Unidad 6. Características de los triángulos y cuadriláteros

Competencia de la Unidad

Identifica figuras planas utilizando criterios de congruencias para obtener características de triángulos y cuadriláteros.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total de prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Triángulos	1	1. Triángulos isósceles
	1	2. Teorema del triángulo isósceles
	1	3. Bisectriz de un triángulo isósceles
	1	4. Triángulos equiláteros
	1	5. Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros
	1	6. Recíproco y contraejemplo de un teorema
	1	7. Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	8. Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	9. Condiciones necesarias y suficientes
	1	10. Uso de las condiciones necesarias y suficientes
	1	11. Características de las bisectrices de un triángulo
	2	12. Practica lo aprendido
2. Paralelogramos	1	1. El paralelogramo
	1	2. Características de los paralelogramos
	1	3. Diagonales de un paralelogramo
	1	4. Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	5. Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	6. Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo
	1	7. Características del rectángulo y el rombo
	1	8. Aplicación de las caraterísticas de las diagonales de un rectángulo
	1	9. Recíproco de características de rectángulos

	1	10. Relación entre líneas paralelas y áreas
	1	11. Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas
	2	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6
	1	Prueba del segundo trimestre

26 horas clase + prueba de la Unidad 6 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Triángulos

A partir del proceso de triangulación de un polígono aprendido en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

Lección 2: Paralelogramos

Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado, se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios; luego se analiza la relación entre los ángulos entre paralelas que es utilizada para demostrar uno de los más importantes teoremas matemáticos y para resolver situaciones del entorno.

1.1 Triángulos isósceles

Materiales:
- Un rectángulo de papel bond
- Tijera

Secuencia:
En segundo ciclo de Educación Básica, se estudió la clasificación de los triángulos considerando la relación entre la medida de los lados y sus ángulos; en esta clase se identifican los elementos de un triángulo isósceles y su caracterización. También se analiza el proceso de construcción de un triángulo isósceles a partir de un rectángulo de papel.

Propósito:
①, ② Caracterizar los triángulos para recordar lo aprendido en Educación Básica y así introducir los nombres de cada uno de los elementos de un triángulo isósceles que es un caso particular de triángulos.

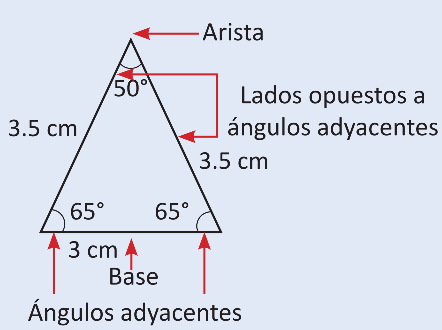
③ Sistematizar los elementos y caracterización de un triángulo isósceles, introduciendo así el lenguaje matemático.

④ Construir un triángulo isósceles para verificar sus características mediante el uso de dobleces.

⑤ Fijar el contenido desarrollado en la clase, así como el de los conocimientos previos sobre clasificación de triángulos.

Solución de algunos ejercicios:

b) Es un **triángulo isósceles,** porque tiene 2 lados de igual longitud.



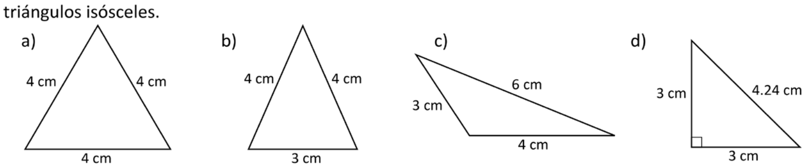
c) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es obtusángulo.

d) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es rectángulo.

Indicador de logro: Caracteriza los triángulos isósceles.

1.1 Triángulos isósceles

① **P** Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.

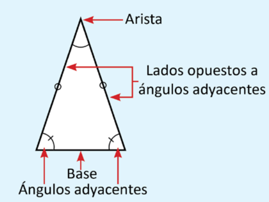


② **S**
a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

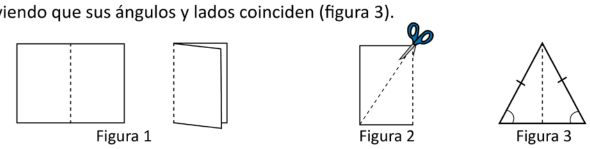
Observa que también cada triángulo se puede clasificar por sus ángulos:
a) Es acutángulo (3 ángulos agudos).
b) También es acutángulo.
c) Es obtusángulo (un ángulo es obtuso).
d) Es rectángulo (un ángulo recto).

③ **C** La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.

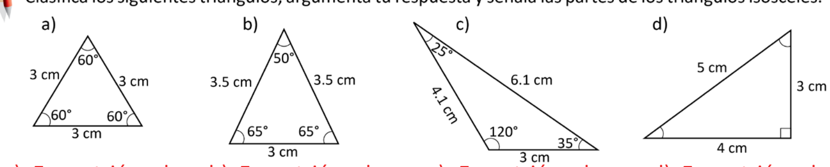
Las partes de un triángulo isósceles son:
Arista: Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
Base: Es el lado opuesto a la arista.
Ángulos adyacentes: Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
Lados opuestos a ángulos adyacentes: Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.



④ **E** Verifica la construcción de un triángulo isósceles utilizando papel y comprueba que dos de sus lados y ángulos son iguales. Realiza los siguientes pasos:
1. Toma una hoja de papel y dóblala formando un rectángulo tal como se muestra en la figura 1.
2. Señala la diagonal de ese rectángulo y corta con la tijera exactamente en la diagonal (figura 2).
3. El triángulo que queda en medio, divídelo por la mitad tomando punta a punta y comprueba que es isósceles viendo que sus ángulos y lados coinciden (figura 3).



⑤ Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.



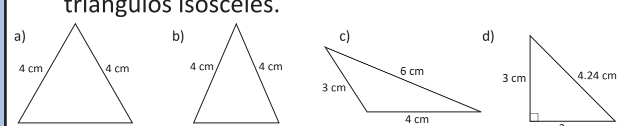
116

a) Es un triángulo equilátero.
b) Es un triángulo isósceles.
c) Es un triángulo escaleno.
d) Es un triángulo escaleno.

Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

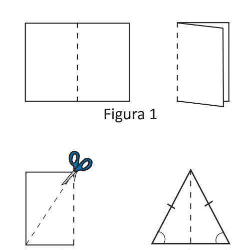
Fecha: **U6 1.1**

(P) Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



(S)
a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

(E) Construcción de un triángulo isósceles:

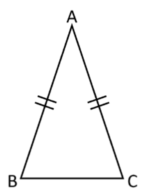


(R) a) Es un triángulo equilátero, porque tiene los 3 lados de igual longitud.

Indicador de logro: Demuestra el teorema del triángulo isósceles: "A lados iguales corresponden ángulos iguales", utilizando la congruencia de triángulos.

1.2 Teorema del triángulo isósceles

① **P** Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



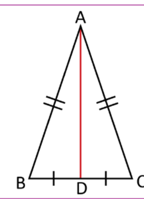
Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se tiene la demostración de un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros, que establece que "En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes" (un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes y el tercer lado se le llama base). Pinasco, J. (2009). *Las Geometrías*.

② **S** Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

DB = DC (por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

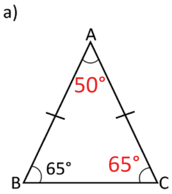
Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB (por la congruencia de los triángulos).



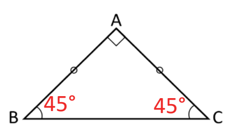
C En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

③ 1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema demostrado.

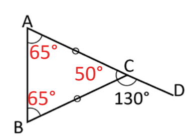
a)



b)



c)



Unidad 6

2. En la siguiente figura considera que BD = CD = AD. Justifica las igualdades planteadas en cada literal dejando constancia de lo realizado.

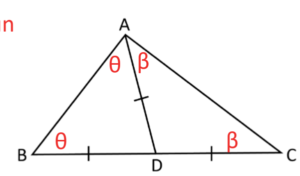
a) ∢DAB = ∢DBA Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

b) ∢DAC = ∢DCA De la misma manera del a).

c) ∢DBA + ∢ACB = 90° c) Como 2∢θ + 2∢β = 180°, entonces ∢θ + ∢β = 90°.

d) ∢CAB = 90°

Como ∢A + ∢B + ∢C = 180° y ∢B + ∢C = 90°, entonces ∢A = 90°.

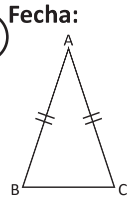


117

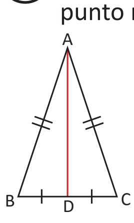
Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.2**

(P) Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



(S) Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

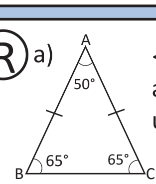


DB = DC. (Por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD. (Por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB. (Por la congruencia de los triángulos).

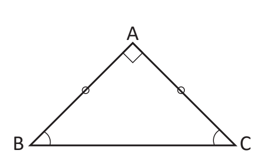
(R) a)



∢C = ∢B = 65°, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

Como ∢A + ∢B + ∢C = 180°, entonces ∢A = 50°.

b)



∢A + ∢B + ∢C = 180, ∢A = 90° y ∢B = ∢C

∢B = ∢C = 45°, por ser ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles.

Secuencia:
En la clase anterior se identificaron los elementos de un triángulo isósceles caracterizando cada uno de ellos; en esta clase, se hará la demostración de uno de los teoremas clásicos, para ello es importante recordar lo aprendido sobre demostraciones y congruencia de triángulos.

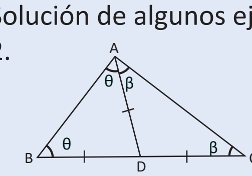
Propósito:
①, ② Demostrar el teorema y recordar el proceso de demostración haciendo énfasis en las afirmaciones matemáticas utilizadas que corresponden a conocimientos previos adquiridos en unidades anteriores.

③ En el numeral 1, utilizar el teorema demostrado para determinar la medida de los ángulos restantes; además se utilizará el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y ángulos suplementarios.

En el numeral dos, justificar las afirmaciones planteadas, siempre utilizando lo aprendido sobre ángulos y triángulos.

Posibles dificultades:
Justificar las afirmaciones que se indican en el numeral 2 de la fijación, en ese caso se puede indicar que trabajen por parejas; y si en algún caso extremo nadie puede resolverlo, se pueden dar pistas para orientarles.

Solución de algunos ejercicios:
2.



a) ∢DAB = ∢DBA, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles.
b) ∢DAC = ∢DCA, de la misma manera del a).
c) ∢DBA + ∢ACB = 90°.
Como 2∢θ + 2∢β = 180°, entonces ∢θ + ∢β = 90°.
d) ∢CAB = 90°.
Como ∢A + ∢B + ∢C = 180° y ∢B + ∢C = 90°, entonces ∢A = 90°.

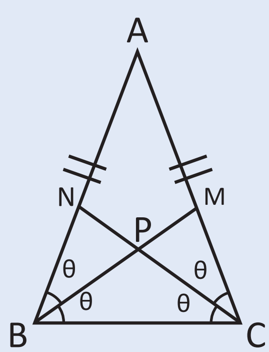
Secuencia:
En la clase anterior se demostró el teorema que relaciona los ángulos de la base de un triángulo isósceles; en esta clase se demostrará el teorema que relaciona la mediatriz de la base de un triángulo isósceles con la bisectriz del ángulo opuesto a la base.

Propósito:
①, ② Demostrar el teorema y recordar el concepto de bisectriz y mediatriz, además de hacer conciencia de la importancia de los teoremas en la contrucción del conocimiento matemático.

③ Utilizar los criterios de congruencia y relación entre ángulos internos para demostrar propiedades de las bisetrices de un triángulo isósceles.

Posibles dificultades:
Puede que a los estudiantes se les dificulte estructurar la demostración, por lo que se pueden dar pistas para que se orienten y así poco a poco ir desarrollando la habilidad para realizar demostraciones matemáticas.

Solución del ejercicio:



Como AB = AC, entonces ∢B = ∢C, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

$\theta = \frac{1}{2}$ ∢B $= \frac{1}{2}$ ∢C

ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.

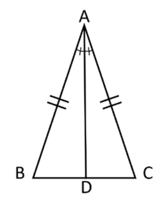
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces también por ALA ΔBPN ≅ ΔCPM.

Por tanto, BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Indicador de logro: Deduce y utiliza la característica que posee la bisectriz de un triángulo isósceles.

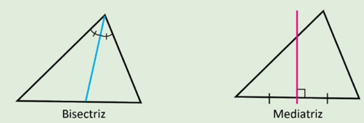
1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

① **P** Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.



La bisectriz de un triángulo: es el segmento que divide a cualquiera de sus tres ángulos en dos partes iguales y termina en el correspondiente lado opuesto.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento y que lo divide a la mitad.



② **S** En la figura ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

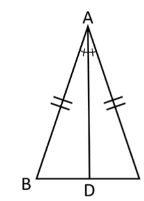
Entonces DB = DC (por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC (por la congruencia de triángulos) . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° (por ser ángulos suplementarios) . . . (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por (1) y (2)).

Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥BC.

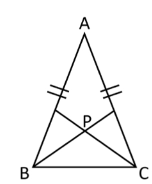


Por lo tanto, AD es mediatriz de BC (DB = DC y AD ⊥ BC).

C En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud, también es altura y mediana del triángulo isósceles.

③ Demuestra que si el ΔABC es isósceles y si se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes, siendo P el punto de intersección entre las dos bisectrices, entonces el ΔPBC es isósceles.



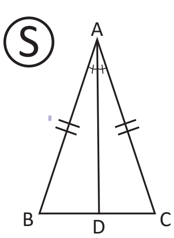
118

Tarea: página 122 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.3**

Ⓟ Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.

Ⓢ



En la figura ΔABD ≅ ΔACD. (Por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

Entonces DB = DC. (Por la congruencia de triángulos).

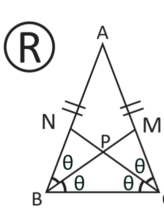
∢ADB = ∢ADC. (Por la congruencia de triángulos) ... (1)

∢ADB + ∢ADC = 180°. (Por ser ángulos suplementarios) ... (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por [1] y [2])

Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥ BC.

Ⓡ



Como AB = AC, entonces ∢B = ∢C

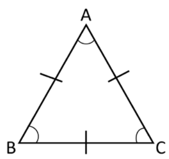
ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces ΔBPN ≅ ΔCPM, por criterio ALA.

