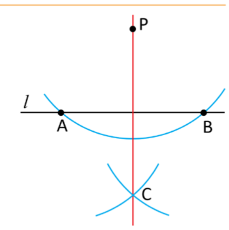
C Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



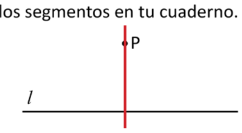
② **E** Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta *l* como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta *l*. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.

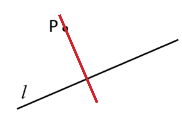


③
1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta *l*. Copia los segmentos en tu cuaderno.

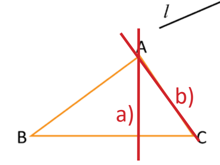
a)



b)



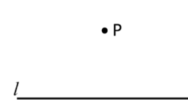
2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{AB}$.



Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

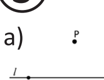
Fecha: **U8 2.4**

(P) Con regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta *l* y que pase por P.

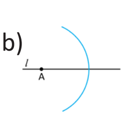


(S)

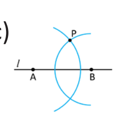
a)



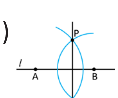
b)



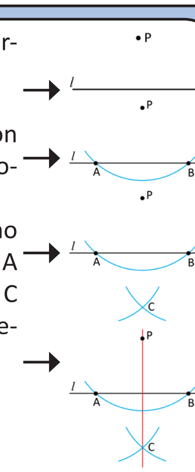
c)



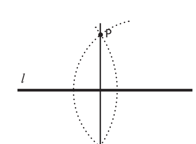
d)



(E) Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:
1. Dibujar un punto P y una recta *l*.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a *l*. Se coloca A y B en sus intersecciones.
3. Se dibujan dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C donde se intersecan las circunferencias.
4. Trazar PC.



(R) 1.



2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

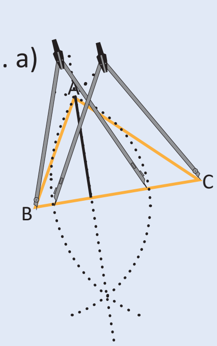
Indicador de logro: Determina la distancia entre un punto y una recta y la distancia entre rectas paralelas.

Secuencia:
Anteriormente se trabajó, utilizando regla y compás, la forma en que se traza una recta que pasa por un punto determinado y es perpendicular a otra. Basado en esto, ahora se define la distancia de un punto a una recta, de modo que el estudiante utilice lo aprendido en la clase anterior. Análogamente se establece que el segmento que representa la distancia entre dos rectas paralelas es perpendicular a ellas y por tanto constante, desde cualquier punto.

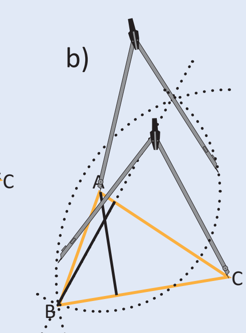
Propósito:
① Establecer que a la longitud del segmento que une un punto y una recta y que es perpendicular a la recta, se le llama distancia. Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas se parte de la misma idea, es decir, se elige cualquier punto que esté sobre una de las rectas y se determina la distancia desde ese punto hacia la otra recta. Se debe destacar que el procedimiento para determinar la distancia entre un punto y un segmento o entre dos segmentos es el mismo que cuando se trabaja con rectas.

② Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

1. a)

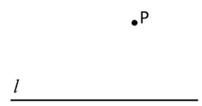


b)

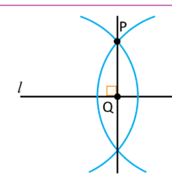


2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

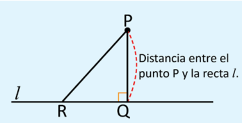
P Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l.



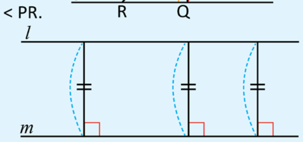
① **S** Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.



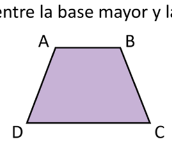
C Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.



Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.

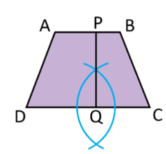


E Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

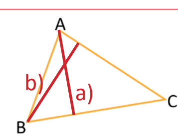


Solución.

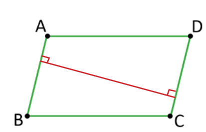
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



② 1. En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
a) Entre A y $\overline{BC}$.
b) Entre B y $\overline{AC}$.



2. En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



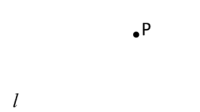
Unidad 8

165

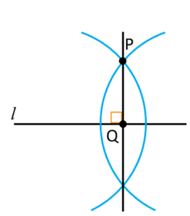
Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.5**

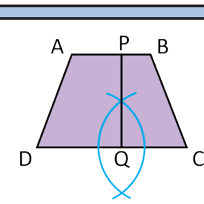
(P) Se le llama distancia entre un punto y una recta a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Traza la distancia entre el punto P y la recta l.



(S) Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

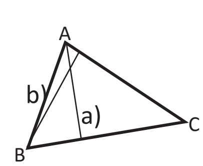


(E)



Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. $\overline{PQ}$ es la distancia.

(R) 1.



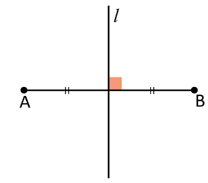
Secuencia:
La construcción de la mediatriz resulta de la intersección de dos círculos con igual radio, es decir, la mediatriz coincide con el segmento que une los dos puntos de intersección de las circunferencias. También se aprovecha para establecer que todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.

Propósito:
① Establecer que la mediatriz es una recta que coincide con el segmento que une los puntos en los que las circunferencias con igual radio se intersecan. Se debe destacar que la mediatriz se encuentra en el punto medio del segmento ya que viene a ser un eje de simetría de los círculos (con igual radio) intersecados a partir de los cuales se construyó.

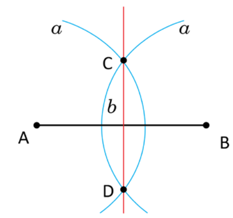
Indicador de logro: Dibuja la mediatriz de un segmento aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

2.6 Mediatriz de un segmento

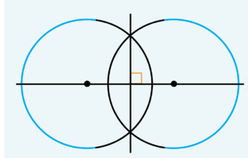
P La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de $\overline{AB}$ es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.

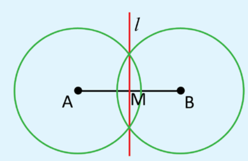


① **S** Para dibujar la mediatriz de $\overline{AB}$, se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.

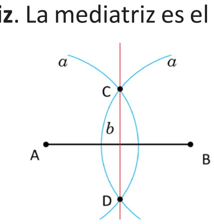


166

Tarea: página 173 del Cuaderno de Ejercicios.

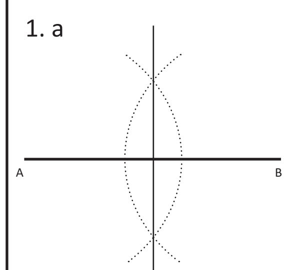
Fecha: **U8 2.6**

Ⓟ La recta perpendicular a un segmento que lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz**. La mediatriz es el eje de simetría del segmento.
Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b usando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Ⓢ Se dibujan dos círculos del mismo radio cuyos centros son A y B, y las intersecciones de las circunferencias C y D; luego, se traza la recta que pasa por C y D, obteniéndose la mediatriz del segmento. Dos círculos de igual radio que se intersecan son simétricos respecto a la recta que pasa por los dos puntos de intersección de las circunferencias.

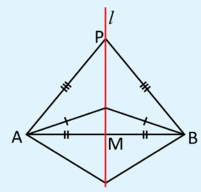
Ⓡ
1. a



Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta *l*, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.

Por tanto, PA = PB.

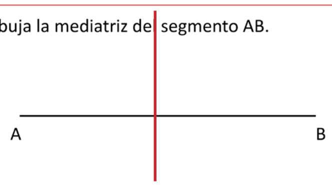
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.



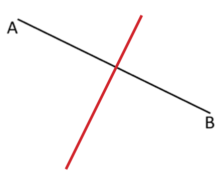
El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".

② 1. Dibuja la mediatriz del segmento AB.

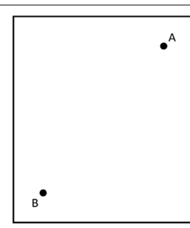
a)



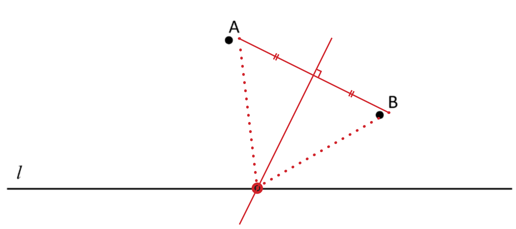
b)



En una página escribe los puntos A y B, traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta *l* que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B.

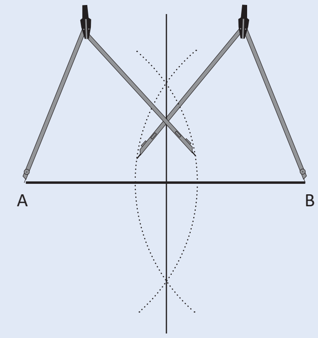


Unidad 8

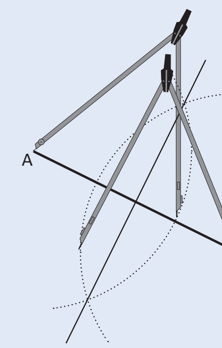
167

② Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

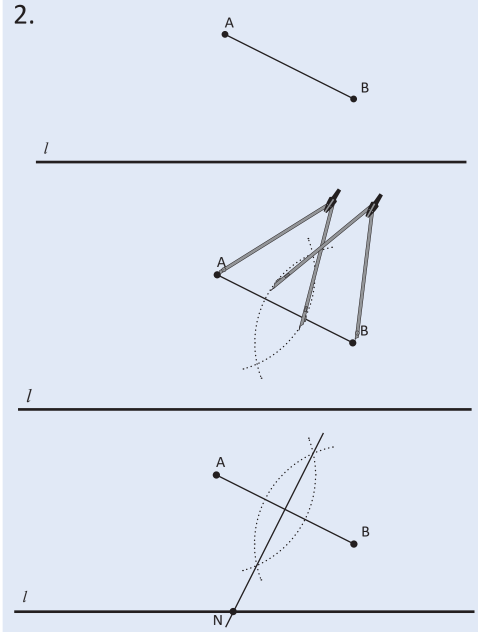
1. a)



b)



2.



Todo punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento. Como el punto de intersección N está sobre la mediatriz y la recta *l*, entonces ese punto sobre la recta *l* equidista de A y B.

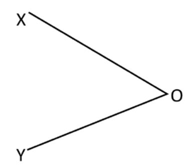
Secuencia:
Para la construcción de la bisectriz de un ángulo se aplican las características de dos círculos que se intersecan. El uso de estas características para la construcción de la bisectriz consiste en el hecho de que es necesario construir dos círculos, para los cuales el centro del primero coincida con el vértice del ángulo y el centro del segundo sea la intersección de dos circunferencias auxiliares cuyos centros sean las intersecciones de la primera circunferencia con los lados del ángulo.

Propósito:
① Determinar que la semirrecta que inicia del centro del primer círculo y pasa por el centro del segundo será la bisectriz del ángulo. Esto es así porque dicha semirrecta coincide con la recta que representa un eje de simetría para los dos círculos intersecados, de manera que lo que se encuentra por arriba de este eje es idéntico a lo que se encuentra por debajo. Por tanto es importante hacer énfasis en que la bisectriz es un eje de simetría por lo que todo punto sobre ella equidista (está a la misma distancia) de los lados del ángulo.

