Unidad 4. Paralelismo y ángulos de un polígono

Competencia de la Unidad

Utilizar la relación entre ángulos internos y externos de los polígonos, así como de los ángulos entre paralelas para caracterizar figuras y resolver situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Suma de los ángulos internos y externos de un polígono	1	1. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1
	1	2. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2
	1	3. Suma de los ángulos externos de un polígono
	1	4. Suma de los ángulos internos de un polígono regular
2. Rectas paralelas y ángulos	1	1. Ángulos opuestos por el vértice
	1	2. Ángulos correspondientes y ángulos alternos
	1	3. Caracterización de los ángulos correspondientes
	1	4. Caracterización de los ángulos alternos
	1	5. Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo
	1	6. Elementos de una demostración
	1	7. Aplicación de las características de los ángulos entre paralelas
	1	Prueba de la Unidad 4

11 horas clase + prueba de la Unidad 4

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
A partir del proceso de triangulación de un polígono aprendido en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

Lección 2: Rectas paralelas y ángulos
Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios. Luego, se analiza la relación entre los ángulos que se forman cuando dos paralelas son cortadas por una secante, y el resultado es utilizado para demostrar uno de los teoremas matemáticos más importantes y para resolver situaciones del entorno.

Secuencia:
En la Unidad 2 de quinto grado se utilizó por primera vez el proceso de triangulación para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono. Para esta clase se busca recordar esa estrategia para deducir una expresión matemática que le permita calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera sin utilizar siempre el proceso de triangulación.

Propósito:
①, ② Se utiliza el proceso de triangulación de un polígono para calcular la suma de los ángulos de un polígono y a partir de este proceso deducir una expresión matemática que permita determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera.

③ Se presentan dos casos particulares de polígonos para que se utilice la expresión matemática que se encuentra en la conclusión y calcular de manera práctica la suma de los ángulos internos para cada uno de los polígonos indicados.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no recuerdan los nombres particulares que reciben los polígonos de acuerdo al número de lados, se puede dejar como actividad exaula investigar los nombres de los polígonos que son más usados.

Solución de algunos ejercicios:
Es importante enfatizar que en la solución de los ejercicios de fijación, ya no es necesario triangular, sino únicamente aplicar la fórmula que se presenta en la Conclusión.

1. Para el eneágono (tiene 9 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(9 – 2) = 180°(7).

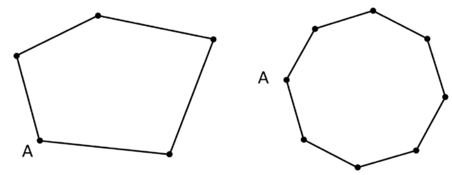
2. Para el dodecágono (tiene 12 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(12 – 2) = 180°(10).

Indicador de logro. Determina la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

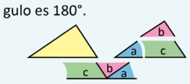
① **P** Trazando las diagonales desde el vértice A, divide estos polígonos en triángulos y determina:

a) ¿Cuánto suman los ángulos internos del pentágono?
b) ¿Cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman?
c) ¿Cuánto suman los ángulos internos del octágono?
d) ¿De cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forma?

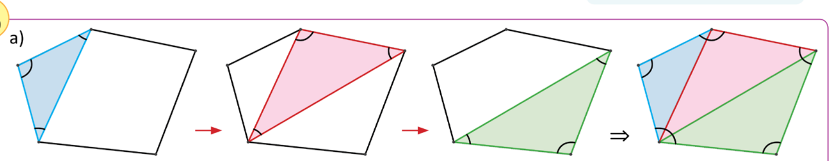


Se puede dividir el polígono en triángulos trazando todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.

Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



② **S**
a)



180° + 180° + 180° = 180° × 3

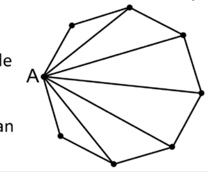
El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:

Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2; y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

c) En el octágono se forman 6 triángulos, de donde se obtiene que la suma de los ángulos internos es 180° × 6.

d) La diferencia del número de lados y la cantidad de triángulos que se forman es: 8 – 6 = 2.



C En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos para un polígono de n lados es 180° × (n – 2).

③ Encuentra la suma de los ángulos internos de

a) Un eneágono
180°(9 – 2) = 180°(7)

b) Un dodecágono
180°(12 – 2) = 180°(10)

Un eneágono tiene 9 lados y un dodecágono tiene 12 lados.

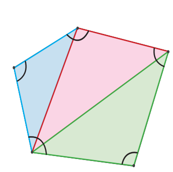
92

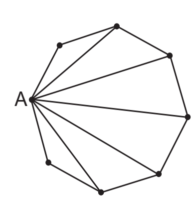
Tarea: página 94 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 1.1**

Ⓟ Determina:
a) La suma de los ángulos internos del pentágono.
b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.
c) La suma de los ángulos internos del octágono.
d) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.

Ⓢ





a) 180° + 180° + 180° = 180° × 3
b) 5 – 3 = 2

c) 180° × 6
d) 8 – 6 = 2

Ⓡ
a) 180° × (9 – 2) = 180° × 7

b) 180° × (12 – 2) = 180° × 10

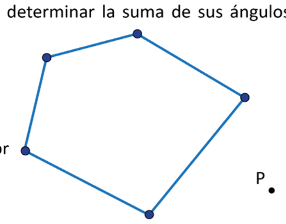
Indicador de logro. Utiliza diferentes estrategias para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

① P

Encuentra 3 maneras distintas de triangular el pentágono para determinar la suma de sus ángulos internos.

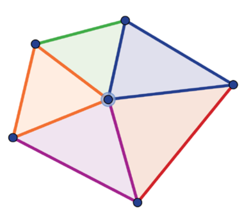
a) Desde un punto interior
b) Desde un punto del borde
c) Desde un punto exterior P
d) Compara los resultados con los obtenidos en la clase anterior



② S

Considerando los tres casos se tiene:

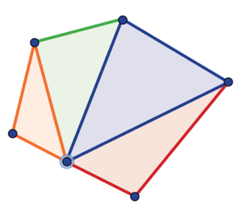
a) Se coloca un punto dentro del pentágono y desde ahí, se trazan segmentos a cada uno de los vértices para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 360°; pues se le resta el ángulo que se forma en el punto interno seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

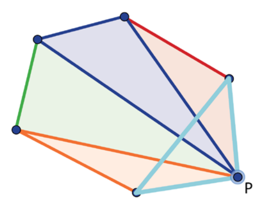
b) Se coloca un punto sobre cualquiera de los lados del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices no adyacentes para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta el ángulo llano que se forma en el punto del borde que fue seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c) Se coloca un punto fuera del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta la suma de los ángulos internos del triángulo que se forma con el punto externo que fue seleccionado y el lado del pentágono.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

Unidad 4

93

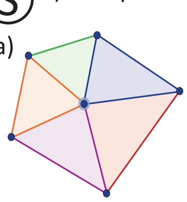
Tarea: página 95 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 1.2**

(P) Determina la suma de los ángulos internos triangulando desde
a) Un punto interior.
b) Un punto del borde.
c) Un punto exterior P.
d) Compara los resultados, con los de la clase anterior.

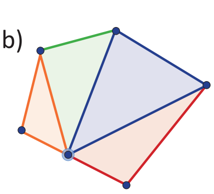
(S)

a)



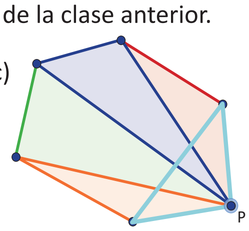
Suma
= 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

b)



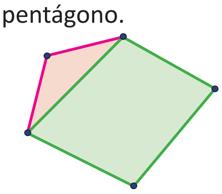
Suma
= 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c)



Suma
= 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

(E) Utiliza una estrategia distinta para derminar la suma de los ángulos internos del pentágono.



Suma
=180° + 360°
= 180° + 2 × 180°
= 3 × 180°

Secuencia:
En la clase anterior se dedujo la expresión matemática que permite determinar la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando el proceso de triangulación desde un vértice; en el desarrrollo de esta clase se pretende que el estudiante descubra que el proceso de triangulación de un polígono se puede realizar de distintas maneras; pero que al final siempre se obtiene el mismo resultado.

Propósito:
①, ② Triangular un pentágono utilizando diferentes puntos de referencia y verificar que siempre se obtiene el mismo resultado. También se busca comparar con el resultado de la clase anterior para comprobar que el resultado no depende del punto de referencia utilizado para triangular.

Posibles dificultades:
Es posible que tengan dificultades con el tiempo para triangular especialmente en el caso donde se tiene como referencia al punto externo, para facilitar el proceso se pueden llevar recortes del pentágono para que los peguen y los triangulen.

③ Modelar otra estrategia para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono, esto se considera importante para que los estudiantes puedan utilizar la estrategia que les sea más factible cuando resuelven problemas.

④ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando estrategias de triangulación con distintos puntos de referencia.

Observaciones:
Es importante considerar que en la solución de estas situaciones, no todos los estudiantes necesariamente van a coincidir con la estrategia. Lo importante es que independientemente de la estrategia utilizada, el resultado siempre sea el mismo.

d) Al comparar los resultados obtenidos en los tres literales anteriores, se observa que son exactamente iguales entre sí e iguales a los resultados de la clase anterior.

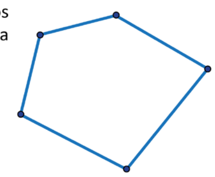
C

La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

③ E

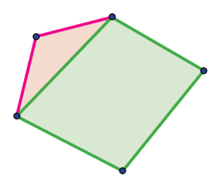
Determina la suma de los ángulos internos del pentágono, utilizando una estrategia distinta a las ya utilizadas.



Piensa en dividir el pentágono en cuadriláteros y/o triángulos.

Se puede dividir en un cuadrilátero y un triángulo y luego determinar la suma de los ángulos.

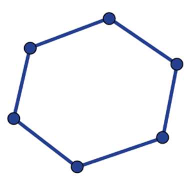
Suma de ángulos internos = 180° + 360°
= 180°+ 2 × 180°
= 3 × 180°



④

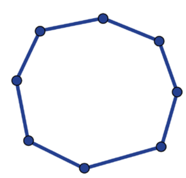
Encuentra la suma de los ángulos internos de

Un hexágono



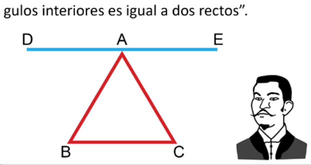
180°(6 – 2) = 180°(4)

Un octágono



180°(8 – 2) = 180°(6)

La figura de Pitágoras en los comienzos de la matemática es central por haber relacionado, en cierto modo, los problemas aritméticos que dependen de números, con los problemas geométricos relacionados con figuras; además de ello existen dos resultados importantes que debemos a Pitágoras o a su escuela, uno de ellos es: "En todo triangulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos".



Hazlo utilizando al menos 2 de las estrategias aprendidas en esta clase.