Por tanto BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Indicador de logro: Demuestra el teorema “un triángulo equilátero es equiángulo”.

1.4 Triángulos equiláteros

① **P** Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.



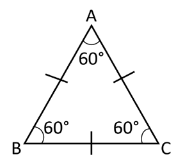
Un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados tienen igual longitud.

② **S**

∢ABC = ∢BCA (ya que AB = AC) . . . (1)

∢BCA = ∢CAB (ya que BC = BA) . . . (2)

Por lo tanto, ∢ABC = ∢BCA = ∢CAB (por (1) y (2)).



Sea x la medida del ángulo:

$3x$ = 180° (por la suma de los ángulos internos de un triángulo).

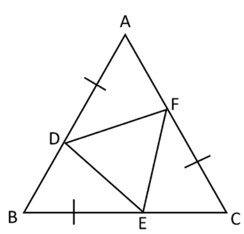
A un triángulo que posee sus tres ángulos de igual medida se le puede llamar **equiangular**.

Entonces, x = 60° (resolviendo la ecuación).

Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60°.

C En un triángulo equilátero cada uno de los ángulos internos mide 60°.

③ Sea el ΔABC equilátero, y además BE = CF = AD. Demuestra que el ΔDEF es equilátero.



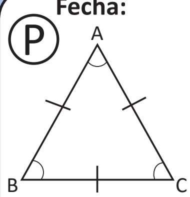
Unidad 6

119

Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

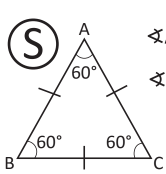
Fecha: **U6 1.4**

(P)



Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.

(S)



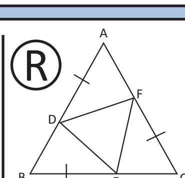
∢ABC = ∢BCA (ya que AB = AC) ... (1)

∢BCA = ∢CAB (ya que BC = BA) ... (2)

Por tanto, ∢ABC = ∢BCA = ∢CAB (Por [1] y [2]).

Sea x la medida del ángulo:
$3x$ = 180°.
Entonces, x = 60°.

(R)



Como el ΔABC es equilátero, entonces AB = BC = CA.

AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene:

DB = EC = FA, ya que BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.

De donde se tiene DE = EF = FD.

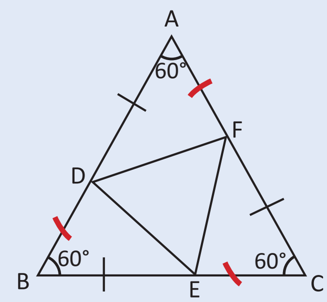
Por tanto, ΔDEF es equilátero.

Secuencia:
En las dos clases anteriores se han caracterizado los triángulos isósceles, en esta clase se demuestra que cada uno de los ángulos internos del triángulo equilátero mide 60°.

Propósito:
①, ② Determinar la medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero.

③ Utilizar lo aprendido sobre triángulos equiláteros para demostrar la relación entre los elementos de la figura.

Solución del ejercicio:



Como ΔABC es equilátero, entonces:
AB = BC = CA.

Pero AB = BC = CA, es igual a
AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene DB = EC = FA, ya que
BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.
De donde se tiene DE = EF = FD.
Por tanto, ΔDEF es equilátero.

Secuencia:
En la clase 1.2 se demostró el teorema sobre triángulos isósceles que establece que si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos que se oponen a ellos también son iguales; en esta clase se demostrará un teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros que relaciona los ángulos con los lados.

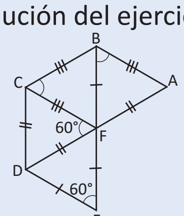
Propósito:
①, ② Utilizar lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos, para demostrar el teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros, es importante hacer énfasis en el uso de trazos auxiliares como un recurso en el proceso de demostración.

③ Utilizar el resultado obtenido, para demostrar que si un triángulo tiene los tres ángulos iguales, también todos sus lados son iguales, concluyendo que el triángulo es equilátero.

④ Utilizar los conocimientos adquiridos, para demostrar que los triángulos de la figura son equiláteros.

Posibles dificultades:
En el caso de que los estudiantes no logren estructurar la demostración, se pueden organizar en parejas y si aún así no lo logran, se les puede dar pistas que orienten el proceso de demostración.

Solución del ejercicio:



Continuación

Para los otros dos triángulos se tiene:

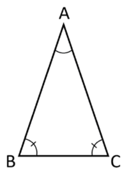
Como $\measuredangle EFD + \measuredangle DFC + \measuredangle CFB = 180°$, entonces $\measuredangle CFB = 60°$ y por hipótesis $CF = CB$, entonces $\measuredangle CFB = \measuredangle FBC = 60°$. Por tanto el ΔCFB es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(3)

$AB = FC$, $AF = FD$, ambos son lados de ΔDFC, que es equilátero.
$\measuredangle AFB = \measuredangle EFD = 60°$, por ser opuestos por el vértice.
$\measuredangle FBA = \measuredangle AFB = 60°$, entonces $\measuredangle BAF = 60°$ y por tener los 3 ángulos iguales, ΔFAB también es equilátero...(4)

Indicador de logro: Demuestra teoremas que relacionan los lados y ángulos iguales de triángulos isósceles o equiláteros, con los respectivos lados opuestos.

1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

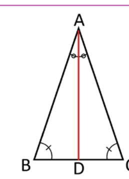
① **P** Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



Este resultado se suele enunciar como "a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud".

② **S** Trazando la bisectriz de $\measuredangle CAB$, se tiene que

$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (por hipótesis) . . . (1)
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$ (por construcción de la bisectriz) . . . (2)
$\measuredangle BDA = 180° - (\measuredangle DBA + \measuredangle DAB)$ (teorema de ángulos internos de triángulos).
$= 180° - (\measuredangle DCA + \measuredangle DAC)$ (por 1 y 2).
$= \measuredangle CDA$



Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (por criterio ALA, AD es común, $\measuredangle BDA = \measuredangle CDA$ y $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$).

Por lo tanto, $AB = AC$ (por la congruencia).

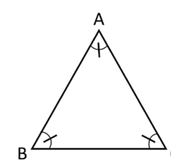
C En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

③ **E** Demuestra que si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces es un triángulo equilátero.

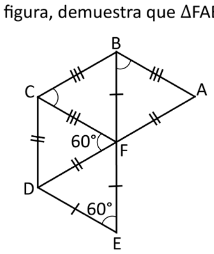
$AB = AC$ (por $\measuredangle BCA = \measuredangle ABC$, aplicando el resultado demostrado). . . (1)

$CA = BC$ (por $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB$, aplicando el resultado demostrado). . . (2)

Por lo tanto, $AB = BC = CA$, y el triángulo es equilátero (por (1) y (2)).



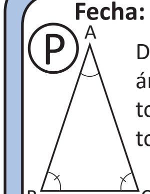
④ Utilizando los datos en la siguiente figura, demuestra que ΔFAB, ΔFBC, ΔFCD y ΔFDE son equiláteros.



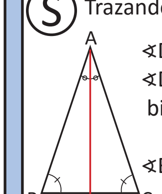
Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.5**

P Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



S Trazando la bisectriz de $\measuredangle CAB$, se tiene que:

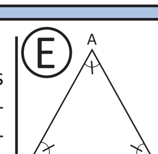


$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (por hipótesis) . . . (1)
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$ (por construcción de la bisectriz) . . . (2)

$\measuredangle BDA = 180° - (\measuredangle DBA + \measuredangle DAB)$
$= 180° - (\measuredangle DCA + \measuredangle DAC)$
$= \measuredangle CDA$

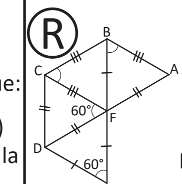
Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$. Por lo tanto, $AB = AC$.

E



$AB = AC$ (por $\measuredangle BCA = \measuredangle ABC$)
$CA = BC$ (por $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB$)
Por lo tanto, $AB = BC = CA$, y el triángulo es equilátero.

R



$ED = EF$, entonces $\measuredangle EDF = \measuredangle EFD = 60°$.
Por tanto ΔFDE es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(1)
$DC = DF$, entonces $\measuredangle DFC = \measuredangle FCD = 60°$, por teorema de ángulos internos $\measuredangle CDF = 60°$ y por tener los 3 ángulos iguales ΔFCD es equilátero...(2)

Observación: De igual manera demostrar para los otros dos triángulos restantes.

Indicador de logro: Identifica el recíproco o contraejemplo de un teorema.

1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

① **P** Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

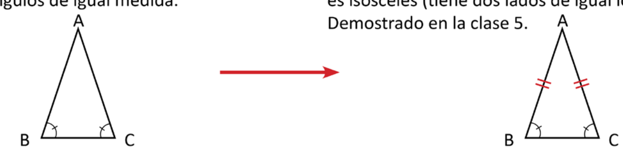
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

② **S** Analizando el primer teorema: "Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida".

Condición cierta (hipótesis): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

Analizando el segundo teorema: "Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles".

Condición cierta (hipótesis): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). Demostrado en la clase 5.



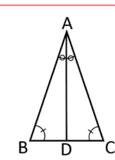
El primer teorema es diferente del segundo, pues la condición que se cumple en el primero es la que hay que demostrar en el segundo, y la condición que se cumple en el segundo es la que hay que demostrar en el primero.

C El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**. El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

③ **E** Escribe el recíproco del siguiente enunciado, en el caso de no ser cierto, dar un contraejemplo que lo justifique: "Todo triángulo equilátero es isósceles".
Recíproco: "Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo: El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

④

1. Determina el recíproco: "Si los 3 ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.
2. Determina el recíproco: "En el triángulo ABC, si AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB, entonces AD es mediatriz de BC". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.



Unidad 6

121

Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.6**

(P) Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

(S) Analizando el primero:

Condición cierta
El triángulo es isósceles.

Condición a demostrar
El triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
Demostrado en la clase 2.

Analizando el segundo teorema:

Condición cierta
El triángulo tiene dos ángulos de igual medida.

Condición a demostrar
El triángulo es isósceles
Demostrado en la clase 5.

(E) Escribe el recíproco o el contraejemplo que lo justifique:
"Todo triángulo equilátero es isósceles".
Recíproco:
"Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

(R) 1. Escribe el recíproco o el contraejemplo que lo justifique.
Recíproco:
"Si un triángulo es isósceles, tiene sus tres ángulos iguales". No se cumple.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 3 cm, 3 cm y 4 cm, es isósceles pero no tiene los 3 ángulos iguales.

Secuencia:
En las clases 1.2 y 1.5, se han demostrado teoremas sobre triángulos isósceles; en esta clase se analizarán dichos teoremas para introducir los conceptos de **recíproco y contraejemplo**. Es importante hacer énfasis en las condiciones que tiene cada teorema, para que vayan familiarizándose con ellas y facilite próximas demostraciones.

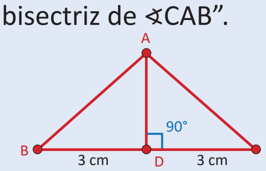
Propósito:
①, ② Comparar dos teoremas demostrados analizando la hipótesis y la conclusión para definir a partir del análisis, el recíproco y el contraejemplo de un teorema.

③ Ilustrar un caso de teorema en el cual el recíproco no se cumple, en estos casos se pueden presentar contraejemplos para justificar su falsedad.

④ Practicar el proceso para identificar el recíproco y/o contraejemplo de un teorema. Es importante hacer énfasis en que los teoremas deben ser demostrados para ser aceptados como ciertos.

Posibles dificultades:
Escribir el recíproco o contraejemplo, en ese caso se puede organizar el trabajo en parejas y como pista sugerir que identifiquen la hipótesis y la conclusión.

Solución de algunos ejercicios:
2.
Recíproco: "En el triángulo ABC, si AD es mediatriz de BC, entonces AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB".



Trazando la mediatriz de BC, se tiene que:
BD = DC (por construcción).
∢BDA = ∢CDA = 90° (por construcción de la mediatriz).
Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AD es común).
Luego, por definición de congruencia, AB = AC y ∢BAD = ∢CAD.
Por tanto, AD es la bisectriz del ángulo ∢BAC.

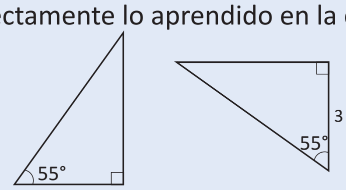
Secuencia:
En la Unidad 5 se trabajaron los criterios de congruencia de triángulos, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos rectángulos, introduciéndolos a partir de los conocimientos previos.

Es importante considerar que a pesar de que en la clase se trabaja el criterio de congruencia cuando la hipotenusa y un ángulo agudo son iguales, también se presentan ejercicios donde un cateto y un ángulo agudo son iguales, estos pueden resolverse con los conocimientos previos.

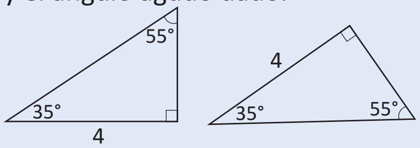
Propósito:
①, ② Demostrar el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos, utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos.

③ En uno de los casos identificar triángulos congruentes en un conjunto dado, en los otros casos será necesario utilizar lo aprendido en la Unidad 5. Luego de resolver los ejercicios hacer énfasis en el caso de que un cateto y un ángulo agudo son iguales; pues en esos casos también los triángulos son congruentes.

Resolución de algunos ítems.
Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual. Esto utilizando directamente lo aprendido en la clase.



Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales. En este caso se considera el ángulo recto y el ángulo agudo dado.

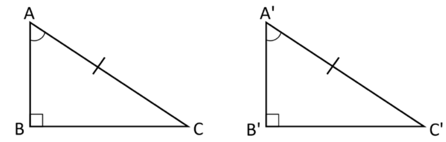


Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

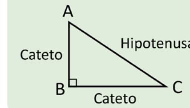
Indicador de logro: Identifica la relación que debe existir entre los lados y ángulos de dos triángulos rectángulos.

1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

① **P** Demuestra que si en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que ∢CAB = ∢C'A'B', ∢ABC = ∢A'B'C' = 90° y AC = A'C'; entonces, ΔABC ≅ ΔA'B'C'.