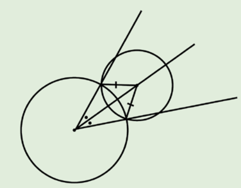
Indicador de logro: Dibuja la bisectriz de un ángulo aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

2.7 Bisectriz de un ángulo

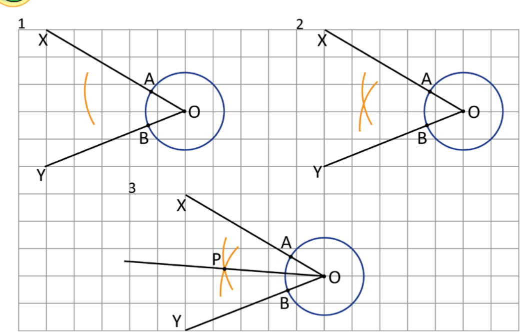
P Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirrecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



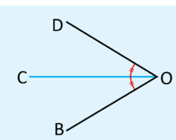
S



El compás se utiliza para trasladar distancias.

Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.
Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.
Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.
Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

① **C** La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**.
También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.



Por tanto, $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COB = \frac{1}{2} \sphericalangle DOB$.

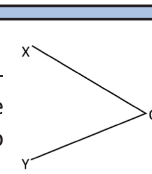
Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:
1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirecta OP.

168

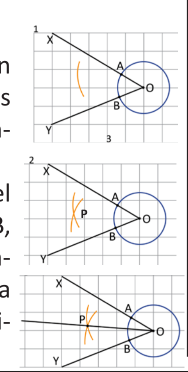
Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.7**

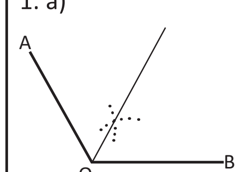
Ⓟ Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirrecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



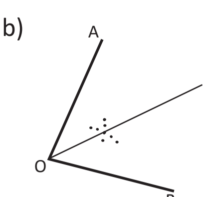
Ⓢ
Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B. Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.
Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B, luego se representa con P la intersección de ambos arcos. P es el centro de una circunferencia que pasa por A y B. Por último se traza la semirrecta que parte de O y pasa por P.



Ⓡ
1. a)

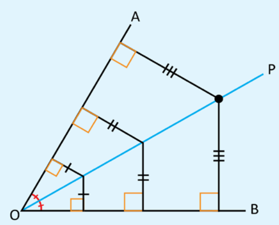


b)



Dado que la bisectriz de ∢AOB es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

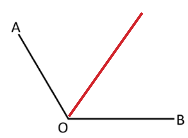
En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:



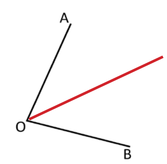
②

1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.

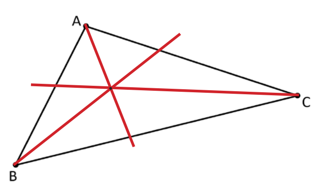
a)



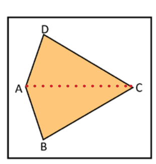
b)



2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC.



3. En la figura:
   a) Dobla de tal forma que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero se sobrepongan.
   b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.
   c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?



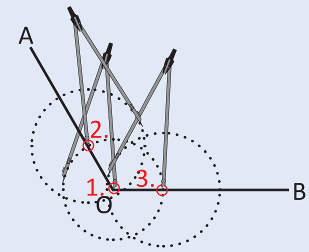
∢CAB = ∢CAD
∢ACB = ∢ACD

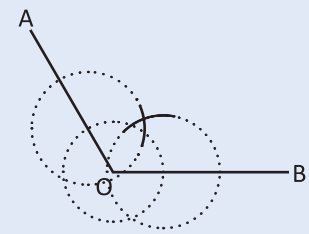
Unidad 8

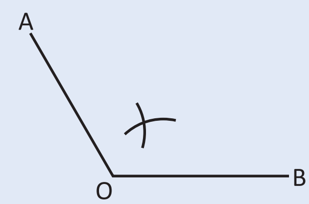
169

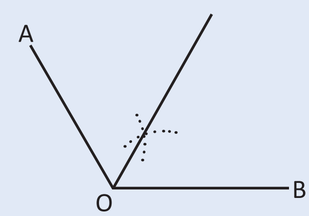
② Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

1. a)

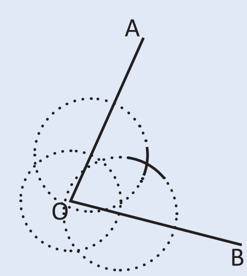


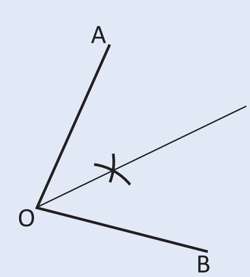






b)



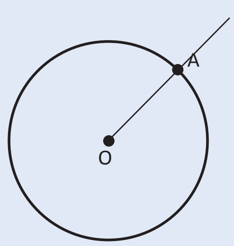


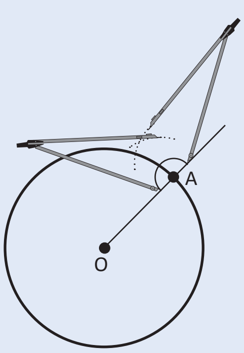
Secuencia:
Para esta clase se aplican las características de círculos que se intersecan para la construcción de las rectas tangentes a una circunferencia, considerando que esta recta es perpendicular a la que pasa por el centro del círculo y el punto de intersección.

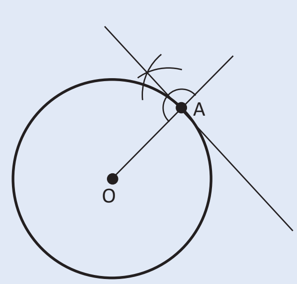
Propósito:
①, ② Determinar que en el caso de que un ángulo sea de 180° la bisectriz y la mediatriz coinciden. Se espera que el estudiante para desarrollar el Ⓟ de la clase determine en a) que se ha realizado el proceso para construir la mediatriz, y en b) que asocie el hecho de que la mediatriz representa un eje de simetría del segmento AB, lo cual coincide con que la bisectriz también es un eje de simetría del ángulo AOB, considerando al segmento AB como el ángulo llano AOB.

③ Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

1.







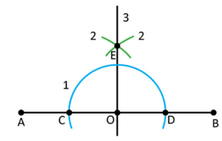
Indicador de logro: Dibuja una recta tangente a una circunferencia utilizando características de dos círculos que se intersecan.

2.8 Tangente a una circunferencia

① **P**

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.

a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE.
b) Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a $\overline{AB}$.



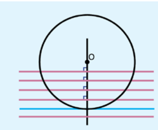
② **S**

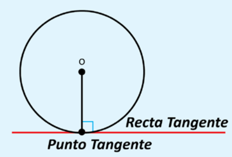
a) Se observan tres pasos:
1. Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D.
2. Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones como E.
3. Trazar la recta que pasa por EO.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, ∢AOE = 90°.

C

Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.



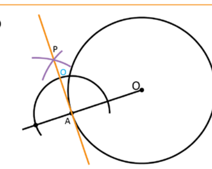


En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

E

En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.

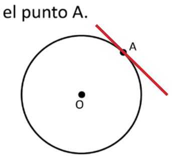
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
b) Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.



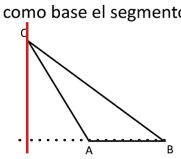
Solución.
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

③

1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.



2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB.

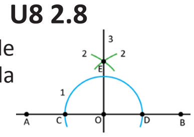


170

Tarea: página 175 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.8**

Ⓟ La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.

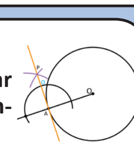


Explica:
a) Los pasos para trazar la recta que pasa por O y E.
b) La razón por la que la recta que pasa por O y E es perpendicular a $\overline{AB}$.

Ⓢ
a) 1. Dibujar una circunferencia con centro en O y nombrar con C y D sus intersecciones con el segmento.
2. Dibujar dos circunferencias con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones con E.
3. Trazar la recta que pasa por E y O.

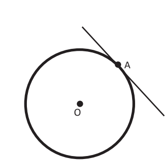
b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por O y E es bisectriz del ángulo. Por tanto, ∢AOE = 90°.

Ⓔ **Pasos para trazar una recta tangente en A.**



1. Trazar una circunferencia con centro en A.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la semirrecta OA.
3. Marcar con P la intersección entre los dos arcos y trazar la recta AP.

Ⓡ 1.



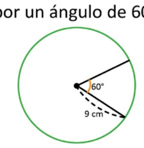
Indicador de logro: Calcula la longitud del arco de un sector circular.

2.9 Longitud de arco de un sector circular

P La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma:
$l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180°.

2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60°.



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.
Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

S Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$l : 180 = 18\pi : 360$
$360l = 18\pi \times 180$
$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$
$l = 18\pi \times \frac{\cancel{180}^{1}}{\cancel{360}_{2}}$
$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$
$l = 9\pi$

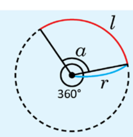
2.

Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

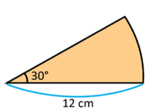
$l : 60 = 18\pi : 360$
$360l = 18\pi \times 60$
$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$
$l = 18\pi \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{6}}$
$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$
$l = 3\pi$

C Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



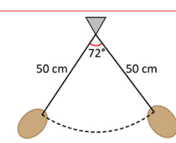
E Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.



Solución.
En el problema: $a = 30°$ y $r = 12$.
La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

① 1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm. π

2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo? 20π



Unidad 8

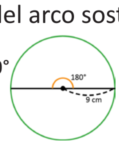
171

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.9**

(P) La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma:
$l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia y aplicando regla de tres simple directa, calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de

1. 180°

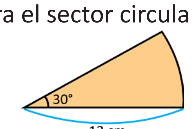


2. 60°

(S) 1. $l : 180 = 18\pi : 360$
$360l = 18\pi \times 180$
$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$
$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$
$l = 9\pi$ cm

2. $l : 60 = 18\pi : 360$
$360l = 18\pi \times 60$
$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$
$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$
$l = 3\pi$ cm

(E) Para el sector circular:



La longitud del arco es:
$l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360}$
$= 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12}$
$= 2\pi$ cm

(R) 1. π cm
2. 20π cm

Secuencia:
Los estudiantes en sexto grado aprendieron a calcular la longitud de una circunferencia y análogamente la longitud de un sector circular. Este último se retoma en esta clase con la diferencia de que a partir de ahora se llamará longitud de arco de un sector circular. Para el cálculo de la longitud de arco se presentará a los estudiantes la fórmula:

$$l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$$

que se deduce utilizando la regla de tres simple directa aprendida en la unidad 6.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

1. Datos del problema: $a = 45°$ y $r = 4$
El área del sector circular es:

$$l = 2\pi \times 4 \times \frac{45}{360}$$
$$= 2\pi \times 4 \times \frac{1}{8}$$
$$= \pi \text{ cm}$$

2. Datos del problema: $a = 72°$ y $r = 50$
El área del sector circular es:

$$l = 2\pi \times 50 \times \frac{72}{360}$$
$$= 2\pi \times 50 \times \frac{1}{5}$$
$$= 20\pi \text{ cm}$$

Secuencia:
En sexto grado los estudiantes aprendieron a calcular el área del círculo y de sectores circulares notables; en esta clase se retoma el tema del área de un sector circular, y se le presenta a los estudiantes la fórmula:

$$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$

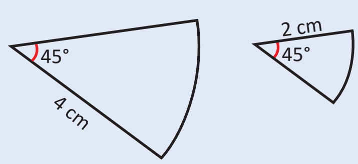
Para deducirla se hace igual que en el caso de la longitud de arco del sector circular, utilizando la regla de tres simple directa.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

1. Datos del problema: $a = 120°$ y $r = 9$
   El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 9^2 \times \frac{120}{360}$$
$$= \pi \times 9^2 \times \frac{1}{3}$$
$$= 27\pi \text{ cm}^2$$

2. Para realizar este problema se debe calcular el área del sector circular de mayor radio y luego restar el área del sector con menor radio.



Área del sector circular más grande.
Datos: $a = 45°$ y $r = 4$
El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 4^2 \times \frac{45}{360}$$
$$= \pi \times 4^2 \times \frac{1}{8}$$
$$= 2\pi$$

Área del sector circular más pequeño.
Datos: $a = 45°$ y $r = 2$
El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 2^2 \times \frac{45}{360}$$
$$= \pi \times 2^2 \times \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{2}\pi$$

El área sombreada es:
$2\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$ cm²

Indicador de logro: Calcula el área de un sector circular.