94

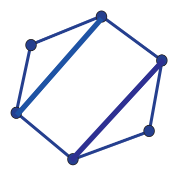
Fecha:

U4 1.2

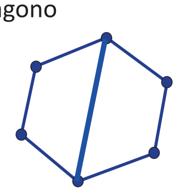
Continuación

Ⓡ Encuentra la suma de los ángulos internos de:

Un hexágono

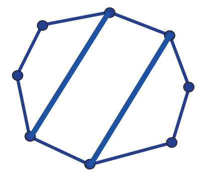


Suma
= 180° × 2 + 360°
= 180° × 2 + 180° × 2
= 180° × 4

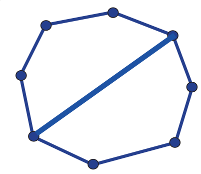


Suma
= 360° + 360°
= 180° × 2 + 180° × 2
= 180° × 4

Un octágono



Suma
= 360° + 360° + 360°
= 360° × 3
= (180° × 2) × 3
= 180° × 6

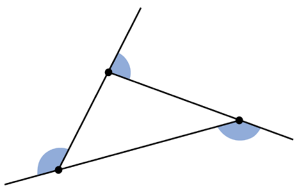


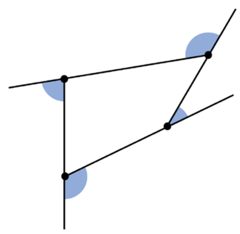
Suma
= 180° × (5−2) + 180°(5 − 2)
= 180° × 3 + 180° × 3
= 180° × 6

Indicador de logro. Determina la suma de los ángulos externos de un polígono.

1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

① **P** Encuentra la suma de los ángulos externos de estos polígonos.

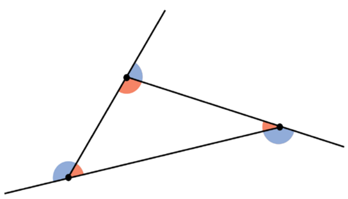




Un ángulo externo es el que se forma por un lado del polígono y la prolongación del lado contiguo.

En la suma de los ángulos externos se toma solo uno de cada vértice.

② **S**



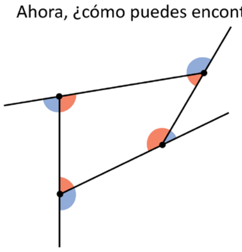
En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3.

Pero 180° × 3 contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2); por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es:

$180° \times 3 - 180°(3 - 2) = 180° \times [3 - (3 - 2)]$
$= 180° \times 2 = 360°$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ahora, ¿cómo puedes encontrar la suma de los ángulos externos del siguiente cuadrilátero?



En el cuadrilátero cada ángulo interno junto al respectivo externo suman 180°; por tanto, se tiene 180° × 4 y al restarle los ángulos internos: 180° × (4 – 2), se tiene $180° \times 4 - 180° \times (4 - 2) = 180° \times [4 - (4 - 2)]$
$= 180° \times 2 = 360°$.

La suma de los ángulos externos de un cuadrilátero es 360°.

C
- La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados.
- La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.

③ Encuentra la suma de los ángulos externos de

a) Un pentágono
360°

b) Un hexágono
360°

Unidad 4

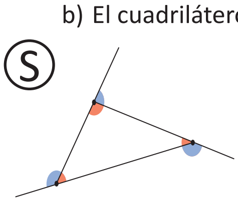
95

Tarea: página 96 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 1.3**

(P) Encuentra la suma de los ángulos externos de los polígonos dados:
a) El triángulo
b) El cuadrilátero

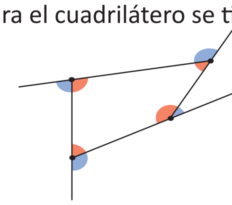
(S)



En cada vértice del triángulo, se forma un ángulo de 180°.
Pero los ángulos internos suman 180° × (3 – 2).

$180° \times 3 - 180°(3 - 2) = 180° \times [3 - (3 - 2)]$
$= 180° \times 2 = 360°$.

Para el cuadrilátero se tiene:



$180° \times 4 - 180° \times (4 - 2)$
$= 180° \times [4 - (4 - 2)]$
$= 180° \times 2 = 360°$.

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

(R) a) Para el pentágono: 360°
b) Para el hexágono: 360°

Secuencia:
En las dos clases anteriores se ha practicado el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono, en esta clase se determinará la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera, luego se generalizará para cualquier polígono.

Propósito:
①, ② Determinar la suma de los ángulos externos de dos polígonos con número de lados diferentes para ilustrar que la suma de los ángulos de un polígono es siempre 360°.

③ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera.

Observación:
Es importante hacer énfasis en que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

Secuencia:
Anteriormente se trabajó con la suma de los ángulos externos de un polígono; en esta clase, se trabajará con polígonos regulares, esta característica permite conocer con facilidad el valor de cada ángulo interno del polígono debido a que todos son iguales y de igual forma para los ángulos externos.

Propósito:
①, ② Utilizar la suma de los ángulos internos de un polígono para determinar la medida de cada ángulo interno, luego utilizando este resultado y los ángulos suplementarios calcular la medida de cada ángulo externo, considerando que por ser regular todos son iguales.

③ Confirmar el hecho de que en un polígono regular todos los ángulos internos son iguales entre sí, así como los ángulos externos y que la suma de los ángulos se determina de la misma manera que un polígono irregular.

④ En el numeral 1, practicar lo aprendido en la clase sobre los ángulos de los polígonos regulares; mientras que en el numeral 2 utilizar todo lo aprendido en las clases anteriores sobre la suma de los ángulos internos y/o externos.

En el numeral 1, puede hacerse uso de la suma de los ángulos externos para determinar el valor de x, tal como se muestra a continuación: $\frac{360°}{7} = 51.43°$.

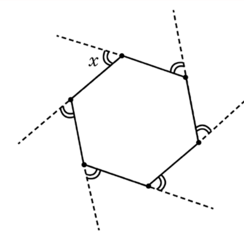
Posibles dificultades:
Si los estudiantes no logran determinar el valor solicitado en el numeral 2, se indica que utilicen la suma de los ángulos internos y/o externos para determinar el valor particular de un ángulo, para ello se utilizan operaciones conocidas; por ejemplo, para el literal a) se suman los valores conocidos y se le resta el resultado a 360°.

Indicador de logro. Determina la medida de ángulos internos y externos de un polígono regular.

1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

① **P** Para el hexágono regular que se muestra determina:

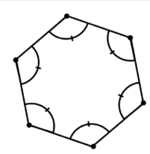
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de x.



Un polígono regular tiene todos sus ángulos internos iguales.

② **S**

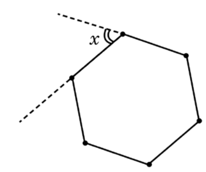
a)



Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

b)



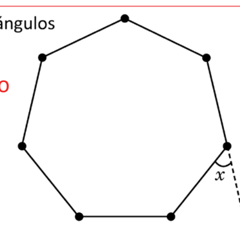
A partir del literal a) se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

③ **C** En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

④ 1. Para el heptágono regular determina la medida de cada uno de sus ángulos internos y el valor de x.

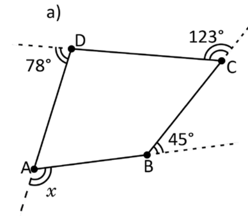
$\frac{180°(7-2)}{7} = 128.57$; medida de cada ángulo interno

$x = 51.43°$



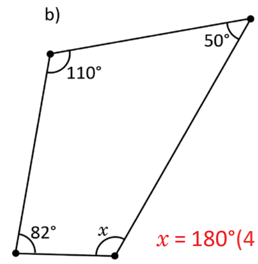
2. Encuentra la medida del ángulo x en cada caso.

a)



$x = 360° - (78° + 45° + 123°)$

b)



$x = 180°(4 - 2) - (50° + 82° + 110°)$

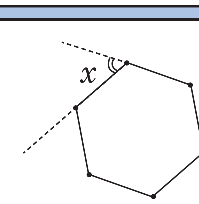
Utiliza tus conocimientos sobre la suma de los ángulos internos y externos de un cuadrilátero.

96

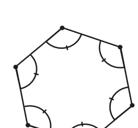
Tarea: página 97 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 1.4**

Ⓟ Para el hexágono regular dado, determina:
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de x.



Ⓢ



Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$

Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

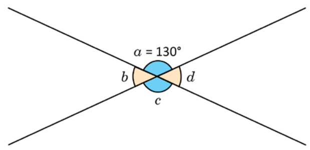
Ⓡ 1. Para el heptágono
$180° \times (7 - 2) = 900°$, entonces
$\frac{900°}{7} = 128.57°$
$x = 51.43°$

Indicador de logro. Relaciona los ángulos opuestos por el vértice.

2.1 Ángulos opuestos por el vértice

① **P**

Si el $\sphericalangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?



Dos ángulos son opuestos por el vértice si uno de ellos tiene como lados la prolongación de los lados del otro.

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

② **S**

Se tiene que $a + b$ = 180°, por ser suplementarios, entonces el $\sphericalangle b$ = 50°.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle b = \sphericalangle d\end{array}\right\}$ por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c$ = 130° y $\sphericalangle b = \sphericalangle d$ = 50°.

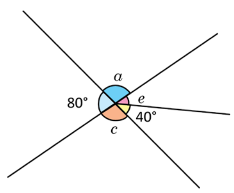
Se pueden encontrar las medidas de los ángulos formados en un vértice común, utilizando los ángulos opuestos por el vértice y los suplementarios.

C

Cuando se tienen dos rectas que se intersectan, se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice, cuyas medidas se pueden determinar conociendo únicamente el valor de uno de ellos.

③ **E**

Determina la medida de los ángulos indicados.



$\sphericalangle c$ + 80° = 180°, por ser suplementarios, entonces el $\sphericalangle c$ = 100°.

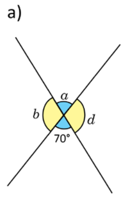
$\left.\begin{array}{r}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle e + 40° = 80°\end{array}\right\}$ por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c$ = 100° y $\sphericalangle e$ = 80° – 40° = 40°.

④

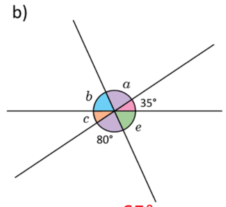
Determina la medida de los ángulos que se indican en cada literal.

a)



$\sphericalangle a$ = 70°
$\sphericalangle d$ = 110°
$\sphericalangle b$ = 110°

b)



$\sphericalangle e$ = 65°
$\sphericalangle c$ = 35°
$\sphericalangle b$ = 65°
$\sphericalangle a$ = 80°

La tradición matemática griega, instaurada por Pitágoras, es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico canónico en el texto *Los Elementos*. En la proposición I. 32 del primer libro de este texto, se establece que "Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos", aunque Pitágoras ya había demostrado este teorema mediante el uso de paralelas.

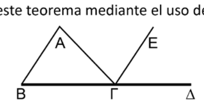
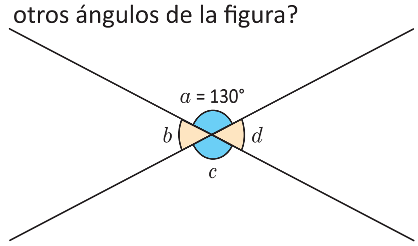


Ilustración de la demostración I. 32, según Euclides.

Tarea: página 98 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.1**

Ⓟ Si el $\sphericalangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?

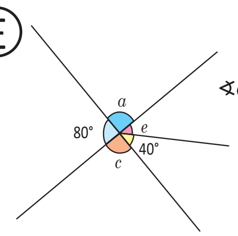


Ⓢ Se tiene que $\sphericalangle a + \sphericalangle b$ = 180°, por ser suplementarios, entonces el $\sphericalangle b$ = 50°.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle b = \sphericalangle d\end{array}\right\}$ Por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c$ = 130° y $\sphericalangle b = \sphericalangle d$ = 50°.