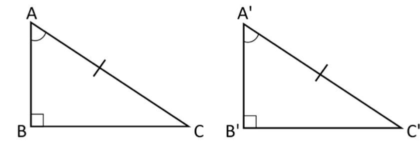
Recuerda que los lados de un triángulo rectángulo tienen los siguientes nombres:



② **S** Los triángulos tienen los tres ángulos de igual medida porque son rectángulos.

Además, ∢CAB = ∢ C'A'B'.

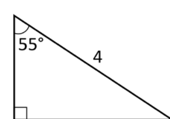
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA'B'C' (por criterio ALA).



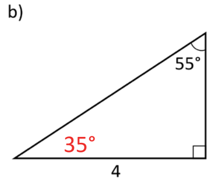
C Si en un triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

③ En los siguientes triángulos rectángulos, identifica los congruentes entre sí. Justifica tu respuesta.

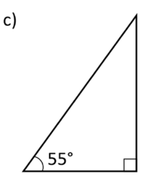
a)



b)



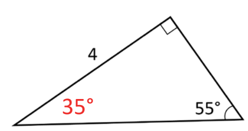
c)



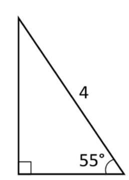
Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA.

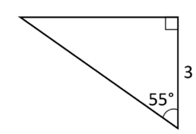
d)



e)



f)



Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

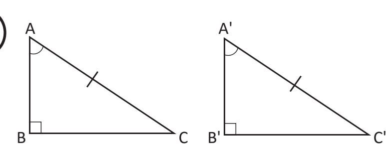
122

Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.7**

Ⓟ Demuestra que si en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que: ∢CAB = ∢C'A'B', ∢ABC = ∢A'B'C' = 90° y AC = A'C'; entonces, ΔABC ≅ ΔA'B'C'.

Ⓢ



Como ∢CAB = ∢C'A'B' y los triángulos son rectángulos, entonces tienen los 3 ángulos iguales.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA'B'C' (por criterio ALA, porque AC = A'C').

Ⓡ Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

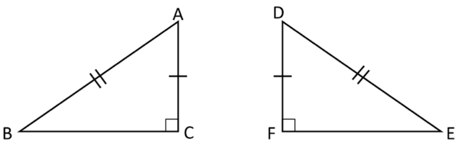
Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales.

Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Indicador de logro: Identifica la relación que debe existir entre los lados de dos triángulos rectángulos para que sean congruentes.

1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

① **P** Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



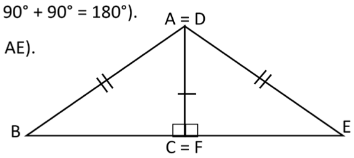
② **S** Haciendo coincidir los lados AC y DF.

Los puntos B, C, E están alineados (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°).

Entonces, ΔABE es isósceles (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

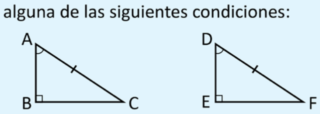
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).



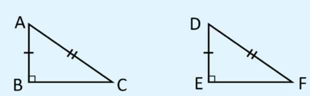
C **Criterios de congruencia de triángulos rectángulos**

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.



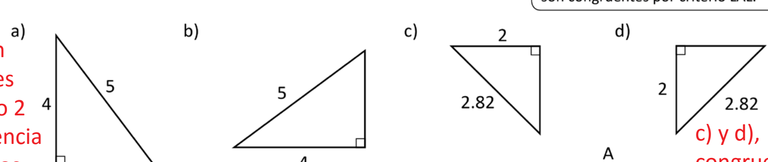
2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.



③ 1. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

Observa que si dos catetos tienen igual medida también los triángulos son congruentes por criterio LAL.

a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.

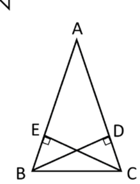


c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que

a) ΔBCD ≅ ΔCBE

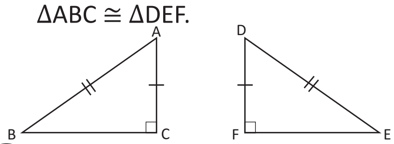
b) AE = AD



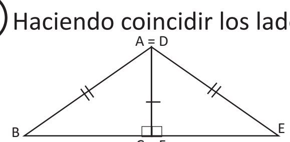
Tarea: página 127 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.8**

(P) Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



(S) Haciendo coincidir los lados AC y DF.



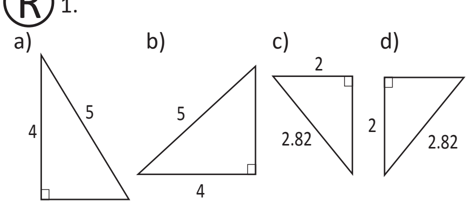
Los puntos B, C, E están alineados. (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°)

Entonces, ΔABE es isósceles. (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

(R) 1.



a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.

c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencias de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos que relaciona la hipotenusa y un ángulo agudo; para esta clase, se estudiará otro criterio de congruencia que relaciona la hipotenusa y un cateto.

Propósito:

①, ② Demostrar que dos triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa igual son congruentes, esto utilizando los criterios de congruencia estudiados en la Unidad 5.

③ En el numeral 1, utilizar los criterios de congruencia estudiados para determinar si dos o más triángulos dados son congruentes; mientras que en el numeral 2 utilizar los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos son congruentes.

Posibles dificultades:

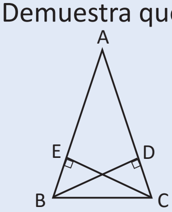
En el caso de que los estudiantes no puedan realizar la demostración, organizarlos por parejas, cuidando que siempre haya uno que tenga habilidades para que apoye al que tiene dificultades, y como pista se puede sugerir el uso de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Resolución de algunos ítems.

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que

a) ΔBCD ≅ ΔCBE

b) AE = AD



a) ∢CBA = ∢BCA (porque AB = AC).
Por tanto, ∢CBE = ∢BCD
BC = CB (es el mismo).
Entonces, ΔBCE ≅ ΔCBD, por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos, tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

b) AB = AE + EB y AC = AD + DC
Como AB = AC por hipótesis, entonces: AE + EB = AD + DC.
Pero, EB = DC, por congruencia de triángulos demostrada en literal a); por tanto, AE = AD.

Secuencia:
Anteriormente se ha trabajado con teoremas y proposiciones que establecen relaciones entre dos o más triángulos mediante los cuales se han generalizado características de los triángulos isósceles, equiláteros, entre otros. En esta clase se analizará la relación lógica entre las condiciones que forman una proposición.

Propósito:
①, ② Analizar la relación lógica entre dos proposiciones dadas. Para el caso, las condiciones son sobre triángulos isósceles y equiláteros, cuyas características han sido estudiadas en clases anteriores.

③ En cada uno de los literales, se debe utilizar lo aprendido en la clase para establecer la relación lógica entre las condiciones dadas.

Indicador de logro: Conoce el sentido de una condición necesaria y suficiente.

1.9 Condiciones necesarias y suficientes

① **P** Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero   B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

② **S**

a) Si un triángulo ABC cumple la condición A, también cumple B; pues los triángulos equiláteros tienen los 3 lados iguales y para ser isósceles únicamente necesita 2 lados iguales; por tanto si se cumple A también se cumple B.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero; porque la medida del tercer lado (base), puede ser igual o distinta a la medida de los otros 2 lados.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

C Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

③ Escribe N si A es necesaria para B y escribe S, si A es suficiente para B, para cada una de las situaciones siguientes:

a) Para un triángulo DEF: A: DEF es isósceles, B: DEF es equilátero.
N: A es necesaria para B.

b) Para un triángulo DEF: A: DEF es rectángulo, B: DEF es isósceles.
A no es necesaria ni suficiente para B.

c) Para un triángulo DEF: A: DEF tiene 3 ángulos iguales, B: DEF es isósceles.
S: A es suficiente para B.

d) Para un cuadrilátero DEFG: A: DEFG es cuadrado, B: DEFG es rectángulo.
S: A es suficiente para B.

124

Tarea: página 128 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.9**

Ⓟ Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:
A: ABC es un triángulo equilátero.
B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?
b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?
c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

Ⓢ a) Si ΔABC cumple la condición A, también cumple la B; pues los triángulos equiláteros también son isósceles.
b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero.
c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

Ⓡ Para un triángulo DEF:
a) A es necesaria para B.
b) A no es necesaria ni suficiente para B.
c) A es suficiente para B.
d) A es suficiente para B.

1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

Indicador de logro: Determina en enunciados si una condición es necesaria y suficiente.

1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

① **P** Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: ∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C'.

B: ΔABC ≅ ΔA'B'C'.

② **S** La condición A(∢ABC = ∢A'B'C'= 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria para B; pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, la condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria y suficiente para B(ΔABC ≅ ΔA'B'C').

C Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición "si A entonces B" y la recíproca "si B entonces A".

Para el ejemplo presentado, la proposición "si A entonces B", corresponde que para los dos triángulos rectángulos dados se cumple que ∢ABC = ∢A'B'C'=90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C', entonces los triángulos son congruentes; mientras que la recíproca "si B entonces A" corresponde a que si dos triángulos son congruentes, entonces tienen iguales sus lados y ángulos correspondientes.

Unidad 6

③ 1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

a) A: Isósceles — B: Tiene dos ángulos de igual medida
A es necesaria y suficiente para B.

b) A: Equilátero — B: Tiene tres ángulos de igual medida
A es necesaria y suficiente para B.

c) A: Isósceles — B: Equilátero
A es necesaria para B.

d) A: Rectángulo — B: Equilátero
A no es es necesaria ni suficiente para B.

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

En este numeral cada docente deberá analizar los enunciados dados por sus estudiantes y verificar si la condición A cumple con ser necesaria y suficiente para B.

125

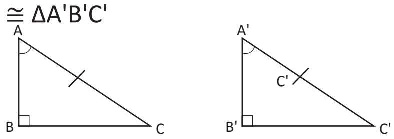
Tarea: página 129 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.10**

Ⓟ Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: ∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C'

B: ΔABC ≅ ΔA'B'C'



Ⓢ La condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria para B, pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria y suficiente para B(ΔABC ≅ ΔA'B'C').

Ⓡ Para un triángulo dado:

a) A es necesaria y suficiente para B.
b) A es necesaria y suficiente para B.
c) A es necesaria para B.
d) A no es es necesaria ni suficiente para B.

Secuencia:

En la clase anterior se analizó la relación entre dos condiciones dadas para determinar si A es necesaria o suficiente para B; en esta clase se analizará si una condición es necesaria y suficiente para otra. Este análisis se hará con una proposición para triángulos rectángulos ya demostrada.

Es importante considerar que en la condición B no se especifica que el triángulo debe ser rectángulo porque se ha dado la ilustración; pero es necesario hacer énfasis a los estudiantes para evitar que se genere confusión creyendo que se cumple para un triángulo cualquiera.

Propósito:

①, ② Analizar dos condiciones dadas para determinar si una es necesaria y suficiente para otra, con el objeto de definir una condición necesaria y suficiente.

③ En el numeral 1, analizar cada condición para determinar si la condición A es necesaria y suficiente para B; mientras que en el numeral 2, cada estudiante o pareja de estudiantes escribirá enunciados donde se ejemplifique una relación necesaria y suficiente.

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

Secuencia:
En la clase 2.11 de la Unidad 8 de séptimo grado, fue definido el incentro de un triángulo a partir del trazo de la bisectriz; en esta clase se analizarán las características de las bisectrices de un triángulo, pero a diferencia de séptimo grado, en esta clase se demostrará haciendo uso de la congruencia de triángulos.

Propósito:
①, ② Demostrar que los triángulos que se forman con la bisectriz son congruentes para concluir que las distancias del punto de intersección de las bisectrices a los lados del triángulo son iguales.

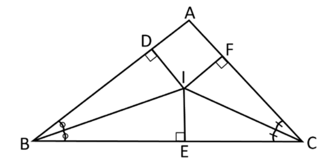
③ Ilustrar la propiedad del punto de intersección de las bisectrices mediante la geometría del papel.

Indicador de logro: Demuestra que la distancia del incentro a cualquiera de los lados de un triángulo son congruentes.

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

① **P** En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:

a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.



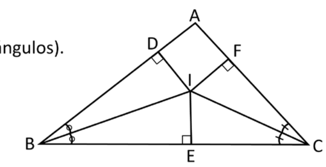
② **S** a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ID = IE (por la congruencia) . . . (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, IE = IF (por la congruencia) . . . (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por (1) y (2))

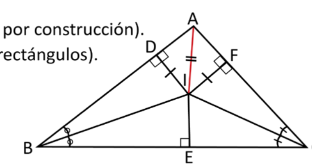


En b) para demostrar que ∢IAF = ∢IAD se necesita demostrar que ΔFIA ≅ ΔDIA.

b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido (por el literal **a** y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.



C El punto “I” donde se intersecan dos bisectrices de un triángulo se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto “I” perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto “I”; es decir, las 3 bisectrices se intersecan en el incentro.

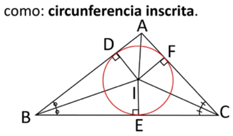
③ Comprueba utilizando un triángulo de papel que las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **incentro**.

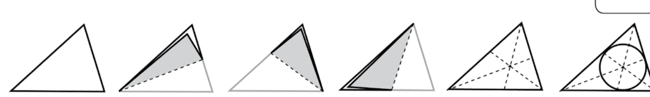
a) Dobla cada ángulo del triángulo por la mitad.

b) Marca el punto donde se intersecan las 3 bisectrices.

c) Dibuja la circunferencia inscrita.

Observa que si el incentro equidista de los tres lados, es posible trazar una circunferencia cuyo radio sea igual a la distancia del incentro a alguno de los lados. Dicha circunferencia se conoce como: **circunferencia inscrita**.



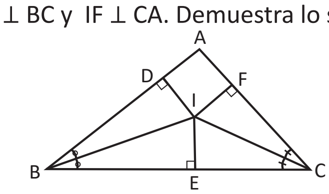


126 En este caso únicamente hay que orientar el trabajo para que puedan ilustrar con precisión la característica de las bisectrices, demostrada en clase.

Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.11**

Ⓟ En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:



a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.

Ⓢ a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ID = IE (por la congruencia) ... (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, IE = IF (por definición de congruencia) ... (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por [1] y [2])
b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido. (Por literal a y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.