2.10 Área de un sector circular

P

El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:
$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90°.

2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45°.

El área del círculo se calcula como: $A = \pi \times r^2$. Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$S : 90 = 16\pi : 360$
$360S = 16\pi \times 90$
$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$
$S = 16\pi \times \frac{\cancel{90}^{1}}{\cancel{360}_{4}}$
$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$
$S = 4\pi$

2.

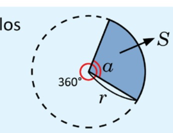
Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$S : 45 = 16\pi : 360$
$360S = 16\pi \times 45$
$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$
$S = 16\pi \times \frac{\cancel{45}^{1}}{\cancel{360}_{8}}$
$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$
$S = 2\pi$

C

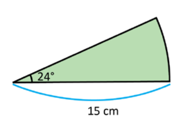
Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



E

Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



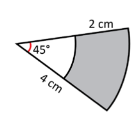
Solución.
Datos del problema: $a = 24°$ y $r = 15$

El área del sector circular es: $S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\pi$

①

1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm. 27π

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura: $\frac{3}{2}\pi$



172

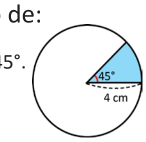
Tarea: página 177 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.10**

P El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:
$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$. Pensando en un círculo del mismo radio, calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de:

1. 90°.

2. 45°.

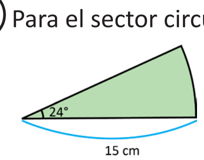


S

1. $S : 90 = 16\pi : 360$
   $360S = 16\pi \times 90$
   $S = 16\pi \times \frac{90}{360}$
   $S = 16\pi \times \frac{1}{4}$
   $S = 4\pi$ cm²

2. $S : 45 = 16\pi : 360$
   $360S = 16\pi \times 45$
   $S = 16\pi \times \frac{45}{360}$
   $S = 16\pi \times \frac{1}{8}$
   $S = 2\pi$ cm²

E Para el sector circular:



El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360}$$
$$= \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15}$$
$$= 15\pi \text{ cm}^2$$

R

1. 27π cm²
2. $\frac{3}{2}\pi$ cm²

Indicador de logro: Determina el incentro de un triángulo.

2.11 Incentro de un triángulo

P En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 1

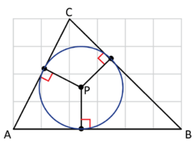
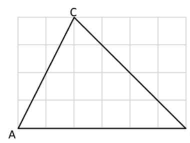


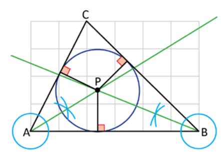
Imagen 2



Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

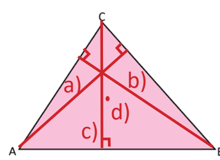
S Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

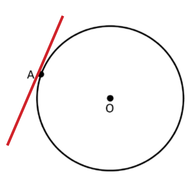
Este punto P cumple que está a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢ABC, también cumple estar a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢CAB. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



C En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

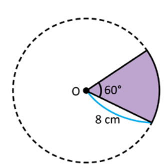
① 1. En el ΔABC, considerando AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
   a) El punto A hacia el segmento $\overline{BC}$.
   b) El punto B hacia el segmento $\overline{AC}$.
   c) El punto C hacia el segmento $\overline{AB}$.
   d) Determina en incentro de ΔABC.





2. Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

3. Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60°:
   a) Calcula la longitud de su arco. $\frac{8}{3}\pi$
   b) Calcula el área del sector circular. $\frac{32}{3}\pi$



Unidad 8

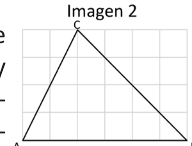
173

Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.

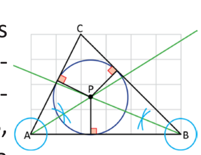
Fecha: **U8 2.11**

Ⓟ En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba que es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

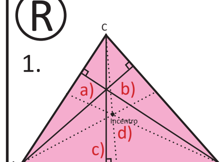
Imagen 2



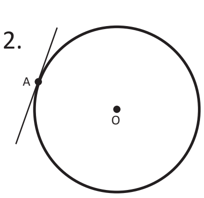
Ⓢ Se trazan las bisectrices de ∢ABC y ∢CAB. Sea P la intersección de las bisectrices. P está a igual distancia de los pares de lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, y $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre las bisectrices de ∢ABC y ∢CAB respectivamente. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



Ⓡ
1.



2.

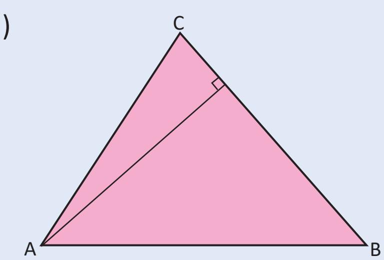


3. a) $\frac{8}{3}\pi$ cm
   b) $\frac{32}{3}\pi$ cm^2

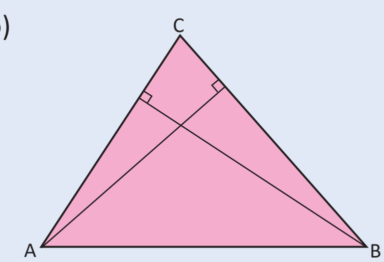
Secuencia:
En la clase 2.7 de esta unidad se aprendió a trazar la bisectriz de un ángulo. En esta clase se trazan las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo, para observar que el punto en donde se cortan las bisectrices se encuentra a igual distancia de los lados del triángulo. Una vez determinado lo anterior se dice que ese punto se llama **incentro** puesto que es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo, es decir, tangente a sus tres lados.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem. El triángulo del problema 1 no posee las medidas escritas, ya que representa solo un modelo del triángulo con el que se trabajará.

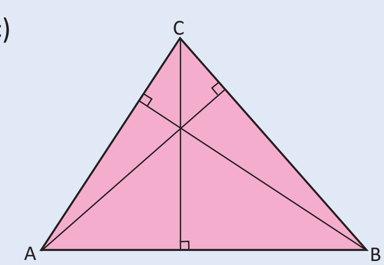
1. a)



b)

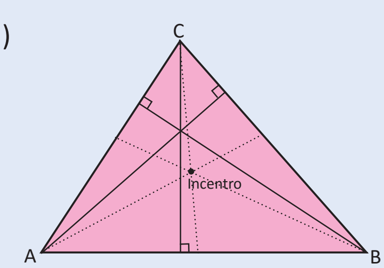


c)



Las tres rectas se intersecan en un punto.

d)



3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

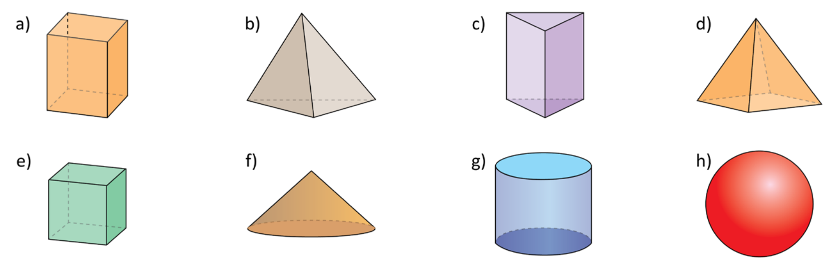
Secuencia:
En grados anteriores se caracterizaron los cuerpos geométricos y se clasificaron según sus características en prismas, pirámides, conos y cilindros. Para esta clase se retoma el tema de clasificación de cuerpos geométricos ampliando la clasificación a poliedros y cuerpos redondos.

Propósito:
①, ② Clasificar cuerpos geométricos según las características de sus caras. Se debe destacar que en los cuerpos geométricos se entienden como "caras" tanto las laterales como las bases.

Indicador de logro: Clasifica cuerpos geométricos según sus características.

3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

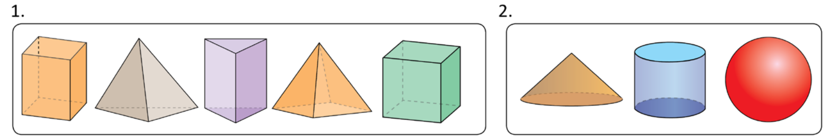
① **P** En los cuerpos geométricos se entiende como **cara** tanto las caras laterales como las bases. En las figuras del literal a) hasta el literal h) se observan algunos cuerpos geométricos.



Clasifica los cuerpos geométricos según las similitudes de sus caras.

② **S** Se hace la siguiente clasificación de las figuras desde a) hasta h).

1. 2.

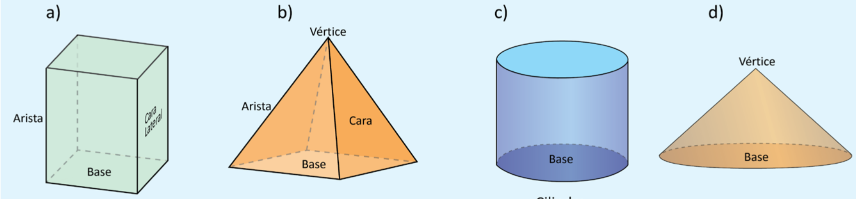


C Las figuras de a) hasta d) del grupo 1 son llamadas **poliedros**, la característica de estos cuerpos es que sus caras son figuras planas, por lo general polígonos, como rectángulos o triángulos.

La palabra **poliedro** viene de las raíces griegas: πολύς (polys), "muchas" y de έδρα (edra), "base", "caras".

Dentro de estas, las figuras como a) y c) cuyas caras laterales son rectángulos, son llamadas **prismas**. Las figuras como b) y d), cuyas caras laterales son triángulos, reciben el nombre especial de **pirámides**. Si además, el prisma tiene todos sus lados iguales, se le llama **cubo**.

Las figuras desde f) hasta h) cuyas caras laterales son curvas, reciben el nombre de **cuerpos redondos**. En las imágenes de abajo se pueden observar los elementos de algunos cuerpos geométricos, a) es un prisma cuadrangular, b) es una pirámide de base rectangular, c) es un cilindro y d) es un cono.

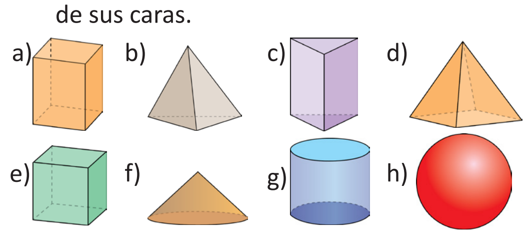


Prisma rectangular | Pirámide rectangular | Cilindro | Cono

Tarea: página 179 del Cuaderno de Ejercicios.

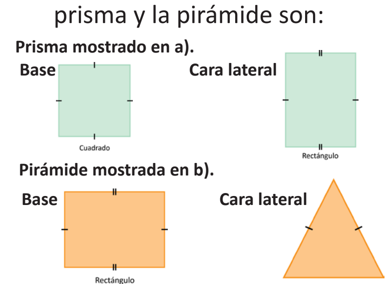
Fecha: **U8 3.1**

P En los cuerpos geométricos se entiende como caras tanto las laterales como las bases. Clasifica los cuerpos geométricos del literal a) hasta el h) según las similitudes de sus caras.

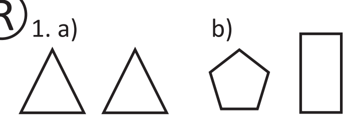


S 1. a), b), c), d) y e)
2. f), g) y h)

E Las figuras que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide son:



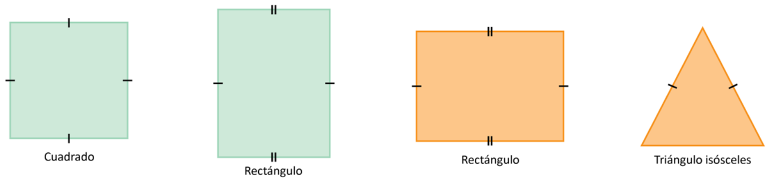
R 1. a) b)



E

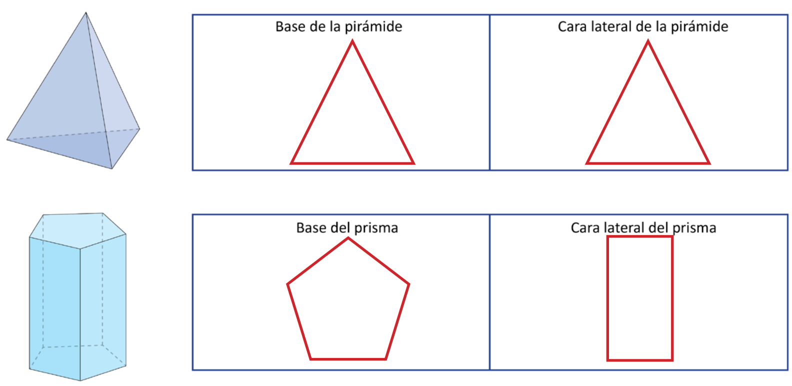
De la imagen anterior, se pueden obtener las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide, se resume a continuación.

Base del prisma mostrado en el literal a). | **Cara lateral del prisma mostrado en el literal a).** | **Base de la pirámide mostrada en el literal b).** | **Cara lateral de la pirámide mostrada en el literal b).**

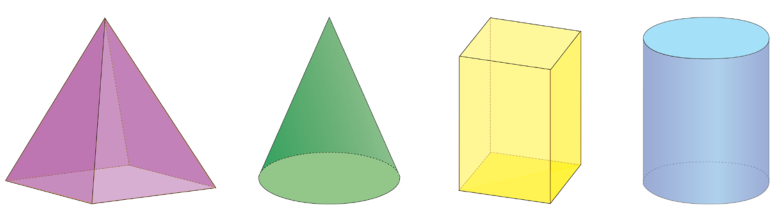


③

1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide.



2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:
   a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono.
   b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro.



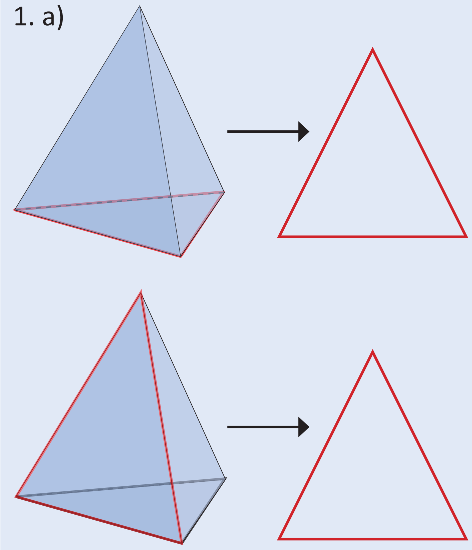
a) En una pirámide la base es un polígono. En el cono la base siempre es un círculo.
b) En una prisma la base es un polígono. En el cilindro la base siempre es un círculo.

Unidad 8

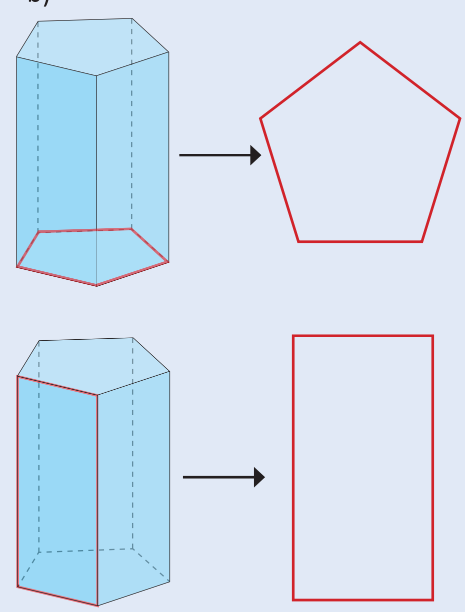
175

③ Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

1. a)



b)



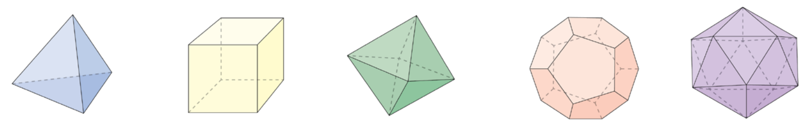
Secuencia:
En la clase anterior se clasificaron los cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos. En esta clase se hace una subclasificación de los poliedros en poliedros regulares.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado en clases. En el numeral 2 se pueden construir algunos polígonos regulares a manera de recordatorio; de preferencia los utilizados para construir los polígonos vistos en clase.

Indicador de logro: Clasifica poliedros regulares por el número y la forma de las caras.

3.2 Características de poliedros regulares

P Observa los siguientes poliedros. Luego responde.

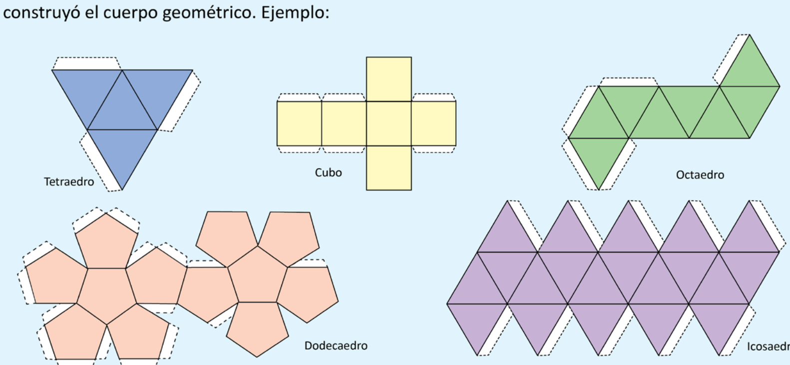


a) ¿Qué figuras forman las caras de la superficie de cada poliedro?
b) ¿Cuántas caras tiene cada poliedro?
c) ¿Qué característica es común en todos los poliedros?

S

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

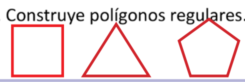
C Un **poliedro regular** es el cuerpo geométrico en el cual todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama plano desarrollado de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico. Ejemplo:



① 1. Completa la siguiente tabla:

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	Triángulos equiláteros	Cuadrados	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares	Triángulos equiláteros
Número de caras	4	6	8	12	20
Número de vértices	4	8	6	20	12

2. Construye polígonos regulares.



176

Tarea: página 181 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.2**

P Observa los siguientes poliedros. Luego responde.

S

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágono	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

R
Cara:
Triángulo equilátero, cuadrado, triángulo equilátero, pentágono regular y triángulo equilátero
Número de caras:
4, 6, 8, 12 y 20
Número de vértices:
4, 8, 6, 20 y 12

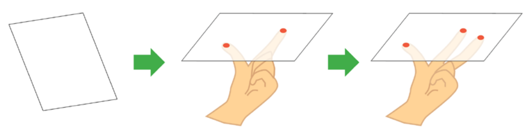
Indicador de logro: Identifica la relación de posición entre rectas y planos.

Secuencia:
Para esta clase se trabaja la geometría del espacio, introduciendo los planos y la relación de la posición de dos líneas rectas en el espacio. Para los planos se muestra la notación que regularmente tienen y las condiciones para delimitarlos. En el caso de las relaciones de la posición de dos rectas en el espacio se trabajan las rectas secantes, paralelas y en posición cruzada.

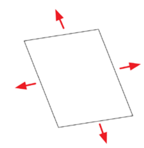
3.3 Relación de posición entre rectas y planos

P Toma una hoja de papel, ¿cómo se puede sostener una hoja de papel de forma estable, sin que haya un desbalance?

a) Intenta sostenerla utilizando únicamente dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál de las formas la hoja de papel es más estable?



Se puede tomar la idea de un plano como una hoja de papel, la cual se extiende indefinidamente, hacia los lados.



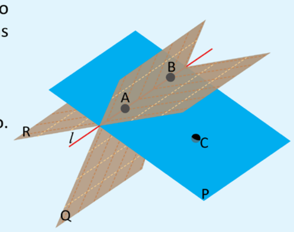
S
a) Si se toma con dos dedos la hoja de papel, queda siempre en desbalance.
b) Sin embargo, si se toma con tres dedos la hoja de papel queda firme, sin moverse.
c) Por tanto, una hoja de papel queda perfectamente sostenida utilizando tres dedos.

En la imagen se puede observar que la tapa del piano también está sostenida de forma estable por la base con forma de recta y un punto de soporte.

También se puede observar que el piano se mantiene estable con tres puntos de soporte.

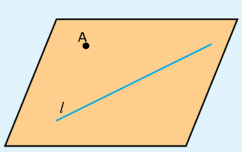
C En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

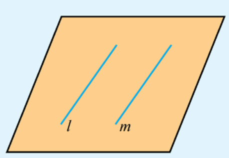


También, un plano queda determinado por:

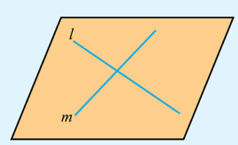
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



b) Dos rectas paralelas.



c) Dos rectas secantes que se cortan.



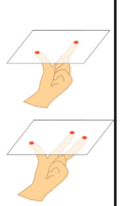
Unidad 8

177

Tarea: página 182 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.3**

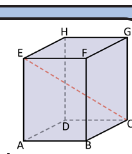
(P) ¿Cómo sostener una hoja de papel de forma estable, sin desbalance?
a) Intenta sostenerla utilizando dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál forma, la hoja de papel es más estable?



(S) a) Con dos dedos está en desbalance.
b) Con tres dedos queda firme, sin moverse.
c) Por tanto queda sostenida con tres dedos.

También la tapa del piano está sostenida por su base en forma de recta y un punto de soporte.

(E) Para el prisma rectangular:



Los lados que están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:
a) $\overline{BC}$ son $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) $\overline{EC}$ son $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

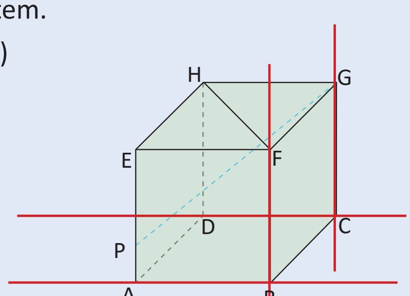
(R) 1. a) $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$
b) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$
c) $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$
d) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{BC}$

Propósito:

① Determinar las rectas que se encuentran en posición cruzada con las rectas que pasan por dos de los lados de un prisma dado. En este punto es importante aclarar que aunque en la Ⓒ se establecen las relaciones de posición entre rectas, estas relaciones son igualmente válidas entre segmentos de recta. Es decir, el lado AE es paralelo al lado FB (siendo que cada lado del prisma es un segmento), teniendo el cuidado de no decir que el lado AE es secante al lado EF porque estos segmentos no se cortan. Lo que sí se cortan son las rectas que pasan sobre dichos segmentos.

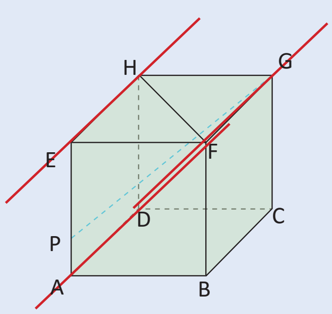
② Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

a)



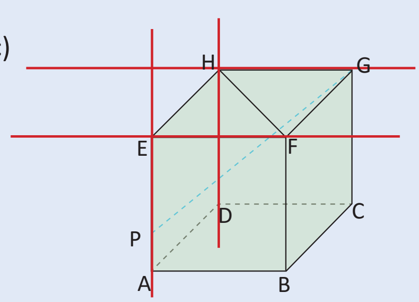
$\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$

b)



$\overline{AD}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$

c)

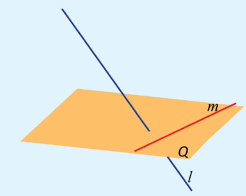


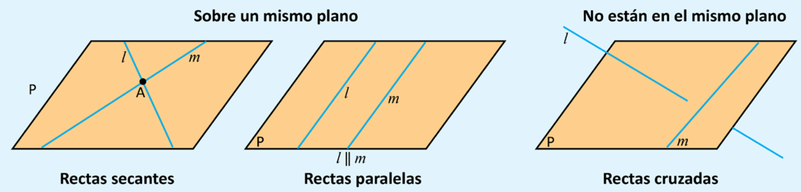
$\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$

d) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{BC}$

En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como *l* y *m* en la imagen.

Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como lo siguiente:

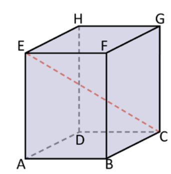




① **E** Observa el prisma rectangular y responde:

Qué lados del prisma están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:

a) $\overline{BC}$
b) $\overline{EC}$



El segmento $\overline{EC}$ se dice que es la diagonal del prisma rectangular.

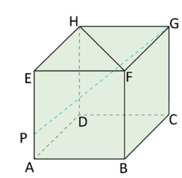
Solución.

a) Los lados: $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

② 1. Observa el cubo y responde:

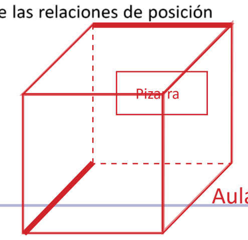
Qué lados están sobre rectas:

a) Secantes a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
b) Paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
c) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.
d) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{PG}$.



2. Encuentra líneas rectas y objetos parecidos a planos en tu aula. Describe las relaciones de posición entre ellos, según lo aprendido.

a) ¿Puedes observar objetos sobre rectas paralelas?
b) ¿Puedes observar objetos sobre rectas que se intersectan?
c) ¿Puedes observar objetos sobre rectas cruzadas?



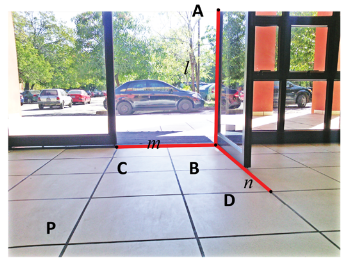
a) Los lados horizontales de la pizarra.
b) Los lados perpendiculares y horizontales de la pizarra.
c) Lado del techo paralelo al lado horizontal de la pizarra y el lado que está a la izquierda o derecha de la pizarra.

Indicador de logro: Determina la distancia entre un punto y un plano.

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

P En la siguiente imagen se muestra una puerta abierta.

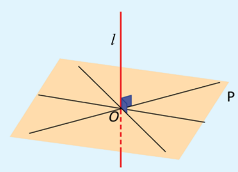
a) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BC?
b) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BD?
c) ¿Qué relación tiene la línea recta que pasa por AB con el plano P?

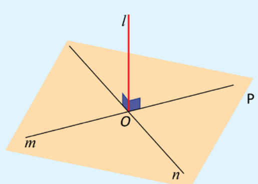


S Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

① **C** Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O.

En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P.





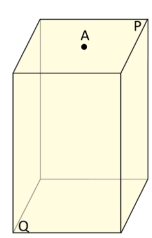
Si una recta l es perpendicular a un plano P, entonces será perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto O que es la intersección entre la recta l y el plano P. Como se muestra en la imagen de la izquierda.

E En la imagen, hay un punto A sobre el plano P que es una base del prisma rectangular.

¿Cuál es el procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q?

Solución.

Se debe trazar un segmento desde el punto A hacia el plano Q, que está sobre una recta perpendicular al plano Q.



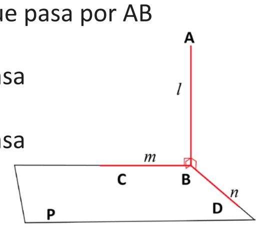
Unidad 8

179

Tarea: página 184 del Cuaderno de Ejercicios.

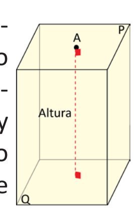
Fecha: **U8 3.4**

P Qué relación posicional tiene la recta que pasa por AB con
a) La recta que pasa por BC
b) La recta que pasa por BD
c) El plano P



S Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

E En el prisma rectangular, para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q se traza un segmento desde A hacia Q, que sea perpendicular a Q.
En general en prismas y cilindros la altura es el segmento que une las bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base, que es perpendicular a esta última.



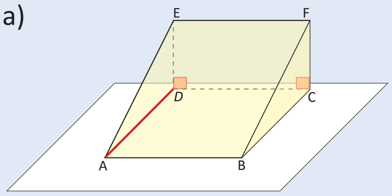
R 1. a) $\overline{AD}$
b) $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{CF}$
c) $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$
d) $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$

Secuencia:
En esta clase se da continuidad al estudio de los planos trabajando con las condiciones de perpendicularidad entre una recta y un plano. Se aprovecha para establecer que las bases de prismas y cilindros son paralelas y se llama **altura** al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base. Para llegar a las ideas anteriores se parte del procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia un plano Q.

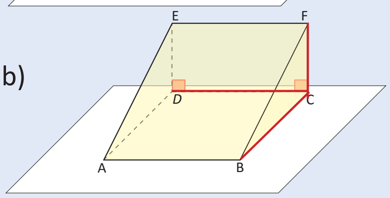
Propósito:
① Establecer la condición de perpendicularidad entre una recta y un plano. En este punto es importante establecer que si una recta es perpendicular a dos rectas en el plano P que pasan por el punto de intersección de l y el plano P, entonces l es perpendicular a P. Las propiedades son igualmente válidas al tratarse de un segmento de recta que interseca al plano.

② Practicar lo desarrollado. A continuación se resuelven los ítems de la clase.

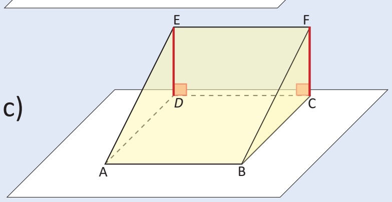
1. a)



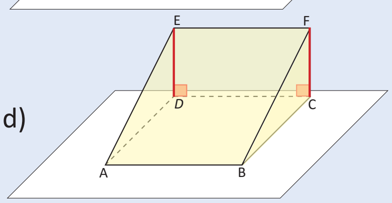
b)



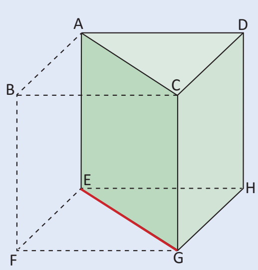
c)



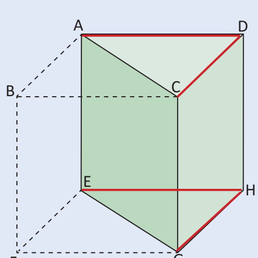
d)



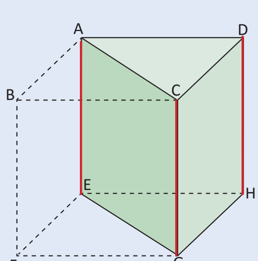
2. a) Para la solución se considera el hecho de que el prisma se encuentra al interior de un cubo.



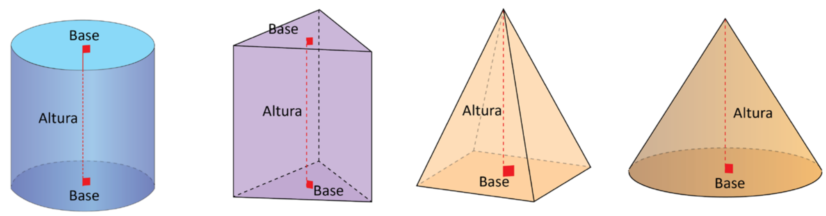
b)



c)



En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base es perpendicular a esta última.

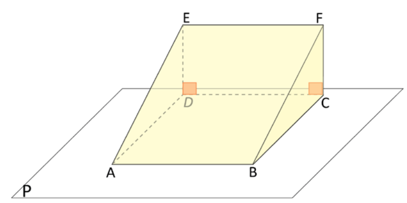


Cilindro | Prisma Triangular | Pirámide | Cono

②

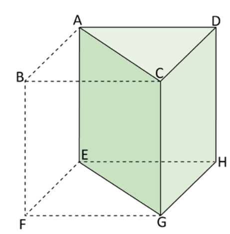
1. En la imagen hay un prisma triangular sobre un plano P:

a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{BC}$?
b) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{AE}$?
c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?
d) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base la cara que cae sobre el plano P.



2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo.

a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AC}$?
b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{DH}$?
c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base $\overline{GH}$

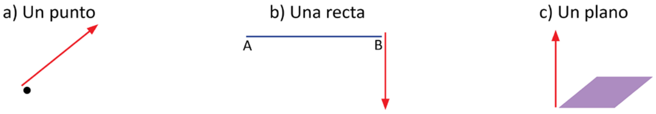


Indicador de logro: Determina cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas.

3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

① **P** Observa las situaciones presentadas en los literales, cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña, ¿qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto b) Una recta c) Un plano



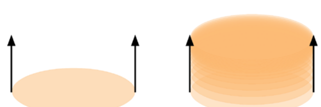
② **S**

a) Se forma una recta b) Se forma un plano c) Se forma un prisma

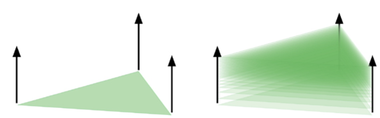
C

- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

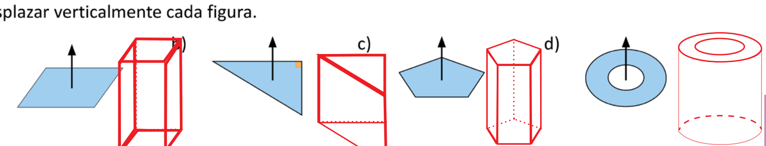
E Si se desplaza el círculo verticalmente, como en la imagen, se obtiene un cilindro.



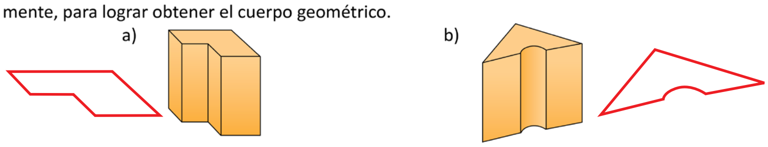
Si se desplaza verticalmente un triángulo, como en la imagen, se forma un prisma triangular.



③ 1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.



2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos, dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente, para lograr obtener el cuerpo geométrico.



Unidad 8

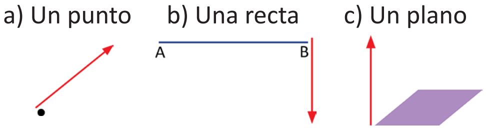
181

Tarea: página 185 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.5**

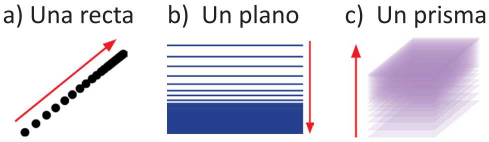
Ⓟ Cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña. ¿Qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto b) Una recta c) Un plano

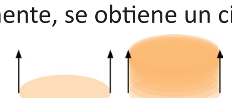


Ⓢ

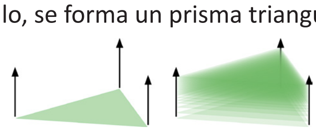
a) Una recta b) Un plano c) Un prisma



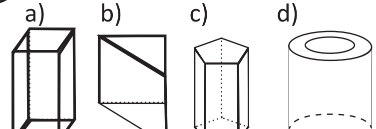
Ⓔ Al moverse el círculo verticalmente, se obtiene un cilindro.



Al moverse verticalmente un triángulo, se forma un prisma triangular.



Ⓡ 1.



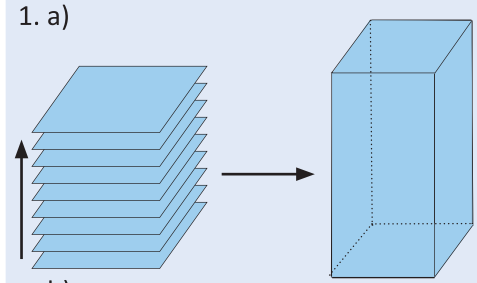
Secuencia:
En la clase 3.3 se comenzó a trabajar con planos y anteriormente se trabajó con cuerpos geométricos. De modo que se puede abordar la manera en que se generan planos o cuerpos geométricos a través del desplazamiento de figuras planas.

Propósito:
①, ② Expresar que el movimiento de un punto en una sola dirección genera un línea recta, y que al mismo tiempo el movimiento de una línea recta en una misma dirección genera un plano y que el movimiento de un plano en una misma dirección genera un cuerpo geométrico.

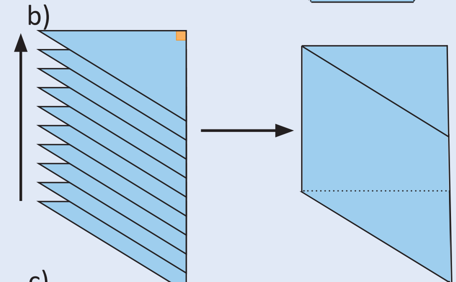
Observación: Siendo rigurosos en la Ⓢ lo que se ha formado es a) semirrecta, b) semiplano y c) semiespacio.

③ Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.

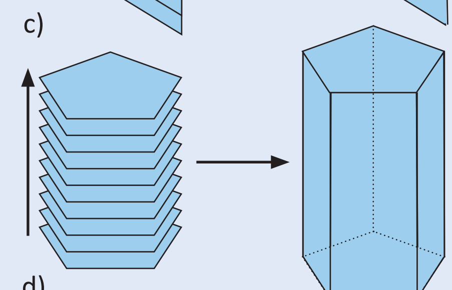
1. a)



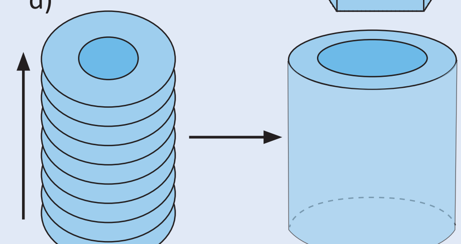
b)



c)



d)



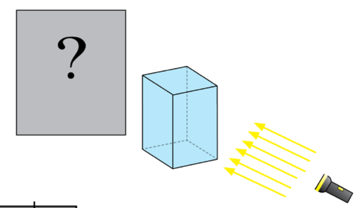
Secuencia:
En las tres clases anteriores se trabajó con planos, por lo tanto los estudiantes ya están familiarizados con ellos. De manera que en esta clase se aborda la proyección ortogonal de un cuerpo geométrico en diferentes planos. Para el caso se introducen los conceptos de **rectas proyectantes** y **plano de proyección**.

Propósito:
①, ② Determinar la proyección de un cuerpo geométrico en tres planos (vista frontal, vista lateral y vista del piso).

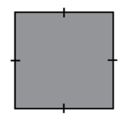
Indicador de logro: Identifica el cuerpo geométrico observando la figura proyectada ortogonalmente.

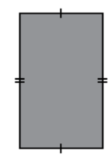
3.6 Proyección ortogonal

① **P** En la imagen, la lámpara proyecta rayos de luz que son perpendiculares a la pared gris. Entre la pared y los rayos de luz hay un prisma rectangular de base cuadrada, el cual proyecta una sombra sobre la pared. Según la forma en la que se gira el prisma se pude ver distintas sombras.



¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran a continuación?

a) 

b) 

② **S**
a) Para obtener esta sombra, el prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.
b) Para obtener la sombra el prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

C La **proyección ortogonal** de un cuerpo es aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Si se tiene un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos, se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, como lo muestra la imagen 3.

Se consideran tres tipos de perspectivas: **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

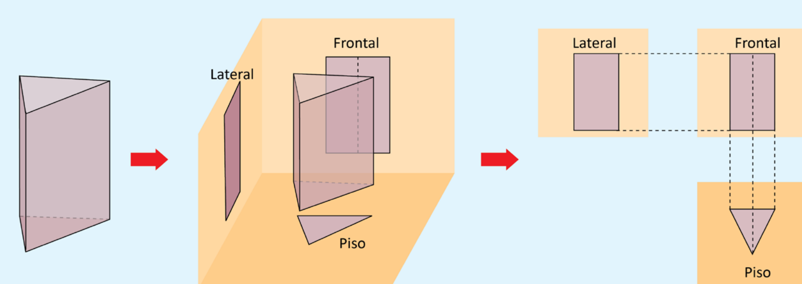


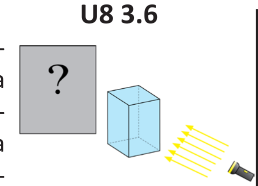
Imagen 1 Imagen 2 Imagen 3

182

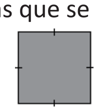
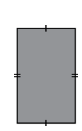
Tarea: página 186 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.6**

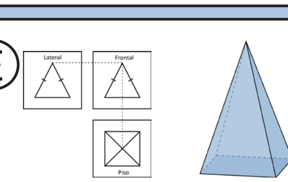
P La lámpara proyecta rayos de luz perpendiculares a la pared. En la pared se proyecta la sombra del prisma rectangular de base cuadrada.



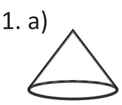
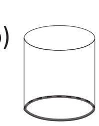
¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran?

a)  b) 

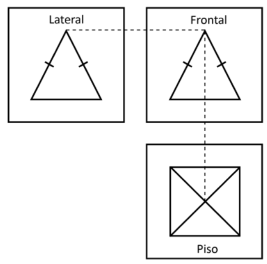
S a) El prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.
b) El prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

E 

La proyección ortogonal proyecta una pirámide porque las perspectivas lateral y frontal son triángulos isósceles. La perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

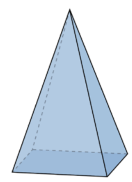
R 1. a)  b) 

③ **E** Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que corresponde a la proyección ortogonal mostrada y escribe el nombre del sólido.



Solución.
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

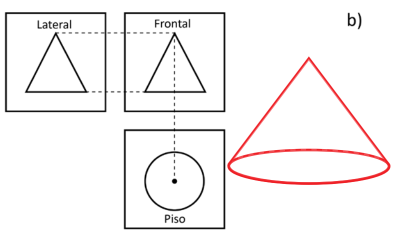
Por tanto, la figura es una pirámide.



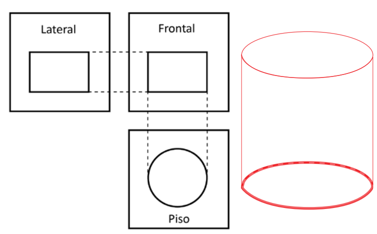
Pirámide

④ 1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan la siguientes proyecciones ortogonales.

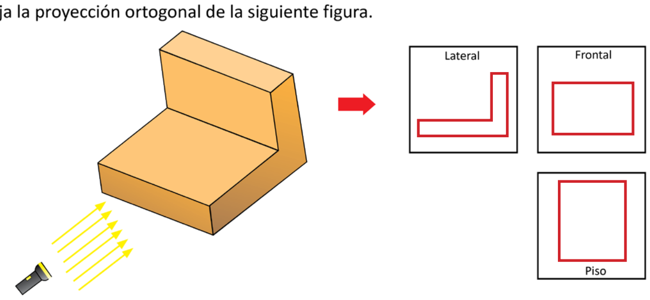
a)



b)



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



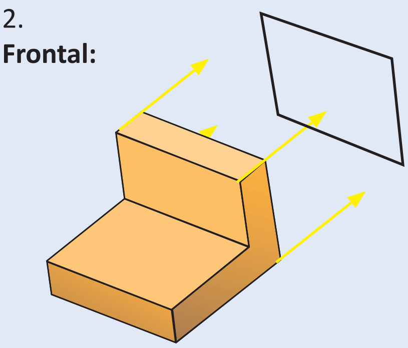
Unidad 8

183

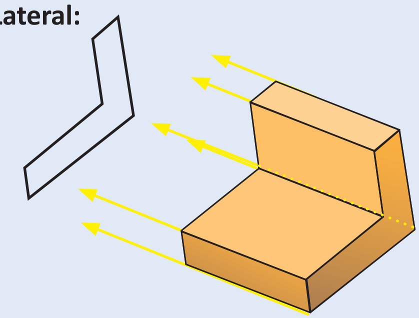
③ Determinar el cuerpo geométrico proyectado a partir de sus proyecciones en los planos representados por la vista lateral, vista frontal y vista sobre el piso. En el Ⓟ se hace la proyección del cuerpo geométrico en tres planos, mientras que en el Ⓔ se determina el cuerpo geométrico a partir de sus proyecciones en tres planos.

④ Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el segundo ítem.

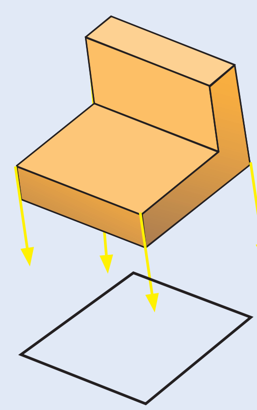
2.
Frontal:

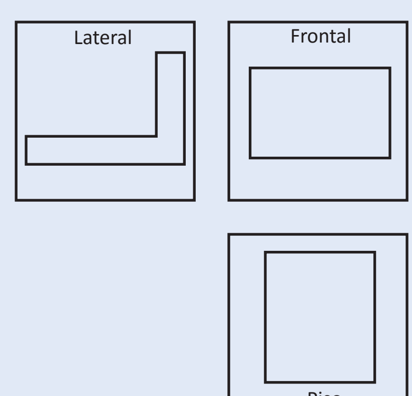


Lateral:



Piso:





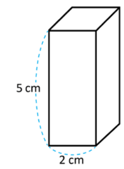
Secuencia:
Los estudiantes ya han construido patrones de cubos, prismas rectangulares y triangulares, también trabajaron la identificación del patrón de un cubo de un conjunto de patrones dados. En esta clase se introduce el concepto del **desarrollo plano**, específicamente del prisma, que es equivalente a los **patrones** de prismas que en grados anteriores se construyeron. También se estudia la relación que permite calcular el área total de un prisma, deducida a partir del desarrollo plano de un prisma en particular.

Propósito:
① Aplicar la fórmula para calcular el volumen de un prisma. En este punto se calcula el área total de un prisma pero a diferencia del presentado en el Ⓟ es un prima triangular.

Indicador de logro: Calcula el área total de un prisma a partir de su plano desarrollado.

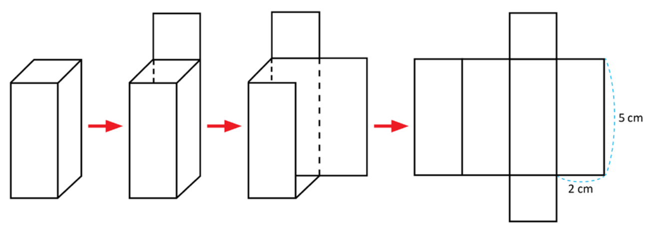
3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

P Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



Se le llama superficie a la parte más externa del cuerpo geométrico.

S Como se muestra en la imagen, se puede descomponer el prisma cuadrangular como si fuese de papel.



La imagen final muestra el desarrollo plano del cuerpo geométrico. La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes, que son las bases del prisma.

El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm².
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm².

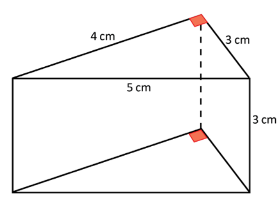
Por tanto, el área total de la superficie es: $\underbrace{10 \times 4}_{\text{Área lateral}} + \underbrace{4 \times 2}_{\text{Área de las bases}} = 40 + 8 = \underbrace{48 \text{ cm}^2}_{\text{Área total}}$.

C El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$A_T = A_l + A_b$$

Donde A_l: Área lateral y A_b: Área de la base.

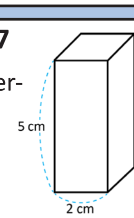
① **E** Encuentra el área total del prisma triangular:



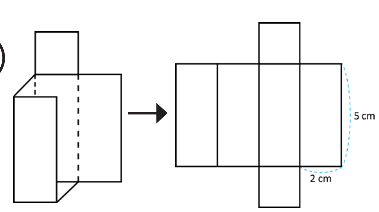
Tarea: página 187 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.7**

Ⓟ Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.

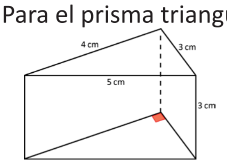


Ⓢ



La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes.
El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm²
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm²
Por tanto, el área total de la superficie es:
$10 \times 4 + 4 \times 2 = 40 + 8 = 48$ cm²

Ⓔ Para el prisma triangular:



Su área total se calcula como:

$A_l = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3$
$= 15 + 12 + 9$
$= 36$

$A_b = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2$
$= 6 + 6$
$= 12$

$A_T = A_l + A_b = 36 + 12 = 48$ cm²

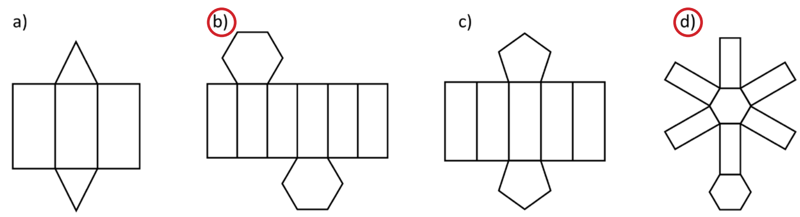
Ⓡ
1. b y d
2. 128 cm²

Solución.

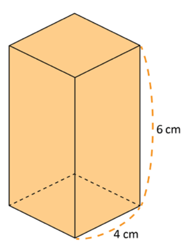
El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$.

$$\mathbf{A_l} = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 15 + 12 + 9 = 36$$
$$\mathbf{A_b} = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2 = 6 + 6 = 12$$
$$\mathbf{A_T} = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

② 1. ¿Con cuál de los siguientes planos desarrollados se puede lograr construir un prisma hexagonal?



2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada.

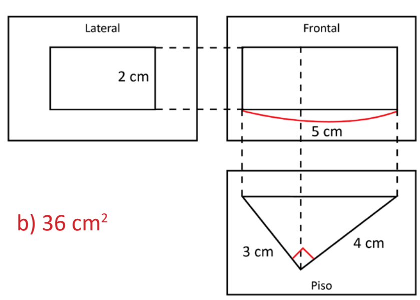


128 cm²

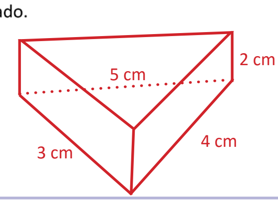
3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto.

   a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

   b) Encuentra el área total del prisma formado.



a)



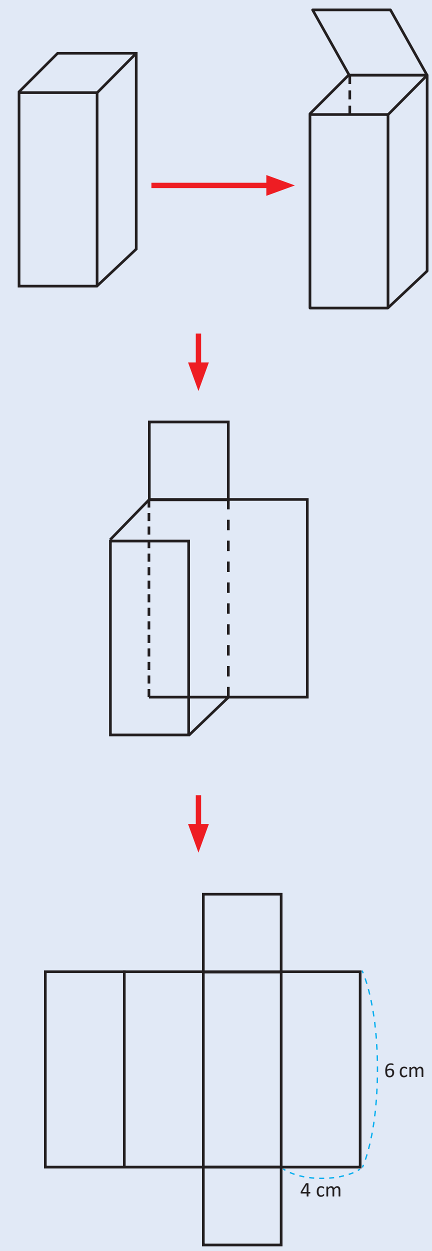
b) 36 cm²

Unidad 8

185

Propósito:

② Practicar lo desarrollado en clases. Para la verificación del indicador de logro, se deberá realizar el ítem 2 primero en función del tiempo, posteriormente se harán los ejercicios 1 y 3 que sirven como repaso de las clases anteriores.

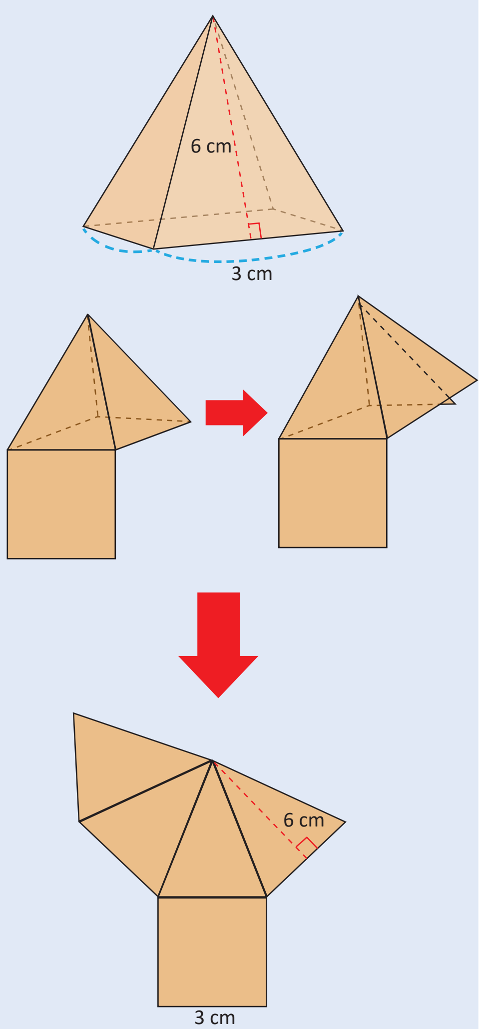


$$\mathbf{A_T} = \mathbf{A_l} + \mathbf{A_b}$$

$$\mathbf{A_l} = 4 \times 6 \times 4$$
$$= 96$$
$$\mathbf{A_b} = 4 \times 4 \times 2$$
$$= 32$$
$$\mathbf{A_T} = 96 + 32 = 128 \text{ cm}^2$$

Secuencia:
Anteriormente se trabajó el desarrollo plano y el cálculo del área total de un prisma. En esta clase se retoman esos temas para ser aplicados a una pirámide. Al igual que en la clase anterior la relación que permite hacer el cálculo del área total es deducida a partir de una pirámide en particular.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado en clases. A continuación se resuelve el primer ítem.



$A_T = A_l + A_b$

$A_l = 3 \times 6 \div 2 \times 4$
$= 36$

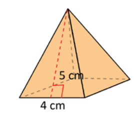
$A_b = 3 \times 3$
$= 9$

$A_T = 36 + 9 = 45$ cm²

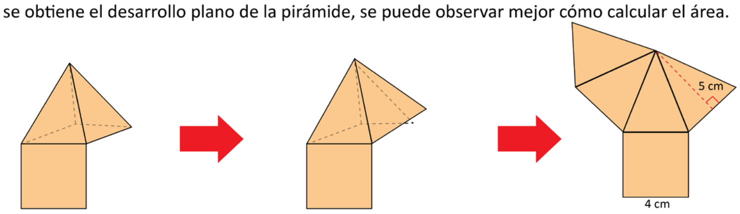
Indicador de logro: Calcula el área total de una pirámide a partir de su plano desarrollado.

3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

P La imagen muestra una pirámide de base cuadrada.
Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



S Si se obtiene el desarrollo plano de la pirámide, se puede observar mejor cómo calcular el área.



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

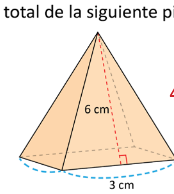
Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm²
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm²
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm²
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm²

C El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

$$A_T = A_l + A_b$$

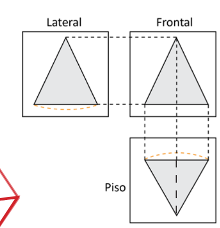
Donde A_l: Área lateral y A_b: Área de la base.

①
1. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada.



45 cm²

2. En la imagen de la derecha se observa la proyección ortogonal de una figura: Dibuja el cuerpo geométrico que se forma.

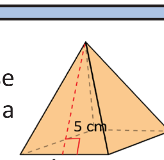


186

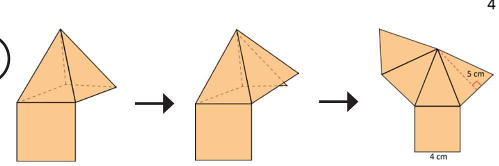
Tarea: página 189 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.8**

Ⓟ La imagen muestra una pirámide de base cuadrada. Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



Ⓢ

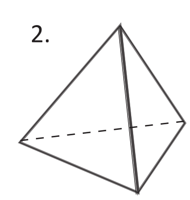


La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm²
Área lateral: $10 \times 4 = 40$ cm²
Área de la base: $4 \times 4 = 16$ cm²
Área total: $40 + 16 = 56$ cm²

Ⓡ 1.
45 cm²

2.

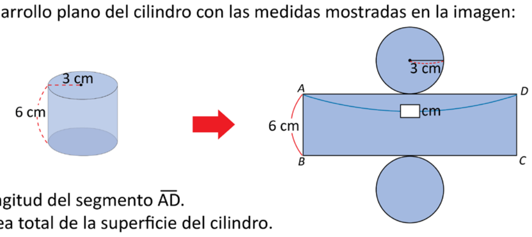


3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

Indicador de logro: Calcula el área total de un cilindro a partir de su plano desarrollado.

3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

P Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

S a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ coincide con la longitud de la circunferencia sobre él. Esta se puede obtener utilizando la fórmula para la longitud de la circunferencia: $l_c = 2\pi r$.

Por tanto: AD = 2π × 3 = 6π cm.

b) El área total del cilindro está formada por el área de las bases más el área lateral, la cual es el área del rectángulo.

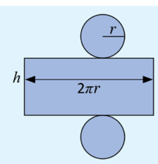
Área de las bases: $A_b = 2\pi \times 3 \times 3 = 18\pi$ cm²
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm²
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm²

C El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

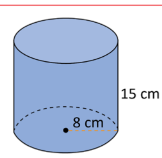
$A_T = A_b + A_l$

$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$

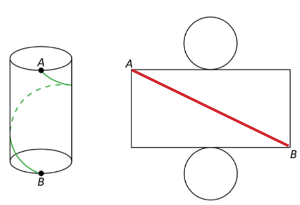


Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.

① 1. Encuentra el área total del cilindro.



368π cm²



2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro:

Dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano.

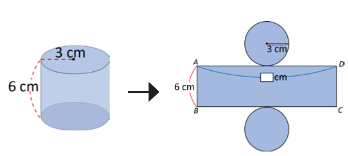
Unidad 8

187

Tarea: página 191 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 3.9**

Ⓟ Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



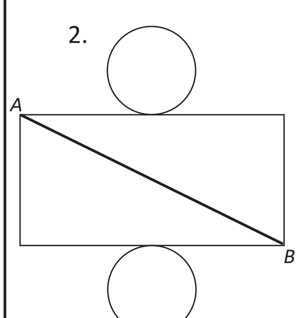
a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

Ⓢ a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ es igual a la de la circunferencia sobre él. Por tanto: AD = 2π × 3 = 6π cm.

b) Área de las bases: $A_b = \pi \times 3 \times 3 \times 2 = 18\pi$ cm²
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm²
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm²

Ⓡ 1. 368π cm²

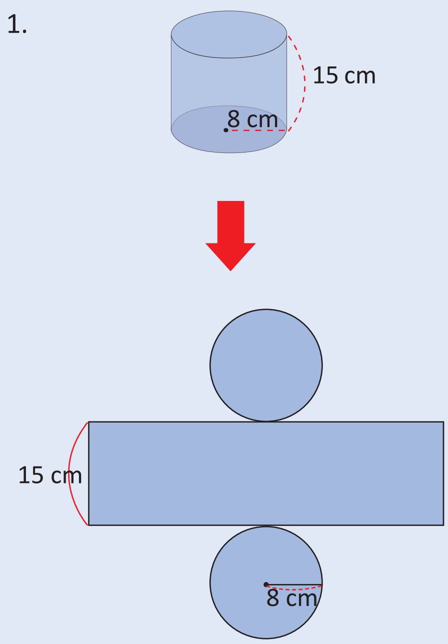
2.



Secuencia:
En las dos clases anteriores se trabajó con el desarrollo plano de poliedros, por lo que ahora se trabajará el desarrollo plano del cilindro, que es uno de los cuerpos redondos presentados en la clase 3.1. Al igual que se hizo con los poliedros, se presenta la relación que se usa para el cálculo del área total de un cilindro. La relación se deduce a partir de un cilindro en particular.

Propósito:
① Practicar lo desarrollado en clases.
A continuación se resuelve el primer ítem.

1.



Entonces:
r: 8 cm y h: 15 cm

$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$

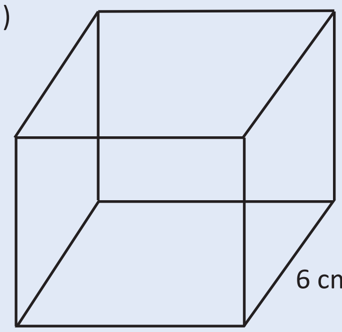
$A_l = 2\pi \times 8 \times 15$
$= 240\pi$

$A_b = \pi \times 8^2 \times 2$
$= 128\pi$

$A_T = 240\pi + 128\pi = 368\pi$ cm²

① Resolución de algunos ítems.

2. a)



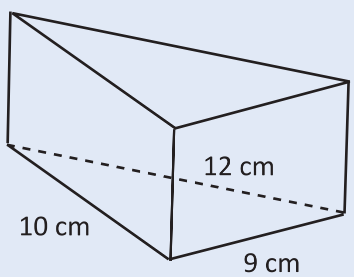
$A_T = A_l + A_b$

$A_l = 5 \times 6 \times 4$
$= 120$

$A_b = 4 \times 6 \times 2$
$= 48$

$A_T = 120 + 48 = 168 \text{ cm}^2$

b)



$A_T = A_l + A_b$

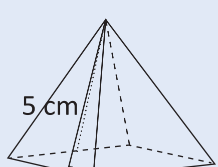
$A_l = 10 \times 6 + 12 \times 6 + 9 \times 6$
$= 186$

Por los datos presentados en el planteamiento del ejercicio, se tiene que la altura de los triángulos que forman las bases es 8 cm.

$A_b = 9 \times 8 \div 2 \times 2$
$= 72$

$A_T = 186 + 72 = 258 \text{ cm}^2$

3. a)

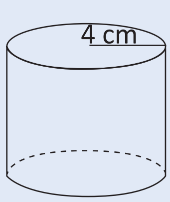


$A_l = 4 \times 5 \div 2 \times 4$
$= 40$

$A_b = 4 \times 4$
$= 16$

$A_T = 40 + 16 = 56 \text{ cm}^2$

b)

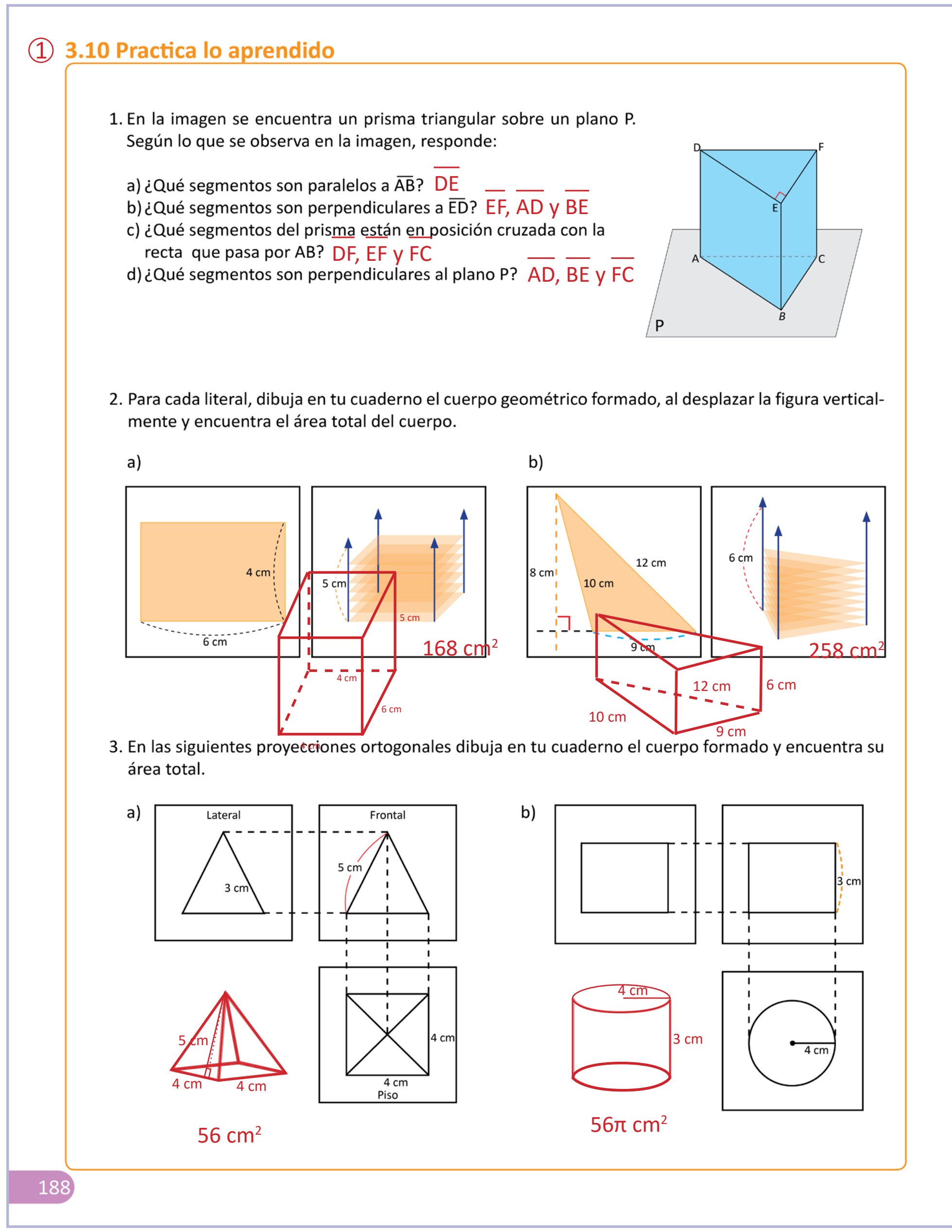


$A_l = \pi \times 8 \times 3$
$= 24\pi$

$A_b = \pi \times 4^2 \times 2$
$= 32\pi$

$A_T = 24\pi + 32\pi = 56\pi \text{ cm}^2$

Indicador de logro: Resuelve problemas correspondientes a planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro.



① 3.10 Practica lo aprendido

1. En la imagen se encuentra un prisma triangular sobre un plano P. Según lo que se observa en la imagen, responde:
   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AB}$? $\overline{DE}$
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{ED}$? $\overline{EF}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$
   c) ¿Qué segmentos del prisma están en posición cruzada con la recta que pasa por AB? DF, EF y FC
   d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P? $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{FC}$

2. Para cada literal, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico formado, al desplazar la figura verticalmente y encuentra el área total del cuerpo.
   a) 4 cm, 6 cm, 5 cm, 5 cm — 168 cm²
   b) 8 cm, 10 cm, 12 cm, 9 cm, 6 cm — 258 cm²

3. En las siguientes proyecciones ortogonales dibuja en tu cuaderno el cuerpo formado y encuentra su área total.
   a) Lateral, Frontal, 3 cm, 5 cm, 4 cm, 4 cm, Piso — 56 cm²
   b) 3 cm, 4 cm — 56π cm²

188

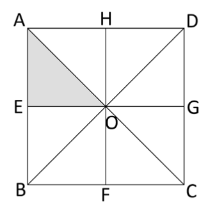
Tarea: página 192 del Cuaderno de Ejercicios.

Prueba de la Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos **Matemática 7º**

Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente. Utiliza regla y compás cuando sea necesario.

1. En la siguiente figura:



a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?

Respuesta:

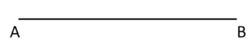
b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?

Respuesta:

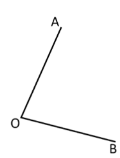
c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?

Respuesta:

2. Dibuja la mediatriz del segmento AB.



3. Dibuja la bisectriz del ángulo AOB.



4. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm. Expresa la respuesta en términos de π, es decir, sin aproximar su valor.

Respuesta:
Longitud del arco: cm

1

Descripción.
La prueba de esta unidad está formada por 9 numerales, el numeral 1 tiene más de un literal, es importante aclarar que cada literal será tomado como un ítem; por tanto esta prueba contiene 11 ítems (6 en la página 1 y 5 en la página 2).

Criterios para asignar puntos parciales.
Ítem del 1a al 1c:
No aplica punto parcial

Ítem 2:
No aplica punto parcial

Ítem 3:
No aplica punto parcial

Ítem 4:
No aplica punto parcial

Notación.
C1.2 Significa que el ítem corresponde a la clase 1.2 de la Unidad 1.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 1 – C 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6
Ítem 2 – C 2.6
Ítem 3 – C 2.7
Ítem 4 – C 2.9

Procedimientos.
Ítem 1a:
Simetría respecto a $\overline{HF}$.

Ítem 1b:
Rotación de 90° respecto al punto O.

Ítem 1c:
Traslación $A \longrightarrow O$

Ítem 2:
Véase la clase 2.6

Ítem 3:
Véase la clase 2.7

Ítem 4:
$2 \times 4 \times \pi \times \frac{45}{360} = \pi$

Observación.
Ítem 1c:
"Simetría" es también correcta (respecto a $\overline{BD}$).

Ítem 5:
No aplica punto parcial

Ítem 6:
No aplica punto parcial

Ítem 7:
No aplica punto parcial

Ítem 8:
No aplica punto parcial

Ítem 9:
No aplica punto parcial

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 5 – C 2.10
Ítem 6 – C 3.6
Ítem 7 – C 3.7
Ítem 8 – C 3.8
Ítem 9 – C 3.9

Algunos procedimientos.
Ítem 5:
$\pi \times 9^2 \times \frac{120}{360} = 27\pi$

Ítem 7:
Área lateral: $2 \times 5 \times 4 = 40$
Área de las bases: $2^2 \times 2 = 8$
Área total: $40 + 8 = 48$

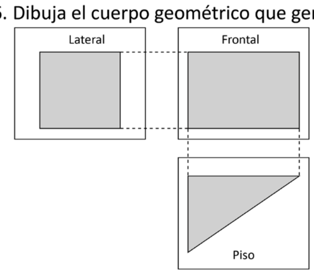
Ítem 8:
Área lateral: $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times 4 = 36$
Área de la base: $3^2 = 9$
Área total: $36 + 9 = 45$

Ítem 9:
Área lateral: $(2 \times \pi \times 3) \times 6 = 36\pi$
Área de las bases: $\pi \times 3^2 \times 2 = 18\pi$
Área total: $36\pi + 18\pi = 54\pi$

5. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm. Expresa la respuesta en términos de π, es decir, sin aproximar su valor.

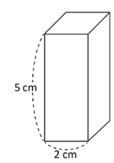
Respuesta:
Área: cm²

6. Dibuja el cuerpo geométrico que genera la siguiente proyección ortogonal.



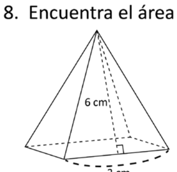
Respuesta:

7. Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



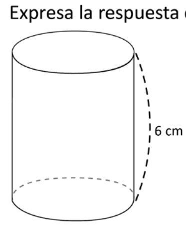
Respuesta:
Área: cm²

8. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada.



Respuesta:
Área: cm²

9. El siguiente cilindro tiene de altura 6 cm y el radio de la base es 3 cm. Encuentra el área total. Expresa la respuesta en términos de π, es decir, sin aproximar su valor.



Respuesta:
Área: cm²

2