Ⓔ



$\sphericalangle c$ + 80° = 180°
$\sphericalangle c$ = 100°

$\sphericalangle a = \sphericalangle c$ Por ser opuestos por
$\sphericalangle e$ + 40°= 80° el vértice.

Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c$ = 100° y $\sphericalangle e$ = 40°.

Ⓡ a) $\sphericalangle d$ = 180° – 70° = 110°
$\sphericalangle a$ = 70° y $\sphericalangle b$ = 110°

Secuencia:
En Educación Básica, se aprendió sobre los ángulos opuestos por el vértice, suplementarios, etc., en esta clase se utilizarán los conocimientos sobre esos tipos de ángulos formados por dos rectas que se cortan, para determinar la medida de cada uno de ellos conociendo el valor de al menos un ángulo.

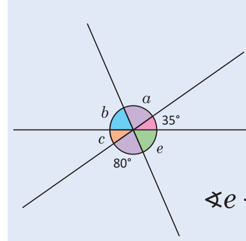
Propósito:
①, ② Determinar el valor de los ángulos formados entre dos rectas secantes, utilizando la relación entre ángulos opuestos por el vértice y suplementarios, cuando se conoce la medida de un ángulo.

③ Resolver un caso en el que además de las dos rectas secantes, se traza un segmento adicional con el que se forma una partición, generando un ángulo adicional.

④ Practicar el proceso desarrollado tanto en el Problema inicial como en el ejemplo adicional, y el literal b) con una pequeña variante; pero siempre resolverá utilizando las mismas relaciones.

Posibles dificultades:
Es probable que se les haya olvidado la relación que existe entre los ángulos opuestos por el vértice formados por una secante, en ese caso es importante que revisen las pistas presentadas en el texto, y en caso de ser necesario hacer un recordatorio general, cuidando que no se invierta mucho tiempo en ello.

Solución del ítem b:



Por ser opuestos por el vértice
$\sphericalangle a$ = 80°
$\sphericalangle c$ = 35°

$\sphericalangle e$ + 80° + 35° = 180°
$\sphericalangle e$ + 115° = 180°
$\sphericalangle e$ = 65°

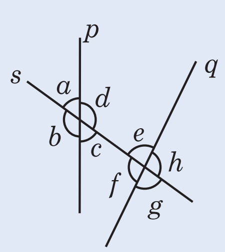
Por ser opuestos por el vértice.
$\sphericalangle b = \sphericalangle e$
$\sphericalangle b$ = 65°

Secuencia:
Ya se ha utilizado la relación entre ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas secantes, en esta clase se identificarán los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas que son cortadas por una tercera recta. Para facilitar la comprensión se puede indicar que si se elimina una de las rectas se tiene el caso de la clase anterior donde se identifican ángulos opuestos por el vértice y suplementarios.

Propósito:
①, ② Clasificar los ángulos considerando su posición respecto a las rectas, por ejemplo, si están entre las rectas, fuera de las rectas y si se encuentran a la izquierda o a la derecha de la secante.

③ Verificar la comprensión de la clasificación de los ángulos por su posición respecto a dos rectas cortadas por una secante. Es importante asegurarse de que todos sean capaces de clasificar los ángulos.

Resolución del ítem b:



Internos:
$\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle e$

Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle b$, $\measuredangle g$ y $\measuredangle h$

Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

Alternos internos:
$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

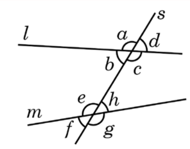
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$,
$\measuredangle c$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$

Indicador de logro. Identifica ángulos correspondientes y los alternos externos e internos.

2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

① **P** En el siguiente diagrama identifica:

1. Los ángulos que se encuentran entre las rectas l y m.
2. Los ángulos que no están entre las rectas l y m.
3. Los ángulos que se encuentran a la izquierda o a la derecha de s.

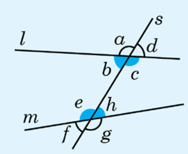


② **S**

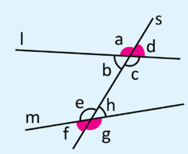
1. $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$ — Entre las rectas l y m.
2. $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$ — Fuera de las rectas l y m.
3. $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$ — A la izquierda de s. $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ — A la derecha de s.

C Los ángulos que se identificaron reciben nombres especiales, según la posición respecto a las rectas que los forman, tal como se muestra a continuación:

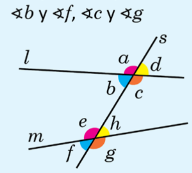
Internos:
$\measuredangle b$, $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$



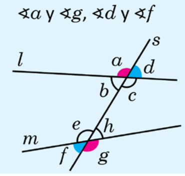
Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$



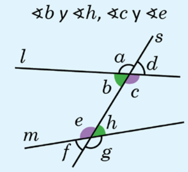
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$,
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$



Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

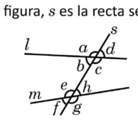


Alternos internos:
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$



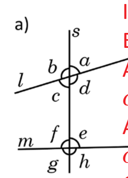
A la recta que corta a dos o más rectas se le llama secante.

En la figura, s es la recta secante.



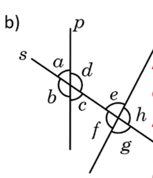
③ Para cada uno de los siguientes literales indica los ángulos internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)



Internos: c, d, f y e
Externos: b, a, g y h
Alternos internos: f y d, c y e
Alternos externos: b y h, a y g
Correspondientes: e y a, f y b, d y h, c y g.

b)



Internos: d, e, c y f
Externos: a, b, h y g
Alternos internos: f y d, c y e
Alternos externos: g y a, b y h
Correspondientes: e y a, f y b, d y h, c y g.

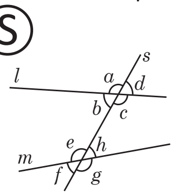
98

Tarea: página 99 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.2**

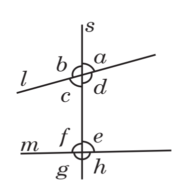
Ⓟ En el diagrama identifica los ángulos que se encuentran:
1. Entre las rectas l y m.
2. Fuera de las rectas l y m.
3. A la izquierda o a la derecha de s.

Ⓢ



1. $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$
2. $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$
3. A la izquierda de s.
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$
A la derecha de s.
$\measuredangle d$ y $\measuredangle h$
$\measuredangle c$ y $\measuredangle g$

Ⓡ a)



Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

Internos:
$\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle e$

Alternos internos:
$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle b$, $\measuredangle g$ y $\measuredangle h$

Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$,
$\measuredangle c$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$

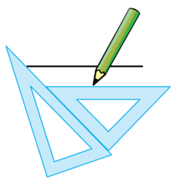
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

Indicador de logro. Identifica la relación entre ángulos correspondientes.

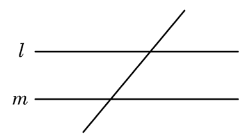
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

① **P** Construye dos rectas paralelas l y m, traza una secante, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

② **S** 1. Se trazan las paralelas haciendo uso de las escuadras.

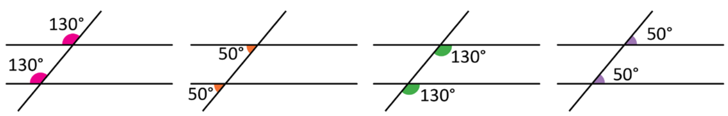


2. Se traza una recta secante a las paralelas construidas.



Para denotar el paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo ∥; es decir, si la recta m es paralela a la recta l se denota como $m \parallel l$.

3. Se miden los ángulos con el transportador.

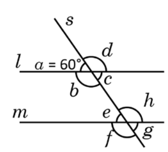


C Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales.

Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

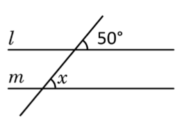
③ **E** Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\measuredangle a = 60°$, determina la medida de los ángulos restantes.

$\measuredangle a + \measuredangle d = 180°$, por ser suplementarios $\Rightarrow$ $\measuredangle d = 120°$.
$\measuredangle c = \measuredangle a = 60°$ y $\measuredangle b = \measuredangle d = 120°$, por ser opuestos por el vértice.
$\measuredangle e = \measuredangle a = 60°$, $\measuredangle g = \measuredangle c = 60°$,
$\measuredangle f = \measuredangle b = 120°$ y $\measuredangle h = \measuredangle d = 120°$, por ser correspondientes.

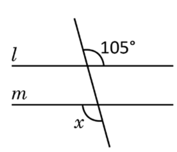


④ Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

a)



b)



$x = 50°$, por ser correspondientes entre paralelas.

$x = 105°$, por ser alternos externos.

Unidad 4

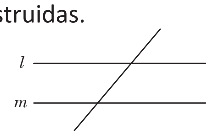
99

Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

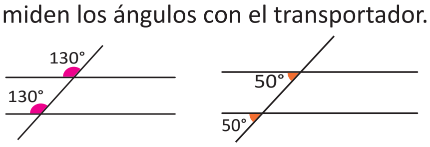
Fecha: **U4 2.3**

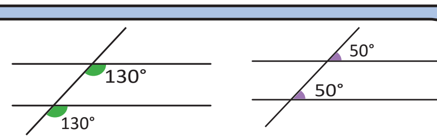
Ⓟ Cuando las rectas son paralelas, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

Ⓢ Se trazan dos paralelas y luego una recta secante a las dos paralelas construidas.

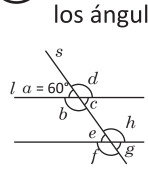


Se miden los ángulos con el transportador.





Ⓔ Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\measuredangle a = 60°$, determinar la medida de los ángulos restantes.



$\measuredangle a + \measuredangle d = 180°$,
$\measuredangle d = 120°$.
$\measuredangle c = \measuredangle a = 60°$ y
$\measuredangle b = \measuredangle d = 120°$
$\measuredangle e = \measuredangle a = 60°$,
$\measuredangle g = \measuredangle c = 60°$,
$\measuredangle f = \measuredangle b = 120°$ y
$\measuredangle h = \measuredangle d = 120°$

Ⓡ a) $x = 50°$ b) $x = 105°$

Secuencia:
En la clase anterior, se clasificaron los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante; en esta clase se determinará la relación entre dos ángulos correspondientes cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante. Es importante destacar que con el tipo de rectas que se utilizarán, los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito:
①, ② Comparar los ángulos correspondientes formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante, realizando el proceso de construcción de las rectas paralelas y medición de los ángulos utilizando el estuche de geometría.

③ Mostrar que si las rectas son paralelas, se puede conocer el valor de todos los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante, conociendo el valor de uno de los ángulos y utilizando la relación entre los ángulos que han sido estudiados.

④ Resolver situaciones donde se utiliza la relación entre los ángulos formados entre dos rectas paralelas y una secante.

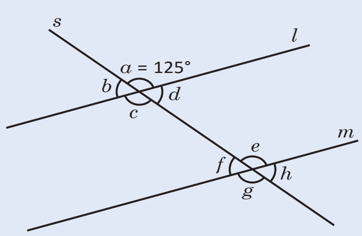
Posibles dificultades:
Si los estudiantes no pueden utilizar las escuadras o medir con precisión los ángulos utilizando el transportador, será necesario dar orientaciones generales.

Secuencia:
Anteriormente se analizó la relación entre ángulos correspondientes; ahora se analizarán los valores de los ángulos alternos internos y alternos externos, para concluir formalizando la relación que existe entre ellos cuando las rectas son paralelas.

Propósito:
①, ② Determinar la medida de los ángulos utilizando lo aprendido en la clase anterior, y luego comparar los ángulos alternos internos y alternos externos para establecer la relación que existe entre ellos.

③ En el numeral 1, identificar los ángulos alternos internos y externos, luego determinar las medidas, relacionando los ángulos considerando el hecho de que las rectas son paralelas; mientras que en el numeral 2, aplicar el recíproco; es decir, identificar si hay ángulos que son iguales para determinar si hay rectas paralelas.

Resolución del ítem 1:



Son alternos internos:
$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$
$\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$, por ser opuestos por el vértice,

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$.

$\measuredangle d + \measuredangle a = 180°$, por ser suplementarios,
$\measuredangle d + 125° = 180°$,
$\measuredangle d = 55°$,
$\measuredangle f = \measuredangle d = 55°$.

Son alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

$\measuredangle g = \measuredangle a = 125°$
$\measuredangle b = \measuredangle d = 55°$, por ser opuestos por el vértice,
$\measuredangle h = \measuredangle b = 55°$.

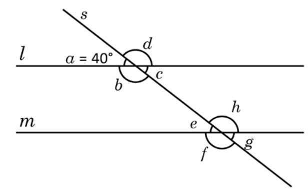
Indicador de logro. Identifica la relación entre ángulos internos, externos, alternos internos y alternos externos, entre dos rectas paralelas.

2.4 Caracterización de los ángulos alternos

① **P**

Dado que las rectas l, m, son paralelas y s es la recta secante, realiza lo siguiente:

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.



② **S**

1. Calculando la medida de los ángulos
$\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$, por ser suplementarios.
$\measuredangle b = 140°$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle c = \measuredangle a = 40° \\ \measuredangle d = \measuredangle b = 140°\end{array}\right\}$ son opuestos por el vértice.

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle e = \measuredangle a = 40° \\ \measuredangle f = \measuredangle b = 140° \\ \measuredangle h = \measuredangle d = 140° \\ \measuredangle g = \measuredangle c = 40°\end{array}\right\}$ son correspondientes entre paralelas.

2.
$\left.\begin{array}{l}\measuredangle b \text{ y } \measuredangle h \\ \measuredangle c \text{ y } \measuredangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí.

$\measuredangle b = \measuredangle h = 140°$ y $\measuredangle c = \measuredangle e = 40°$.

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle g \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí.

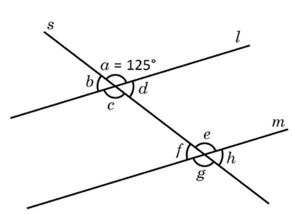
$\measuredangle a = \measuredangle g = 40°$ y $\measuredangle d = \measuredangle f = 140°$.

C

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

③

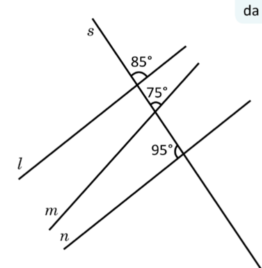
1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.



$b = 55°$ $\quad$ $c = 125°$
$d = 55°$ $\quad$ $g = 125°$
$f = 55°$ $\quad$ $e = 125°$
$h = 55°$

2. Identifica cuáles rectas son paralelas. Justifica tu respuesta.

Considera la medida de los ángulos.



l y n, son rectas paralelas, porque sus respectivos ángulos correspondientes son iguales.

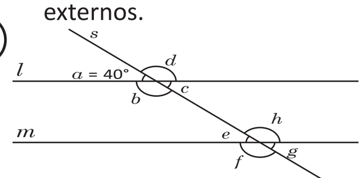
100

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.4**

Ⓟ Las rectas l, m, son paralelas y s es la recta secante.
1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.

Ⓢ



1. $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$,
$\measuredangle b = 140°$
$\measuredangle c = \measuredangle a = 40°$
$\measuredangle d = \measuredangle b = 140°$

$\measuredangle e = \measuredangle a = 40°$
$\measuredangle f = \measuredangle b = 140°$
$\measuredangle h = \measuredangle d = 140°$
$\measuredangle g = \measuredangle c = 40°$

2. $\left.\begin{array}{l}\measuredangle b \text{ y } \measuredangle h \\ \measuredangle c \text{ y } \measuredangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos

$\measuredangle b = \measuredangle h = 140°$ y $\measuredangle c = \measuredangle e = 40°$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle g \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos

$\measuredangle a = \measuredangle g = 40°$ y $\measuredangle d = \measuredangle f = 140°$

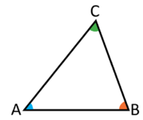
Ⓡ 1. $\measuredangle b = 180° - 125°$,
$\measuredangle b = 55°$
$\measuredangle d = 55°$
$\measuredangle h = 55°$
$\measuredangle f = 55°$
$\measuredangle c = 125°$, $\measuredangle g = 125°$
$\measuredangle e = 125°$

Indicador de logro. Utiliza la relación de los ángulos entre paralelas, para demostrar el teorema de los ángulos internos de un triángulo.

2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

① **P**

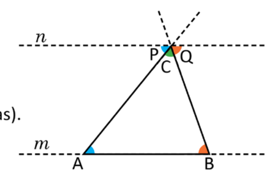
Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces ∢A + ∢B + ∢C = 180°.



Usa las relaciones de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

② **S**

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.



∢P + ∢C + ∢Q = 180° (por formar un ángulo llano).

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo).

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

C

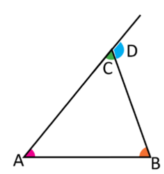
Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas.

Unidad 4

③

1. Llena los espacios en blanco y demuestra que "si el ∢D es el ángulo externo del vértice C, entonces su medida es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC"; así, ∢D = ∢A + ∢B.

Solución.
Se quiere demostrar que



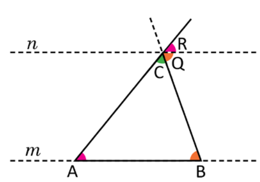
Si el ∢D, es el ángulo externo del ∢C, entonces ∢D= ∢A + ∢B.

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.

$n \parallel \boxed{m}$ (por construcción).

∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{alterno}}$ internos entre paralelas).

∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas).



∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción).

∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)

Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

2. Busca otra forma para demostrar el teorema, puedes utilizar la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo.

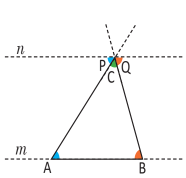
101

Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.5**

Ⓟ Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces su suma es 180°.

Ⓢ



$n \parallel m$

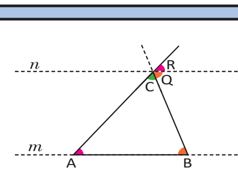
∢P + ∢C + ∢Q = 180°, por formar un ángulo llano.

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo)

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

Ⓡ



$n \parallel \boxed{m}$ (por construcción)
∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{Alternos internos}}$ entre paralelas)

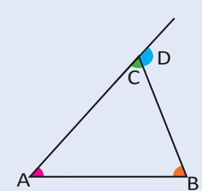
∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas)
∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción)
∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)

Secuencia:
En la primer clase de esta unidad, se dedujo una expresión matemática para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera, en esta clase se demostrará que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a 180°, esto utilizando lo aprendido sobre ángulos entre rectas paralelas.

Propósito:
①, ② Hacer trazos auxiliares que permitan utilizar la relación entre ángulos que se forman cuando una secante corta a dos rectas paralelas, para demostrar un resultado que se ha aceptado como cierto desde la Educación Básica.

③ En el numeral 1, practicar el proceso de demostración de un teorema, complementando las afirmaciones planteadas; mientras que en el numeral 2, se espera que utilice el resultado del Problema inicial para hacer la demostración indicada.

Resolución del ítem 2:



∢A + ∢B + ∢C = 180°, por ser ángulos internos de un triángulo.

∢C + ∢D = 180°, por ser suplementarios.

De donde se tiene:
∢A + ∢B + ∢C = ∢C + ∢D

Restando ∢C a ambos lados de la igualdad: ∢A + ∢B = ∢D.

Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

Secuencia:
En la clase anterior se modeló el proceso de demostración de un teorema, en esta clase se define qué se entiende por demostración y cuáles son sus elementos. Es importante hacer énfasis en eso, pues en las siguientes unidades será utilizado para demostrar propiedades de figuras u otros teoremas.

Propósito:
①, ② Identificar los elementos de una demostración, tomando como base el teorema demostrado en la clase anterior. Es importante enfatizar en cada uno de ellos para que los puedan diferenciar con facilidad.

③ Dejar explícitos y con representación simbólica los elementos de una demostración que guíen el trabajo del estudiante.

④ Verificar si se han comprendido los conceptos de hipótesis y conclusión, caso contrario será el momento oportuno de mostrar otros ejemplos para fijar el aprendizaje.

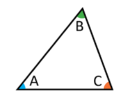
Indicador de logro. Identifica los elementos de una demostración matemática.

2.6 Elementos de una demostración

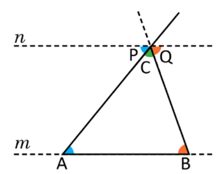
① **P** Observa el ejemplo y determina los elementos de una demostración.

Si ∢A, ∢B y ∢C , son ángulos internos de un triángulo, entonces:

∢A + ∢B + ∢C = 180°



∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**



Afirmación	**Justificación**
1. $n \parallel m$.	Por construcción.
2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180°	Por formar un ángulo llano.
3. ∢P = A; ∢Q = ∢B.	Por ser alternos internos entre paralelas.
4. ∢A + ∢B + ∢C = 180°	Por transitividad.

→ **Afirmaciones justificadas**

→ **Conclusión**

La demostración es un método que permite llegar a la conclusión partiendo de la hipótesis a través de afirmaciones que tienen una justificación matemática.

Una afirmación es una proposición con base lógica.

Una justificación es el argumento que hace cierta la afirmación.

② **S** En la demostración hay:

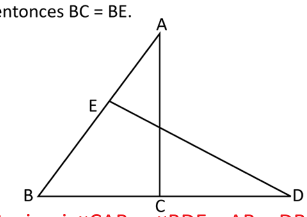
1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

En la figura de la derecha se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.

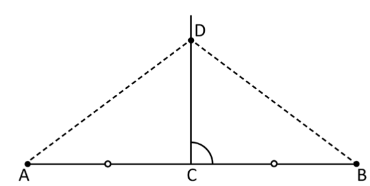
③ **C** A la expresión de la forma "si ☐, entonces ◯", se le llama **proposición**.
A la parte representada por ☐ se le llama **hipótesis**; y la representada por ◯ se llama **conclusión**.

④ Identifica la hipótesis y la conclusión.

1. Si en la figura el ∢CAB = ∢BDE y AB = DB, entonces BC = BE.



2. Si el punto D está en la mediatriz del segmento AB entonces DA = DB.



102

Hipótesis: si ∢CAB = ∢BDE y AB = DB
Conclusión: BC = BE

Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB
Conclusión: DA = DB

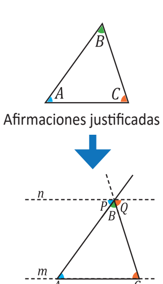
Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.6**

Ⓟ Observa el ejemplo del libro y determina los elementos de una demostración.

Ⓢ

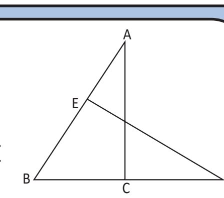
1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

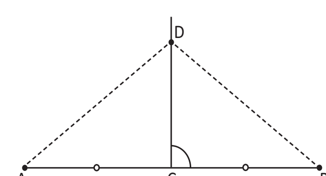


En la figura mostrada, se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.

Ⓡ

Hipótesis:
∢CAB = ∢BDE
y AB = DB
Conclusión: BC = BE.





Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB.
Conclusión: DA = DB.

Indicador de logro. Resuelve desafíos o situaciones problemáticas en distintos contextos, mediante la aplicación de las relaciones que caracterizan a los ángulos entre paralelas.

2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

① **P** Carlos necesita diseñar una escalera con una altura de 560 cm, los escalones deben tener una contrahuella de 18 cm y un descansillo a la mitad de la altura. ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

② **S** En primer lugar, es necesario considerar las condiciones del problema:

1. La altura de la escalera es de 560 cm.
2. Debe haber un descansillo a los 280 cm.
3. La contrahuella debe ser de 18 cm.

Lo primero es encontrar el número de contrahuellas:

$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 15.56$, que se aproxima a 16.

Luego, se determina la medida real de la contrahuella:

$\frac{280 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene: $2 \times 17.5 + H = 64$
$H = 64 - 35$
$H = 29$

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.

Santiago Francisco Blondel fue un arquitecto y urbanista francés, uno de los más importantes teóricos de la arquitectura del siglo XVIII. Uno de sus aportes fue la "Ley de Blondel" que establece una relación entre las huellas y las contrahuellas en una escalera (ver figura 1). La Ley de Blondel establece la siguiente relación: 2CH + H = 64 cm donde, CH es la dimensión de la contrahuella y H es la dimensión de la huella.

La huella es la parte de la escalera donde pisas, mientras la contrahuella se determina por la distancia en altura entre 2 huellas.

En tramos que superen los 275 centímetros de altura se recomienda colocar un "Descansillo" (ver figura 2) que es una superficie llana en que termina cada tramo de una escalera.

El ángulo de inclinación se determina según la razón entre la huella y la contrahuella (ver figura 3). Generalmente las escaleras más cómodas tienen una inclinación comprendida entre 31° y 37°.

La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} = 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

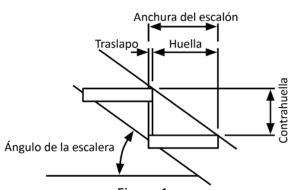


Figura 1

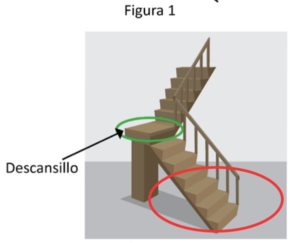


Figura 2

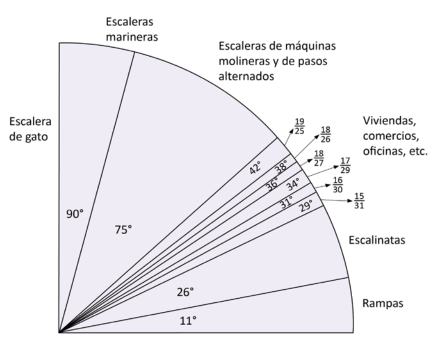


Figura 3

Unidad 4

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U4 2.7**

Ⓟ ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

Ⓢ El número de contrahuellas: $\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} \approx 15.56$, que se aproxima a 16.

La medida real de la contrahuella:
$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene:
2CH + H = 64 cm

$2 \times 17.5 + H = 64$
$H = 64 - 35$
$H = 29$

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.

La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} \approx 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

Ⓡ

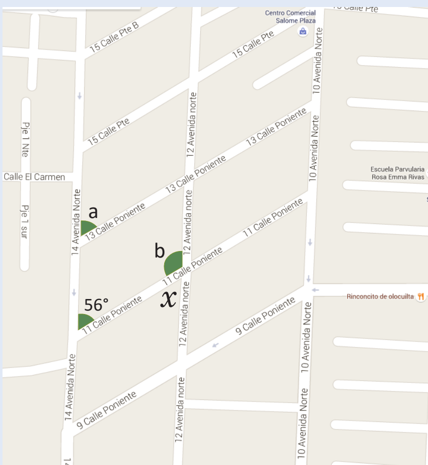
$\measuredangle a = 56°$, por ser correspondientes.
$\measuredangle b = 124°$

Secuencia:
Hasta este momento se ha aprendido sobre la relación entre ángulos que se forman entre dos rectas que son cortadas por una secante, y se ha profundizado en el caso en que las rectas son paralelas; para esta clase se resuelve una situación del entorno en la que se utiliza la relación entre los ángulos y la ley de Blondel, esta última muy usada en la construcción de gradas para conectar los niveles de un edificio; además, se debe considerar la finalidad y el tipo de público que utilizará las gradas.

Propósito:
①, ② Determinar los datos que se necesitan para el diseño de una escalera, considerando ciertas características dadas. Es importante que se haga énfasis en los elementos a considerar y las razones por las que deben tener esas dimensiones.

③ Resolver una situación en un contexto diferente, pero siempre utilizando la relación entre ángulos entre paralelas, esto para verificar si se ha fijado el contenido desarrollado en la lección 2 de la unidad.

Resolución del ítem:



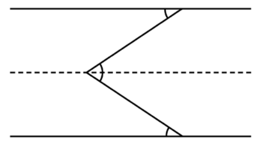
$\sphericalangle a$ = 56°, por ser correspondientes entre paralelas.

$\sphericalangle x$ = 56°, por ser alternos internos entre paralelas.

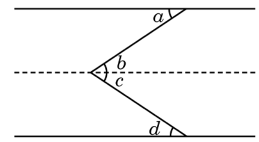
$\sphericalangle b + \sphericalangle x$ = 180°, por ser suplementarios.

$\sphericalangle b$ = 180° – 56°
$\sphericalangle b$ = 124°

Trazando una paralela a nivel del descansillo tenemos que



Observa que se forman los siguientes ángulos:



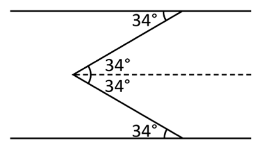
$\sphericalangle d$ = 34° por la razón de la huella con la contrahuella.

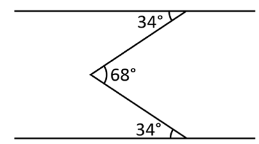
$\sphericalangle d = \sphericalangle c$ por ser alternos internos.

$\sphericalangle b$ = 34° porque el segundo tramo de las escaleras debe tener la misma inclinación.

$\sphericalangle b = \sphericalangle a$ por ser alternos internos.

Luego $\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = \measuredangle d$ = 34°

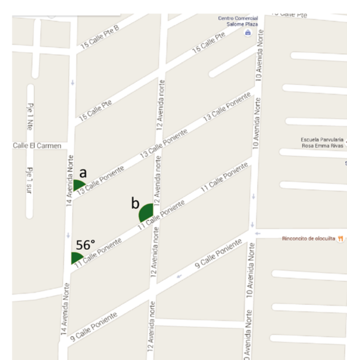




Con esta información, Carlos puede completar el informe de su diseño.

Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

③ La Alcaldía Municipal de Santa Tecla necesita conocer la medida de los ángulos que se forman en la intersección entre las calles y avenidas. El topógrafo ya midió los ángulos cuyos datos se muestran en el mapa, considerando que desde la 9ª hasta la 13ª calle son paralelas, al igual que las avenidas desde la 10ª hasta la 14ª. Determina la medida de los ángulos indicados.



104

Prueba de la Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono **Matemática 8º**

Fecha: ______________________________

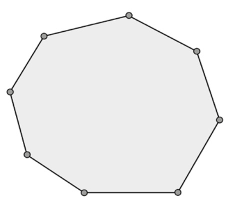
Nombre: ____ **Sección:**________

Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino

Centro escolar: _____________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente**.**

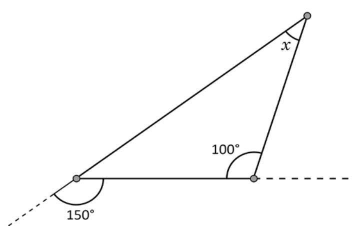
1. Encuentra la suma de los ángulos internos y externos del octágono.



Respuesta 1:

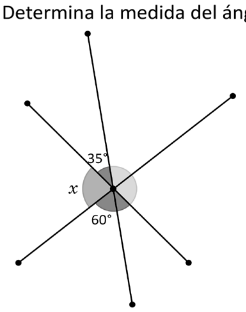
Respuesta 2:

2. Determina el valor de x para la siguiente figura:



Respuesta:

3. Determina la medida del ángulo x, para la siguiente figura:



Respuesta:

1

Descripción:

La prueba de esta unidad está formada por 5 numerales, el primero tiene dos literales y cada uno será valorado como un ítem; por tanto, la prueba será considerada con 6 ítems.

Criterios para asignar puntos parciales:

Para cada uno de los ítems que se presentan a continuación, la respuesta se considera parcialmente correcta si se cumple uno de los criterios que se establecen a continuación:

Ítems 1 y 2 :

En este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.

Ítem 3 :

Corresponde al numeral 2, se considerará la respuesta como parcialmente correcta si calcula el valor de y, pero no el de x.

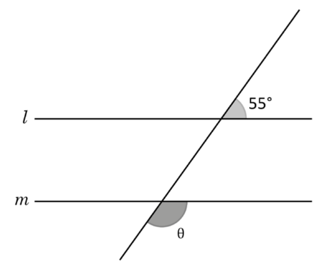
Ítem 4 :

Corresponde al numeral 3, en este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.

Ítem 5:
Corresponde al numeral 4, en este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.

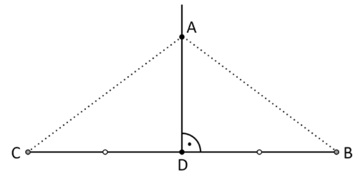
Ítem 6:
Corresponde al numeral 5, en este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.

4. Dado que $l \parallel m$, determina el valor de θ.



Respuesta:

5. Identifica la hipótesis y la conclusión.
Si el punto A está en la mediatriz del segmento BC, entonces AC = AB



Hipótesis:

Conclusión:

Unidad 5. Criterios de congruencia de triángulos

Competencia de la Unidad

Utilizar los criterios para determinar la congruencia entre triángulos, caracterizar algunas figuras planas y resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Congruencia de triángulos	1	1. Sentido de la congruencia de dos figuras
	1	2. Congruencia de triángulos
	1	3. Primer criterio de congruencia de triángulos
	1	4. Segundo criterio de congruencia de triángulos
	1	5. Tercer criterio de congruencia de triángulos
	1	6. Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos
	1	7. Aplicación de criterios de congruencia de triángulos
	1	8. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1
	1	9. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2
	1	Prueba de la Unidad 5

9 horas clase + prueba de la Unidad 5

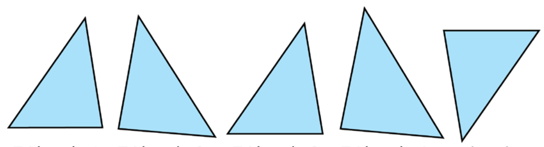
Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Congruencia de triángulos
Se inicia la unidad con la introducción del sentido de la congruencia de figuras planas, luego se define la congruencia de triángulos estableciendo relaciones entre sus elementos; seguidamente se introducen los criterios de congruencia de triángulos haciendo énfasis en el proceso de construcción de figuras, y para finalizar se presenta una serie de aplicaciones de los criterios de congruencia a diferentes contextos.

Indicador de logro. Determina cuando dos figuras son congruentes.

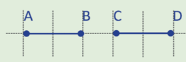
1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

① **P** De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).

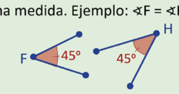


Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

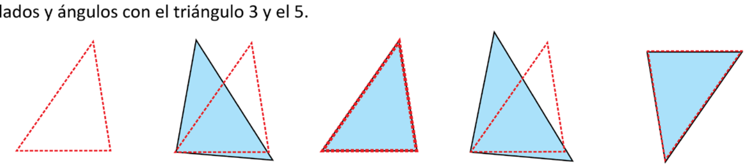
Dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales. Ejemplo: AB = CD.



Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Ejemplo: ∢F = ∢H.



② **S** Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.



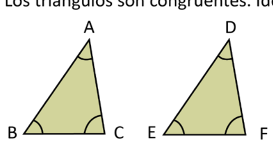
Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

C Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o volteando al revés una de ellas si es necesario, se llaman **congruentes**.

Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

A los elementos **correspondientes** de una figura también se les llama **homólogos**.

③ **E** Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



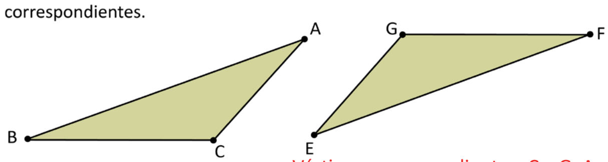
Triángulo 1 Triángulo 2

Vértices correspondientes: A y D, B y E, C y F.

Lados correspondientes: AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Ángulos correspondientes: ∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

④ Los siguientes triángulos son congruentes. Compáralos e identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Aunque los triángulos estén en distinta posición son congruentes, puedes girarlos o darles vuelta para que coincidan.

Vértices correspondientes: C y G, A y E, B y F.
Lados correspondientes: CA y GE, CB y GF, AB y EF.
Ángulos correspondientes: ∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

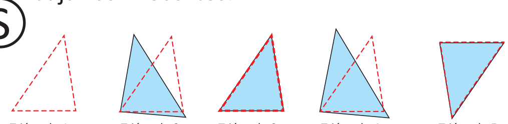
106

Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.1**

(P) De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).
Observación: Ver ilustración en el LT y trabajar con recortes.

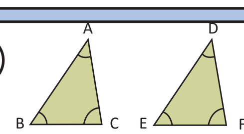
(S)



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.

(E)



Triángulo 1 Triángulo 2

Vértices correspondientes:
A y D, B y E, C y F.
Lados correspondientes:
AB y DE, BC y EF, CA y FD.
Ángulos correspondientes:
∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

(R) Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.
Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.
Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

Materiales:
Recortes de los triángulos que contiene el Problema inicial, para ello puede sacar copias de la página o buscar otra estrategia.

Secuencia:
En la unidad anterior se trabajó con ángulos internos y externos de un polígono, en esta clase se compararán figuras; uno de los elementos a considerar en ese proceso de comparación son los ángulos internos; luego se establecerá una correspondencia entre cada uno de los elementos comparados en una figura plana. Cuando se comparan figuras es importante considerar que si es necesario la figura se debe rotar o voltear.

Propósito:
①, ② Comparar figuras sobreponiéndolas, con el objeto de identificar las que coinciden en todos sus elementos y abstraer del proceso el concepto de **figuras congruentes**.

③ Identificar los lados homólogos en dos triángulos congruentes, utilizando las definiciones dadas en la Conclusión.

④ Fijar los conceptos trabajados en la clase, a diferencia del ejemplo adicional, en este caso el segundo triángulo es equivalente a una rotación del primero; mientras que en el ejemplo adicional el segundo triángulo corresponde a una traslación del primero.

Posibles dificultades:
Es posible que los cortes no se realicen con precisión, lo que puede hacer que las figuras no coincidan, para evitar esto es importante hacer énfasis sobre el tipo de corte al momento en que se realice la actividad.

Solución del ítem:
Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.

Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.

Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

1.2 Congruencia de triángulos

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con regla y transportador.

Secuencia:
En la clase anterior se introdujo el concepto de congruencia, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos como un caso particular de congruencia de figuras, es importante hacer énfasis en que los elementos a comparar deben ser correspondientes.

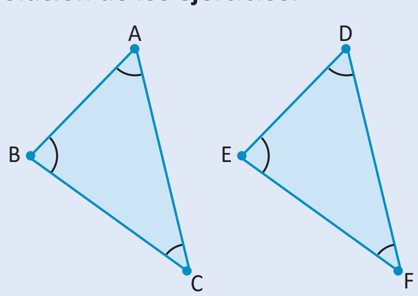
Propósito:
①, ② Comparar la medida de los elementos correspondientes en dos triángulos congruentes, para establecer la relación de igualdad que se da entre ellos.

③ Introducir la notación que se utiliza para representar la congruencia de triángulos.

④ Practicar el uso del símbolo de congruencia estableciendo relación entre los lados y ángulos de los triángulos dados.

Posibles dificultades:
La falta de precisión en la medida de las figuras geométricas, puede dificultar la identificación de los lados o ángulos iguales. En ese caso es necesario dar orientaciones generales sobre el uso de los instrumentos de medida.

Solución de los ejercicios:



1. En los triángulos:

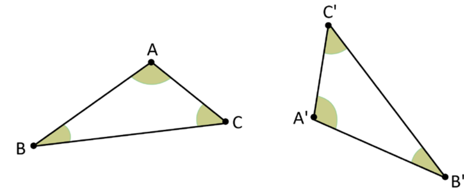
$AB = DE$	$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$BC = EF$	$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$AC = DF$	$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Indicador de logro. Identifica cuando dos triángulos son congruentes.

1.2 Congruencia de triángulos

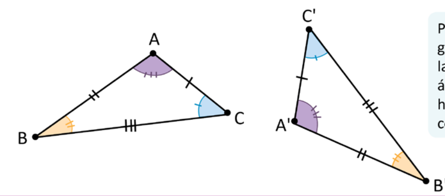
① **P** Si los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.



La notación A', B', y C', se lee "A prima", "B prima" y "C prima" y se utiliza para representar puntos que son diferentes, pero que se corresponden con los puntos A, B y C.

② **S** Al comparar la longitud de los lados correspondientes y la medida de los ángulos correspondientes se obtiene que

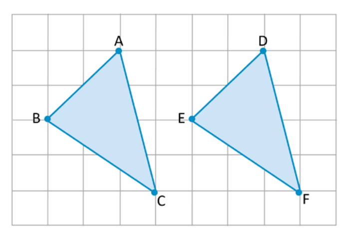
$AB = A'B'$	$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$AC = A'C'$	$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
$BC = B'C'$	$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

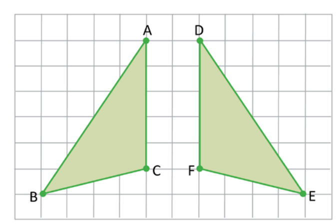


Puedes comparar la longitud de cada uno de sus lados y amplitud de sus ángulos respectivamente, haciendo uso de regla, compás y transportador.

③ **C** En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales.
Para indicar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes se utiliza el símbolo ≅; es decir: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

④ Dado que los siguientes triángulos son congruentes, identifica los lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.





$AB = DE$	$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$BC = EF$	$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$AC = DF$	$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

Cuando se escribe la congruencia de triángulos, es necesario tomar en cuenta que se deben escribir las letras en orden de los vértices correspondientes.

$AB = DE$	$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$BC = EF$	$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$AC = DF$	$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Unidad 5

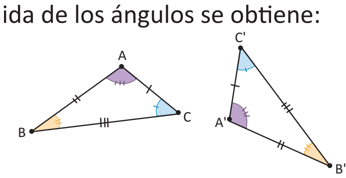
107

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ Si los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.
Observación: Ver los triángulos en el LT.

Ⓢ Al comparar la longitud de los lados y la medida de los ángulos se obtiene:



$AB = A'B'$	$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$AC = A'C'$	$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
$BC = B'C'$	$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

Ⓡ 1. En los triángulos:

$AB = DE$	$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$BC = EF$	$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$AC = DF$	$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

2. En los triángulos:

$AB = DE$	$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$BC = EF$	$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$AC = DF$	$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Indicador de logro. Determina el mínimo de elementos necesarios que deben ser iguales para que dos triángulos sean congruentes.

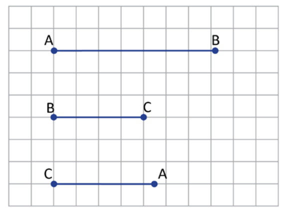
1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

① **P**

Utilizando compás y regla, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los tres segmentos de la derecha como lados.

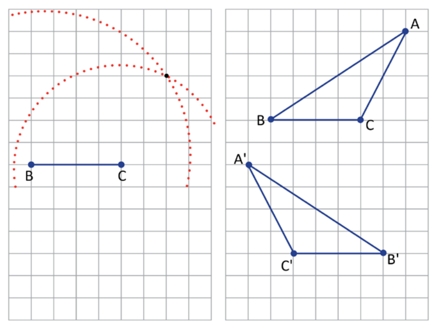
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?



② **S**

a) Para construir el triángulo se realiza lo siguiente:
- Construye un segmento de longitud BC.
- Traza una circunferencia de radio BA y centro en B y otra con centro en C y radio CA.
- Identifica la intersección de los dos arcos.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



C

Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales, son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

③

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$

b) ΔDEF; $DE = 2$, $EF = 4$, $FD = 3$

c) ΔGHI; $GH = 4$, $HI = 5$, $IH = 3$

d) ΔJKL; $JK = 5$, $KL = 7$, $LJ = 8$

e) ΔMNO; $MN = 3$, $NO = 4$, $OM = 5$

f) ΔPQR; $PQ = 5$, $QR = 8$, $RP = 7$

g) ΔSTU; $ST = 7$, $TU = 5$, $US = 6$

h) ΔXYZ; $XY = 4$, $YZ = 3$, $ZX = 2$

El tratado *Los Elementos*, de Euclides, ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* p.116.

En la proposición I.22. del tratado *Los Elementos*, Euclides hace referencia a la congruencia de triángulos estableciendo: "Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante".

108

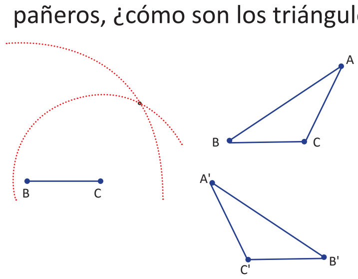
a) y g); b) y h); c) y e); d) y f)

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.3**

(P) a) Construye un triángulo usando la longitud de los segmentos mostrados en el LT, utiliza regla y compás.
b) Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

(S)



Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, son congruentes.

(R) Utilizando el criterio de congruencia LLL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y g)
b) y h)
c) y e)
d) y f)

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría y compás.

Secuencia:
Luego de haber introducido el símbolo que representa la congruencia, así como el concepto de congruencia de triángulos, se analizará cuál debe ser el número mínimo de elementos que deben tener iguales dos triángulos para que sean congruentes; en ese sentido en esta clase introduce el **primer criterio de congruencia** "Lado, Lado, Lado (LLL)".

Propósito:
①, ② Construir un triángulo dada la longitud de sus tres lados. Para esta actividad es importante que no se les indique la posición del triángulo, para que luego puedan comparar y determinar que no importa la posición en que dibujen los triángulos, siempre serán congruentes si las medidas de sus lados son iguales.

③ Utilizar el criterio de congruencia que se ha definido en la Conclusión, en este apartado no es necesario que dibujen los triángulos, basta con que vayan comparando las longitudes de los lados; pero si se dispone de tiempo puede dibujarse para que practiquen el uso del compás.

Posibles dificultades:
El uso inadecuado del compás, podría impedir que se realicen los trazos sugeridos; en ese caso es importante dar una orientación general al respecto y dejar como tarea que complementen el trazo de los triángulos de la fijación.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría.

Secuencia:
En la clase anterior se trabajó con el primer criterio de congruencia, en esta clase se trabajará el segundo criterio, proporcionando tres elementos del triángulo para que ellos realicen el trazo; a diferencia de la anterior, en esta clase es importante el orden en que se colocan los elementos.

Propósito:
①, ② Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado comprendido entre ellos; a partir de la comparación de los trazos, introducir el **segundo criterio de congruencia** "Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)". Es importante que cuando se comparen los resultados se haga énfasis en la posición de los ángulos respecto al segmento dado.

③ Practicar el proceso de identificación de triángulos congruentes utilizando el criterio visto en esta clase.

Indicador de logro. Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

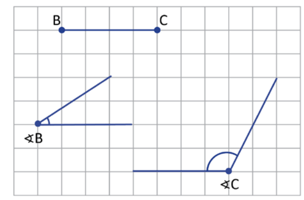
1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

① **P**

Utilizando regla y transportador, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos de la derecha, como dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

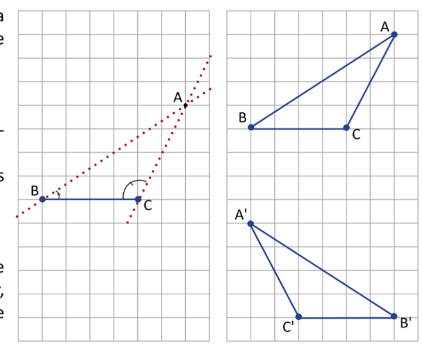


② **S**

a) Para construir el triángulo usando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

- Construye un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo B y el ángulo C en los respectivos extremos del segmento BC.
- Identifica la intersección de los rayos de los ángulos trazados ∢B y ∢C.
- Une los puntos y forma el ΔABC.

b) Al comparar los triángulos, puedes ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



C

Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' y ∢C = ∢C'.

③ Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

a) y e); b) y h); c) y f)

Unidad 5

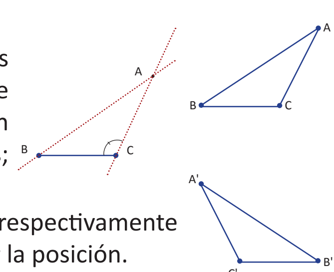
109

Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.4**

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos mostrados en el LT, utiliza regla y transportador.
b) Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia ALA, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y e)
b) y h)
c) y f)

Indicador de logro. Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría y compás.

Secuencia:
En las dos clases anteriores se ha trabajado con dos criterios, con los cuales se puede determinar si dos triángulos son congruentes; en esta clase se presentarán tres elementos distintos a los analizados para introducir el **tercer criterio de congruencia** "Lado, Ángulo, Lado (LAL)".

Propósito:
①, ② Construir un triángulo con los elementos dados y luego compararlo con los obtenidos por sus compañeros. Es necesario considerar que el orden en que se colocan los elementos es importante.

③ Fijar el proceso de comparación de los triángulos utilizando el criterio de congruencia estudiado en esta clase.

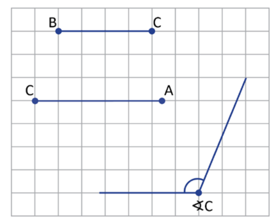
Observación:
Es importante señalar que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

① **P** Utilizando regla, transportador y compás, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo de la derecha, como dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

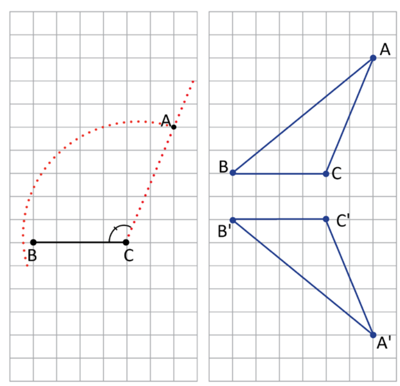


② **S**

a) Para construir el triángulo a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se realiza lo siguiente:

- Traza un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo C.
- Traza una circunferencia de radio CA.
- Marca la intersección de la circunferencia y el rayo del ∢C.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



C Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que BC = B'C', ∢C = ∢C' y CA = C'A'.

③ Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

110

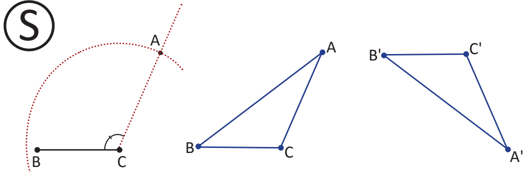
a) y g); b) y h); c) y e)

Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.5**

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo mostrado en el LT, utiliza regla, compás y transportador.
b) Compara los resultados obtenidos con otros estudiantes de tu grado, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ



Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.

Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia LAL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y g)
b) y h)
c) y e)

Materiales:
Llevar recortes del pentágono para cada estudiante, esto para optimizar el tiempo de la clase, o puede pedir que se lleve ya dibujado en caso de que no se tenga acceso a copias.

Secuencia:
En las últimas tres clases se han estudiado los tres criterios de congruencia, por lo que en esta clase se utilizarán para demostrar propiedades de los polígonos.

Propósito:
①, ② Demostrar relaciones entre los triángulos que se forman con los lados y diagonales de un pentágono regular.

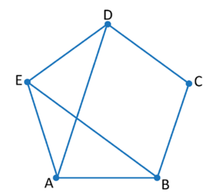
③ Utilizar los criterios de congruencia para determinar si dos triángulos dados son congruentes.

Posibles dificultades:
No lograr hacer las justificaciones que permitan llevar a realizar la demostración, en ese caso se pueden poner a trabajar por parejas.

Indicador de logro. Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

① **P** Dado el pentágono regular, explica por qué ΔABE ≅ ΔEDA.



En el pentágono regular la medida de sus lados y ángulos internos son iguales.

② **S**

Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
∢EAB = ∢DEA	Son ángulos internos del pentágono regular.
ΔABE ≅ ΔEDA	Por criterio LAL.

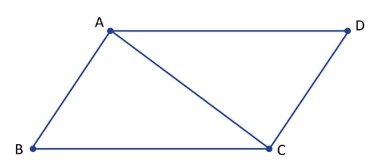
C A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**

En el problema mostrado anteriormente, las características de los lados y ángulos internos del pentágono regular y los criterios de congruencia de triángulos son asuntos comprobados y la solución mostrada es la *demostración*.

Unidad 5

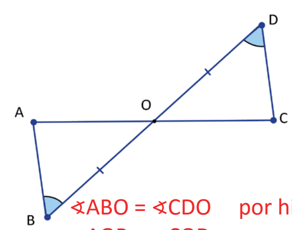
③ Realiza las siguientes demostraciones:

1. Dado que el cuadrilátero ABCD es un romboide y AC es diagonal, demuestra que ΔABC ≅ ΔCDA.



∢CAB = ∢ACD
∢CAD = ∢ACB por ser alternos internos,
AC = CA por ser el mismo segmento,
ΔABC ≅ ΔCDA por criterio ALA.

2. Dado que AB ∥ CD y DO = BO. Demuestra que ΔABO ≅ ΔCDO.

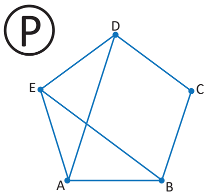


∢ABO = ∢CDO por hipótesis,
∢AOB = ∢COD por ser opuestos,
OB = OD por hipótesis,
ΔABO ≅ ΔCDO por criterio ALA.

Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.6**

Ⓟ



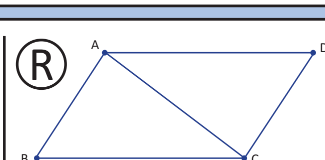
Dado un pentágono regular, explica por qué ΔABE ≅ ΔEDA.

Observación: entregar recortes del pentágono del LT, o ver imagen en LT.

Ⓢ

Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
∢EAB = ∢DEA	Son ángulos internos del pentágono regular.
ΔABE ≅ ΔEDA	Por criterio LAL.

Ⓡ

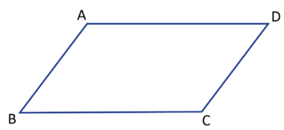


∢CAB = ∢ACD ∢CAD = ∢ACB	Por ser alternos internos.
AC = CA	Por ser el mismo segmento.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio ALA.

Indicador de logro. Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

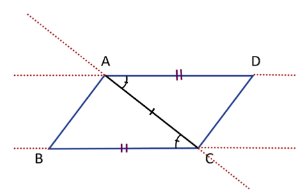
① **P** Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.



Utiliza congruencia de triángulos que contenga AB y DC, para demostrar la igualdad de lados.

② **S** Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.

Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.



De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

C **La demostración está estructurada de la siguiente manera:**
BC = DA, argumento dado en el enunciado y se le denomina **hipótesis**.

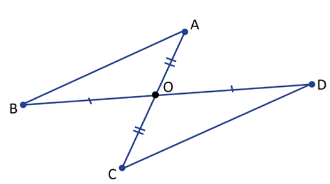
CA = AC
∢BCA = ∢DAC, resultados ya comprobados.
ΔABC ≅ ΔCDA

AB = CD, argumento o asunto a demostrar, **conclusión**.

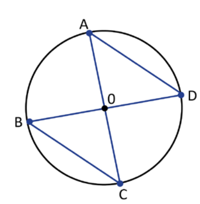
En matemática se usa el lenguaje:
Si ▭, entonces ◯.
▭ corresponde a la hipótesis y
◯, corresponde a la conclusión.

③

1. Dos segmentos AC y BD se cortan en el punto O. Considerando que BO = DO y AO = CO, demuestra que AB = CD, luego escribe la hipótesis y la conclusión.



2. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersectan en el centro O del círculo. Demuestra que AD = CB.

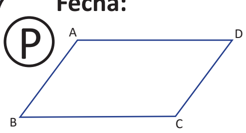


112

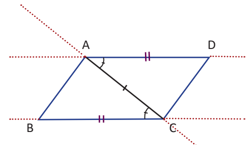
Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.7**

Ⓟ Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.



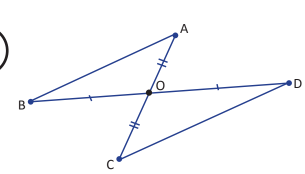
Ⓢ Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.



Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

Ⓡ



Afirmación	Justificación
BO = DO AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría y compás.

Secuencia:
En la clase anterior se utilizaron los criterios de congruencia para demostrar si dos triángulos dados son congruentes, en esta clase nuevamente se utilizarán los criterios de congruencia así como lo aprendido sobre paralelismo para demostrar que dos triángulos son congruentes.

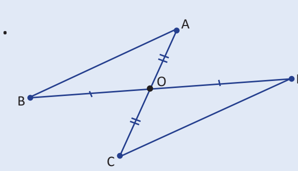
Propósito:
①, ② Demostrar que en un cuadrilátero, al trazar una diagonal, se forman dos triángulos congruentes.

③ Demostrar si dos triángulos dados son congruentes, para ello es necesario utilizar los criterios de congruencia y lo aprendido sobre triángulos.

Posibles dificultades:
Al igual que en la clase anterior puede ser que no se logren hacer las justificaciones que permitan realizar la demostración, en ese caso se pueden poner a trabajar por parejas.

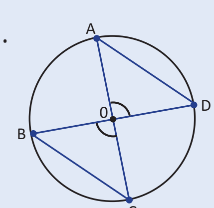
Solución de los ítems:

1.



Afirmación	Justificación
BO = DO	Por hipótesis.
AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

2.



Afirmación	Justificación
BO = DO	Por ser radios.
AO = CO	Por ser radios.
∢AOD = ∢COB	Por ser opuestos por el vértice.
ΔAOD ≅ ΔCOB	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AD = CB.

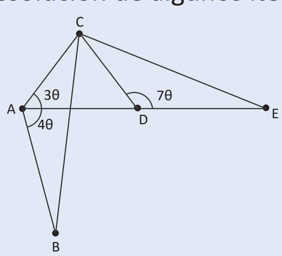
Secuencia:
En las dos clases anteriores, se han utilizado los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos dados son congruentes, esto considerando la posición en una figura dada; ahora se utilizarán para resolver situaciones cotidianas.

Propósito:
①, ② Utilizar la congruencia de triángulos para determinar la longitud de uno de los lados de un triángulo que corresponde a la distancia entre dos ciudades.

③ Fijar lo aprendido sobre ángulos y congruencia de triángulos.

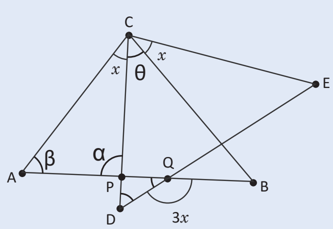
Resolución de algunos ítems:

1.



BC = EC; CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
ΔABC ≅ ΔCDE por criterio LLL.
Calculando el valor θ
$10\theta = 180°$
$\theta = 18°$

2.



a)
AC = DC y BC = EC, por hipótesis.
∢ACB = ∢DCE = $x + \theta$
ΔABC ≅ ΔCDE por criterio LAL.

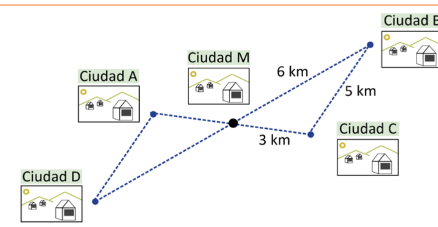
b)
En el ΔPQD, ∢D = ∢A = β, por definición de congruencia,
∢DPB = ∢APC = α, por ser opuestos por el vértice.
Además, ∢Q = 180° − $3x$; entonces:

$$\beta + \alpha + (180° - 3x) = 180°$$
$$\beta + 180° - (\beta + x) + (180° - 3x) = 180°$$
$$2 \times 180° - 4x = 180°$$
$$-4x = -180°$$
$$x = 45°$$

Indicador de logro. Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

① **P** El mapa siguiente muestra 5 ciudades. La ciudad M debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: la ciudad A y la ciudad C; y las otras dos son las ciudades B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?



② **S** Al comparar las distancias entre cada una de las ciudades se observa que se forman dos triángulos, cuyos elementos se relacionan de la siguiente manera:

AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

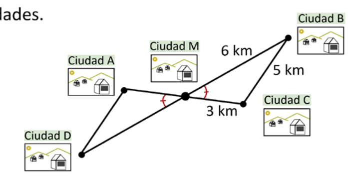
MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.

ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.

DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.



③ Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. En la figura 1, BC = EC, CA = CD y AB = DE.
   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de θ.

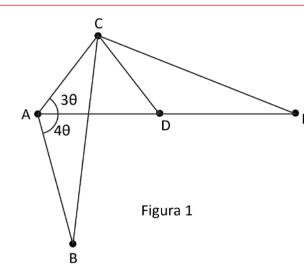


Figura 1

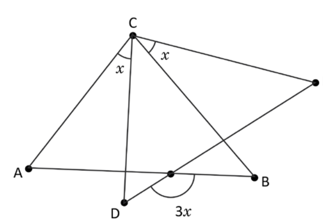


Figura 2

2. En la figura 2, AC = DC, BC = EC.
   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de x.

Unidad 5

113

Tarea: página 115 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U5 1.8**

Ⓟ En el mapa mostrado en el LT, la ciudad M se ubica a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: ciudad A y C; y ciudad B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?

Ⓢ AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.
ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.
DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.
Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Ⓡ 1. BC = EC, CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
ΔABC ≅ ΔCDA por criterio LLL
$10\theta = 180°$
$\theta = 18°$

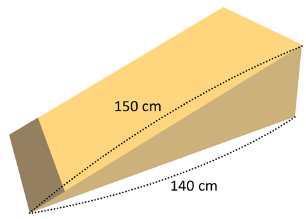
Indicador de logro. Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

① **P**

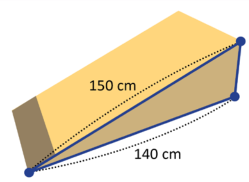
Carlos participará en una competencia de patinaje que se realizará los próximos días y ya tiene lista su rampa para practicar; su primo José, se ha motivado y quiere construir una rampa similar a la de Carlos, pues también quiere participar en la competencia. Carlos le envía una fotografía con la información que se muestra en la figura y le comenta que la medida del ángulo entre los dos lados proporcionados es 13°.

¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?



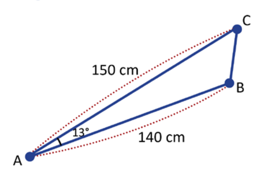
② **S**

1. Recordar las condiciones del problema:
   - Identificar los lados conocidos que se indican en la figura.
   - Indicar el ángulo entre los lados conocidos; es decir, 13°.
   - Observar que en el costado se forma un triángulo.



2. Aplicar un criterio de congruencia de triángulos.
   Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

3. Extraer los datos y construir la rampa.
   - Medir y cortar las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.
   - Colocar las piezas cortadas la primera como base y la segunda de tal manera que en la intersección de ambas formen un ángulo de 13°.



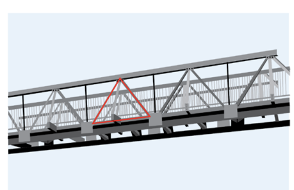
③

Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. Se necesita reemplazar unas piezas en la pasarela cuyo diseño se muestra en la figura. Antonio está a cargo de construir las piezas a reemplazar; para ello necesita elaborar una réplica, tomando como referencia las piezas que están colocadas.

   a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar Antonio como mínimo para replicar exactamente las piezas que se indican en la figura?

   b) ¿Las medidas indicadas en el numeral anterior son una manera única de replicar las piezas? Justifica tu respuesta.



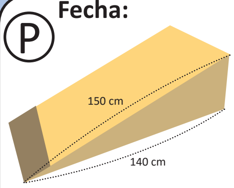
2. Observa la imagen y responde. ¿Por qué la banca con el apoyo diagonal es más estable que la otra? Justifica tu respuesta.

114

Tarea: página 116 del Cuaderno de Ejercicios.

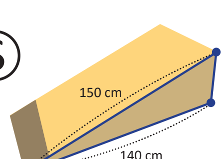
Fecha: **U5 1.9**

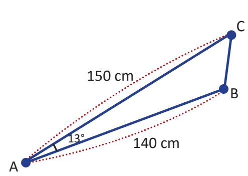
Ⓟ



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

Ⓢ





Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

Extraer los datos y construir la rampa, midiendo y cortando las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.

Ⓡ

a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
   - Un segmento y dos ángulos.
   - Dos ángulos y un segmento.
   Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

Secuencia:
En la clase anterior, se resolvieron situaciones utilizando la congruencia de triángulos y la relación entre los ángulos; para esta clase se utilizará nuevamente la congruencia de triángulos para resolver situaciones del entorno.

Propósito:
①, ② Resolver la situación planteada en el Problema inicial, esta información puede usarse para crear la rampa y servir como una actividad integradora.

③ Resolver situaciones en distintos contextos aplicando la congruencia de triángulos.

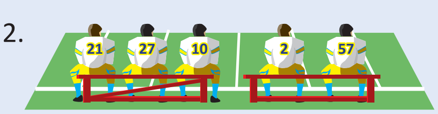
Posibles dificultades:
Si los estudiantes no pueden resolver las situaciones de manera individual, se pueden organizar por parejas.

Solución de algunos ejercicios:

1.

a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
- Un segmento y dos ángulos.
- Dos ángulos y un segmento entre ellos.
  Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

2.



Porque si se definen los tres lados, el triángulo es una figura que no se deforma y eso hace que soporte mayor peso. Por esa razón en la mayoría de estructuras se utilizan figuras triangulares.

Descripción:
La prueba de esta unidad está formada por 5 numerales, el primero tiene dos literales, pero será considerado como un solo numeral; por tanto la prueba será considerada con 5 ítems.

Criterios para asignar puntos parciales:
Para cada uno de los ítems que se presentan a continuación, la respuesta se considera parcialmente correcta si se cumple uno de los criterios que se establecen a continuación:

Ítem 1:
Si determina únicamente el valor de θ.

Ítem 2:
En este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.

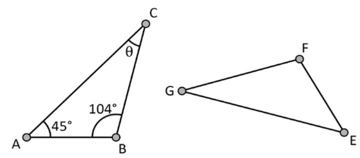
Prueba de la Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos **Matemática 8º**

Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

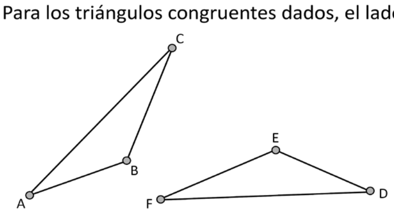
1. Dado que los siguientes triángulos son congruentes:

   a) Encuentra el valor del ángulo θ.
   b) Determina el valor del ángulo E.



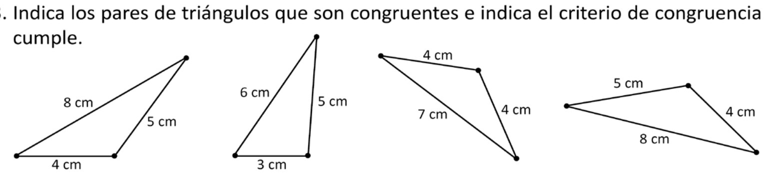
Respuesta:
θ =
∢E =

2. Para los triángulos congruentes dados, el lado correspondiente a BC es:



Respuesta:

3. Indica los pares de triángulos que son congruentes e indica el criterio de congruencia que se cumple.

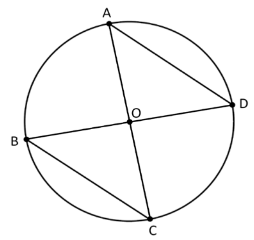


Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4

Respuesta:

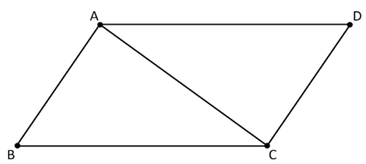
1

4. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersecan en el centro O del círculo. Demuestra que: AD = CB.



Respuesta:

5. Dado que el cuadrilátero ABCD es paralelogramo y AC es diagonal, demuestra que: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.



Respuesta:

2

Ítem 3:
Si identifica los triángulos congruentes; pero no indica el criterio de congruencia que cumplen.

Ítem 4:
Solamente relaciona los elementos que son iguales y los justifica; pero sin llegar a establecer la relación de congruencia ni la igualdad solicitada.

Ítem 5:
En este caso no se considerarán respuestas parcialmente correctas; únicamente correctas, incorrectas o sin respuesta.