Observación: Ver imagen en el LT.

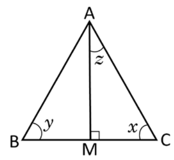
Indicador de logro: Resuelve problemas utilizando características de triángulos isósceles, equiláteros y rectángulos.

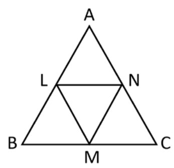
1.12 Practica lo aprendido

1. En el triángulo equilátero ABC, AM ⊥ BC, responde:

   a) ¿Cómo se llama el segmento AM? Altura.

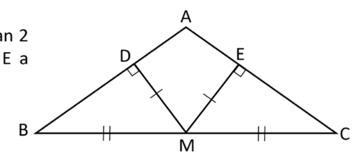
   b) Determina el valor de los ángulos x, y, z.





2. En la siguiente figura L, M, N son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuestra que el ΔLMN es equilátero.

3. En el ΔABC, desde el punto medio M del lado BC se trazan 2 segmentos perpendiculares a AB y AC, e intersecan en D y E a AB y AC respectivamente, Si MD = ME, demuestra:
   a) ΔBDM ≅ ΔCEM
   b) ΔADM ≅ ΔAEM
   c) El ΔABC es isósceles.
   d) Si se traza el segmento DE, entonces DE ∥ BC.

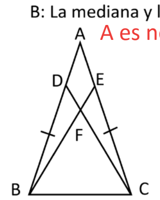


4. En los siguientes enunciados sobre triángulos determina si la condición A es necesaria y/o suficiente para B.
   a) A: Dos triángulos son congruentes.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.
      A es suficiente para B.
   b) En dos triángulos rectángulos:
      A: La hipotenusa y un ángulo agudo tienen igual medida. A es necesaria para B.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

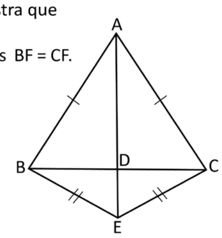
Nota: el segundo enunciado B no es válido.

1.13 Practica lo aprendido

1. En los siguientes enunciados acerca de triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.
   a) A: Equilátero; B: La mediana y la altura coinciden en cada vértice. A es necesaria y suficiente para B.
   b) A: La mediana y la bisectriz coinciden en cada vértice.
      B: La mediana y la mediatriz coinciden en cada vértice.
      A es necesaria y suficiente para B.



2. En un triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados de igual medida AB y AC. Si BD = CE. Demuestra que
   a) BE = CD
   b) Si F es el punto donde se cortan BE y CD entonces BF = CF.



3. En los triángulos isósceles ΔABC y ΔEBC, demuestra que AE ⊥ BC.
   Sugerencia: considera la mediatriz del segmento BC.

4. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

Unidad 6

127

Tarea: páginas 131 y 132 del Cuaderno de Ejercicios.

Resolución de algunos ítems de la clase 1.12.

1.

b) ∢x = ∢y = 60°, porque ΔABC es equilátero.
∢x + ∢z + 90° = 180°
60°+ ∢z + 90° = 180°; entonces:
∢z = 30°.
Considerando los resultados, se puede concluir que el segmento AM además de ser altura es bisectriz, mediana y mediatriz.

2. AB = AC = BC, porque el ΔABC es equilátero.
BM = CM y BL = CN (por definición de punto medio).
∢MBL = ∢MCN (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔMCN, por criterio LAL.
Por tanto ML = MN (definición de congruencia) ... (1)
AL = LB y AN = BM (por definición de punto medio).
∢NAL = ∢LBM (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔLAN, por criterio LAL.
Por tanto, ML = LN (definición de congruencia) ... (2)
ML = MN = LN, de (1) y (2), por tanto ΔLMN es equilátero.

Resolución de algunos ítems de la clase 1.13.

2.

a) BD = CE por hipótesis.
BC = CB por ser el mismo
∢CBA = ∢BCA (porque se oponen a lados iguales).
Entonces, ΔBCD ≅ ΔCBE, por criterio LAL.
BE = CD, por definición de congruencia.
b) BD = CE; ∢BDC = ∢BEC,
∢CBD = ∢BCE y ∢BCD = ∢CBE (por congruencia de triángulos BCD y CBE).
∢CBD = ∢CBE + ∢EBD y
∢BCE = ∢BCD + ∢DCE, como
∢CBD = ∢BCE, entonces
∢CBE + ∢EBD = ∢BCD + ∢DCE, pero
∢CBE = ∢BCD, por tanto,
∢EBD = ∢DCE, de donde se concluye que ΔBFD ≅ ΔCFE, por ALA.
Por tanto, BF = CF, por definición de congruencia de triángulos.

Clasificación de los ítems según el dominio cognitivo.
La prueba consta de 18 numerales, sin embargo, en total se consideran 20 ítems pues los numerales 11 y 15 tienen dos literales y cada literal será considerado como un ítem.

Los 20 ítems se clasifican de acuerdo a los dominios cognitivos, tal como se detalla a continuación:

Conocimiento (75 %). Del numeral 1 al numeral 14. Como el numeral 11 se considera equivalente a 2 ítems, el dominio cognitivo corresponde a 15 ítems en total.

Aplicación (15 %). Los ítems 15 y 16. Como el numeral 16 se considera equivalente a 2 ítems; entonces el dominio cognitivo corresponde a 3 ítems en total.

Razonamiento (10 %). Los ítems 17 y 18.

Notación:
U3 C1.13 Significa que el ítem corresponde a la clase 1.13 de la Unidad 3.

* Significa que si el estudiante responde por lo menos uno de estos y no proporciona la respuesta correcta, entonces se le da una puntuación parcial.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.

Ítem 1a – U3 C1.13
Ítem 2 – U3 C1.14
Ítem 3 – U3 C1.18
Ítem 4 – U3 C1.19
Ítem 5 – U3 C2.2

Solución de algunos ítems.

4. $a = \frac{-1-3}{5-1} = \frac{-4}{4} = -1$

$3 = -1(1) + b$
$3 = -1 + b$
$4 = b$
$y = -x + 4$

Prueba del segundo trimestre **Matemática de 8º grado**

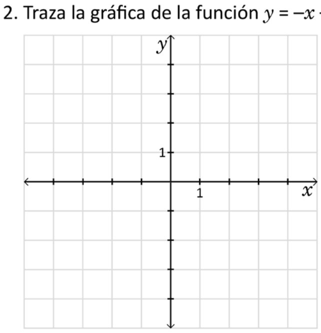
Fecha: ______________________
Nombre: ______________________ **Sección:**________
Edad: ______ años **NIE:**__________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar:______________________

Indicación: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos.

1. Encuentra la pendiente y las coordenadas del intercepto en el eje y de la gráfica de la función $y = 2x + 3$.

Pendiente	Intercepto

2. Traza la gráfica de la función $y = -x + 3$.



3. Encuentra la ecuación de la función cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (–1, 2).

Respuesta:

4. Encuentra la ecuación de la función cuya gráfica pasa por los puntos (1, 3) y (5, –1).

Respuesta:

5. Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y de la gráfica de la ecuación $4x + 2y + 1 = 0$.

Pendiente	Intercepto

1

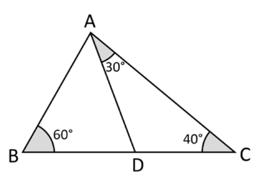
6. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de las siguientes gráficas:
$y = 3x + 5$ y $y = -x + 1$

Respuesta:

7. Encuentra la suma de los ángulos internos de un polígono que tiene 6 vértices.

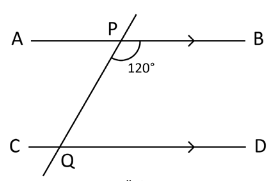
Respuesta: grados

8. Encuentra la medida del ∢BAD.



Respuesta: grados

9. Encuentra la medida del ángulo PQD.



AB ∥ CD

Respuesta:
∢PQD = grados

10. En los siguientes triángulos, encuentra la pareja de triángulos congruentes.

ΔABC: ∢A = 50°; ∢C = 70°, AB = 3

ΔDEF: ∢D = 50°; ∢F = 70°, EF = 3

ΔGHI: ∢G = 50°; ∢I = 70°, IG = 3

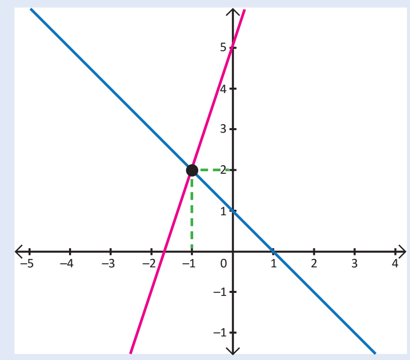
ΔJKL: ∢L = 50°; ∢J = 70°, KL = 3

Respuesta: y

2

Ítem 6 – U3 C2.6
Ítem 7 – U4 C1.1
Ítem 8 – U4 C2.5
Ítem 9 – U2 C2.3
Ítem 10 – U5 C1.4

Solución de algunos ítems.
6. Graficando las dos ecuaciones en un solo plano, se tiene:

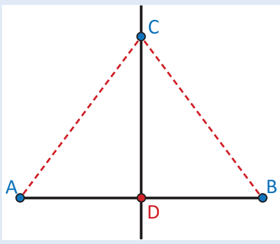


Al identificar las coordenadas del punto de intersección de las gráficas, se tiene $x = -1$ y $y = 2$. De igual manera se puede verificar utilizando cualquier método conocido.

Ítem 11a – U5 C1.5
Ítem 11b – U5 C1.3
Ítem 12 – U5 C1.3 a U5 C1.5
Ítem 13 – U5 C1.4 y U6 C1.2
Ítem 14 – U6 C1.6

Solución de algunos ítems.

12. Se construye el segmento AB, y luego se traza la mediatriz tal como se muestra en la figura.



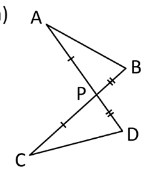
Donde se verifica que:
AD = BD y CD lo comparten; además, ∢ADC = ∢BDC.

Por tanto, ΔCAD ≅ ΔCBD, por criterio LAL.

13. ∢A + ∢B + ∢C = 180°
∢A = 80° y ∢B = ∢C
2∢B = 100°
∢B = 50°

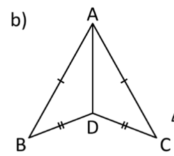
14. AB = AC, porque a ángulos iguales se oponen lados iguales; por tanto, AC = 2.

11. En cada literal, ¿cuál es el criterio de congruencia de los triángulos?

a) 

AP = PC
BP = PD
ΔABP ≅ ΔCDP

Respuesta:

b) 

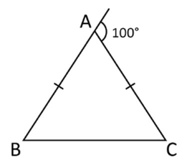
AB = AC
BD = CD
ΔABD ≅ ΔACD

Respuesta:

12. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento dista lo mismo desde los extremos de ese segmento. Para demostrarlo, ¿cuál es el criterio de congruencia de triángulos que se utiliza?

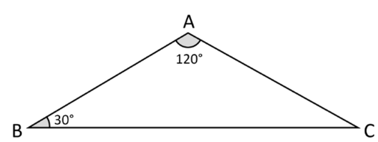
Respuesta:

13. Encuentra la medida del ∢B.



Respuesta: grados

14. Encuentra AC.

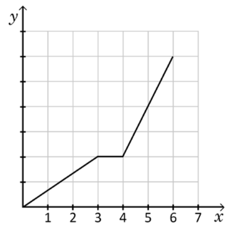


AB = 2 , BC = 3.46

Respuesta:
AC =

3

15. La gráfica representa la relación entre el tiempo (x horas) y la distancia recorrida (y km) de un vehículo que fue de la ciudad A a la ciudad B, tomando en cuenta que el conductor hizo una parada para almorzar en un restaurante en el camino.



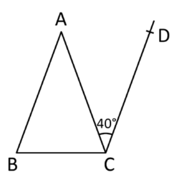
a) ¿Durante cuántas horas se quedó en el restaurante?

Respuesta: horas

b) ¿En qué momento corrió más rápido, antes o después del almuerzo? Justifica tu respuesta.

Respuesta:
Corrió más rápido ________________ del almuerzo, porque:

16. Encuentra la medida del ∢B.



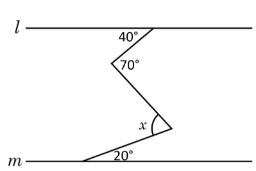
AB ∥ DC , AB = AC

Respuesta: grados

17. En la función $y = ax + b$, a y b son constantes; cuando x aumenta de −2 a 1, y disminuye de 5 a 2. Encuentra a y b.

Respuesta: a = b =

18. Encuentra ∢x.



$l \parallel m$

Respuesta: ∢x =

4

Ítem 15 – U3 C3.2
Ítem 16 – U4 C2.4 y U6 C1.2
Ítem 17 – U3 C1.16
Ítem 18 – U4 C2.7

Solución de algunos ítems.

16. ∢A = ∢C = 40°, por ser alternos internos entre paralelas.
∢B = 50°
∢B + ∢C = 140°; ∢B = ∢C
∢B = ∢C = 70°
∢B = 50°

17. $\begin{cases} -2a + b = 5 \\ a + b = 2 \end{cases}$

Sumando miembro a miembro:

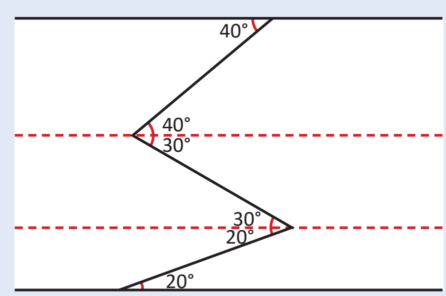
$$\begin{array}{rl} & -2a + b = 5 \\ (-) & \underline{\quad a + b = 2} \\ & -3a \qquad = 3 \\ & \qquad a = -1 \end{array}$$

Sustituye $x = -1$ en $a + b = 2$ y calcula el valor de b:

$$a + b = 2$$
$$-1 + b = 2$$
$$b = 3$$

La solución del sistema es $a = -1$, $b = 3$.

18. Se realizan trazos de rectas paralelas auxiliares para determinar la medida del ángulo indicado.



Al trazar las paralelas se identifican los ángulos alternos externos entre paralelas, de donde se obtiene que $x = 50°$, tal como se muestra en la figura.

Secuencia:
En cuarto grado de Educación Básica, fue definido el concepto de paralelogramo y sus características, para esta clase se recordarán esos conocimientos previos mediante la identificación de paralelogramos en el entorno, enlistando sus características.

Propósito:
①, ② Identificar paralelogramos en un lugar dado y en el entorno en que está recibiendo la clase, pero además de identificarlos deberá justificar por qué considera que es un paralelogramo.

③ Identificar los elementos que son iguales en un paralelogramo, para ello se utilizará lo aprendido en Educación Básica y en las unidades 4 y 5 de octavo grado.

Posibles dificultades:
No comprender las relaciones de igualdad presentadas en el ejemplo adicional, en ese caso será necesario que el docente dé pistas o que asigne la revisión en parejas; para garantizar la comprensión puede pedir que justifiquen las igualdades presentadas en la solución.

④ Resolución de ítems.
Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos, tienen lados paralelos dos a dos.

Las figuras de los literales b) y c) no son paralelogramos, pues el b) solo tiene un par de lados paralelos y el c) es un triángulo.

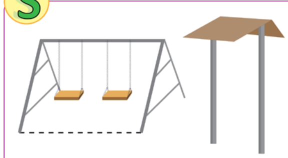
Indicador de logro: Identifica las condiciones para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

2.1 El paralelogramo

① **P**

a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos de tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

② **S**



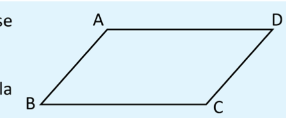
a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros, tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos; al igual que el techo del deslizadero.

b) Ejemplo 1. La pizarra es un paralelogramo.
Ejemplo 2. Los vidrios de las ventanas.
Ejemplo 3. El escritorio de la profesora o algunos pupitres.

C

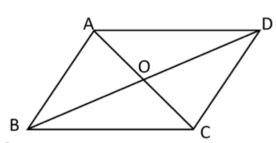
Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumple la condición de ser un paralelogramo.



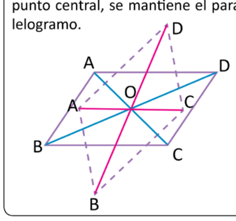
③ **E**

En el paralelogramo ABCD mostrado a continuación, tomando la intersección de las diagonales en el punto O, ¿cuáles pares de segmentos y ángulos son iguales?

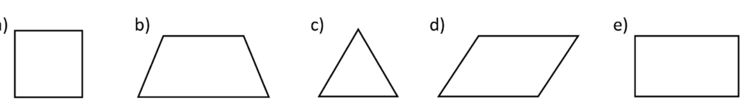


a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Aunque se gire un ángulo cualquiera con respecto al punto O como punto central, se mantiene el paralelogramo.



④ Identifica, en las siguientes figuras, cuáles son paralelogramos. Justifica cada caso.



Son paralelogramos: a), d) y e)
No son paralelogramos: b) y c)

128

Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

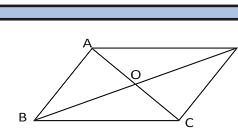
Fecha: **U6 2.1**

Ⓟ a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos en tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

Observación: Ver imagen en LT.

Ⓢ a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros pues tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos, al igual que los techos de los deslizaderos.
b) La respuesta en este caso dependerá del espacio donde estén los estudiantes.

Ⓔ



a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Ⓡ Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos.

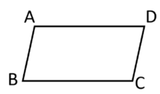
Los literales b) y c) no son paralelogramos.

Indicador de logro: Caracteriza los paralelogramos estableciendo la relación entre sus lados y ángulos.

2.2 Características de los paralelogramos

① **P** Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

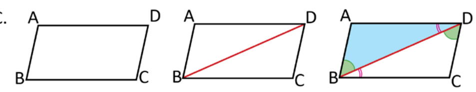
1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.



Observa que para demostrar que
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA
Es suficiente demostrar que ΔDBA ≅ ΔBDC, trazando la diagonal BD.

② **S** Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:



∢ABD =∢ CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

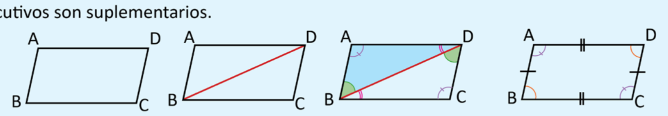
ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de (1), (2) y BD es común).

Entonces, AB = DC, AD = BC, ∢DAB =∢ BCD, ∢ABC =∢ CDA.

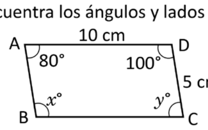
Observa que ∢ABC = ∢CDA porque en el paralelogramo se cumple que ∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADB.

Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180° (mitad de la suma de los ángulos interno de un cuadrilátero).

C En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.

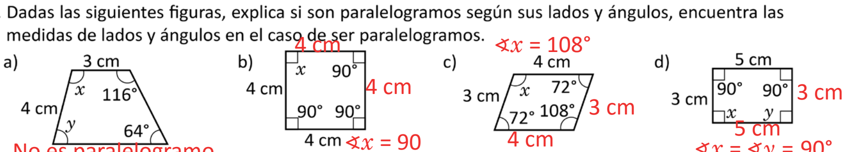


③ **E** Encuentra los ángulos y lados según las características de los paralelogramos:

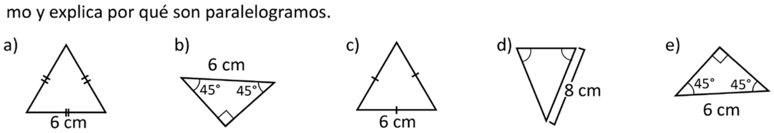


∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

④ 1. Dadas las siguientes figuras, explica si son paralelogramos según sus lados y ángulos, encuentra las medidas de lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.



2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirse forman un paralelogramo y explica por qué son paralelogramos.



Forman paralelogramos: a) y c); b) y e)

Unidad 6

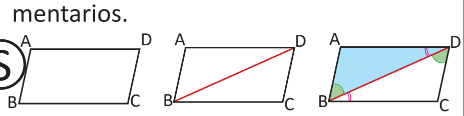
129

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.2**

(P) Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:
1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.

(S)



Por hipótesis se tiene que AB ∥ DC y AD ∥ BC.
Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:

∢ABD = ∢CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de [1], [2] y BD es común).
Entonces, AB = DC, AD = BC,
∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA.
Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180°.

(E) ∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

(R) a) No es paralelogramo
b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y ∢x = 90°
c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y ∢x = 108°.
Observación: Colocar las figuras como apoyo visual.

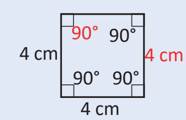
Secuencia:
En la clase anterior se recordó el concepto de paralelogramo y algunas características; en esta clase se utilizará la congruencia de triángulos para demostrar la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo.

Propósito:
①, ② Demostrar que en un paralelogramo, sus lados opuestos son iguales así como los ángulos opuestos y además los ángulos consecutivos son suplementarios.

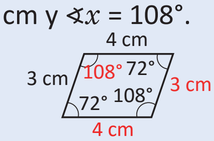
③ Utilizar el resultado de la demostración para determinar la medida de los ángulos de un paralelogramo.

④ Determinar las medidas de los ángulos y los lados desconocidos para cada uno de los paralelogramos dados en el numeral 1; mientras que en el numeral 2, identificar las parejas de triángulos que forman paralelogramos.

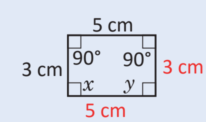
Resolución de ítems.
1.
a) No es paralelogramo.
b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y ∢x = 90°.



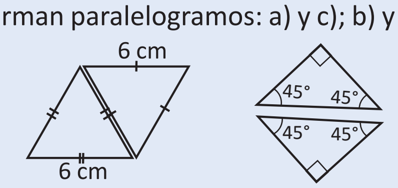
c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y ∢x = 108°.



d) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 5 cm y dos lados de longitud 3 cm y sus cuatro ángulos miden 90°.



2.
Forman paralelogramos: a) y c); b) y e).



Porque los lados opuestos son paralelos, ya que los ángulos alternos internos son iguales.

2.3 Diagonales de un paralelogramo

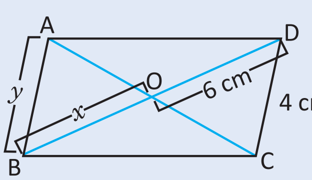
Secuencia:
Anteriormente se demostró la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo; en esta clase se demuestra que al trazar las dos diagonales del paralelogramo, estas se intersecan en su punto medio.

Propósito:
①, ② Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo, es el punto medio de ambas, por lo que cada diagonal queda dividida en dos segmentos iguales.

③ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para determinar la medida de dos segmentos indicados; mientras que en el numeral 2 complementar una demostración utilizando características de los paralelogramos.

Posibles dificultades:
En el caso que algunos estudiantes no puedan complementar la demostración, en ese caso se puede indicar el trabajo en parejas.

Resolución del ítem 1.



Para determinar el valor de x, se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

Para determinar el valor de y, se utiliza la característica de paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.

AB = CD (Lados opuestos del paralelo
y = 4 cm gramo)

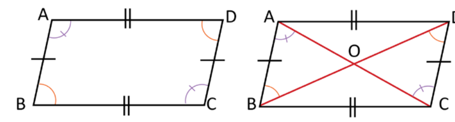
Indicador de logro: Caracteriza las diagonales de un paralelogramo.

2.3 Diagonales de un paralelogramo

① **P** Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Recuerda que un cuadrilátero tiene 2 diagonales.

② **S** Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.



Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)

∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(2)

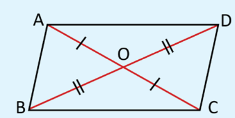
∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(3)

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

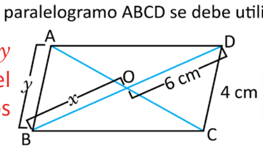
Para demostrar que OA = OC y OB = OD es suficiente demostrar que ΔOAB ≅ ΔOCD.

C En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



③ 1. Escribe qué característica del paralelogramo ABCD se debe utilizar para determinar el valor de x y y.

Para determinar el valor de y se utiliza la característica del paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.



Para determinar el valor de x se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

2. En el siguiente dibujo las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en el punto O y el segmento PQ pasa por el punto O. Completa la demostración de que PO = QO colocando en los espacios en blanco lo que corresponde:

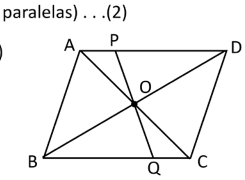
CO = AO (por propiedad de los paralelogramos) . . .(1)

∢QCO = ∢PAO (por ser ángulos alternos internos entre las paralelas) . . .(2)

∢QOC = ∢POA (son ángulos opuestos por el vértice) . . . (3)

ΔAOP ≅ ΔCOQ (por criterio de congruencia ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, PO = QO (Por definición de congruencia).



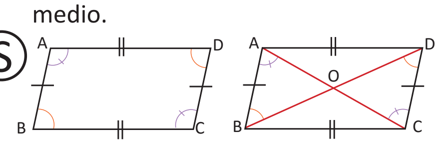
130

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.3**

Ⓟ Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Ⓢ



Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

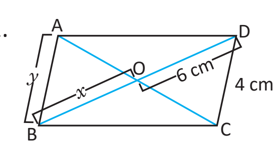
Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)
∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (2)
∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (3)

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de [1], [2] y [3]).

Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

Ⓡ 1.



BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

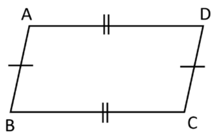
AB = CD (Lados opuestos del paralelo
y = 4 cm gramo)

2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

Indicador de logro: Demuestra la relación que debe existir entre los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo.

2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

① **P** Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Para demostrar que AD∥BC y AB∥DC es suficiente, demostrar que ΔABD ≅ ΔCDB, trazando la diagonal BD.

② **S** Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD≅ ΔCDB (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común).

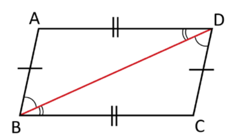
Entonces, ∢ABD = ∢CDB (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

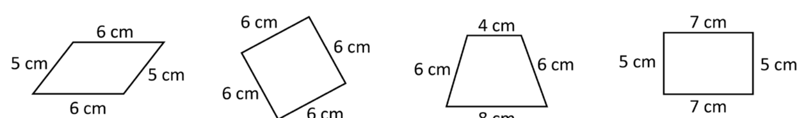


C Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de "en un paralelogramo los pares de lados opuestos son de igual medida".

Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

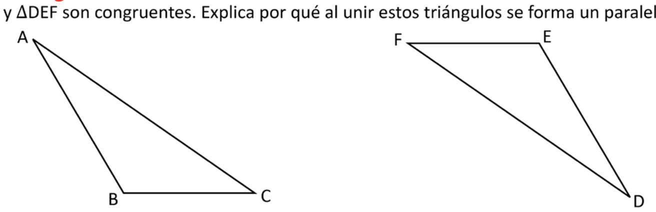
Unidad 6

③ 1. En los siguientes cuadriláteros describe los que cumplen la condición de paralelogramos.



Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.

2. ΔABC y ΔDEF son congruentes. Explica por qué al unir estos triángulos se forma un paralelogramo.



Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.

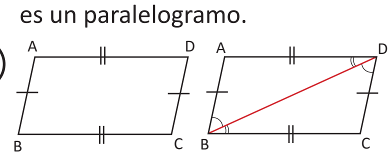
131

Tarea: página 136 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.4**

Ⓟ Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

Ⓢ



Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD ≅ ΔCDB. (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común)

Entonces, ∢ABD = ∢CDB. (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

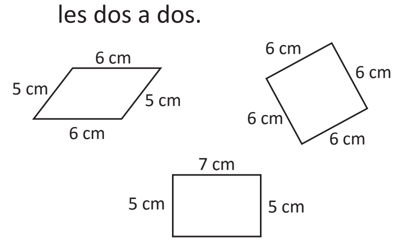
Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Ⓡ Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.



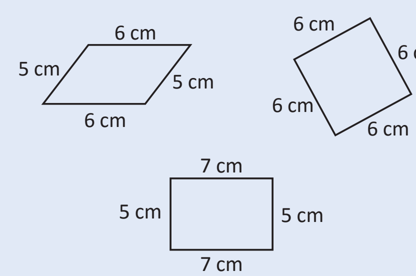
Secuencia:
En la clase 2.2, se demostró que un paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales; en esta clase se demostrará el recíproco, es decir, si se tiene un cuadrilátero cuyos pares de lados son iguales; entonces es un paralelogramo.

Propósito:
①, ② Realizar la demostración utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos entre paralelas.

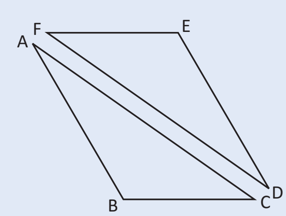
③ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre paralelogramos para identificar cuáles de los cuadriláteros dados cumplen con las condiciones para ser paralelogramos; mientras que en el numeral 2, justificar por qué los triángulos forman un paralelogramo, esto siempre utilizando las características de los paralelogramos.

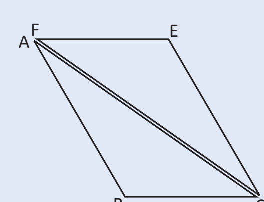
Resolución de los ítems.

1. Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.



2. Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.





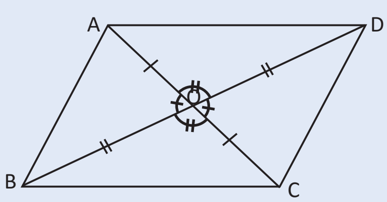
Secuencia:
En la clase anterior se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo; en esta clase se demuestra que si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, entonces es un paralelogramo.

Propósito:
①, ② Demostrar que el cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelogramo, utilizando la hipótesis y los ángulos suplementarios.

③ Demostrar el recíproco del resultado de la clase 2.3, como una condición para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Posibles dificultades:
En caso de que algunos estudiantes no puedan hacer la demostración, se puede indicar el trabajo por parejas y sugerirles que lean la pista.

Resolución del ítem.



AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)
∢AOD = ∢COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD ≅ ΔCOB, por criterio LAL, de (1) y (2).
Por tanto, AD = CB; definición de congruencia ... (3)
∢AOB = ∢COD; por ser opuestos por el vértice ... (4)
Entonces, ΔAOB ≅ ΔCOD; por criterio LAL, de (1) y (4).
Por tanto, AB = CD; definición de congruencia ... (5)
Por (3) y (5) se concluye que el cuadrilátero ABCD, es un paralelogramo por tener sus lados opuestos iguales.

Indicador de logro: Demuestra que para que un cuadrilátero sea paralelogramo sus ángulos opuestos deben ser iguales.

2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

① **P** Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.

Estableciendo los puntos E y F sobre la prolongación de los lados BC y CD respectivamente. Para demostrar que AB ∥ DC y BC ∥ AD es suficiente, demostrar que ∢ABC = ∢DCE, ∢BCD = ∢ADF.

② **S** Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;

2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA).

Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) . . . (1)

También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) . . . (2)

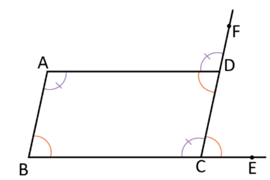
Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando (2) de (1)).

Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).

De la misma manera se procede para demostrar que BC ∥ AD.

Una vez se realiza la demostración se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

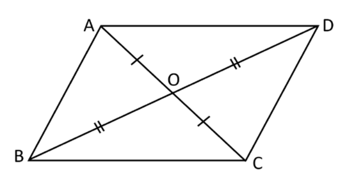
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.



C Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero entonces es un paralelogramo, este es el recíproco del teorema: "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

Ser paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

③ Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio es un paralelogramo.



Es suficiente comprobar que los lados opuestos son de igual medida para demostrar que ABCD es paralelogramo. Para ello, se puede pensar en los cuatro triángulos que se forman dentro del paralelogramo.

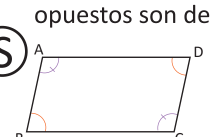
132

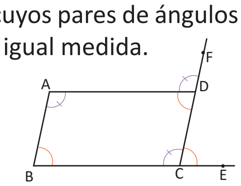
Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.5**

Ⓟ Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.

Ⓢ





Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;
2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA)
Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) ... (1)
También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) ... (2)
Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando [2] de [1])
Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).
De la misma manera demostrar que BC ∥ AD. Luego concluir que los lados opuestos son paralelos, y por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Ⓡ AO = CO y BO = DO; por hipótesis, ... (1)
∢AOD = ∢COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD ≅ ΔCOB (por criterio LAL, de [1] y [2]); por tanto, AD = BC.
De forma análoga se demuestra que AB = CD.

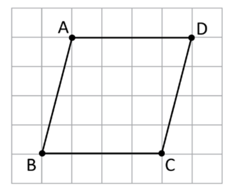
Indicador de logro: Enlista las condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

① **P** Dibuja en tu cuaderno la figura, para ello realiza los siguientes pasos; luego responde:

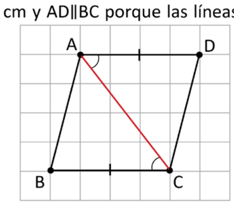
1. Traza un segmento AD utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud.
2. Traza otro segmento BC utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud, 4 líneas más abajo de la primera.
3. Traza los segmentos AB y CD.

¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.



② **S** Por los pasos que se siguieron para construir la figura AD = BC = 4 cm y AD∥BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.
Trazando la diagonal AC.
Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).
Luego, AB = CD (por la congruencia).

Por lo tanto, ABCD es paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).



C Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

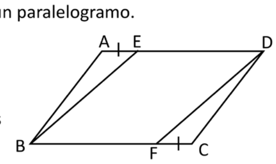
Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

Unidad 6

③ **E** Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestra que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

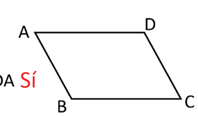
ED ∥ BF
ED = AD – AE = BC – FC = BF

Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

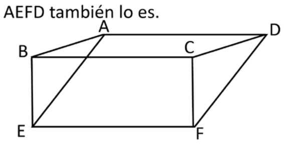


④
1. En el cuadrilátero ABCD determina cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

a) BA = AD, BC = CD No
b) AB = DC, AD = BC Sí
c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA Sí



2. En el dibujo los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestra que el cuadrilátero AEFD también lo es.



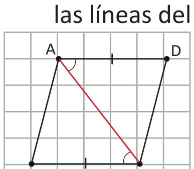
133

Tarea: página 138 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.6**

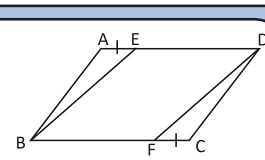
(P) Construir la figura, siguiendo los pasos indicados en el LT.
¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.

(S) Siguiendo los pasos indicados, se obtiene la figura AD = BC = 4 cm y AD ∥ BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.



Trazando la diagonal AC.
Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).
Luego, AB = CD (por la congruencia).
Por lo tanto, ABCD es paralelogramo.

(E)



ED ∥ BF
ED = AD – AE = BC – FC = BF
Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

(R) 1. a) BA = AD, BC = CD. No
b) AB = DC, AD = BC. Sí, demostrada en clase 2.4.
c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA; sí, demostrada en clase 2.5.

Secuencia:
En las dos clases anteriores, se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos o sus ángulos opuestos congruentes, entonces es un paralelogramo; en esta clase, se busca consolidar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramo, esto mediante una demostración a partir de una construcción bajo ciertas condiciones.

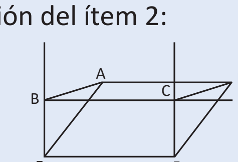
Propósito:
①, ② Construir un cuadrilátero y luego demostrar que es un paralelogramo, esto con el objeto de enlistar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

③ Demostrar que si se tiene un paralelogramo y a este se le recortan dos triángulos congruentes en sus lados opuestos, este sigue siendo un paralelogramo; para ello se da como recurso gráfico la figura.

④ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para identificar cuáles de las condiciones dadas son suficientes para que el cuadriátero sea paralelogramo.

Posibles dificultades:
En el caso de que no logren hacer la demostración del numeral dos de la fijación; se pueden dar pistas para orientarles.

Resolución del ítem 2:



BC = DA y BC = EF, por tanto DA = EF.
Por ser lados de un paralelogramo ... (1)
Al mismo tiempo BC ∥ DA y BC ∥ EF, por tanto DA ∥ EF.
AEFD es un paralelogramo por tener un par de lados opuestos iguales.

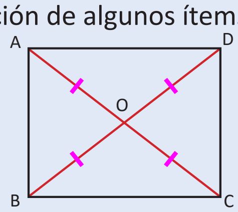
Secuencia:
En la lección 2 de esta unidad, se han demostrado las propiedades de los paralelogramos y se han establecido las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo; en esta clase, se demostrará que un rombo y un rectángulo también son paralelogramos utilizando las condiciones de la clase anterior.

Propósito:
①, ② Utilizar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo para demostrar que el rombo y el rectángulo son paralelogramos.

③ Demostrar la relación entre las diagonales del rombo, utilizando la congruencia de triángulos y de igual manera las del rectángulo.

④ En el numeral 1, utilizar la congruencia de triángulos para demostrar que si las diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, entonces es un rectángulo; mientras que en el numeral 2, es únicamente una construcción con regla y/o compás.

Resolución de algunos ítems.

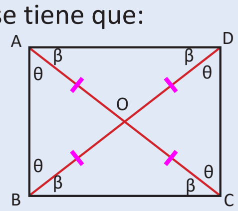


AC = BD; AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)

∢COD = ∢AOB y ∢BOC = ∢DOA; por ser opuestos por el vértice ... (2)

Entonces, ΔAOB ≅ ΔCOD y ΔBOC ≅ ΔDOA y son isósceles; por criterio LAL, de (1) y (2).

Luego por congruencia de triángulos se tiene que:



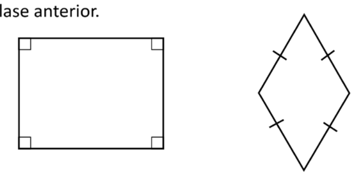
$4\theta + 4\beta = 360°$
$\theta + \beta = 90°$

Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Indicador de logro: Caracteriza un rectángulo y un rombo.

2.7 Características del rectángulo y el rombo

① **P** Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.



Definición de un rectángulo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos congruentes.

Definición de rombo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

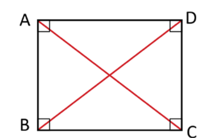
② **S**
- Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.
- Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

C El rectángulo es un paralelogramo por sus ángulos y por sus lados, el rombo también lo es.

③ **E** Demuestra los siguientes resultados sobre las diagonales del rombo y el rectángulo.
a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Para demostrar que AC = DB, es suficiente demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB.

1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.
Entonces ΔABC ≅ ΔDCB (por criterio LAL, AB = DC, BC es común y ∢ABC = ∢DCB = 90°).
Por lo tanto, AC = BD (por la congruencia).

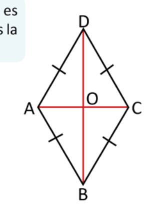


2. Trazando las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y llamando O al punto donde se intersecan.
Entonces, ΔACD es isósceles (por ser rombo DA = DC).

Para demostrar que BD ⊥ AC, es suficiente demostrar que DO es la altura de ΔACD.

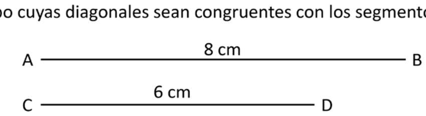
Luego, DO es mediana de ΔACD (por ser paralelogramo las diagonales se intersecan en el punto medio).

Por lo tanto, DB⊥AC (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediana).



④
1. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

2. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con los segmentos AB y CD.



134

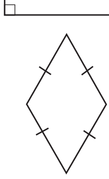
Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.7**

Ⓟ Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.

Ⓢ

Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.



Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

Ⓔ Demuestra:
a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.
Entonces ΔABC ≅ ΔDCB, por LAL
Por lo tanto, AC = BD. (Por la congruencia).
2. Llamando O al punto donde se intersecan las diagonales.
Entonces, ΔACD es isósceles. (Por ser rombo DA = DC).
Luego, DO es mediana de ΔACD.
Por lo tanto, DB⊥AC (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediana y la altura).

Ⓡ Copiar la solución del apartado "resolución de ítems".

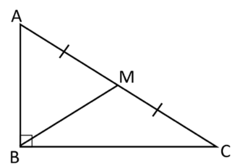
2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

Indicador de logro: Utiliza las características de las diagonales de un rectángulo para demostrar relaciones con elementos de un triángulo rectángulo.

2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

① **P**

Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Recuerda que en un rectángulo las diagonales se intersecan en su punto medio.

② **S**

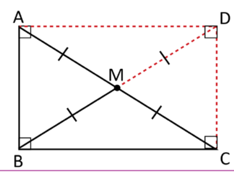
Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD, que se intersecan en el punto medio, por ser paralelogramo M.

BM = $\frac{1}{2}$ BD (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (2)

Además AC = BD (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC (de (1), (2) y (3)).



C

En todo triángulo rectángulo, el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, tiene una longitud congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

③ **E**

¿El cuadrado es un paralelogramo?

Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes entonces, los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

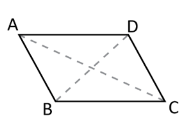
Recuerda que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y 4 lados congruentes.

Unidad 6

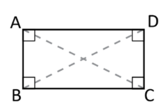
④

1. ¿Cuáles son las condiciones que se deben adicionar para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado? Escoge del literal **a** al literal **d** las condiciones correspondientes.

a) ∢A = 90°   b) AB = BC   c) AC = BD   d) AC⊥BD

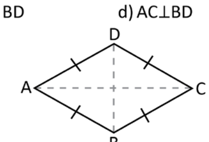


Paralelogramo



Rectángulo: a) o c)

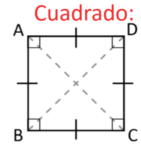
Rectángulo



Rombo: b) o d)

Rombo

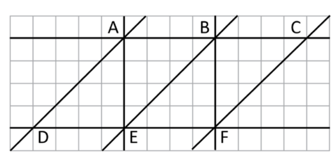
Cuadrado: a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)



Cuadrado

2. En la siguiente figura identifica los paralelogramos que se forman, luego clasifícalos según sean rectángulos, cuadrados, rombos, o solamente paralelogramos.

ADEB, paralelogramo
BEFC, paralelogramo
ADFC, paralelogramo
AEFB, cuadrado



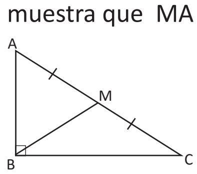
135

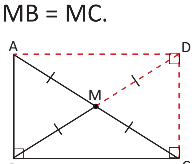
Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.8**

Ⓟ Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.

Ⓢ





Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD.

BM = $\frac{1}{2}$ BD. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (2)

Además AC = BD. (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC. (De [1], [2] y [3]).

Ⓔ Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

Ⓡ 1. Rectángulo: a) o c)
Rombo: b) o d)
Cuadrado: a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)

Secuencia:

En la clase anterior se demostraron algunas características de los triángulos rectángulos; ahora se demostrará que el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de ella, es congruente con la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Propósito:

①, ② Demostrar una de las propiedades de los triángulos rectángulos, tomando como recurso la construcción de un rectángulo y las características de sus diagonales.

③ Justificar por qué el cuadrado es un paralelogramo.

④ Identificar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser rectángulo, rombo o cuadrado, considerando los recursos dados.

2.9 Recíproco de características de rectángulos

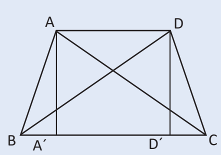
Secuencia:
En la clase 2.7, se demostró que un rectángulo tiene sus diagonales congruentes y se cortan en el punto medio; en esta clase se demuestra que si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, no siempre es un rectángulo.

Propósito:
①, ② Demostrar que el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales", no se cumple, mediante la presentación de un contraejemplo.

③ Demostrar que si las diagonales de un cuadrilátero se cortan perpendicularmente no es condición suficiente para decir que es un rombo.

④ En el numeral 1, demostrar que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes, este es el contraejemplo usado en el Problema inicial; mientras que en el numeral 2, demostrar la relación que existe entre las diagonales de un rombo.

Resolución del ítem 1.



Se trazan dos alturas AA´ = DD´ ... (1)
AB = DC; por hipótesis ... (2)
∢AA´B = ∢DD´C = 90°.

Entonces, ΔAA´B ≅ ΔDD´C; por tener la hipotenusa y un cateto igual.

∢ABC = ∢DCB; por definición de congruencia ... (3)
BC = CB; por ser el mismo ... (4)

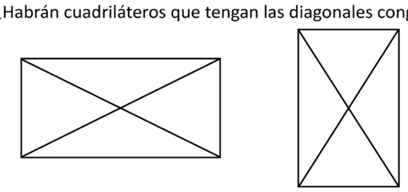
Entonces, ΔABC ≅ ΔDCB; por criterio LAL, de (2), (3) y (4).

De donde se concluye que AC = BD por definición de congruencia.

Indicador de logro: Analiza la veracidad del recíproco de las características de los rectángulos.

2.9 Recíproco de características de rectángulos

① **P** ¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero no sean rectángulos?



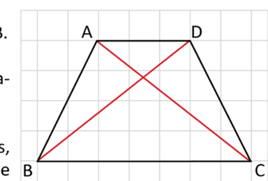
Piensa en el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales".

El trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

② **S** Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB para determinar que AC = DB.

Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, no significa que el cuadrilátero es rectángulo, puede ser otro tipo de cuadrilátero.

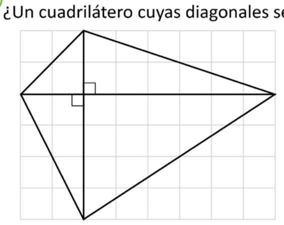


C El recíproco del enunciado "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo propuesto.

Para demostrar la veracidad del recíproco del teorema, en este caso, se utilizó un **contraejemplo**.

En este caso como no se cumple, también se puede decir que ser rectángulo es una condición **suficiente** para que las diagonales sean congruentes, pero **no es necesaria.**

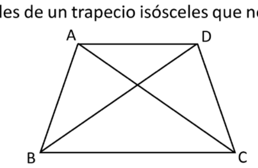
③ **E** ¿Un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan perperdicularmente, es un rombo?



Esto no es cierto ya que el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, pero no es un rombo, ya que sus lados son desiguales.

Este enunciado es el recíproco de "en un rombo las diagonales se intersecan perpendicularmente".

④ 1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles que no es un paralelogramo son congruentes.



2. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

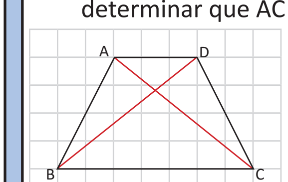
136

Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.9**

Ⓟ ¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero que no sean rectángulos?

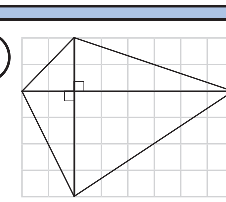
Ⓢ Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB para determinar que AC = DB.



Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes no siempre es rectángulo.

Ⓔ



Esto no siempre es cierto, por ejemplo el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, y no es un rombo.

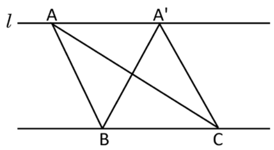
Ⓡ

1. La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

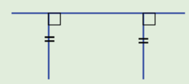
Indicador de logro: Determina la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre rectas paralelas.

2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

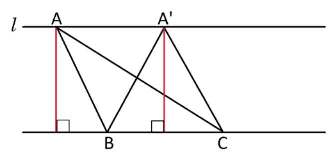
① **P** En la siguiente figura, la línea l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.



En un par de líneas paralelas, las líneas perpendiculares trazadas desde dos puntos de una línea paralela a la otra, tienen la misma longitud.



② **S** Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.

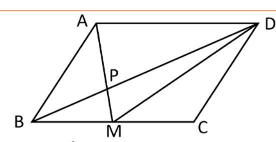


Estos triángulos tienen la misma base y al determinar la altura a cada uno de ellos, las dos son congruentes, dado que están entre dos rectas paralelas.

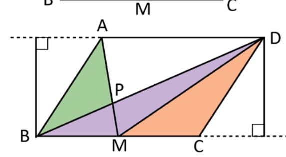
Por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

C Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra, tienen igual longitud.

③ **E** ABCD es un paralelogramo; M es el punto medio del segmento BC, P el punto de intersección del segmento BD y AM. Establece cuáles son los triángulos que tienen la misma área.

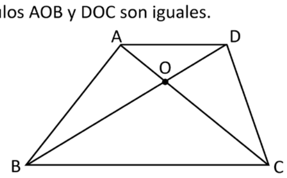


Los triángulos ABM, DBM y DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD y BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura, dada la propiedad que entre líneas paralelas los segmentos perpendiculares tienen la misma longitud.



También se puede decir que las áreas de los triángulos ABP y DMP son iguales, puesto que las áreas de ABM y DBM son iguales y se les está restando la misma porción de área a ambos (MPB).

④ Si se establece como punto O la intersección de diagonales en el trapecio ABCD con AD∥BC, demuestra que las áreas de los triángulos AOB y DOC son iguales.



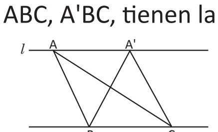
Unidad 6

137

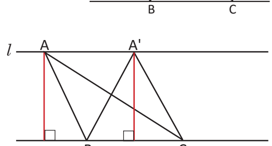
Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.10**

Ⓟ En la siguiente figura las líneas l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.



Ⓢ



Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.

Tienen igual base y alturas congruentes, por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

Ⓔ Los triángulos ABM, DBM, DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD, BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura.

Ⓡ La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

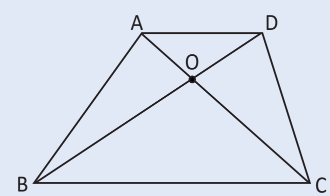
Secuencia:
En las clases anteriores se ha trabajado con características de los cuadriláteros; en esta clase, se establecerá la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas, tomando como recurso el área de dos triángulos de igual base y altura.

Propósito:
①, ② Demostrar que los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas tienen igual longitud.

③ Identificar los triángulos que tienen igual área, comparando sus bases y alturas.

④ Demostrar que las áreas de dos triángulos son iguales, utilizando como recurso el resultado de esta clase y el de la anterior.

Resolución del ítem.



Los triángulos ABC y DCB tienen igual área porque tienen igual base y altura.

(ΔABC) = (ΔAOB) + (ΔOCB) ... (1)
(ΔDCB) = (ΔDOC) + ΔOCB ... (2)

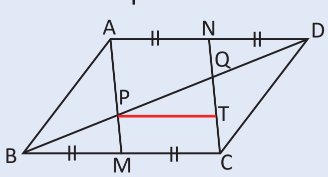
Como ΔABC y ΔDCB tienen igual área, entonces de (1) y (2) se obtiene que los triángulos AOB y DOC tienen igual área.

Secuencia:
Ya se ha demostrado que los triángulos que se forman entre dos paralelas y que tienen igual base, tienen igual área; en esta clase, se utilizará el resultado de la clase anterior para encontrar un triángulo que tenga igual área que un cuadrilátero dado, realizando trazos auxiliares.

Propósito:
①, ② Demostrar que existe un triángulo de igual área al cuadrilátero dado, construyendo trazos auxiliares, que permitan utilizar el resultado de la clase anterior.

③ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre ángulos y triángulos para determinar la medida del segmento indicado.

Resolución del primer ítem.



BM = MC, por hipótesis y MC = PT, por construcción, por tanto BM = PT ... (1)
∢PBM = ∢QPT; por ser correspondientes entre paralelas ... (2)

∢BMP = ∢MCT y ∢MCT = ∢PTQ; por ser correspondientes entre paralelas, entonces ∢BMP = ∢PTQ ... (3)
Entonces, ΔBMP ≅ ΔPTQ; por ALA de (1), (2) y (3).

Por tanto, BP = PQ de donde se tiene que cada uno mide 6 ... (4)
ΔABM ≅ ΔCDN; por LLL, pues
AB = CD, AM = CN y BM = DN ... (5)

Entonces ∢BMP = ∢DNQ, definición de congruencia ... (6)
Además ∢PBM = ∢NDQ, por ser alternos internos entre paralelas ... (7)

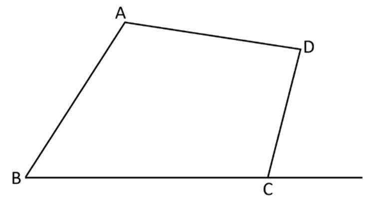
Entonces, ΔBMP ≅ ΔDNQ; por ALA de (5), (6) y (7).

Por tanto, BP = QD = 6, por definición de congruencia.

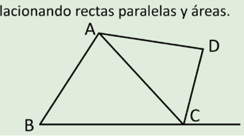
Indicador de logro: Resuelve problemas de triángulos y paralelogramos aplicando la relación entre rectas paralelas y áreas.

2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

① **P** En el cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?



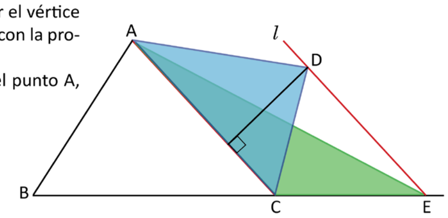
Puedes intentar encontrar el triángulo que tenga la misma área que el triángulo ACD, relacionando rectas paralelas y áreas.



② **S** Para elaborar el ΔABE que tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, puedes seguir los pasos:

1. Trazar la diagonal AC.
2. Trazar la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se intersecta con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.

Con esta construcción se tiene que área de ΔDAC = área de ΔEAC (por estar entre paralelas y tener base común).



Área del cuadrilátero ABCD = área de ΔABC + área de ΔDAC.
Área de ΔABE = área de ΔABC + área de ΔEAC.

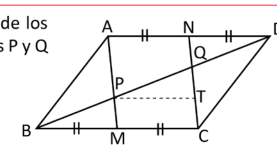
Por lo tanto, área de ΔABE = área del cuadrilátero ABCD (área de ΔDAC = área de ΔEAC).

C Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

③

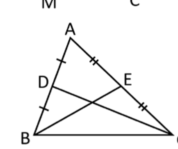
1. En un paralelogramo ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados BC y AD, el segmento BD intersecta a AM y CN en los puntos P y Q respectivamente, si BQ = 12, calcula la longitud de QD.

Puedes establecer el punto T de modo que PT sea paralelo a MC.



2. En el triángulo ABC los puntos medios de los lados AB y AC se establecen como D y E respectivamente, se traza el segmento DE. Demuestra:

   a) El área de los triángulos DBE, ADE, DCE es igual.
   b) Dos veces el área del triángulo DBE es igual al área del triángulo ABE e igual al triángulo EBC.



138

Tarea: página 143 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.11**

Ⓟ En el cuadrilátero, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?

Ⓢ **Observación:** Ver imágenes en LT.
1. Trazar la diagonal AC.
2. Se traza la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se interseca con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.
   Área de ΔDAC = Área de ΔEAC, (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = Área de ΔABC + Área de ΔDAC.

Área de ΔABE = Área de ΔABC + Área de ΔEAC.

Por lo tanto, Área de ΔABE = Área del cuadrilátero ABCD (Área de ΔDAC = Área de ΔEAC).

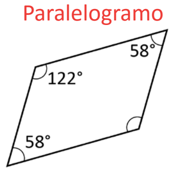
Ⓡ
1. BP = QD = 6, (ver resultado completo en solución del primer ítem).

Indicador de logro: Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.

2.12 Practica lo aprendido

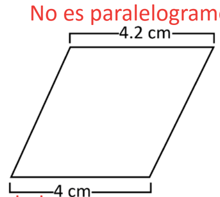
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden ser paralelogramos? Menciona qué condición aprendida en la clase 6 de esta lección se aplica.

Paralelogramo



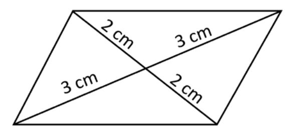
Dos ángulos consecutivos son suplementarios.

No es paralelogramo



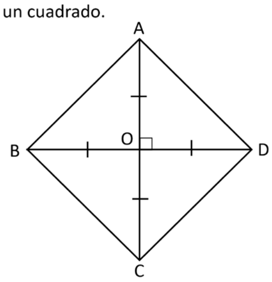
Dos lados opuestos no son congruentes.

Paralelogramo

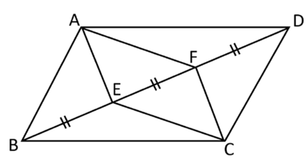


Las diagonales se intersecan en el punto medio.

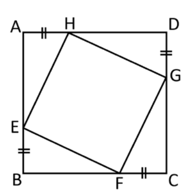
2. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado.



3. En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y BE = EF = FD. Demuestra que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



4. ABCD es un cuadrado y los lados señalados son congruentes. Demuestra que EFGH también es un cuadrado.

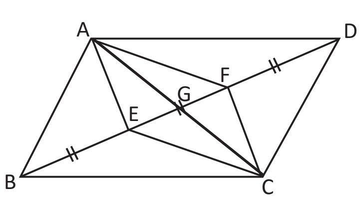


Unidad 6

139

Tarea: página 144 del Cuaderno de Ejercicios.

3.

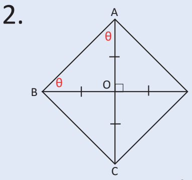


Sea G el punto de intersección de AC y BD,
AG = CG y EG = BG − BE = DG − FG = FG por características de las diagonales del paralelogramo.

Por lo tanto, el cuadrilátero HECF, es un paralelogramo.

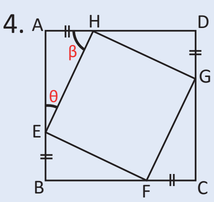
Resolución de algunos ítems.

2.



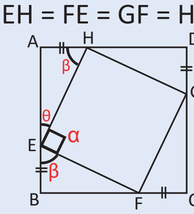
DO = BO y AO lo comparten.
∢BOA = ∢DOA = 90°.
Entonces ΔBOA ≅ ΔDOA, por criterio LAL.
Por tanto, AB = DA (definición de congruencia) ... (1)
AO = CO y DO lo comparten.
∢DOC = ∢DOA = 90°.
Entonces ΔDOC ≅ ΔDOA, por criterio LAL.
Por tanto, CD = DA (definición de congruencia) ... (2)
BO = DO y CO lo comparten.
∢BOC = ∢DOC = 90°.
Entonces ΔBOC ≅ ΔDOC, por criterio LAL.
Por tanto, BC = CD (definición de congruencia) ... (3)
AB = CD = BC = DA; por (1), (2) y (3).
Como los 4 triángulos BOA, DOA, DOC y BOC son congruentes isósceles, entonces se cumple que
$8\theta = 180°(4 - 2)$.
$8\theta = 360°$, de donde $\theta = 45°$; luego
∢A = ∢B = ∢C = ∢D = 90° = 2θ.

4.



DA = AB
DH + HA = AE + EB; pero HA = EB.
Entonces DH = AE ... (1)
DA = BC
DH + HA = BF + FC; pero HA = FC.
Entonces DH = BF ... (2)
CD = DA
CG + GD = DH + HA; pero GD = HA.
Entonces CG = DH ... (3)
AE = DH = BF = CG; por (1), (2) y (3).
Entonces ΔAHE ≅ ΔBEF ≅ ΔCFG ≅ ΔDGH, por LAL.
De donde se tiene EH = FE = GF = HG.

$\theta + \beta = 90°$
$\theta + \beta + \alpha = 180°$
$\alpha = 90°$

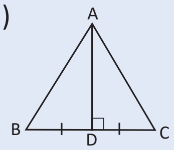


Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un cuadrado, pues tiene sus lados iguales y sus ángulos miden 90°.

Resolución de algunos ítems.

1.

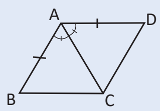
a)



$\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDA = 90°$
$BD = CD$ y AD lo comparten.

Entonces $\Delta CDA \cong \Delta BDA$, por criterio LAL.

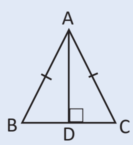
b)



$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$
$AB = DA$ y AC lo comparten.

Entonces $\Delta BAC \cong \Delta DAC$, por criterio LAL.

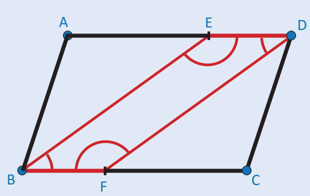
c)



$AB = AC$ y AD lo comparten.

Entonces $\Delta DAB \cong \Delta DAC$, por tener la hipotenusa y un cateto igual.

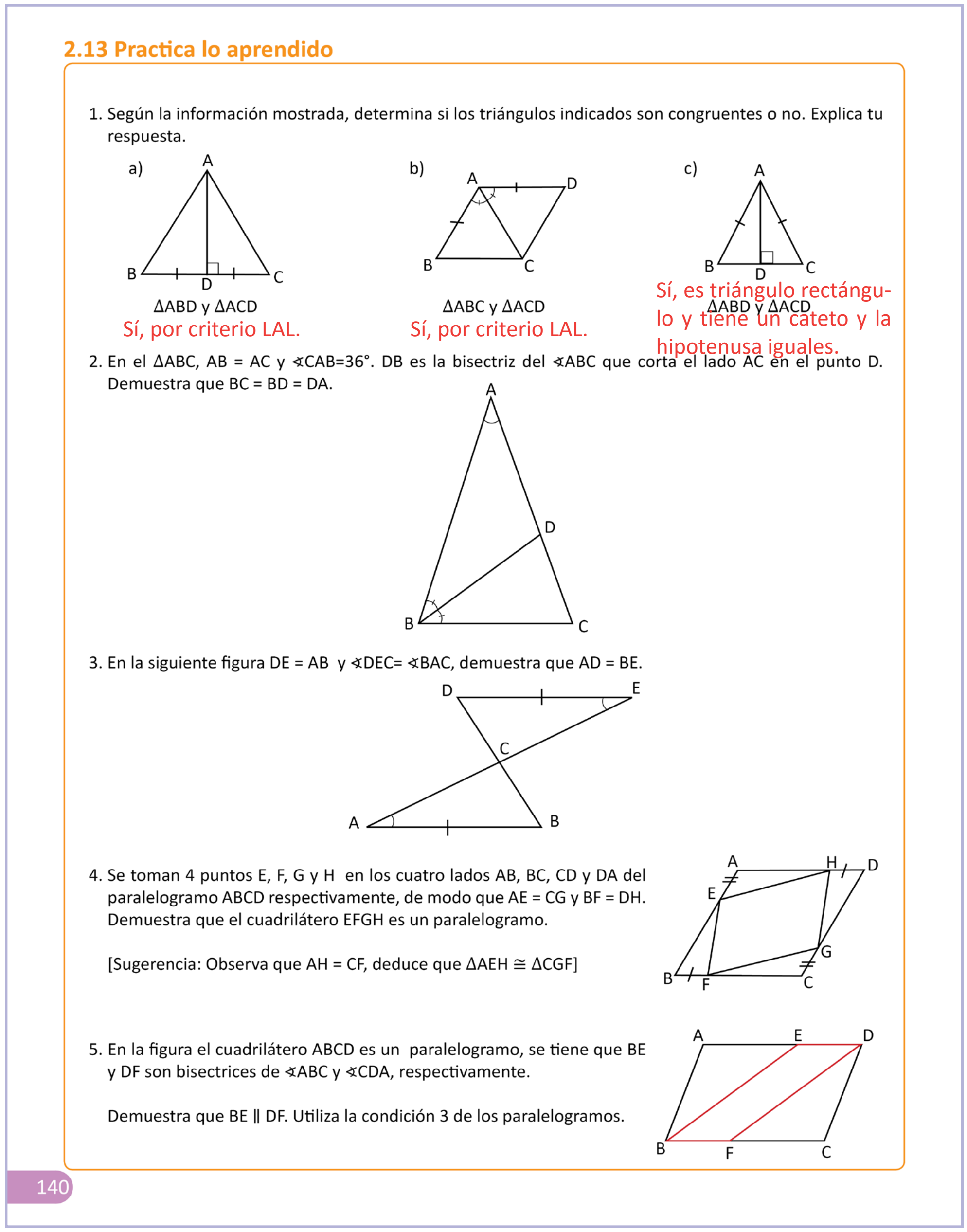
5.



$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.
Como BE y DF son bisectrices de $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, se tiene que
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF$ ... (1)
$AB = CD$ por lados opuestos del paralelogramo ... (2)
Entonces $\Delta ABE \cong \Delta CDF$, por criterio ALA.
De donde se tiene $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CFD$, por definición de congruencia de triángulos ... (3)
$\sphericalangle AEB + \sphericalangle BED = 180°$ y
$\sphericalangle CFD + \sphericalangle DFB = 180°$; entonces
$\sphericalangle AEB + \sphericalangle BED = \sphericalangle CFD + \sphericalangle DFB$.
Al utilizar (3), se tiene $\sphericalangle BED = \sphericalangle DFB$ ... (4)

El cuadrilátero BFDE es un paralelogramo; pues tiene 2 pares de ángulos opuestos iguales; de (1) y (4).

Indicador de logro: Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.



2.13 Practica lo aprendido

1. Según la información mostrada, determina si los triángulos indicados son congruentes o no. Explica tu respuesta.

a) ΔABD y ΔACD
Sí, por criterio LAL.

b) ΔABC y ΔACD
Sí, por criterio LAL.

c) ΔABD y ΔACD
Sí, es triángulo rectángulo y tiene un cateto y la hipotenusa iguales.

2. En el ΔABC, $AB = AC$ y $\sphericalangle CAB=36°$. DB es la bisectriz del $\sphericalangle ABC$ que corta el lado AC en el punto D. Demuestra que $BC = BD = DA$.

3. En la siguiente figura $DE = AB$ y $\sphericalangle DEC= \sphericalangle BAC$, demuestra que $AD = BE$.

4. Se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que $AE = CG$ y $BF = DH$. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

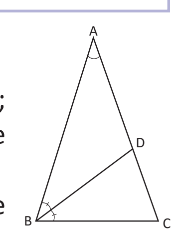
[Sugerencia: Observa que $AH = CF$, deduce que $\Delta AEH \cong \Delta CGF$]

5. En la figura el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, se tiene que BE y DF son bisectrices de $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle CDA$, respectivamente.

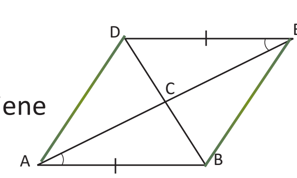
Demuestra que BE ∥ DF. Utiliza la condición 3 de los paralelogramos.

140

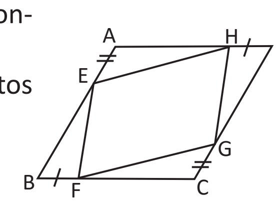
Tarea: página 145 del Cuaderno de Ejercicios.



2. Como $AB = AC$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle A = 144°$; entonces $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 72°$ y $\sphericalangle ABD = 36° = \sphericalangle A$, por propiedad de bisectriz, luego $BD = DA$ ... (1)
Además $\sphericalangle BDC = 180° - 36° - 72° = 72° = \sphericalangle BCD$, de donde se obtiene que $BD = BC$ ... (2)
Por tanto, $BD = DA = BC$.



3. Como $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BAC$, DE ∥ AB; además $DE = AB$.
Por tanto, el cuadrilátero ABED, es un paralelogramo, tiene dos lados opuestos paralelos e iguales.



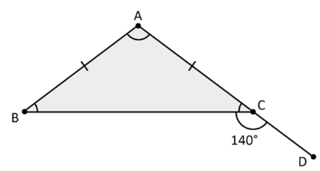
4. $AD = BC$, por ser lados opuestos del paralelogramo; entonces $AH = AD - HD = BC - FB = CF$.
$AE = CG$ por hipótesis y $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.
De donde se tiene que $\Delta AEH \cong \Delta CGF$.
Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

Prueba de la Unidad 6: Criterios de congruencia de triángulos **Matemática 8º**

Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

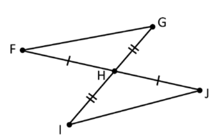
1. Determina la medida de los ángulos internos del triángulo:



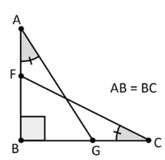
Respuesta:
∢A =
∢B =
∢C =

2. Determina si las condiciones dadas en cada una de las distintas figuras son o no suficientes para determinar que los triángulos indicados son congruentes. Indica el criterio que cumplen.

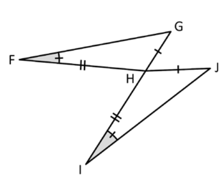
a) ΔFGH y ΔJIH



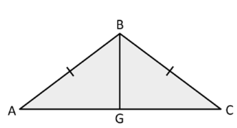
c) ΔABG y ΔCBF



b) ΔFGH y ΔJHI



d) ΔAGB y ΔCGB



G punto medio de $\overline{AC}$

Respuestas:
a)
b)
c)
d)

1

Descripción:
La prueba de esta unidad está formada por 4 numerales, el segundo tiene cuatro literales y cada uno será valorado como un ítem; por tanto, la prueba será considerada con 7 ítems.

Criterios para asignar puntos parciales:
Para cada uno de los ítems que se presentan a continuación, la respuesta se considera parcialmente correcta si se cumple uno de los criterios que se establecen a continuación:

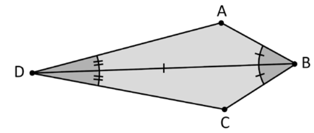
Ítem 1:
Si únicamente calcula la medida del ángulo C.

Ítems del 2 al 5:
Corresponde al numeral 2, se considerará respuesta parcialmente correcta si únicamente responde que sí, pero no justifica el criterio de congruencia que cumple.

Ítem 6:
Corresponde al numeral 3, se considerará respuesta parcialmente correcta si:
- Solamente identifica y relaciona los lados y ángulos iguales en la figura.
- Si solamente indica que los triángulos son congruentes, sin justificar.

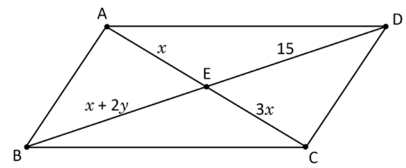
Ítem 7:
Corresponde al numeral 4, se considerará respuesta parcialmente correcta si solamente escribe las ecuaciones utilizando la característica de las bisectrices de un paralelogramo; pero no las resuelve.

3. Sea ABCD un cuadrilátero tal que, BD es la bisectriz de los ángulos D y B. Demostrar que: AB = BC y AD = CD.



Respuesta:

4. Dado que ABCD es un paralelogramo, AC y BD sus diagonales, determinar el valor de x y y.



Respuesta: