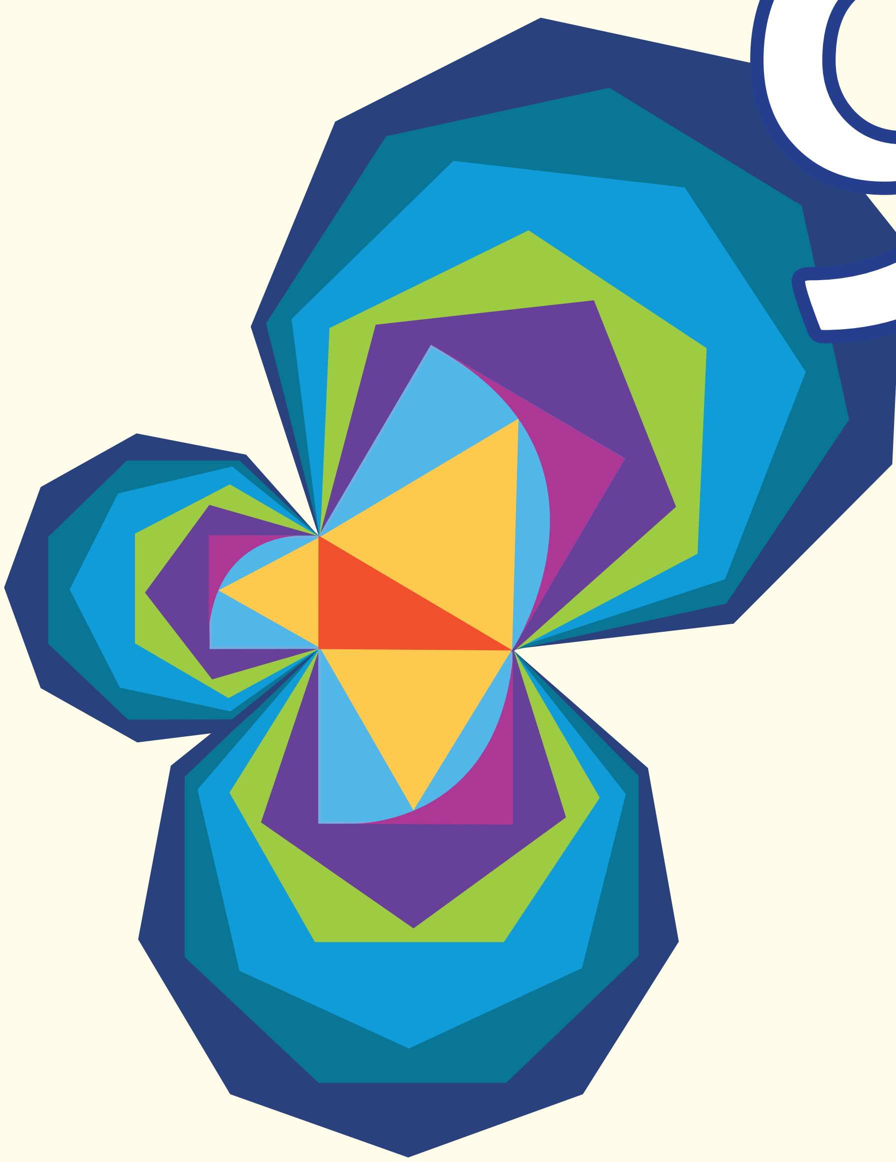
Matemática

9



Guía Metodológica

ESMATE

Matemática Segunda Edición

Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Lic. Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Lic. Óscar de Jesús Águila Chávez
Director Nacional de Educación Media (Tercer Ciclo y Media)
Director del Proyecto ESMATE

Ing. Wilfredo Alexander Granados Paz
Gerente de Gestión y Desarrollo Curricular de Educación Media
Coordinador del Proyecto ESMATE

Lic. Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Jefe del Departamento de Especialistas en Currículo de Educación Media
Coordinador del equipo de Educación Básica, proyecto ESMATE

Lic. Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación (Matemática)
Coordinador del equipo de Tercer Ciclo y Bachillerato, proyecto ESMATE

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Diseño y revisión de diagramación

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición, 2018.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra el teorema de Pitágoras con polígonos de diferente cantidad de lados y se pueden apreciar figuras semejantes

372.704 4
M425 Matemática 9° : guía metodológica / equipo técnico autoral
sv Ana Ester Argueta Aranda, Erick Amílcar Muñoz Deras, Reina Maritza Pleitez Vásquez, Diana Marcela Herrera Polanco, Francisco Mejía Ramos, Norma Elizabeth Lemus Martínez, Salvador Enrique Rodríguez Hernández, César Omar Gómez Juárez. -- 1ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
290 p. : il. ; 30 x 23 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-55-3 (E-Book)
1. Matemáticas-Enseñanza-Guías. 2. Métodos de enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991-, equipo técnico autoral, II. Título.
BINA/jmh

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Matemática

Guía Metodológica

ESMATE

Apreciables docentes:

Reciban un afectuoso saludo, junto con nuestro más sincero respeto y agradecimiento por el trabajo que realizan día con día.

Desde la administración del Ministerio de Educación (MINED), hemos dado los pasos necesarios para fortalecer y acompañar la labor docente que ustedes realizan; prueba de ello es la implementación del Plan Nacional de Formación de Docentes en Servicio en el Sector Público que constituye una de las concreciones más efectivas y exitosas que ahora tenemos. En sintonía con este plan y en coherencia con los Ejes estratégicos del Plan Nacional de Educación en Función de la Nación, y particularmente con el fortalecimiento de la matemática, hemos visto oportuno robustecer la propuesta de formación con la creación de textos nuevos y actualizados.

Por consiguiente, por cada grado académico se han creado tres tipos de libros; dos para uso de los estudiantes, que corresponden al Libro de texto y Cuaderno de ejercicios, y para ustedes una Guía metodológica, todos elaborados para la asignatura de Matemática.

El equipo que ha liderado este proyecto denominado Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE), ha sido conformado por especialistas en el área, comprometidos con dar una propuesta educativa que ayude a una mejor comprensión de los saberes matemáticos; dicho equipo ha tenido como apoyo la experiencia de docentes que trabajan con la asignatura de Matemática en todo el país.

Por tal motivo, tenemos la claridad y convicción para afirmar que el apoyo a la enseñanza de la matemática generará para nuestro país una sociedad madura, con capacidad de análisis, de ser crítica, ingeniosa y creativa, fortaleciendo el liderazgo y promoviendo el éxito tanto individual como grupal. En definitiva, una sociedad capaz de resolver eficiente y oportunamente problemas complejos que se presentan en el diario vivir, construyendo así un país más educado y productivo.

Este esfuerzo es de toda la comunidad educativa y particularmente de ustedes que dan lo mejor para que el conocimiento sea un éxito. Por eso les invitamos a que tomen estos libros como aliados para el desarrollo de sus clases.

Una vez más agradecemos toda la labor docente que realizan.

Con respeto y aprecio,

Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Lic. Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

Índice

I. Introducción

La presente Guía Metodológica (GM) forma parte de una serie de materiales elaborados por el equipo del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) del Ministerio de Educación, con la finalidad de contribuir a la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje en la asignatura de Matemática.

En esta GM se explican con detalle todos los elementos que deben considerarse para realizar el proceso de aprendizaje, con base en la resolución de problemas planteados para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Su uso permitirá al docente abordar la clase de forma efectiva y optimizar el uso del Libro de Texto (LT) y el Cuaderno de Ejercicios (CE).

Los principales objetivos que se pretenden lograr con el uso de esta guía son los siguientes:

1. Orientar la planificación de la clase a partir de una propuesta de contenidos e indicadores organizados temporalmente en lecciones y unidades.
2. Ofrecer sugerencias metodológicas concretas y pertinentes que ayuden a los docentes y estudiantes en la comprensión de los contenidos.
3. Proponer estrategias concretas para el desarrollo de los indicadores de logros que permitan el abordaje de las competencias matemáticas que deben alcanzar los estudiantes.

El MINED ofrece al sistema educativo nacional estos materiales con la convicción de que el uso pertinente de estos, permitirá fortalecer la práctica docente y así desarrollar de manera efectiva los aprendizajes de los estudiantes. Para lograr este propósito, a continuación se establecen los puntos de partida esenciales para su implementación:

1. **Importancia fundamental del aprendizaje de la matemática**: el desarrollo del razonamiento matemático genera en los estudiantes competencias para resolver problemas complejos, analizar situaciones, ser creativos, críticos, eficientes, pragmáticos y lógicos; capacidades que les permitirán vivir como ciudadanos comprometidos consigo mismos y con el desarrollo sostenible de sus comunidades, ya que los saberes matemáticos permiten reconocer que la ciencia está presente en todo lo que nos rodea, por lo que cualquier objeto de la realidad puede ser utilizado como herramienta tecnológica que ayude a resolver situaciones problemáticas, las cuales enfrentará día con día cada estudiante.

2. **Rol fundamental del docente y protagonismo del estudiante:** la labor del docente se vuelve determinante en la formación del estudiante, de ahí su importancia para que el sistema educativo logre sus propósitos; estos materiales están estructurados de tal manera que el docente tenga herramientas oportunas para "asistir" el aprendizaje, es decir, con la mirada puesta en el logro del aprendizaje de cada estudiante, lo cual implica que ellos sean los protagonistas en las clases. Este protagonismo se evidencia con el logro de los indicadores de aprendizaje en cada clase, los cuales se convierten en "peldaños" para desarrollar las competencias de unidad y para lograr que los estudiantes utilicen todos los saberes alcanzados para resolver exitosamente problemas simples y complejos. Esto tiene como base, el conocimiento y la comprensión de cada indicador y su concreción en cada una de las clases propuestas.

3. **Secuencia de la clase, experiencia auténtica del aprendizaje**: el protagonismo del estudiante se traduce en la propuesta de la secuencia de la clase, la cual contiene los siguientes pasos o momentos:

   - Problema inicial
   - Solución del problema inicial
   - Conclusión
   - Problemas y ejercicios

El análisis de esta secuencia se desarrolla describiendo la intencionalidad de cada elemento de la clase. De esta forma, se propone un itinerario para que los estudiantes, asistidos por sus docentes, construyan los conceptos y logren las competencias requeridas.

4. **Sintonía determinante con la gestión escolar**: para optimizar la efectividad de estos materiales educativos, otro aspecto fundamental a considerar es la generación de un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes, el cual está unido estrechamente con la gestión administrativa y organización de la institución educativa. Entre los elementos de dicha gestión, se destaca como determinante la cantidad de horas clase efectivas que el personal docente desarrolla en el año escolar; la propuesta de contenidos está planteada para que sean desarrollados durante al menos 160 horas clase al año, las cuales se deben garantizar como condición indispensable en el logro de los aprendizajes.

5. **Aprendizaje de los estudiantes en el hogar con el uso del Cuaderno de Ejercicios**: el desarrollo de los saberes o de un contenido no solo está sujeto a la hora clase, sino que se prolonga al tiempo de estudio en sus hogares; por ello, se establece la práctica de problemas y ejercicios en los CE, para que el estudiante pueda seguir profundizando en la comprensión de los saberes matemáticos de cada una de las clases desarrolladas. Además, con esta prolongación de la clase al hogar, también se busca la implicación de la familia como espacio legítimo para la consolidación del saber e integración con la vida cotidiana.

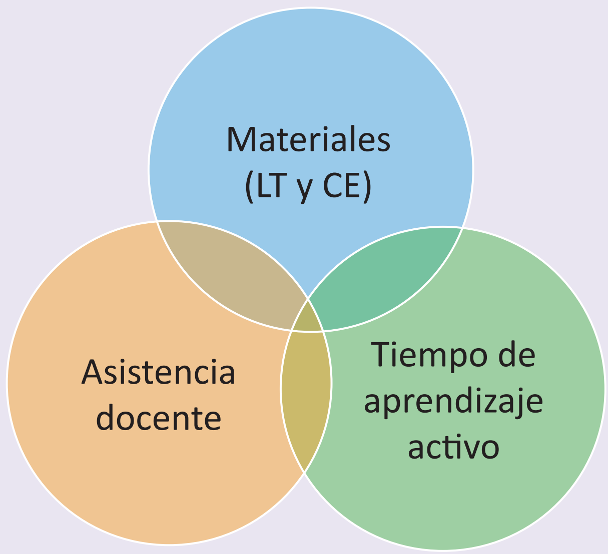
Uno de los elementos importantes a mencionar de esta guía es el apartado **III. Estructura de la Guía Metodológica**, donde se explican las partes de la clase, la cual tiene especial relevancia, ya que en ella se profundiza el por qué y para qué de cada elemento de la clase; además, describe las posibles limitaciones que los estudiantes tengan al desarrollar cada uno, como una forma de orientar al docente para aprovechar las oportunidades que ofrecen los errores en la construcción del aprendizaje. De esta forma, se considera que los docentes podrán interiorizar la intencionalidad de cada elemento y así tener más recursos para mejorar los logros de los aprendizajes en cada clase. También se propone, en esta parte, un prototipo de prueba de cada unidad, formulado en correspondencia directa con los indicadores de logro y los problemas planteados en cada clase, el cual puede ser de gran utilidad como una referencia para constatar los aprendizajes de cada estudiante en coherencia con todo el proceso.

Otro elemento relevante es el apartado **IV. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas**, donde se describen cada uno de los elementos de la secuencia de la clase, las principales actividades que deben realizar los estudiantes en su proceso de aprendizaje y los docentes en la asistencia o mediación de los mismos. Se destacan además los aspectos que sugieren acciones específicas en sintonía directa con el protagonismo del estudiante y la función mediadora del docente.

Esta Guía y demás materiales educativos han sido elaborados con la participación activa de muchos docentes a nivel nacional, que con su experiencia y empeño por la formación de los estudiantes, han hecho aportes significativos a cada uno de los elementos de los mismos. Siguiendo esta dinámica de participación, se considera importante asumir estos materiales como una propuesta flexible y mejorable, donde el personal docente deberá hacer las adecuaciones que considere necesarias para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

La meta del uso de estos materiales educativos es el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, quienes asumirán la responsabilidad del futuro del país; y como parte de la estrategia que se propone, a continuación se presentan los factores relacionados con dicha finalidad:

Tres factores fundamentales para mejorar el aprendizaje



Estos tres factores constituyen las prioridades estratégicas: los **Materiales**, como el LT y el CE, el **Tiempo de aprendizaje activo** dentro de la clase y en el hogar y la **Asistencia** o **Facilitación** del docente para propiciar el aprendizaje.

Materiales

Para garantizar la efectividad y eficiencia del aprendizaje se necesita un material que tenga la secuencia didáctica apropiada y el nivel de complejidad razonable, basado en el nivel de comprensión de los estudiantes, es decir, los contenidos de dicho material tienen que ser académica y didácticamente adecuados y al mismo tiempo ser más amigables para el aprendizaje.

Para satisfacer la primera necesidad mencionada, en los dominios cognitivos que se desarrollarán en la asignatura de Matemática deben estar estrictamente reflejadas las competencias establecidas por el MINED. Para cumplir la segunda necesidad, el contenido del LT debe corresponder lo más cercanamente posible a las necesidades académicas que tienen los estudiantes salvadoreños.

Tiempo de Aprendizaje Activo

Es importante destacar que como un paso previo a la elaboración de estos materiales de texto, el MINED realizó una investigación en las aulas y detectó una característica no favorable, que el tiempo disponible en el aula para el aprendizaje activo es insuficiente, en consecuencia, se ha limitado el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, es así que en el LT que se ha elaborado, se recomienda a los docentes que aseguren un espacio de al menos 20 minutos para que cada uno de los estudiantes aprenda activamente por sí mismo o interactivamente con sus compañeros.

Aprendizaje Activo

1. En forma individual
   ¿En qué momento se fortalecen los aprendizajes?
   Cuando un estudiante está trabajando individualmente, leyendo el LT, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes etc., se aprende activamente. Por el contrario, cuando el estudiante solo está escuchando lo que está explicando el docente, se aprende menos porque su actitud de aprendizaje será pasiva en forma general.

   Por esta razón, se recomienda al docente que garantice un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente en forma individual.

2. En forma interactiva
   En la práctica docente, muchas veces se provee asistencia a uno o dos alumnos en forma particular, dejando sin atención al resto de estudiantes, ya que es un hecho que es difícil brindar asistencia a todos los estudiantes, aunque todos tienen la necesidad de aprender.

¿Existe otra alternativa para que todos los alumnos reciban asistencia oportuna?
Se debe generar aprendizaje interactivo entre alumnos (o aprendizaje mutuo), ya que este tiene varias ventajas, primero, el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero sin perder el tiempo (sin esperar la asistencia de parte del docente); segundo, el estudiante que explica a sus compañeros, profundiza su comprensión a través de la explicación en forma verbal; tercero, los alumnos a quienes no se puede dar asistencia en forma individual tendrán más oportunidad de aprender en forma oportuna y cuarto, se genera un ambiente de convivencia en el aula.

Por lo que se recomienda que realicen primero el trabajo individual y luego el aprendizaje interactivo.

Se espera que cada uno de los estudiantes intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del LT, durante (por lo menos) 20 minutos en cada clase. Con esta actividad individual (o interactiva) se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

Antes de finalizar este punto cabe mencionar que, además del LT el CE pretende garantizar como mínimo 20 minutos de Aprendizaje Activo en el hogar. Sumando 20 minutos en el hogar a otros 20 minutos de Aprendizaje Activo en la clase, y esforzándose durante 160 días, se espera que se cumpla la siguiente relación: **(20 minutos + 20 minutos) × 160 días = Mejora de aprendizajes**; a todos los docentes del país se les invita a estar conscientes de esta fórmula.

Asistencia y facilitación

El MINED se propone cambiar el paradigma acerca del rol de los docentes, de **enseñar** hacia **asistir el aprendizaje**. Tradicionalmente, en el proceso de enseñanza se hacen esfuerzos por responder **¿qué es lo que hace el docente?**, en vez de preocuparse por saber **¿qué es lo que lograron los estudiantes?** Centrarse en el aprendizaje es un esfuerzo genuino, el cual debe ser la base para evaluar el desempeño docente.

Las actividades del docente deben ser planificadas para elevar el nivel de aprendizaje, y preocuparse por el resultado del aprendizaje de los estudiantes.

1. Programación anual

Trimestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Primero	Enero Febrero Marzo	U1: Multiplicación de polinomios (29)	23 - 58 (1 - 32)	• Multiplicación de monomio por binomio. • Multiplicación de binomio por binomio. • Multiplicación de binomio por trinomio. • Multiplicación de trinomio por trinomio. • Productos de la forma $(x + a)(x + b)$. • Cuadrado de un binomio. • Suma por la diferencia de binomios. • Desarrollo de productos notables utilizando sustitución. • Combinación de productos notables. • Cuadrado de un trinomio. • Valor numérico y cálculo de operaciones. • Factorización de polinomios. • Factor común. • Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$. • Factorización de trinomios cuadrados perfectos. • Factorización de diferencia de cuadrados. • Factorización utilizando cambio de variable. • Factorizaciones sucesivas. • Cálculo de operaciones aritméticas utilizando factorización.
	Marzo Abril	U2: Raíz cuadrada (24)	59 - 86 (33 - 56)	• Sentido y símbolo de la raíz cuadrada. • Representación de un número con el símbolo de raíz cuadrada. • Raíces cuadradas de un número. • Orden de las raíces cuadradas. • Números racionales e irracionales. • Conversión de números decimales a fracción. • Definición de los números reales. • Multiplicación y división de raíces cuadradas. • Expresión de números sin el símbolo de radical. • Simplificación de raíces cuadras inexactas. • Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación. • Racionalización de denominadores. • Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización. • Operaciones combinadas de raíces cuadradas. • Resolución de problemas con números reales.
	Abril	U3: Ecuación cuadrática -continúa en el segundo trimestre- (4)	87 - 95 (57 - 61)	• Sentido y definición de la ecuación cuadrática. • Soluciones de una ecuación cuadrática. • Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$. • Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$.
Segundo	Abril	U3: Ecuación cuadrática -continuación- (3)	96 - 98 (62 - 64)	• Solución de ecuaciones de la forma: $(x + m)^2 = n$. • Solución de ecuaciones de la forma: $x^2 + bx = 0$. • Solución de ecuaciones de la forma: $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

Trimestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Segundo	Mayo	U3: Ecuación cuadrática -continuación- (14)	99 - 114 (65 - 78)	• Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b)$. • Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas. • Solución de ecuaciones completando cuadrados. • Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. • Fórmula general de la ecuación cuadrática. • Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática. • Discriminante de la ecuación cuadrática. • Uso del discriminante en resolución de problemas. • Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas.
	Mayo / Junio	U4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ (15)	115 - 136 (79 - 96)	• Proporcionalidad directa con el cuadrado. • La función $y = x^2$. • La función $y = ax^2$; $a > 1$, $0 < a < 1$. • La función $y = -ax^2$; $a > 0$. • Características de la función $y = x^2$. • Variación de $y = ax^2$ (máximos y mínimos). • Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$, $c < 0$. • Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función cuadrática.
	Junio / Julio	U5: Figuras semejantes (26)	137 - 174 (97 - 126)	• Razón entre segmentos. • Segmentos proporcionales. • Figuras semejantes. • Características de figuras semejantes. • Construcción de figuras semejantes. • Criterios de semejanza LLL, AA, LAL. • Teorema de la base media. • Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero. • Semejanza utilizando segmentos paralelos. • Paralelismo dados segmentos proporcionales. • Distancia entre puntos sobre mapas. • Áreas de polígonos semejantes. • Volumen de sólidos semejantes. • Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos.
Tercero	Julio / Agosto	U6: Teorema de Pitágoras (17)	175 - 194 (127 - 142)	• Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. • Teorema de Pitágoras. • Cálculo de la medida de un cateto. • Triángulos notables. • Recíproco del teorema de Pitágoras. • Cálculo de la altura y volumen del cono. • Cálculo de la altura y volumen de una pirámide cuadrangular. • Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro. • Cálculo del área de un hexágono. • Aplicación del teorema de Pitágoras.
	Agosto / Septiembre	U7: Ángulo inscrito y central (7)	195 - 204 (143 - 150)	• Elementos de la circunferencia. • Definición y medida de ángulos inscritos. • Teorema del ángulo inscrito. • Arcos congruentes.

Trimestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Tercero	Septiembre	U7: Ángulo inscrito y central (9)	205 - 214 (151 - 158)	• Construcción de tangentes a una circunferencia. • Cuerdas y arcos de la circunferencia. • Aplicación con semejanza de triángulos. • Cuatro puntos en una circunferencia. • Ángulo semiinscrito.
	Septiembre / Octubre	U8: Medidas de dispersión (12)	215 - 243 (159 - 180)	• Rango para datos no agrupados. • Desviación respecto a la media. • Varianza para datos no agrupados. • Desviación típica para datos no agrupados. • Agrupación de datos. • Media aritmética y rango para datos agrupados. • Varianza para datos agrupados. • Desviación típica. • Desviación típica de una variable más una constante. • Desviación típica de una variable multiplicada por una constante.

Para desarrollar todo el contenido establecido, se debe cumplir la programación mostrada.

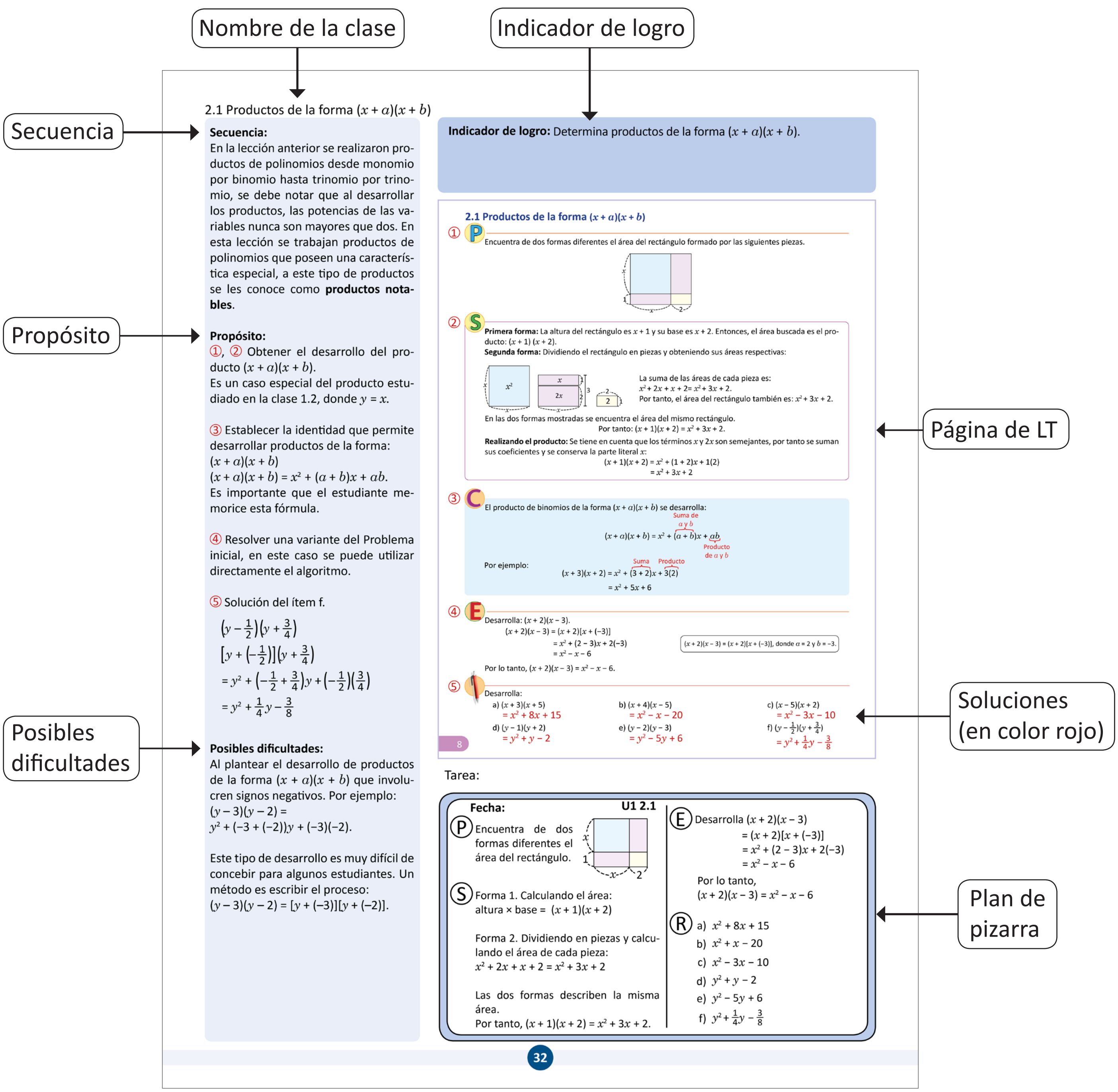
2. Apartados de la Unidad

a) Competencia de la unidad: describe las capacidades que los estudiantes deben adquirir al finalizar la unidad.
b) Relación y desarrollo (entre el grado anterior y el posterior): muestra en qué grado los estudiantes aprendieron los presaberes y en qué grado darán continuidad al contenido.
c) Plan de estudio de la unidad: presenta el contenido de cada clase.
d) Puntos esenciales de cada lección: describe los elementos importantes de las lecciones por unidad.

3. Prueba de la Unidad

Se presenta un ejemplo de la prueba para medir tanto el nivel de comprensión por parte de los estudiantes como el nivel de alcance del objetivo de la unidad por parte de los docentes. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben pensar en cómo mejorarlo y al mismo tiempo, tratar que este bajo rendimiento no sea un obstáculo para el siguiente aprendizaje. De esta manera, los docentes podrán utilizar esta prueba para discutir con sus colegas, ya sea de la misma institución o de otras, sobre los resultados obtenidos.

4. Elementos de una página de la GM



2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

Secuencia:
En la lección anterior se realizaron productos de polinomios desde monomio por binomio hasta trinomio por trinomio, se debe notar que al desarrollar los productos, las potencias de las variables nunca son mayores que dos. En esta lección se trabajan productos de polinomios que poseen una característica especial, a este tipo de productos se les conoce como **productos notables**.

Propósito:
①, ② Obtener el desarrollo del producto $(x + a)(x + b)$.
Es un caso especial del producto estudiado en la clase 1.2, donde $y = x$.

③ Establecer la identidad que permite desarrollar productos de la forma:
$(x + a)(x + b)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
Es importante que el estudiante memorice esta fórmula.

④ Resolver una variante del Problema inicial, en este caso se puede utilizar directamente el algoritmo.

⑤ Solución del ítem f.

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\left[y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{8}$$

Posibles dificultades:
Al plantear el desarrollo de productos de la forma $(x + a)(x + b)$ que involucren signos negativos. Por ejemplo:
$(y - 3)(y - 2) =$
$y^2 + (-3 + (-2))y + (-3)(-2)$.

Este tipo de desarrollo es muy difícil de concebir para algunos estudiantes. Un método es escribir el proceso:
$(y - 3)(y - 2) = [y + (-3)][y + (-2)]$.

Indicador de logro: Determina productos de la forma $(x + a)(x + b)$.

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.

② **S** **Primera forma:** La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(x + 2)$.
Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:

La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:
$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + (1 + 2)x + 1(2)$$
$$= x^2 + 3x + 2$$

③ **C** El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:
$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$
Por ejemplo:
$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

④ **E** Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.
$$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$$
$$= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)$$
$$= x^2 - x - 6$$
$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

⑤ Desarrolla:
a) $(x + 3)(x + 5)$ $= x^2 + 8x + 15$
b) $(x + 4)(x - 5)$ $= x^2 - x - 20$
c) $(x - 5)(x + 2)$ $= x^2 - 3x - 10$
d) $(y - 1)(y + 2)$ $= y^2 + y - 2$
e) $(y - 2)(y - 3)$ $= y^2 - 5y + 6$
f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$ $= y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

8

Tarea:

Fecha: **U1 2.1**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.

Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $(x + 1)(x + 2)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Las dos formas describen la misma área.
Por tanto, $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Ⓔ Desarrolla $(x + 2)(x - 3)$
$= (x + 2)[x + (-3)]$
$= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)$
$= x^2 - x - 6$
Por lo tanto,
$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

Ⓡ a) $x^2 + 8x + 15$
b) $x^2 + x - 20$
c) $x^2 - 3x - 10$
d) $y^2 + y - 2$
e) $y^2 - 5y + 6$
f) $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

32

Los números ①, ②, ③, ④ y ⑤ hacen referencia a las partes de la clase en las que se requiere de una explicación extra, para que el docente tenga claridad en el propósito de lo señalado y proporcione asistencia al estudiante en función del propósito establecido.

IV. Orientación para el desarrollo de una clase de Matemática con base en la resolución de problemas

1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase

En consonancia con el Programa de Estudio anterior, esta nueva versión también sugiere el desarrollo de las clases de Matemática basándose en el socioconstructivismo a través del enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de los aprendizajes son los estudiantes, por lo que ellos mismos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada. En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir en el aprendizaje de los estudiantes; para lo cual deberá seguir el procedimiento que se detalla a continuación:

Pasos	Proceso de aprendizaje (estudiante)	Proceso de asistencia de aprendizajes (docente)	Puntos que se deben tomar en cuenta en la asistencia
1	Confirmación de la respuesta de los problemas de la tarea y recordatorio de presaberes.	Verificar la respuesta correcta de los problemas de la tarea y asegurarse que están realizando los primeros ítems de cada grupo de problemas en el CE.	Utilizar como máximo 3 minutos para este paso.
2	Resolución individual del problema inicial de la clase.	Orientar para que lean el problema inicial de la clase, confirmar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el tema y luego invitarles a que resuelvan de manera individual.	- Mientras los estudiantes resuelven el problema inicial, el docente debe desplazarse en el aula, para verificar los avances y las dificultades que presenten. - Si presentan dificultades, deberá indicarles que lean la solución del LT. - Utilizar como máximo 6 minutos.
3	Aprendizaje interactivo con sus compañeros.	Fomentar el trabajo entre compañeros para que consulten entre ellos las soluciones y dudas.	- En un primer momento, que trabajen por parejas, gradualmente puede aumentar el número de integrantes por equipo, hasta un máximo de cuatro. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT.
4	Socialización de la solución y la conclusión de la clase.	Orientar para que lean la solución y conclusión de la clase.	Si se considera necesario, se debe explicar la solución o invitarles a que socialicen la solución en plenaria.

5	Resolución del primer ítem de la sección de problemas y ejercicios (aprendizaje activo).	Indicar que resuelvan el primer ítem de la sección de problemas.	Si hay estudiantes que ya resolvieron el primer ítem, invitarles a que trabajen los demás.
6	Evaluación del primer ítem de los problemas.	Verificar la solución del primer ítem de todos los estudiantes y asegurarse que las respuestas son correctas.	- Mientras los estudiantes trabajan, el docente debe desplazarse en el aula revisando el primer ítem de todos los estudiantes. - Dependiendo de la dificultad, el docente puede explicar la solución o simplemente la respuesta.
7	Resolución del resto de ítems.	Orientar para que realicen el resto de ítems. Luego verificar si las respuestas son correctas y orientar para que hagan nuevamente los problemas en los que se equivocaron.	A los estudiantes que terminan primero, se les indica que apoyen a sus compañeros.
8	Tomar nota de la tarea para la casa.	Asignar la tarea del CE, o de los ítems que no se resolvieron del LT.	Si no se logran resolver todos los problemas de la clase del LT, se pueden asignar como tarea, pero analizando la cantidad de tareas que tengan los estudiantes.

Tal como se presentó en la estrategia para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se deben garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo, esto se logrará si se sigue el proceso presentado anteriormente, sobre todo en los pasos 2, 3, 5 y 7.

2. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a. Uso adecuado del tiempo

En el Programa de Estudio se proporcionan los indicadores de logro y los contenidos que deben ser desarrollados en el número de horas de clase establecidas en este mismo documento curricular. Según el programa, se establece que una clase debe durar 45 minutos y la carga horaria anual es de 200 clases. De acuerdo con este lineamiento, en este tiempo se debe facilitar el aprendizaje de todos los contenidos planteados. En este sentido, se requiere una eficiencia en el aprendizaje en función del tiempo establecido. Alcanzar el indicador de logro en 45 minutos no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se presentan algunas técnicas para la facilitación de los aprendizajes.

■ Ubicación de los pupitres de los estudiantes

La forma para ubicar los escritorios o pupitres puede variar dependiendo del propósito de la clase, sin embargo, en la clase de Matemática básicamente se recomienda que los ubiquen en filas, es decir, todos los estudiantes hacia la pizarra debido a las siguientes razones:

a. Facilidad para desplazarse entre los pupitres para verificar el aprendizaje de los estudiantes.
b. Facilidad para el aprendizaje interactivo entre compañeros.
c. Comodidad en la postura de los estudiantes para ver la pizarra.

■ Distribución del LT antes de iniciar la clase

En las aulas se tienen establecidas normas de conducta, pero será necesario que se incluya una más, que oriente a los estudiantes a tener preparados los recursos o materiales necesarios antes del inicio de la clase; por ejemplo, en el caso del LT de tercer ciclo, que debe utilizarse y luego se resguarda en la escuela; esta forma de proceder garantiza que los materiales estén protegidos, pero implica tiempo para la distribución al inicio de la clase. Una vez establecida esta norma, se puede asignar a algunos estudiantes la distribución del LT, de tal manera que se responsabilicen de repartirlos antes de iniciar la clase.

■ Tiempo que puede destinar para el recordatorio o repaso

El tiempo de una clase es limitado y cada una tiene su indicador de logro que todos los estudiantes deben alcanzar. Si se destinan más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos no se logrará alcanzar el indicador por falta de tiempo y este desfase irá provocando otros desfases en las clases posteriores; por consiguiente, en el año escolar no se conseguirá abordar todos los contenidos establecidos en el Programa de Estudio.

Cuando se detectan dificultades en la parte del recordatorio, muchas veces no se logra retroalimentar en un tiempo corto, sino que se requiere más tiempo para asegurar el presaber. Por ejemplo, en tercer ciclo usualmente se tienen dificultades en las operaciones básicas, pero para reforzar este dominio, se requiere de más tiempo para resolver problemas. Al desarrollar la parte del recordatorio entonces, el docente no debe olvidar que su propósito es dar una pista para poder resolver el problema de la clase de ese día, y el reforzamiento no es su propósito principal.

■ Tiempo que se debe destinar para la resolución individual en el Problema inicial de la clase

Tal como se estableció en el punto **1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase**, se deben utilizar 6 minutos. Muchas veces los estudiantes simplemente están esperando otra orientación del docente sin que sepan qué hacer en la resolución individual. En este caso, es mejor orientar un aprendizaje interactivo, invitándoles a que consulten con sus compañeros.

Tiempo insuficiente para terminar el contenido de una clase

Es posible que haya clases donde no alcance el tiempo por lo que quedarán ítems sin ser resueltos. Algunos docentes los toman como contenidos de otra clase y otros los asignan como tarea. Al tomar la primera medida, muchas veces se provocan desfases en el plan de enseñanza, y en el segundo caso, a veces quedan sobrecargadas las tareas, ya que los estudiantes además tendrán el CE cuyo uso principal es para las tareas. Por tanto, el docente puede tomar la decisión de reservar estos problemas sin resolverlos y utilizarlos para el reforzamiento previo a las pruebas o para asignar a los estudiantes que terminan rápido.

Formación del hábito de estudio en los tiempos extra en la escuela

En ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para la consolidación de los aprendizajes. En este caso, además de la asignación de la tarea, puede utilizar una alternativa de aprovechamiento del tiempo extra en la escuela. Según los horarios de las escuelas no hay un tiempo extra, pero en la práctica, sí existe. Por ejemplo, cuando el docente atiende alguna visita o emergencia antes de iniciar la clase o la jornada, antes de que esta termine o cuando termina una clase en menos de 45 minutos, etc., por lo que será mejor aprovechar este espacio de tiempo para realizar los problemas pendientes del LT. Principalmente, se puede aprovechar el tiempo para reforzar los contenidos básicos donde hay mayor dificultad.

Revisión de todos los problemas resueltos, garantizando que las respuestas son correctas

Revisar todos los problemas que hayan resuelto los estudiantes no es una tarea fácil, ya que implica bastante tiempo, por lo que se debe buscar una alternativa que resuelva esta situación. Para esto, es necesario formar dos hábitos en los estudiantes:

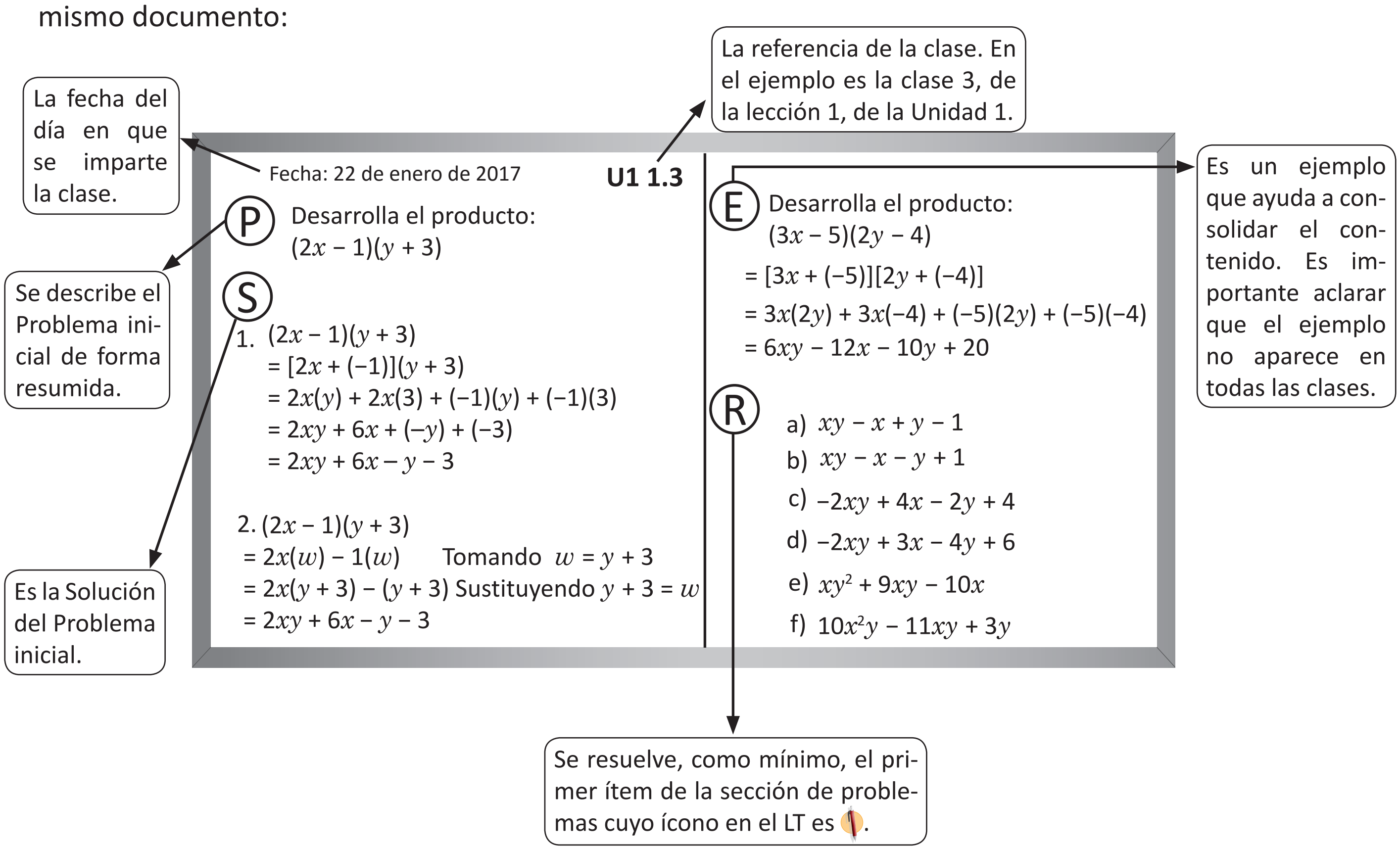
1. El hábito de autocorrección.
2. El hábito de realizar nuevamente los problemas donde se han equivocado.

Al formar el primer hábito, el docente consigue una opción para confirmar las respuestas correctas verbalmente o por escrito en la pizarra; para consolidarlo se puede invitar a los estudiantes a que intercambien los cuadernos para corregirse mutuamente. El segundo hábito permite que los estudiantes no se queden con dudas y esto ayudará a la formación de su personalidad ya que asigna valor al esfuerzo y motivación de lograr el aprendizaje.

Los siguientes puntos no se relacionan directamente con la gestión del tiempo, pero facilitarán la asistencia del docente en el proceso de aprendizaje.

b. Uso de la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo que en ella debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje de la clase. En esta guía se les propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:



Después de la Solución se podría escribir la Conclusión del LT, pero en esta guía se omite para optimizar el tiempo, ya que esa parte está en el CE que es el material fungible que utilizará cada estudiante.

En este documento se les propone el uso de la pizarra para cada clase, por lo que se solicita utilizarlo como se les presenta.

c. Planificación

En esta guía se propone la planificación de cada clase, por lo que no es necesario elaborar en otra hoja la planificación, guión o carta didáctica, sino que debe basarse en las propuestas de esta guía para impartir la clase. Incluso, si lo considera necesario, puede escribir algunos puntos importantes con lápiz de grafito (ya que la guía pertenece a la escuela y no al docente, por lo que no debe escribir con lapicero). En caso que considere necesario realizar una adecuación de acuerdo con la particularidad de sus estudiantes, puede elaborar un plan aparte; pero en tal caso, también puede elaborar solamente un plan de pizarra de acuerdo con la estructura anterior, ya que la pizarra es el resumen de todo el proceso de aprendizaje de una clase. A continuación se propone un ejemplo del plan de uso de la pizarra.

Fecha: ________________ Unidad: _______ Lección: _______

Indicador de logro: ____

____

Plan de pizarra:

Ⓟ	Ⓔ
Ⓢ	Ⓡ
	Tarea:

Número de estudiantes que resolvieron el primer ítem: ☐

Observaciones: ____

____

d. Uso del cuaderno del estudiante

Cada docente puede establecer el uso de cuaderno de apuntes del estudiante siempre y cuando se incluya: fecha de la clase, página del Libro de texto, tema del día, solución, problemas con respuestas correctas. A continuación se presenta un ejemplo del uso del cuaderno.

Fecha: 22 de enero 2017 U1 1.3

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(2x - 1)(y + 3)$

Ⓢ

1. $(2x - 1)(y + 3)$
$= [2x + (-1)](y + 3)$
$= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)$
$= 2x(y) + 6x + (-y) + (-3)$
$= 2xy + 6x - y - 3$

2. $(2x - 1)(y + 3)$ Tomando $w = y + 3$
$= 2x(w) - 1\,(w)$ Sustituyendo $y + 3 = w$
$= 2x(y + 3) - (y + 3)$
$= 2xy + 6x - y - 3$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(3x - 5)(2y - 4)$
$= [3x + (-5)][2y + (-4)]$
$= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)$
$= 6xy - 12x - 10y + 20$

Ⓡ
a) $xy - x + y - 1$
b) $xy - x - y + 1$
c) $-2xy + 4x - 2y + 4$
d) $-2xy + 3x - 4y + 6$
e) $xy^2 + 9xy - 10x$
f) $10x^2y - 11xy + 3y$

e. Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

Muchas veces se brinda asistencia individual a algunos estudiantes que han tenido dificultad, pero no alcanza el tiempo para atender a todos. La orientación debe realizarse de la siguiente manera: si el número de estudiantes que tienen dificultad es menor a cinco, brindar orientación individual, de lo contrario es mejor brindar otro tipo de orientación, tales como: explicación en plenaria, por grupo, a la hora de revisión de la respuesta correcta, entre otras.

f. Tratamiento a los estudiantes que terminan los problemas más rápido que el resto

Una sección está conformada por un grupo heterogéneo, por lo que siempre hay diferencias entre estudiantes, especialmente en el tiempo que se tardan en resolver los problemas. En la educación pública debe garantizarse igualdad de oportunidades para aprender, y en este sentido, si no se tiene orientación sobre qué hacer con los estudiantes que terminan los problemas antes que otros, ellos estarán perdiendo tiempo y se pueden convertir en un factor negativo para la disciplina del aula por no tener qué hacer. Para evitar esta situación y aprovechar el rendimiento de estos estudiantes, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces, ellos pueden orientar a sus compañeros. De esta manera, los que tienen dificultades pueden recibir orientación de sus compañeros, mientras los estudiantes que orientan también lograrán interiorizar el aprendizaje de la clase. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío, para que los estudiantes puedan seguir desarrollando sus capacidades.

g. Revisión de los cuadernos de apunte

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente puede que lo utilicen de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente su uso, en promedio, una vez al mes. La clave para esto es aumentar el número de revisiones al inicio del año escolar, de tal manera que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados y se forme en ellos un hábito. Si se revisa hasta el último detalle del cuaderno, tal vez se necesite más tiempo, por lo que se puede revisar si sigue solamente la estructura del cuaderno de apuntes que se enseñó al inicio del año, el nivel de comprensión en el primer ítem y escribir un comentario sencillo felicitando el buen uso del cuaderno.

h. Revisión de las tareas o CE

De la misma manera que en la revisión de los cuadernos de apuntes, es necesario brindar un monitoreo continuo sobre la realización de las tareas. Además de verificar la realización de la tarea en el primer proceso de las clases, se puede programar periódicamente la revisión de la tarea o CE, prestando especial atención a los estudiantes que hayan cumplido con todas, los que hayan autorevisado con las respuestas correctas y los que resolvieron de nuevo los problemas donde se habían equivocado.

i. Formación del hábito de estudio en el hogar

Según el resultado de la prueba de matemática en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el resultado de los alumnos que estudian más de 30 minutos en el hogar es claramente mejor que los que estudian menos o nada. El tiempo ideal de estudio dependerá del grado, pero por lo general se consideran necesarios 10 minutos por grado, más 10 minutos. Por ejemplo, para el caso de 3er grado es $10 \times 3 + 10 = 40$ minutos. Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas.

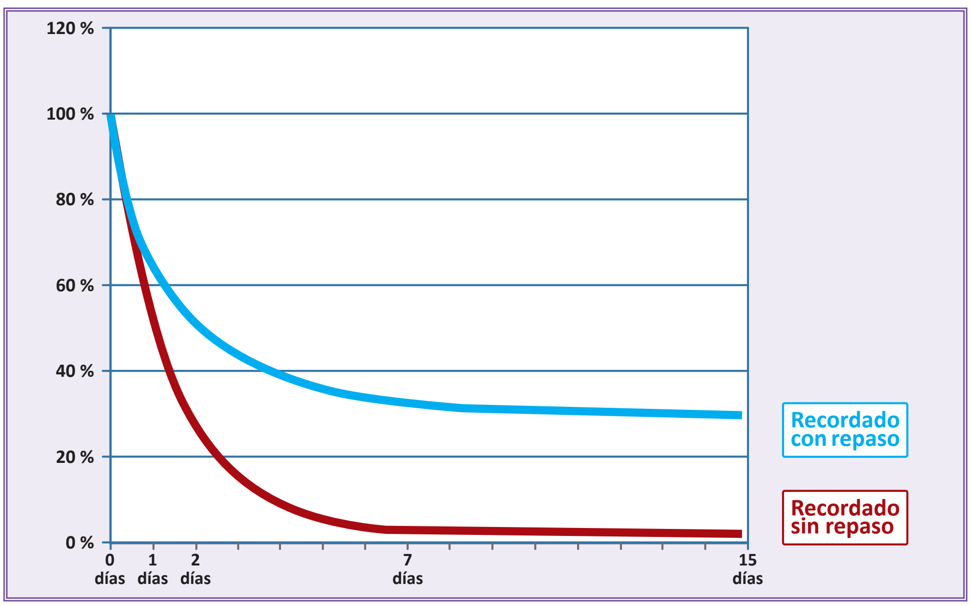
j. **Ciclo de orientación, verificación, reorientación y felicitación**

Como ciclo básico de todas las orientaciones que hace el docente, si se orienta una acción, se debe dar el monitoreo o verificación del cumplimiento de la misma. Luego, si los estudiantes cumplen, se les debe felicitar porque ya pueden hacerlo; en caso contrario, hay que orientar nuevamente sobre el asunto. Esto aplica en todas las orientaciones. Por ejemplo, si se asigna una tarea, se verifica si el estudiante la cumple, se le felicita y si no la realiza se debe reorientar. Este ciclo aplica también en la asistencia del aprendizaje, si se orienta respecto a un contenido y a través de la prueba se verifica que lo han hecho correctamente, se debe felicitar; en caso contrario, se debe reorientar. El ciclo parece sencillo, pero para cumplirlo continuamente se debe formar el hábito.

El CE que se le entrega a cada uno de los estudiantes como material fungible, tiene la finalidad de apoyar la fijación de los contenidos aprendidos ofreciendo los problemas para realizar en la casa, presentando algunos que tienen carácter de desafío para avanzar un poco más allá de lo que se aprende en la clase, integrar algunos temas transversales como la educación financiera, entre otros temas y formar el hábito de estudio en el hogar.

Muchas veces, al hablar de constructivismo, se da más énfasis al proceso de construcción de nuevos conocimientos por sí mismos, dejando de lado el proceso importante de la adquisición del buen dominio o interiorización de ese conocimiento como base para seguir construyendo otros conceptos más complejos. Para asegurar esta interiorización de un contenido se requiere mucha práctica.

Hermann Ebbinghaus, filósofo y psicólogo del siglo XIX, en la famosa **curva del olvido** muestra que como resultado de la memorización mecánica, un día después del aprendizaje, sin repasar, se mantiene en la memoria solamente el 50 % de lo memorizado, dos días después el 30 % y una semana después apenas el 3 %, tal como se muestra a continuación:



Tomando en cuenta este hecho, el Dr. Masaru Ogo experimentó en varios centros escolares de Japón una estrategia llamada "módulo de 3:3", donde los estudiantes refuerzan los problemas del mismo contenido durante tres días, obteniendo mejoras en el aprendizaje y logrando mejorar la curva del olvido, tal como se muestra en la línea roja.

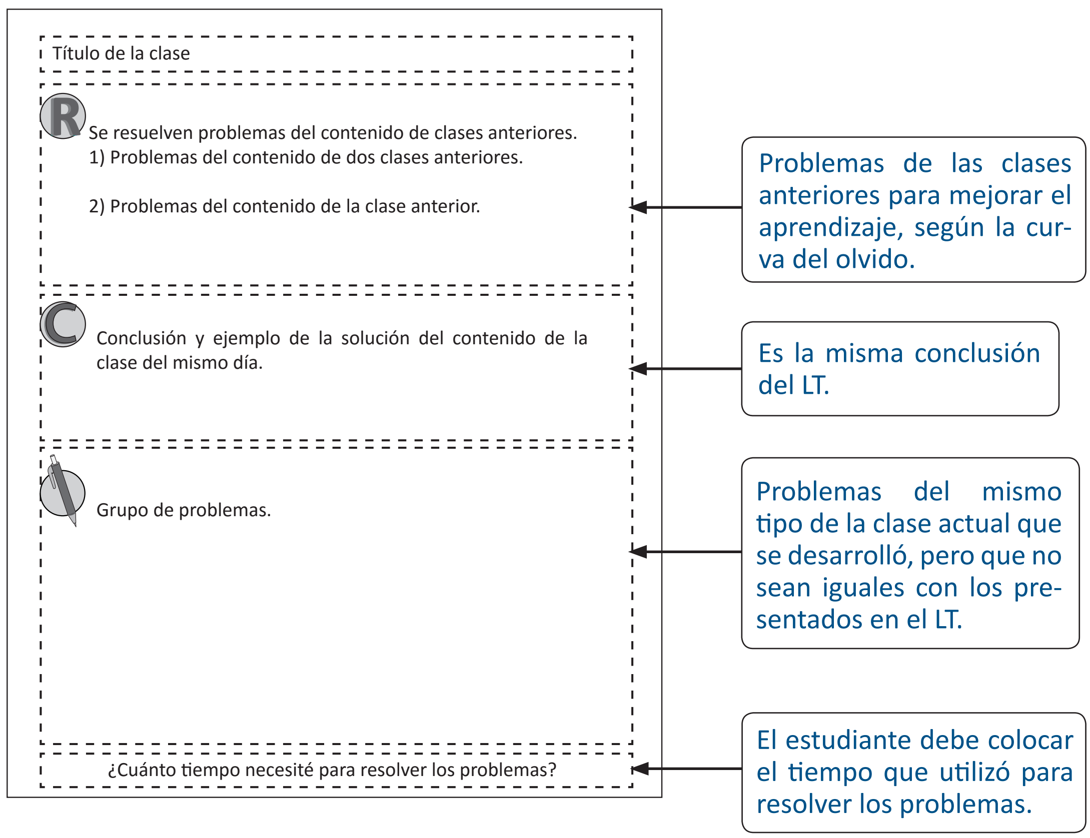
A veces, los problemas o ejercicios sencillos son catalogados como mecánicos; sin embargo, en estudios recientes, especialmente en el campo de neurología, hay una teoría de que los problemas simples activan más la parte de la corteza prefrontal del cerebro donde se encuentra la función de pensar, comunicar, controlar los sentimientos, etc., en comparación con los problemas complejos.

Para finalizar, la importancia de los problemas simples no debe faltar en los resultados de pruebas internacionales donde se evalúan clasificando los ítems, al menos en los dominios cognitivos del conocimiento y aplicación. En los resultados de estas pruebas siempre se obtiene mejor puntaje de conocimiento que de aplicación y claramente muestra correlación entre el puntaje del dominio del conocimiento y el puntaje del dominio de aplicación. De este hecho se puede interpretar que el dominio de conocimientos contribuye al dominio de aplicación, es decir, si se tiene buen dominio en conocimientos se puede mejorar el domino de aplicación.

Por medio del CE se pretende asegurar la interiorización de conocimientos básicos y luego desarrollar la aplicación.

Estructura del CE

Básicamente este documento está estructurado en correspondencia y de acuerdo con las páginas del LT. Para una clase del LT, hay una página correspondiente en el CE. Una página del CE tiene los siguientes elementos: recordatorio o retroalimentación de los contenidos de los días anteriores, conclusión del contenido del día y problemas del contenido del día. A continuación se presenta un esquema de la página:



Uso general del CE

Al final de la clase de Matemática, se debe indicar como tarea el número de la página que corresponde al contenido de la clase del día. En el inicio de la siguiente clase se corroboran las respuestas correctas.

Orientaciones específicas del uso del CE

- Orientar como tarea para el día que tenga la clase de Matemática. En caso de que se tengan dos clases en un día, lo cual no es tan favorable pedagógicamente, debe invitar a que trabajen dos páginas que correspondan a los contenidos del día o separar para realizarlas en dos días.
- En el CE se puede escribir y manchar.
- El docente debe revisar periódicamente, al menos los primeros ítems de cada grupo de problemas y hacer comentarios que orienten e incentiven a los estudiantes.
- Si se considera conveniente, solicitar a los padres de familia que escriban comentarios sobre el avance del estudio en el hogar.
- Si quedan algunas páginas sin ser resueltas, asignar como tarea para los días de las reflexiones pedagógicas, cuando los estudiantes no asisten a las clases.

1. Importancia de la aplicación de las pruebas

Los resultados que se obtienen al evaluar el aprendizaje de los estudiantes, proporcionan al docente información valiosa que le permite tener un panorama real sobre el avance obtenido. Con base en esto, el docente puede tomar decisiones con el fin de garantizar que sus estudiantes alcancen los indicadores de logro de cada clase, desarrollen las competencias transversales y cumplan a su vez con los objetivos de grado propuestos.

Cuando los resultados son positivos, el docente continúa mejorando su práctica, con el fin de que cada vez sea más efectiva.

Si los resultados no son tan favorables, será necesario que el docente autoevalúe su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes y ponga todo su empeño y esfuerzo para dar lo mejor de sí. Para ello, debe participar en procesos de formación, debe investigar sobre los contenidos donde considere que tenga mayores dificultades y podría consultar con sus compañeros de trabajo.

Es importante destacar que el docente es uno de los actores más importantes en el ámbito educativo; por tal razón, debe asumir su rol como tal y autoevaluar su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes.

Considerando lo anterior, debe hacer uso de las pruebas que contiene esta GM, las cuales buscan recolectar información valiosa y relacionada con la realidad de los aprendizajes, tanto adquiridos como no adquiridos.

2. Propósito de las pruebas

Resumiendo lo anterior, se podría concluir que el propósito es el siguiente:
- Obtener información en cuanto al nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes.
- Diseñar estrategias de mejora en los contenidos donde los estudiantes salieron deficientes.
- Evaluar el desempeño del docente y mejorar su práctica basado en el análisis de los resultados de la prueba.

3. Función de cada prueba

Son tres tipos de pruebas, de unidad, de trimestre y final. Todas tienen el mismo propósito planteado. Sin embargo, según su conveniencia, se pueden dar varias funciones a cada una de ellas. A continuación se plantean algunos ejemplos de cómo utilizarlas.

a. Prueba de Unidad

Los ítems que aparecen en dicha prueba corresponden a los principales indicadores de logros (curriculares) los cuales están enunciados en las clases de cada unidad. Por lo tanto, el docente puede conocer el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes. Lo ideal es dar una retroalimentación una vez se detecten las dificultades; sin embargo, no siempre se tiene suficiente tiempo para impartir clases adicionales. En este caso, se puede invitar a los estudiantes para que ellos mismos revisen y trabajen los ítems que no pudieron resolver en el momento de la aplicación de la prueba.

Se puede entregar la copia de las respuestas de la prueba que está en este documento para que la analicen en grupos, de esta forma, ellos pueden aprender interactivamente con sus compañeros; luego, el docente puede recoger la prueba revisada por los estudiantes y esta podría ser una información referencial sobre el avance de sus estudiantes.

Antes de la aplicación de dicha prueba, es recomendable anunciarles a los estudiantes con el fin de que ellos repasen con antelación los contenidos de la unidad a evaluar.

b. Prueba de Trimestre

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del respectivo trimestre. El momento ideal para aplicar dicha prueba será un día antes de finalizar el trimestre, ya que, en la última clase, se pueden retroalimentar los contenidos. Sin embargo, si no se puede hacer así, podría aplicarse en el último día del trimestre y dar la retroalimentación en la primera clase del próximo trimestre.

Además de esto, aprovechando las Reflexiones Pedagógicas, se puede compartir el resultado de las pruebas con docentes de otros centros educativos. Así se podrá consultar cuáles son las dificultades que han encontrado, qué tipo de esfuerzos han aplicado otros docentes, entre otros temas que contribuyan al mejoramiento de los aprendizajes. Una vez establecido un grado de confianza con otros docentes, se podría establecer comunicación vía redes sociales, para compartir información que facilite procesos y contribuya a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

c. Prueba Final

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del año lectivo. Sin duda alguna la aplicación de esta prueba generará mucha expectativa, sabiendo que el resultado será el reflejo de todo el esfuerzo profesional del docente durante todo el año escolar. El resultado le indicará qué es lo que tiene que hacer el próximo año lectivo a fin de mejorar la práctica docente. Además, para dar un uso objetivo a estas pruebas, el docente debe registrar en el expediente escolar, las áreas o contenidos que debe reforzar el docente que atenderá el próximo año a los estudiantes.

4. Uso de los resultados de la prueba

Ejemplo. Se supone que se aplica una prueba a estudiantes de noveno grado, y de ella se presentan dos situaciones:

Respuesta correcta:

	Desarrolla $(x-2)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 - 4x + 4$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	70 %

Respuesta incorrecta:

	Desarrolla $(x-2)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 - 4$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	20 %

Si se obtuvo el resultado planteado, ¿cómo se puede analizar?

Información que el docente puede obtener de este resultado:

Capacidad adquirida	Capacidad no adquirida
El cuadrado de un binomio	El cuadrado de un binomio
	Propiedad distributiva del producto sobre la suma

Estrategia para aprovechar los resultados para la retroalimentación:

Posible consideración a corto plazo	Posible consideración a mediano plazo
Para asegurar que el alumno comprende el cuadrado de un binomio, se pueden desarrollar ejemplos más simples y trabajar directamente con valores numéricos para evitar mayores confusiones y utilizar recursos geométricos.	Se deberá promover una actividad de "aprendizaje interactivo entre alumnos" con el fin de hacerles un recordatorio de los contenidos anteriores con el apoyo y sugerencia de sus compañeros.
Si se observa la misma situación con varios alumnos, será necesario reforzar haciéndoles un recordatorio en la pizarra sobre el mismo tipo de ítem.	Promover el autoestudio en la casa y en el centro educativo hasta que tengan dominio de este tipo de ítems.

Con lo anterior, el docente podrá dedicar su tiempo y esfuerzo a enfocarse en los contenidos que el estudiante no pudo contestar correctamente.

Para finalizar, a continuación se presenta el proceso del uso adecuado de las pruebas que el docente debe seguir:

a. Aplicar la prueba incluida en la GM en el momento oportuno.
   - Prueba de Unidad (cada vez que se finalice una unidad).
   - Prueba de Trimestre (antes de finalizar cada trimestre).
   - Prueba Final (antes de finalizar el grado).

b. Revisar la prueba aplicada.

c. Analizar la información que se obtenga con respecto a los resultados.

d. Diseñar una estrategia para la retroalimentación.

e. En el caso de la Prueba de Trimestre, se analizarán los resultados con los docentes de centros educativos cercanos durante la Reflexión Pedagógica para crear una estrategia de mejora.

Unidad 1. Multiplicación de polinomios

Competencia de la Unidad

Adquirir habilidades del dominio del álgebra elemental, a través de los procesos de multiplicación y factorización de polinomios, apoyándose en justificaciones geométricas que faciliten su visualización para resolver problemas de matemática y de su entorno.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 4: Comunicación con símbolos
- Expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Representación de relaciones entre expresiones matemáticas

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 1: Operaciones algebraicas
- Operaciones con polinomios
- Aplicación de las expresiones algebraicas

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 1: Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Multiplicación de polinomios	1	1. Multiplicación de monomio por binomio
	1	2. Binomio por binomio, parte 1
	1	3. Binomio por binomio, parte 2
	1	4. Binomio por trinomio
	1	5. Trinomio por trinomio
	1	6. Practica lo aprendido
2. Productos notables	1	1. Productos de la forma $(x + a)(x + b)$
	1	2. Cuadrado de un binomio, parte 1
	1	3. Cuadrado de un binomio, parte 2
	1	4. Suma por la diferencia de binomios
	1	5. Desarrollo de productos notables utilizando sustitución
	1	6. Combinación de productos notables
	1	7. Cuadrado de un trinomio
	1	8. Valor numérico y cálculo de operaciones
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Practica lo aprendido
3. Factorización	1	1. Factorización de polinomios
	1	2. Factor común
	1	3. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1
	1	4. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2
	1	5. Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Lección	Horas	Clases
	1	6. Factorización de diferencias de cuadrados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1
	1	9. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2
	1	10. Factorizaciones sucesivas
	1	11. Combinación de factorizaciones
	1	12. Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización
	1	13. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 1

29 horas clase + prueba de la Unidad 1

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Multiplicación de polinomios
Se estudia la multiplicación de polinomios. Utilizando el área de rectángulos se justifica geométricamente el significado de la multiplicación de los polinomios; se establecen los algoritmos para la multiplicación de monomio por binomio, binomio por binomio, binomio por trinomio y trinomio por trinomio.

Lección 2: Productos notables
Se establecen productos especiales llamados productos notables; por ejemplo, el cuadrado de un binomio, la suma por la diferencia de binomios y el cuadrado de un trinomio. Además, se realiza el desarrollo de productos que involucran expresiones más complejas utilizando la sustitución de variables. Este conocimiento servirá de base para la siguiente unidad donde se realizarán productos de raíces cuadradas.

Lección 3: Factorización
Se establece la factorización como el proceso inverso del desarrollo de un producto de polinomios y utilizando áreas de rectángulos se desarrollan ideas intuitivas de algunos algoritmos de factorización. Se estudiará el factor común, factorización de trinomios y trinomios cuadrados perfectos, diferencia de cuadrados y factorizaciones utilizando cambio de variable.

Secuencia:
El álgebra simbólica se estudia formalmente desde séptimo grado, donde se traducen expresiones del lenguaje coloquial al algebraico y se realizan operaciones que involucran un número y una expresión algebraica. Posteriormente, en octavo grado, se continúa el estudio de las operaciones suma y resta de polinomios y se determina el valor numérico de polinomios. El estudiante hasta este momento, utiliza símbolos para generalizar un patrón, es decir, representar una variable con letra, pero también para indicar una incógnita a través de la solución de una ecuación. En esta clase se estudia el producto de un monomio con un binomio, ya que en octavo grado se estudió el producto de monomio con monomio.

Propósito:
①, ② Para facilitar la comprensión se presenta una situación gráfica a través de la cual se pueda relacionar el producto de un monomio con un binomio utilizando áreas de rectángulos, el área puede encontrarse de dos formas diferentes, lo que permite establecer una igualdad entre ambas expresiones.

③ Se establece el algoritmo para realizar la multiplicación de un monomio por un binomio. Es importante mencionar que al proceso de multiplicar polinomios se le llama **desarrollo** y es una aplicación de la propiedad distributiva.

En ④ se utiliza directamente el algoritmo establecido en la conclusión para desarrollar los productos. Hay que prestar atención al signo; además, en el literal b), el orden de los factores es binomio por monomio.

⑤ Solución de algunos ítems.

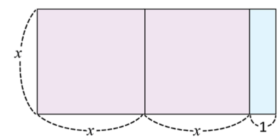
2. a) $-x(xy + x) = -x(xy) + (-x)(x)$
$= -x^2y - x^2$

d) $xy(xy + x + y)$
$= xy(xy) + xy(x) + xy(y)$
$= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Indicador de logro. Desarrolla el producto de monomio por binomio.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.

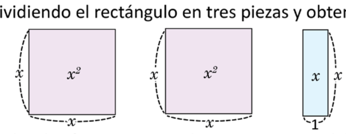


En potenciación se cumple que $a \times a = a^2$

② **S** **Primera forma:**
La altura del rectángulo es x, mientras que su base es:
$x + x + 1 = 2x + 1$. El área del rectángulo formado por las tres piezas es: $x(2x + 1)$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un término o por la suma de dos o más términos. Un **monomio** es el polinomio formado por un solo término.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en tres piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x$.

Por tanto, el área del rectángulo también es: $2x^2 + x$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo, podemos decir, por tanto:
$x(2x + 1) = 2x^2 + x$.

Realizando el producto:
Lo anterior también pudo encontrarse algebraicamente multiplicando x por cada uno de los términos del polinomio $2x + 1$:
$$x(2x + 1) = x(2x) + x(1)$$
$$= 2x^2 + x$$

③ **C** En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$2x(3x + 4) = 2x(3x) + 2x(4)$$
$$= 6x^2 + 8x$$

A este proceso se le llama: **desarrollo**.

④ **E** Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$
$2x(x - y) = 2x(x) - 2x(y)$
$= 2x^2 - 2xy$

b) $(xy - y)(-2x)$
$(xy - y)(-2x) = xy(-2x) - y(-2x)$
$= -2x^2y - (-2xy)$
$= -2x^2y + 2xy$

⑤
1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

a) $x(3x + 2)$ $= 3x^2 + 2x$ b) $2x(x + y)$ $= 2x^2 + 2xy$

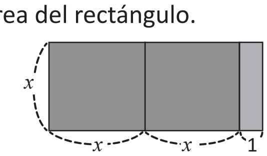
2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $-x(xy + x)$ $= -x^2y - x^2$
b) $-3y(x - y)$ $= -3xy + 3y^2$
c) $(xy + x)xy$ $= x^2y^2 + x^2y$
d) $xy(xy + x + y)$ $= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Tarea: página 2 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 1.1**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $x(2x + 1)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$$x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1.$$
Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $x(2x + 1) = 2x^2 + 1$.

Ⓔ Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$
$= 2x(x) - 2x(y)$
$= 2x^2 - 2xy$

b) $(xy - y)(-2x)$
$= xy(-2x) - y(-2x)$
$= -2x^2y - (-2xy)$
$= -2x^2y + 2xy$

Ⓡ 1.
a) $3x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 2xy$

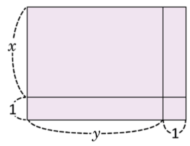
2.
a) $-x^2y - x^2$ b) $-3xy + 3y^2$
c) $x^2y^2 + x^2y$ d) $x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Indicador de logro. Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo.

1.2 Binomio por binomio, parte 1

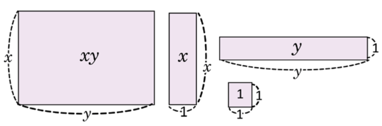
Unidad 1

① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



② **S** **Primera forma:** La altura del rectángulo es $y + 1$ y su base es $x + 1$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(y + 1)$.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



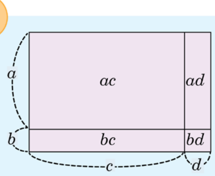
La suma de las áreas de cada pieza es:
$xy + x + y + 1$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$xy + x + y + 1$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Al polinomio formado por dos términos se le llama: **binomio**.

Realizando el producto:
Lo anterior puede encontrarse multiplicando cada término del primer binomio por cada uno de los términos del segundo, es decir: $(x + 1)(y + 1) = x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)$
$= xy + x + y + 1$

③ **C**



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

④ **E**

Desarrolla el producto: $(2xy + x)(3y + 2)$

$(2xy + x)(3y + 2) = 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)$
$= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x$
$= 6xy^2 + 7xy + 2x$

Los términos $4xy$ y $3xy$ son semejantes, pues tienen la misma parte literal xy. Para sumarlos, se suman sus coeficientes 4 y 3, conservando la parte literal.

Por lo tanto, $(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$.

Desarrolla:

a) $(2x + 1)(y + 1)$
$= 2xy + 2x + y + 1$

b) $(2x + 3)(3y + 2)$
$= 6xy + 4x + 9y + 6$

c) $(xy + 3x)(y + 1)$
$= xy^2 + 4xy + 3x$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$
$= 6x^2y + 19xy + 15y$

e) $(x + 1)(x + y)$
$= x^2 + xy + x + y$

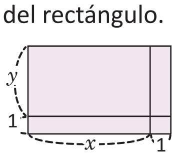
f) $(2x + 3)(x + y)$
$= 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

3

Tarea: página 3 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 1.2**

(P) Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



(S) Forma 1. Calculando el área:
base × altura = $(x + 1)(y + 1)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$xy + x + y + 1$

Las dos formas describen la misma área.
Por tanto, $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

(E) Desarrolla el producto:
$(2xy + x)(3y + 2)$
$= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)$
$= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x$
$= 6xy^2 + 7xy + 2x$

(R)
a) $2xy + 2x + y + 1$
b) $6xy + 4x + 9y + 6$
c) $xy^2 + 4xy + 3x$
d) $6x^2y + 19xy + 15y$
e) $x^2 + xy + x + y$
f) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

Secuencia:
En la clase anterior se obtuvo el algoritmo para multiplicar un monomio por un binomio, en esta clase se amplía hasta deducir el algoritmo para multiplicar un binomio por un binomio, que puede verse como una extensión del algoritmo anterior, cuando los dos factores son binomios.

Propósito:
①, ② Para entender que aparecen cuatro términos, se utiliza el área de rectángulos para deducir el algoritmo de multiplicación de un binomio por binomio.
Los algeblocks pueden elaborarse utilizando material sencillo como cualquier tipo de papel que sea manipulable, se pueden utilizar fotocopias del material complementario que aparece al final del Libro de texto de noveno grado. Es importante que los estudiantes tengan a disposición el material antes de comenzar la clase y no utilizar el tiempo de la misma en organización o preparación del material.

③ En lugar de utilizar directamente la propiedad distributiva, multiplicar asociando una variable a cada paréntesis. Utilizar un modelo de áreas para hacer más comprensible su desarrollo. Para esta clase únicamente se realiza el desarrollo del producto de binomios que involucran signos positivos para facilitar la comprensión.

④ Utilizar el algoritmo descrito en la conclusión para desarrollar el producto de dos binomios.

Posibles dificultades:
En este punto, algunos estudiantes confunden el uso de las letras en expresiones algebraicas, dándoles significado como incógnita; es decir, el estudiante busca que la letra tome un valor numérico concreto. Es importante hacer notar que en estos procesos algebraicos la variable no representa una incógnita, los modelos de área de rectángulos pueden ayudar a evitar este error.

Secuencia:
Anteriormente se utilizaron áreas de rectángulos para deducir el algoritmo de productos de binomios donde todos los términos son positivos. Para esta clase se utiliza este hecho para desarrollar productos que involucren también signos negativos; cambiando la resta a la suma o sustituyendo un binomio por variable.

Propósito:
① Proponer al estudiante una variante de las situaciones de la multiplicación de un binomio por binomio que aprendió en la clase anterior.

② Presentar dos formas distintas de realizar la multiplicación de los binomios. La primera utiliza el algoritmo visto en la clase anterior; en la segunda forma se utiliza por primera vez la técnica del cambio de variable mediante la sustitución $w = y + 3$ y luego realizando el producto de monomio por binomio. Es importante que el alumno no memorice la identidad, lo importante es que sepa utilizar el algoritmo del desarrollo y apoyarse en diferentes técnicas como el cambio de variable.

③ Cuando los estudiantes estén acostumbrados, se espera que omitan el proceso descrito en 1.

En ④ se presenta una variante al Problema inicial cuando los dos términos son una resta, se debe hacer énfasis en que las técnicas utilizadas en el Problema inicial también sirven para desarrollar este producto.

⑤ Solución del ítem d.

$(-x-2)(2y-3)$
$= [-x+(-2)][2y+(-3)]$
$= -x(2y) - x(-3) + (-2)(2y) + (-2)(-3)$
$= -2xy + 3x - 4y + 6$

Posibles dificultades:
Manejo de las operaciones con signos. Por ejemplo, un error común es el siguiente: $-x(-3) = -3x$.

Indicador de logro. Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo y negativo.

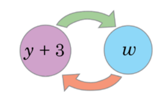
1.3 Binomio por binomio, parte 2

① **P** Desarrolla el producto: $(2x-1)(y+3)$.

La resta $a-b$ puede escribirse como una suma:
$a - b = a + (-b)$

② **S** Se debe tener en cuenta el signo (−) del primer binomio. El producto puede desarrollarse de las siguientes formas:

1. Se escribe $2x-1$ como una suma: $2x+(-1)$. El producto se desarrolla como en la clase anterior:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= [2x+(-1)](y+3)\\ &= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)\\ &= 2xy+6x+(-y)+(-3)\\ &= 2xy+6x-y-3\end{aligned}$$



2. Se toma $y+3=w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= 2x(w)-1(w) \\ &= 2x(y+3)-(y+3) \\ &= 2xy+6x-y-3.\end{aligned}$$
Tomando $w = y+3$, sustituyendo nuevamente $y+3=w$,

Por lo tanto, $(2x-1)(y+3) = 2xy+6x-y-3$.

③ **C** Para resolver el producto de un binomio por otro se puede hacer de 2 formas:

1. Se escribe $a-b = a+(-b)$ y luego se desarrolla el producto.
$$\begin{aligned}(a-b)(c+d) &= [a+(-b)]\,(c+d)\\ &= ac+ad+(-b)c+(-b)d\\ &= ac+ad+(-bc)+(-bd)\\ &= ac+ad-bc-bd\end{aligned}$$

2. Se toma $c+d=w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio.

④ **E** Desarrolla: $(3x-5)(2y-4)$.

Se escribe el primer término como $3x+(-5)$ y el segundo término como $2y+(-4)$:
$$\begin{aligned}(3x-5)(2y-4) &= [3x+(-5)][2y+(-4)]\\ &= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)\\ &= 6xy-12x-10y+20\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x-5)(2y-4) = 6xy-12x-10y+20$.

⑤ Desarrolla:

a) $(x+1)(y-1)$
$= xy - x + y - 1$

b) $(x-1)(y-1)$
$= xy - x - y + 1$

c) $(2x+2)(-y+2)$
$= -2xy + 4x - 2y + 4$

d) $(-x-2)(2y-3)$
$= -2xy + 3x - 4y + 6$

e) $(xy-x)(y+10)$
$= xy^2 + 9xy - 10x$

f) $(2xy-y)(5x-3)$
$= 10x^2y - 11xy + 3y$

4

Tarea: página 4 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 1.3**

(P) Desarrolla el producto:
$(2x-1)(y+3)$

(S)
1. $(2x-1)(y+3)$
$= [2x+(-1)](y+3)$
$= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)$
$= 2xy+6x+(-y)+(-3)$
$= 2xy+6x-y-3$

2. $(2x-1)(y+3)$
$= 2x(w)-1(w)$ Tomando $w = y+3$
$= 2x(y+3)-(y+3)$ Sustituyendo $y+3=w$
$= 2xy+6x-y-3$

(E) Desarrolla el producto:
$(3x-5)(2y-4)$
$= [3x+(-5)][2y+(-4)]$
$= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)$
$= 6xy-12x-10y+20$

(R)
a) $xy-x+y-1$
b) $xy-x-y+1$
c) $-2xy+4x-2y+4$
d) $-2xy+3x-4y+6$
e) $xy^2+9xy-10x$
f) $10x^2y-11xy+3y$

Indicador de logro. Determina el desarrollo del producto de un binomio por trinomio.

1.4 Binomio por trinomio

Unidad 1

① **P** Desarrolla el producto: $(x + 2)(xy + y + 1)$.

El polinomio $xy + y + 1$ se llama **trinomio**, ya que posee tres términos, $(x + 2)(xy + y + 1)$ es el producto de un binomio por un trinomio.

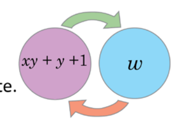
② **S** El producto puede desarrollarse de las siguientes maneras:

1. Multiplicando cada término del binomio por cada uno de los términos del trinomio:

$$(x + 2)(xy + y + 1) = x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$$
$$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$$
$$(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$$

2. Se toma $xy + y + 1 = w$, y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$(x + 2)(xy + y + 1) = (x + 2)w$$
$$= x(w) + 2(w) \qquad \text{Tomando } xy + y + 1 = w,$$
$$= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)$$
$$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2 \qquad \text{sustituyendo nuevamente.}$$
$$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$$



Por lo tanto, $(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$.

③ **C** El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

④ **E** Desarrolla $(2x - 1)(2x - y + 3)$ de las dos formas dadas en la conclusión.

1. Primero, se escribe $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$:

$$(2x - 1)(2x - y + 3) = (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)$$
$$= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)$$
$$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$$
$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

2. Se sustituye $w = 2x - y + 3$:

$$(2x - 1)(2x - y + 3) = (2x - 1)w \qquad \text{Tomando } w = 2x - y + 3,$$
$$= 2x(w) - w$$
$$= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3) \qquad \text{sustituyendo nuevamente.}$$
$$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$$
$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

⑤ Desarrolla de la forma que más se te facilite:

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$ $= 4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$

b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$ $= 10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$

c) $(2x - 3)(x - y - 4)$ $= 2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

5

Tarea: página 5 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 1.4**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + 2)(xy + y + 1)$

Ⓢ

1. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

2. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= (x + 2)w$ Tomando $xy + y + 1 = w$
$= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(2x - 1)(2x - y + 3)$
$= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)$
$= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) +$
$+ (-1)(-y) + (-1)(3)$
$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$

Ⓡ

a) $4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$
b) $10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$
c) $2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

Secuencia:
En las clases anteriores se han trabajado los algoritmos para desarrollar productos, hasta el caso donde los factores poseen dos términos, es por esta razón que para esta clase se estudia el caso cuando uno de los factores posee tres términos. Se debe hacer notar que todos los algoritmos estudiados hasta el momento implican multiplicar los términos del primer polinomio por cada término del segundo.

Propósito:
① Resolver una variante de la multiplicación de polinomios, cuando uno de sus factores posee tres términos.

② Resolver de dos formas distintas el producto de un binomio con un trinomio. La primera es la que permite establecer el algortimo para desarrollar el producto de un binomio con un trinomio y la segunda es una alternativa de solución, pero es igualmente importante que el alumno la domine. Notar que al hacer un cambio de variable, el producto se transforma en otro ya conocido; en ejercicios posteriores, el estudiante podrá utilizar la forma con la que se sienta más cómodo.

③ Establecer formalmente los algoritmos para multiplicar un binomio por trinomio.

La variante presentada en ④ involucra signos negativos en algunos de los términos. Se debe indicar que puede resolverse multiplicando los polinomios o utilizando cambio de variable.

⑤ Desarrollar el producto de binomio con trinomio, utilizando los algoritmos establecidos en ③.

Posibles dificultades:
Es muy común que los estudiantes realicen lo siguiente, $2x(2x) = 4x$, este error puede darse también en clases anteriores.

Recordar que $2x(2x)$ representa el área de un cuadrado de lado $2x$. Por tanto, su área se expresa como $4x^2$, cuando $x > 0$.

Secuencia:
En las clases anteriores se realizaron productos de polinomios, donde el proceso para efectuar este desarrollo del producto resulta ser similar en todos los casos. También aprendieron a utilizar el cambio de variable para realizar el producto de polinomios, esta técnica es útil cuando no se conoce el proceso para desarrollar el producto, ya que la multiplicación se reduce al realizar otra de la que sí se conoce el algoritmo de su desarrollo.

Propósito:
①, ② Resolver una situación desconocida de la multiplicación de polinomios cuando los dos factores son trinomios. A partir de lo aprendido en clases anteriores se debe de intuir que el producto se puede realizar multiplicando cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo. Aquí se omite el uso de cambio de variable.

③ Formalizar el proceso para multiplicar un trinomio con otro trinomio a partir de las conclusiones obtenidas en el Problema inicial.

④ Consolidar el proceso para desarrollar el producto de un trinomio con un trinomio, utilizando una variante del Problema inicial.

Posibles dificultades:
Al sumar términos semejantes; por ejemplo, expresar la respuesta final ignorando el hecho de que xy puede sumarse con yx.

Indicador de logro. Desarrolla el producto de un trinomio por un trinomio.

1.5 Trinomio por trinomio

① **P** Desarrolla el producto: $(x - y + 1)(x + y + 3)$.

¿Deben multiplicarse cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo?

② **S** Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

③ **C** En el producto de un trinomio por un trinomio, se multiplica cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes.

④ **E** Desarrolla el producto: $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$.

Como en el Problema inicial, se debe multiplicar cada término del primer trinomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2x - 4y - y^2 - 3$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$
$= x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$
$= 5x^2 + 13xy + 17x - 17y - 6y^2 - 12$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$
$= 8x^2 - 30xy - 8x - 3y + 18y^2 - 6$

6

Tarea: página 6 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 1.5**

(P) Desarrolla el producto:
$(x - y + 1)(x + y + 3)$

(S) $(x - y + 1)(x + y + 3)$
$= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)$
$= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3$
$= x^2 + 4x - y^2 + y + 3$

Por lo tanto,
$(x - y + 1)(x + y + 3) =$
$x^2 + 4x - y^2 + y + 3$.

(E) Desarrolla el producto:
$(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$
$= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)$
$= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9$
$= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$

(R) a) $x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$
b) $x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$
c) $x^2 + 2x - y^2 - 4y - 3$
d) $x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

Indicador de logro. Resuelve problemas utilizando la multiplicación de polinomios.

Unidad 1

1.6 Practica lo aprendido

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

a) $x(y + 3)$ $= xy + 3x$ b) $(x + 2)(y + 1)$ $= xy + x + 2y + 2$

2. Desarrolla los siguientes productos:

Monomio por binomio:

a) $(-x)(y - 5)$ $= -xy + 5x$ b) $(4x)(xy + y)$ $= 4x^2y + 4xy$

c) $(-xy)(x - y)$ $= -x^2y + xy^2$ d) $(-3xy + 2y)(-xy)$ $= 3x^2y^2 - 2xy^2$

Binomio por binomio:

a) $(y + 2)(2x + 1)$ $= 2xy + 4x + y + 2$ b) $(x + 1)(xy + y)$ $= x^2y + 2xy + y$

c) $(2x - 5)(y + 4)$ $= 2xy + 8x - 5y - 20$ d) $(xy + 3)(x - y)$ $= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio:

a) $(x + 3)(3xy + 2x + 4y)$
$= 3x^2y + 2x^2 + 13xy + 6x + 12y$

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

c) $(xy - 1)(-10xy + 3x + 2y)$
$= -10x^2y^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 10xy - 3x - 2y$

d) $(2x - 3y)(-xy + 4x - 5y)$
$= -2x^2y + 3xy^2 + 8x^2 - 22xy + 15y^2$

Trinomio por trinomio:

a) $(x + y + 1)(x - y + 2)$
$= x^2 - y^2 + 3x + y + 2$

b) $(2x + 5y - 3)(-xy + 3x + 3)$
$= -2x^2y - 5xy^2 + 6x^2 + 18xy - 3x + 15y - 9$

c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

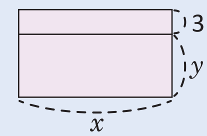
d) $(2xy + 3y - 6)(5xy + 2y + 10)$
$= 10x^2y^2 + 19xy^2 - 10xy + 6y^2 + 18y - 60$

7

Tarea: página 7 del Cuaderno de Ejercicios.

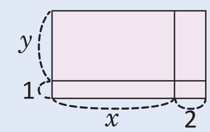
Solución de algunos ítems.

1. a)



Área:
$xy + 3x$

b)



Área:
$xy + x + 2y + 2$

2. Monomio por binomio.

c) $(-xy)(x - y) = (-xy)[x + (-y)]$
$= (-xy)x + (-xy)(-y)$
$= -x^2y + xy^2$

Binomio por binomio.

d) $(xy + 3)(x - y)$
$= (xy + 3)[x + (-y)]$
$= (xy)x + (xy)(-y) + 3x + 3(-y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio.

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$
$= y(3xy) + y(5x) + y(y) + (-2)(3xy) + (-2)(5x) + (-2)(y)$
$= 3xy^2 + 5xy + y^2 - 6xy - 10x - 2y$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

Trinomio por trinomio.

c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$
$= (-xy)(2xy) + (-xy)(2x) + (-xy)(1) + x(2xy) + x(2x) + x(1) + (-1)(2xy) + (-1)(2x) + (-1)(1)$
$= -2x^2y^2 - 2x^2y - xy + 2x^2y + 2x^2 + x - 2xy - 2x - 1$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

Secuencia:
En la lección anterior se realizaron productos de polinomios desde monomio por binomio hasta trinomio por trinomio, se debe notar que al desarrollar los productos, las potencias de las variables nunca son mayores que dos. En esta lección se trabajan productos de polinomios que poseen una característica especial, a este tipo de productos se les conoce como **productos notables**.

Propósito:
①, ② Obtener el desarrollo del producto $(x + a)(x + b)$.
Es un caso especial del producto estudiado en la clase 1.2, donde $y = x$.

③ Establecer la identidad que permite desarrollar productos de la forma:
$(x + a)(x + b)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
Es importante que el estudiante memorice esta fórmula.

④ Resolver una variante del Problema inicial, en este caso se puede utilizar directamente el algoritmo.

⑤ Solución del ítem f.

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\left[y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{8}$$

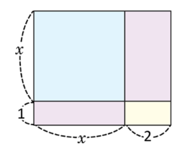
Posibles dificultades:
Al plantear el desarrollo de productos de la forma $(x + a)(x + b)$ que involucren signos negativos. Por ejemplo:
$(y - 3)(y - 2) =$
$y^2 + [-3 + (-2)]y + (-3)(-2)$.

Este tipo de desarrollo es muy difícil de concebir para algunos estudiantes. Un método es escribir el proceso:
$(y - 3)(y - 2) = [y + (-3)][y + (-2)]$.

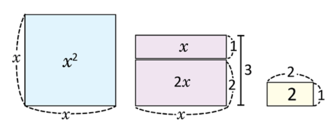
Indicador de logro. Determina productos de la forma $(x + a)(x + b)$.

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



② **S** **Primera forma:** La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(x + 2)$.
Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

③ **C** El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

④ **E** Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

⑤ Desarrolla:

a) $(x + 3)(x + 5)$
$= x^2 + 8x + 15$

b) $(x + 4)(x - 5)$
$= x^2 - x - 20$

c) $(x - 5)(x + 2)$
$= x^2 - 3x - 10$

d) $(y - 1)(y + 2)$
$= y^2 + y - 2$

e) $(y - 2)(y - 3)$
$= y^2 - 5y + 6$

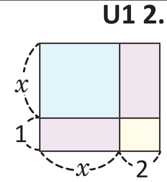
f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$
$= y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

8

Tarea: página 8 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.1**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $(x + 1)(x + 2)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Las dos formas describen la misma área.
Por tanto, $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Ⓔ Desarrolla $(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{aligned}&= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

Ⓡ
a) $x^2 + 8x + 15$
b) $x^2 + x - 20$
c) $x^2 - 3x - 10$
d) $y^2 + y - 2$
e) $y^2 - 5y + 6$
f) $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

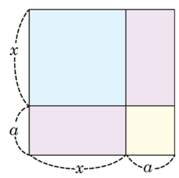
2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

Indicador de logro. Justifica geométricamente el desarrollo del cuadrado de una suma.

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

Unidad 1

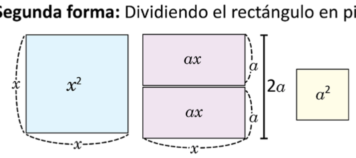
① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



El área de un cuadrado de lado l es igual a l^2.

② **S** **Primera forma:** El lado del cuadrado formado por las cuatro piezas es $x + a$, por tanto su área será igual a $(x + a)^2$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$x^2 + 2ax + a^2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Realizando el producto:
El producto $(x + a)^2$ también puede desarrollarse algebraicamente, utilizando lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

③ **C** El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

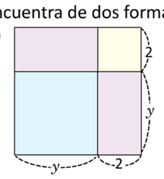
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

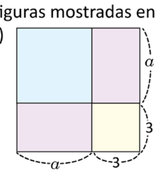
④ 1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las figuras mostradas en cada literal:

a)



$y^2 + 4y + 4$

b)



$a^2 + 6a + 9$

2. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2$ $= x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2$ $= x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$ $= x^2 + x + \frac{1}{4}$

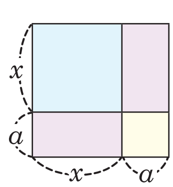
d) $(x + \frac{1}{4})^2$ $= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

9

Tarea: página 9 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.2**

(P) Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



(S) Forma 1. Calculando el área: $(x + a)^2$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

(R) 1. a) $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$

b) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$

2. a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2(\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2})^2$
$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Secuencia:
Al inicio de la segunda lección se estudió el producto notable de la forma: $(x + a)(x + b)$, utilizando áreas se dedujo el desarrollo de este producto. Por tanto, es conveniente que para esta clase se analice el caso particular de estos productos, cuando los dos factores son iguales, es decir, $(x + a)(x + a)$.

Propósito:
①, ② La fórmula de esta clase se puede obtener haciendo $b = a$ en la fórmula de la clase anterior. Para justificar y recordar la aparición del coeficiente 2 en el término $2ax$ se utiliza la gráfica.

③ Establecer formalmente el desarrollo del producto notable $(x + a)^2$:
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. En esta clase se estudia únicamente el caso para el cuadrado de una suma, el cuadrado de una resta se estudia hasta la siguiente. Además de la idea intuitiva, hay que memorizar esta fórmula.

④ Solución de algunos ítems:

1. a) Forma 1
Calculando el área:
altura × base = $(y + 2)(y + 2)$
Forma 2
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$y^2 + 2y + 2y + 2^2 = y^2 + 4y + 4$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$.

2. a)
$(x + 1)^2 = x^2 + 2(1)x + 1$
$= x^2 + 2x + 1$

Posibles dificultades:
Comprender que el segundo término de la expansión del binomio es una multiplicación. Por ejemplo, en la expansión: $(x + 3)^2 = x^2 + 2(3)x + 3^2$, los estudiantes pueden dudar sobre el tipo de operación que se debe realizar con todos los términos involucrados.

Indicar que los tres términos se están multiplicando y el producto con x solo se indica dado que es una variable y no se puede conocer el resultado del producto.

Secuencia:
En la clase anterior se trabajó el desarrollo del cuadrado de un binomio cuando la expresión es una suma, para esta clase se estudia particularmente el caso cuando la expresión es una resta.

Se prescinde del uso de modelos de áreas para obtener este producto notable ya que la manipulación de áreas negativas no es muy razonable y crea confusión en el estudiante; sin embargo, se utiliza un procedimiento algebraico más simple y comprensible.

Propósito:
①, ② Deducir el desarrollo del producto notable de la forma $(x - a)^2$, utilizando la forma $(x + a)^2$.

③ Comparar con el desarrollo del cuadrado de una suma, visto en la clase anterior; para recordar los signos, hay que memorizar esta fórmula, aclarando que el acto de memorizar la fórmula se logrará con la práctica de los ejercicios.

④ Desarrollar el cuadrado de una resta utilizando directamente lo establecido en ③.

⑤ Desarrollo del ítem f:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

Indicador de logro. Determina el desarrollo del cuadrado de una resta.

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

① P

Desarrolla el producto: $(x - a)^2$.

$(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

② S

Se escribe $(x - a)^2$ como $[x + (-a)]^2$ y se utiliza lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2 \\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a) \\ &= a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

③ C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ....(1)

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ ....(2)

④ E

Desarrolla:

$(x - 2)^2$

Utilizando el caso (2) del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2 \\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

⑤

Desarrolla:

a) $(x - 1)^2$
$= x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2$
$= x^2 - 6x + 9$

c) $(x - 4)^2$
$= x^2 - 8x + 16$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$
$= x^2 - x + \frac{1}{4}$

e) $(x - \frac{1}{4})^2$
$= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

f) $(x - \frac{1}{3})^2$
$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

10

Tarea: página 10 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.3**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x - a)^2$

Ⓢ
$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2 \\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Ⓔ Desarrolla:
$(x - 2)^2$

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2 \\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Ⓡ a) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

Indicador de logro. Desarrolla la suma por la diferencia de binomios.

2.4 Suma por la diferencia de binomios

Unidad 1

① **P** Desarrolla el producto: $(x + a)(x - a)$.

② **S** Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$ y luego se desarrolla:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

En la solución:
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
Es decir, este producto se desarrolla de forma diferente al cuadrado de un binomio.

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

③ **C** El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma: $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

④ **E** Desarrolla:

$(x - 2)(x + 2)$

Utilizando suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

⑤ 1. Desarrolla:

a) $(x + 1)(x - 1)$ $= x^2 - 1$

b) $(x + 3)(x - 3)$ $= x^2 - 9$

c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$ $= x^2 - \frac{1}{4}$

d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$ $= x^2 - \frac{1}{16}$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y - 8)(y - 10)$ $= y^2 - 18y + 80$

b) $(x + 11)^2$ $= x^2 + 22x + 121$

c) $(y - 9)^2$ $= y^2 - 18y + 81$

d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$ $= y^2 - \frac{16}{9}$

11

Tarea: página 11 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.4**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + a)(x - a)$

Ⓢ Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

Ⓔ Desarrolla: $(x - 2)(x + 2)$

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

Ⓡ 1. a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4}) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. a) $y^2 - 18y + 80$

b) $x^2 + 22x + 121$

Secuencia:
Desde la clase 1 de esta lección se han estudiado productos notables donde ambos factores son un binomio, estudiando el caso particular cuando ambos binomios son el mismo. Esta clase es una extensión de ese estudio para el caso particular $(x + a)(x - a)$.

Propósito:
①, ② Utilizar la fórmula: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ para desarrollar el producto $(x + a)(x - a)$ obteniendo una expresión que permita desarrollar este tipo de productos.

③ Formalizar el desarrollo del producto de la suma por la diferencia de binomios, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$. Realizar un recordatorio de todos los productos notables y su desarrollo, estudiados hasta esta clase. Al igual que en las anteriores hay que memorizar esta fórmula.

④ Resolver un problema similar al inicial, a diferencia de este, el binomio de la resta es el primer factor y para su solución se aplica directamente el algoritmo.

⑤ Solución de algunos ítems.

1. d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. b) $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 121$

Secuencia:
Hasta la clase 2.4 se desarrollaron algunos productos notables para los casos donde los factores que intervienen en el producto son binomios, además, en la lección 1 se utilizó el cambio de variable para simplificar productos a otros más sencillos, en esta clase se utiliza el cambio o sustitución de variables para desarrollar productos notables que involucren expresiones un poco más complejas.

Propósito:
①, ② Enfrentarse a una situación variante del cuadrado de un binomio, donde ambos términos son variables. En la solución del libro se utiliza el método de cambio de variable, un estudiante bien podría obtener la solución directamente, sin embargo, es indispensable que se desarrolle también la solución planteada en el LT, dado que es el objetivo inmediato de la clase.

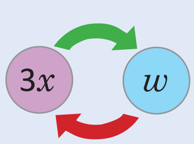
③ Cuando el estudiante esté acostumbrado, se espera que haga el cambio de variable mentalmente.

④ Resolver un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ utilizando la sustitución de variables.

⑤ Resolver diferentes productos notables utilizando la sustitución de variables.

Posibles dificultades:
Al realizar un cambio de variable y desarrollar el producto no se debe olvidar volver a la variable original, este puede ser un paso que genere dificultad para algunos estudiantes.

En la imagen, la flecha verde indica el primer cambio y la flecha roja indica volver a la variable original.



Indicador de logro. Multiplica polinomios utilizando un cambio de variable.

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

① **P** Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$.

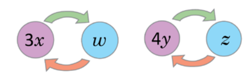
¿Puede realizarse el producto de forma similar a $(x + a)^2$?

② **S** Se toman $3x = w$, $4y = z$ y se desarrolla el producto como el cuadrado de un binomio:

$(3x + 4y)^2 = (w + z)^2$ — Tomando $3x = w$ y $4y = z$,

$= w^2 + 2wz + z^2$

$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$ — sustituyendo nuevamente w por $3x$ y z por $4y$.



Por tanto, $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

③ **C** Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

④ **E** Desarrolla, aplicando productos notables:

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

Ambos binomios tienen el término $2x$. Se toma $2x = w$ y se desarrolla el producto de la misma forma que lo visto en la clase 1:

$(2x + 1)(2x + 3) = (w + 1)(w + 3)$ — Tomando $2x = w$,

$= w^2 + (1 + 3)w + 1(3)$

$= w^2 + 4w + 3$

$= (2x)^2 + 4(2x) + 3$ — sustituyendo nuevamente $w = 2x$.

Por tanto, $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$.

⑤ Desarrolla:

a) $(5x - 3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3) = 9x^2 - 15x + 6$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2 = 9y^2 - 3y + \frac{1}{4}$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3) = \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} + 6$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5}) = 9y^2 - \frac{1}{25}$

12

Tarea: página 12 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.5**

Ⓟ Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$

Ⓢ $(3x + 4y)^2$

$= (w + z)^2$ Tomando $3x = w$ y $4y = z$

$= w^2 + 2wz + z^2$

$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

Sustituir nuevamente w por $3x$ y z por $4y$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Por tanto,
$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

Ⓔ Desarrolla $(2x + 1)(2x + 3)$:

$(2x + 1)(2x + 3)$

$= (w + 1)(w + 3)$ Tomando $2x = w$

$= w^2 + (1 + 3)w + 1(3)$

$= w^2 + 4w + 3$

$= (2x)^2 + 4(2x) + 3$ Sustituyendo $w = 2x$

Por tanto,
$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

Ⓡ a) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $9x^2 - 15x + 6$

2.6 Combinación de productos notables

Indicador de logro. Multiplica polinomios utilizando combinación de productos notables.

Secuencia:
Para esta clase se utilizan los productos notables estudiados a lo largo de la lección para desarrollar problemas que involucren más de un producto notable.

Propósito:
①, ② Resolver ejercicios donde se combinen las operaciones con productos notables, desarrollando más de un producto notable en cada problema; es posible también utilizar la sustitución para simplificar el ejercicio. En a) es un producto de trinomios, se debe utilizar la sustitución de variables para aplicar productos notables.

③ Observar que hay casos donde para aplicar productos notables hay que agrupar los términos.

④ Resolver ejercicios sobre combinación de productos notables.

Solución del ítem a.

$(x - y + 1)(x - y - 1)$

Tomando $x - y = w$
$= (w + 1)(w - 1)$
$= w^2 - 1$
$= (x - y)^2 - 1$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

2.6 Combinación de productos notables

Unidad 1

① **P** Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

¿Qué productos notables están involucrados en ambos literales? Por ejemplo, los trinomios del primer literal tienen en común la suma $x + y$.

② **S** a) Ambos trinomios tienen en común la suma $x + y$, y el número 1 es positivo en el primero y negativo en el segundo. Se toma $x + y = w$ y el producto se desarrolla como una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && \text{Tomando } x + y = w,\\ &= w^2 - 1^2\\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

b) Los productos involucrados son cuadrados de un binomio y productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Después de desarrollar ambos, se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$.

③ **C** Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identificar cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarrollar los productos teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reducir los términos semejantes, si los hay.

④ Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$
$= x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$
$= -24x^2 - 9x + 7$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$
$= -8y^2 - 12y - 5$

e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= x^4 - 1$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$
$= x^4 + y^2 - 13$

13

Tarea: página 13 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.6**

Ⓟ Desarrolla:
a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

Ⓢ a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
$= (w + 1)(w - 1) \qquad x + y = w$
$= w^2 - 1^2$
$= (x + y)^2 - 1$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 1$

Por lo tanto,
$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1.$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$
$= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)$
$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10$
$= 5x^2 + 3x + 11$

Por lo tanto,
$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11.$

Ⓡ a) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
b) $x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$
c) $-24x^2 - 9x + 7$
d) $-8y^2 - 12y - 5$

2.7 Cuadrado de un trinomio

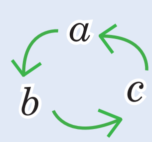
Materiales:
Algeblocks, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:
En clases anteriores se han estudiado los productos notables, cuando los factores que intervienen son binomios, para esta clase se estudia el caso donde ambos factores son el mismo trinomio.

Propósito:
① Encontrar el área de un cuadrado donde la medida de su lado se expresa como $a + b + c$.

② Se presentan dos formas para encontrar el desarrollo de un trinomio cuadrado, uso de áreas y cambio de variable. La gráfica ayudará a comprender cuáles son los términos resultantes.

El gráfico representa el orden en el que se colocan los términos en el desarrollo del trinomio y en los productos dos a dos de cada término.



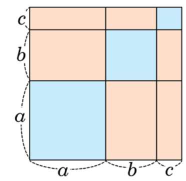
③ Prestar atención en la forma de los productos y sus coeficientes para poder memorizarla.

④ Observar que la resta siempre se convierte en una suma.

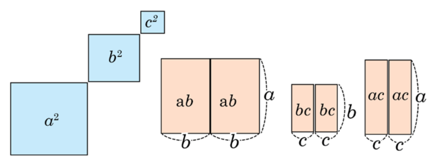
Indicador de logro. Desarrolla el cuadrado de un trinomio.

2.7 Cuadrado de un trinomio

① **P** Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



② **S** **Primera forma:** Como se trata de un cuadrado de lado $a + b + c$ su área se expresa como $(a + b + c)^2$.
Segunda forma: Se divide el cuadrado en piezas iguales y se tienen sus áreas respectivas:



Como se muestra en la imagen, la suma de las áreas de cada pieza es:
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

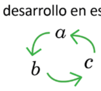
Realizando el producto: Se toma $b + c = w$ y se desarrolla como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + w)^2 \\ &= a^2 + 2aw + w^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Tomando $b + c = w$,
sustituyendo nuevamente $w = b + c$.

Por tanto: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Al desarrollar este producto es común colocar su desarrollo en este orden:



③ **C** El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

④ **E** Desarrolla: $(5x - 3y + 4)^2$.
El trinomio $5x - 3y + 4$ puede escribirse como $5x + (-3y) + 4$. Luego, el cuadrado se desarrolla de la siguiente manera: $(5x - 3y + 4)^2 = (5x + (-3y) + 4)^2$

$$\begin{aligned}&= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x) \\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x \\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)^2$ $= x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$

b) $(2x + y + 3)^2$ $= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy + 6y + 12x$

c) $(3x - 2y + 5)^2$ $= 9x^2 + 4x^2 + 25 - 12xy - 20y + 30x$

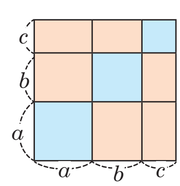
d) $(x - 5y - 1)^2$ $= x^2 + 25y^2 + 1 - 10xy + 10y - 2x$

14

Tarea: página 14 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.7**

P Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado.



S Forma 1.
Calculando el área:
altura × base = $(a + b + c)^2$

Forma 2.
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Por tanto,
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Realizando el producto:

$$\begin{aligned}&(a + b + c)^2 \\ &= (a + w)^2 \\ &= a^2 + 2aw + w^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}&(5x - 3y + 4)^2 \\ &= (5x + (-3y) + 4)^2 \\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x) \\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x\end{aligned}$$

Indicador de logro. Calcula el valor numérico de expresiones algebraicas y de operaciones aritméticas utilizando productos notables.

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

Unidad 1

① P ¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

¿En cuál producto notable están involucradas las expresiones $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, ab?

② S En el problema NO se pretende encontrar los valores de a y b, sino de $(a + b)^2$. Observa que $a^2 + b^2$ y ab corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se sustituyen los valores en lo anterior:

En una suma, el orden de los sumandos no altera el total: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

③ E Calcula 98 × 102 usando productos notables.

Los números 98 y 102 pueden escribirse como 100 – 2 y 100 + 2, respectivamente:

98 × 102 = (100 – 2)(100 + 2)

Lo anterior es una suma por diferencia de binomios:

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto: (100 – 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 – 2).

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10\,000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9\,996\end{aligned}$$

④ 1. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a – b)^2$ si $a^2 + b^2 = 34$ y $ab = 15$? $(a – b)^2 = 4$

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a – b = 2$ y $a^2 – b^2 = 16$? $a + b = 8$

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

a) 97 × 103 = 9 991

b) 95 × 105 = 9 975

c) 102^2 = 10 404

d) 105^2 = 11 025

15

Tarea: página 15 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 2.8**

Ⓟ ¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

Ⓢ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$

$= 6 + 2(3)$

$(a + b)^2 = 12$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

Ⓔ Calcula 98 × 102

98 × 102 = (100 – 2)(100 + 2)

98 × 102 = $100^2 – 2^2$

= 10 000 – 4

98 × 102 = 9 996

Ⓡ 2. a) 9 991

b) 9 975

c) 10 404

d) 11 025

Secuencia:

Hasta la clase anterior se han estudiado todos los productos notables necesarios para un estudiante de noveno grado; posteriormente en bachillerato se ampliarán utilizando el binomio de Newton para desarrollar productos de binomios con exponente mayor a 2. Para esta clase es necesario analizar qué producto notable se debe utilizar para resolver un problema particular.

Propósito:

①, ② Se trata de expresar $(a + b)^2$ utilizando los términos, $a^2 + b^2$ y ab que aparecen en su desarrollo.

③ Identificar que se pueden utilizar productos notables, no solo en la resolución de problemas algebraicos sino también para simplificar cálculos aritméticos.

④ Resolver ítems similares a los desarrollados en la clase sobre el valor numérico de expresiones y operaciones aritméticas.

Solución de algunos ítems.

1. b) $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$

$16 = (a + b)(2)$

$8 = a + b$

2. a) 97 × 103

97 × 103 = (100 – 3)(100 + 3)

$= 100^2 – 3^2$

= 10 000 – 9

= 9 991

d) $(105)^2$

$(100 + 5)^2 =$

$(100)^2 + 2(100)(5) + (5)^2$

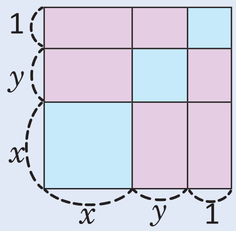
= 10 000 + 1 000 + 25

= 11 025

2.9 Practica lo aprendido

Solución de algunos ítems.

1. c)



Forma 1:
altura × base = $(x + y + 1)^2$

Forma 2:
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$$x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$$

Por tanto,
$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$

2. d) $\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)$

$= \left[y + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[y + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

$= y^2 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]y + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$= y^2 + \left[-\frac{4}{2}\right]y + \frac{3}{4}$

$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

3. a) $(x + 6)^2$

$= x^2 + 2(6)x + 6^2$

$= x^2 + 12x + 36$

h) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$

$= y^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)y + \frac{1^2}{3^2}$

$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. c) $\left(y + \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)$

$= y^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

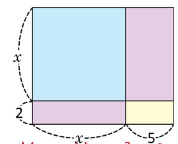
$= y^2 - \frac{1}{25}$

Indicador de logro. Resuelve problemas utilizando productos notables.

2.9 Practica lo aprendido

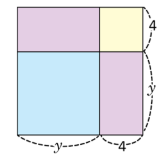
1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las siguientes figuras:

a)



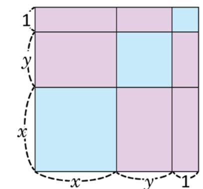
$(x + 5)(x + 2)$ y $x^2 + 2x + 5x + 10$

b)



$(y + 4)^2$ y $y^2 + 4y + 4y + 16$

c)



$(x + y + 1)^2$ y $x^2 + y^2 + 1 + xy + xy + x + x + y + y$

2. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $(x + 1)(x + 9)$ $= x^2 + 10x + 9$

b) $(x + 3)(x - 6)$ $= x^2 - 3x - 18$

c) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{3}{6})$ $= x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

d) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{3}{2})$ $= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

e) $(y - 1)(y + 2)$ $= y^2 + y - 2$

f) $(x - 4)(x - 2)$ $= x^2 - 6x + 8$

3. Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios:

a) $(x + 6)^2$ $= x^2 + 12x + 36$

b) $(y - 6)^2$ $= y^2 - 12y + 36$

c) $(x + \frac{1}{5})^2$ $= x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{1}{4})^2$ $= y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$

e) $(x + 5)^2$ $= x^2 + 10x + 25$

f) $(y - 2)^2$ $= y^2 - 4y + 4$

g) $(x + 2)^2$ $= x^2 + 4x + 4$

h) $(y - \frac{1}{3})^2$ $= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$ $= x^2 - 49$

b) $(x + 10)(x - 10)$ $= x^2 - 100$

c) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$ $= y^2 - \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{2}{3})(y + \frac{2}{3})$ $= y^2 - \frac{4}{9}$

e) $(x + 4)(x - 4)$ $= x^2 - 16$

f) $(x + 9)(y - 9)$ $= xy - 9x + 9y - 81$

16

Tarea: página 16 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Practica lo aprendido

Indicador de logro. Resuelve problemas utilizando productos notables.

2.10 Practica lo aprendido

Unidad 1

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(6x - 10)(6x - 2)$ $= 36x - 72x + 20$

b) $(\frac{x}{2} + 2)(\frac{x}{2} + 4)$ $= \frac{x^2}{4} + 3x + 8$

c) $(5x - 6y)^2$ $= 25x^2 - 60xy + 36y^2$

d) $(6x + 10y)^2$ $= 36x^2 + 120xy + 100y^2$

e) $(2x - 3)(2x - 1)$ $= 4x^2 - 8x + 3$

f) $(5x - 3y)^2$ $= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

g) $(\frac{y}{3} - 3)^2$ $= \frac{y^2}{9} - 2y + 9$

h) $(2x + \frac{1}{2})(2x - \frac{1}{2})$ $= 4x^2 - \frac{1}{4}$

2. Desarrolla:

a) $(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

b) $(x + y)(x - y) + (x + y)^2$
$= 2x^2 + 2xy$

c) $(2x - 3)^2 - (5y - 1)(5y + 2)$
$= 4x^2 - 25y^2 - 12x - 5y + 11$

d) $(y^2 + 1)(y^2 - 1) - (y^2 + 1)^2$
$= -2y^2 - 2$

e) $(5x + 10y + 3)^2$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x + 60y + 9$

f) $(4x - 2y - 6)^2$
$= 16x^2 - 16xy + 4y^2 - 48x + 24y + 36$

3. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$, si $a^2 + b^2 = 104$ y $ab = 20$? $(a - b)^2 = 64$

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a - b$, si $a + b = 8$ y $a^2 - b^2 = 32$? $a - b = 4$

c) ¿Cuál es el valor numérico de xy, si $x + y = 6$ y $x^2 + y^2 = 1$? $xy = \frac{35}{2}$

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando productos notables:

a) 101^2
$= (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 200 + 1$
$= 10\,201$

b) 102×101
$= (100 + 2)(100 + 1)$
$= 10\,000 + 200 + 100 + 2$
$= 10\,302$

c) 49×51
$= (50 - 1)(50 + 1)$
$= 50^2 - 1^2$
$= 2\,499$

d) 99^2
$= (100 - 1)^2$
$= 100^2 - 200 + 1$
$= 9\,801$

17

Tarea: página 17 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems.

1. f) Sea $w = 5x$ y $z = 3y$.

$(5x - 3y)^2 = (w - z)^2$
$= w^2 - 2(w)(z) + z^2$
$= (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

2. a) Sea $w = 2x + y$.

$(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= (w + 2)(w - 2)$
$= w^2 - 2^2$
$= (2x + y)^2 - 4$
$= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2 - 4$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

$= (5x)^2 + (10y)^2 + 3^2 + 2(5x)(10y) +$
$2(10y)(3) + 2(3)(5x)$
$= 25x^2 + 100y^2 + 9 + 100xy +$
$60y + 30x$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x +$
$60y + 9$

3. c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$6^2 = 1 + 2xy$
$36 - 1 = 2xy$
$35 = 2xy$
$xy = \frac{35}{2}$

4. b) $(100 + 2)(100 + 1)$

$= (100)^2 + (2 + 1)(100) + 2(1)$
$= 10\,000 + 300 + 2$
$= 10\,302$

Materiales:
Algeblocks, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:
En el contenido de la lección anterior se estudiaron todos los casos de productos notables que son necesarios para el desarrollo de esta lección y otros contenidos a estudiar.
Se entenderá la factorización como el proceso inverso de la multiplicación, por lo que es importante dominar el desarrollo de productos notables para establecer las relaciones con los diferentes tipos de factorización.

Propósito:
① Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado. Este es el proceso inverso de descomponer el rectángulo en piezas.

② Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. El área de las piezas se escribe al lado izquierdo de la igualdad y el producto altura con base al lado derecho, contrario a como se escribía en la lección anterior.

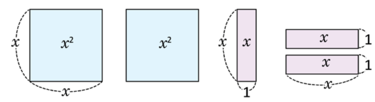
③ Definir el término **factorización** como el proceso inverso al desarrollo de la multiplicación de polinomios. Se utiliza el ejemplo para mostrar que el polinomio $2x^2 + 3x$ se puede escribir como la multiplicación del monomio x y el binomio $2x + 3$.

④ En el numeral 1 se espera un desarrollo similar al del Problema inicial, mientras que en el numeral 2 se deben identificar los factores involucrados en el producto, esto facilitará la comprensión del lenguaje utilizado para factorizar polinomios en las próximas clases. En a) se puede considerar que los factores son 2, x y $5x - 3$; sucede lo mismo con b) y d).

Indicador de logro. Relaciona la factorización como proceso inverso de la multiplicación de polinomios.

3.1 Factorización de polinomios

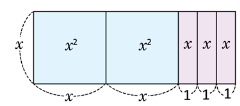
① **P** Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:



Las piezas azules son cuadrados de lado x; mientras que las piezas moradas son rectángulos de altura x y base 1.

a) ¿Cómo quedará el rectángulo?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido por Antonio?

② **S**
a) El lado de los cuadrados azules es igual a la altura de los rectángulos morados (ambos miden x). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b) El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea, $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$.
c) Las medidas de la altura y la base son:

Altura ⟶ x
Base ⟶ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

El área del rectángulo formado por las piezas se calcula como Altura × Base.

Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

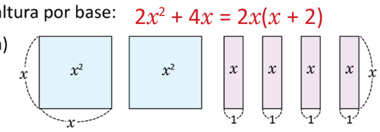
③ **C** Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$; a cada uno de los polinomios x y $2x + 3$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

$$2x^2 + 3x \underset{\text{Desarrollar}}{\overset{\text{Factorizar}}{\rightleftarrows}} x(2x + 3)$$

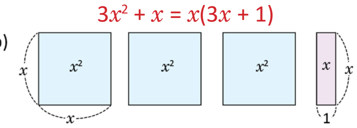
En la lección anterior, se daban las dimensiones del rectángulo para encontrar su área; ahora se da el área total para encontrar las dimensiones.

④
1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a) $2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$



b) $3x^2 + x = x(3x + 1)$



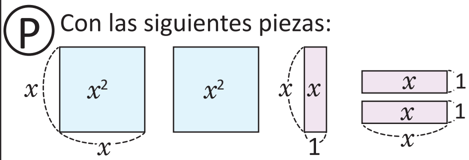
2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $2x(5x - 3)$ Factores
b) $-x(3x + 2)$ Factores
c) $(x + 4)(2x - 3)$ Factores
d) $3x(x - 5)(2x - 1)$ Factores

Tarea: página 18 del Cuaderno de Ejercicios.

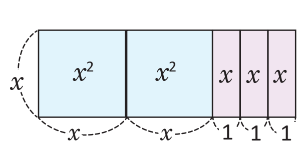
Fecha: **U1 3.1**

Ⓟ Con las siguientes piezas:



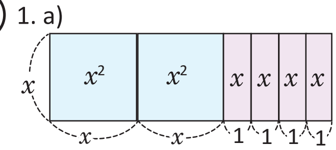
a) Forma un rectángulo.
b) Encuentra el área total.
c) Encuentra la altura y la base del rectángulo.

Ⓢ a)



b) $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$
c) altura ⟶ x
base ⟶ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$
Además, $2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

Ⓡ 1. a)



$2x^2 + 4x = x(2x + 4)$

2. a) Factores: $2x$ y $5x - 3$
b) Factores: $-x$ y $3x + 2$

Indicador de logro. Factoriza polinomios cuyo factor común es un monomio.

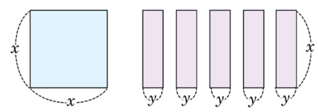
3.2 Factor común

Unidad 1

① **P** Realiza lo siguiente:

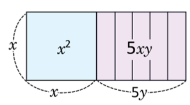
a) Escribe en tu cuaderno el área descrita por las piezas.

b) Forma un rectángulo y escribe su área en términos de su altura y su base.



② **S** a) El área de las piezas es: $x^2 + 5xy$.

b) El área del rectángulo es:



Altura ⟶ x

Base ⟶ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Su área es: $x(x + 5y)$.

③ Para factorizar la expresión, se debe escribir $x^2 + 5xy$ como producto de polinomios más simples. Observa lo siguiente:

$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

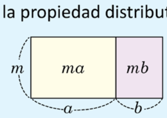
Ambos términos tienen en común el monomio x. Entonces:

$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y)$ ⟶ Identificar términos comunes.

$= x(x + 5y)$ ⟶ Propiedad distributiva.

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

④ **C** Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio, utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



⑤ **E** Factoriza el polinomio:

$$5y^2 - 10xy$$

¿Qué tienen en común los términos $5y^2$ y $5xy$?

Se debe identificar el factor común en ambos polinomios:

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 5 y 10 es 5.

Luego, se extrae dicho factor y se utiliza la propiedad distributiva:

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

⑥ Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + xy$
$= x(2x + y)$

b) $10x^2 - 5xy$
$= 5x(2x - y)$

c) $x^2y + xy$
$= xy(x + 1)$

d) $2x^2y - 4xy$
$= 2xy(x - 2)$

e) $2x^2y - 3xy + y$
$= y(2x^2 - 3x + 1)$

f) $3x^2 + 6y + 12xy$
$= 3(x^2 + 2y(1 + 2x))$

g) $x^2y + x^2 - x$
$= x(xy + x - 1)$

h) $4xy - 6y$
$= 2y(2x - 3)$

i) $xy + 16x^2y^2$
$= xy(1 + 16xy)$

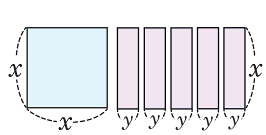
19

Tarea: página 19 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.2**

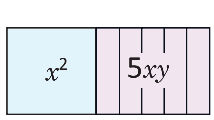
(P) a) Escribe el área descrita por las piezas.

b) Encuentra la altura y la base del rectángulo formado.



(S) a) Área de las piezas: $x^2 + 5xy$

b)



Altura ⟶ x

Base ⟶ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Además, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

(E) Factoriza: $5y^2 - 10xy$

Se tiene que:

$5y^2 = 5y(y)$

$10xy = 5y(2x)$

Por tanto,

$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$

$= 5y(y - 2x)$.

(R) a) $x(2x + y)$

b) $5x(2x - y)$

Materiales:

Algeblocks, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el significado del término factorización como el proceso inverso de la multiplicación. En esta clase se comienza el estudio de las factorizaciones, con el caso más sencillo, cuando los términos tienen un monomio común.

Propósito:

① Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado.

② Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. En ③ se realiza el proceso de factorización a través de la identificación del monomio común de ambos términos y utilizando la propiedad distributiva.

④ Formalizar el proceso para factorizar términos que poseen un monomio común.

⑤ Ejemplificar con el caso donde el factor común es $5y$, un número por una variable.

⑥ Solución de algunos ítems.

b) $10x^2 - 5xy$

Se tiene que:

$10x^2 = 5(x)(2x)$

$5xy = 5(x)(y)$

Por tanto,

$10x^2 - 5xy = 5(x)(2x) - 5(x)(y)$

$= 5x(2x - y)$.

g) $x^2y + x^2 - x$

Se tiene que:

$x^2y = (x)(xy)$

$x^2 = (x)(x)$

$x = (x)(1)$

Por tanto,

$x^2y + x^2 - x = (x)(xy) + (x)(x) - (x)(1)$

$= x(xy + x - 1)$.

No hay que olvidar el signo al factorizar $-(x)(1)$.

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

Materiales:
Algeblocks, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:
Anteriormente se ha definido el término factor común y se estudió únicamente el caso cuando existe un factor monomio común a los términos del polinomio, utilizando para ello la propiedad distributiva del producto sobre la suma. En esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, para factorizarlo se utiliza uno de los productos notables vistos en las clases anteriores.

Propósito:
① Utilizar la manipulación de las piezas para ejemplificar el algoritmo para factorizar trinomios de la forma:
$x^2 + (a + b)x + ab$.

② Con este ejemplo se muestra que el coeficiente de x es la suma de dos números y el término constante es su producto. Para encontrar estos números se utiliza un procedimiento por prueba y error.

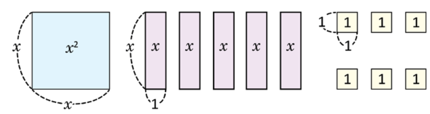
Posibles dificultades:
Formar el rectángulo con las piezas no resulta sencillo, el alumno debe manipular las piezas mentalmente o en material concreto hasta obtener una figura sin espacios vacíos. Es común olvidar las medidas de los lados de cada pieza y tratar de encajar con los lados de otras piezas que no son de su misma medida.

Indicador de logro. Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

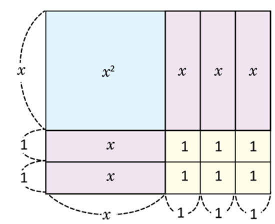
① **P** Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

$x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes piezas. Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ se debe encontrar la altura y la base del rectángulo.



¿Cómo queda factorizado $x^2 + 5x + 6$?

② **S** El rectángulo formado con las piezas se muestra en la figura. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5
−2 y −3	+6	−5

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Esto por la ley de los signos para la multiplicación:
(+)(+) = +
(−)(−) = +

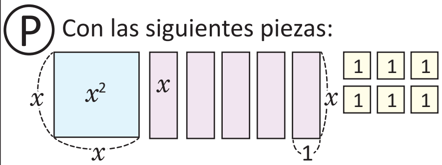
Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

20

Tarea: página 20 del Cuaderno de Ejercicios.

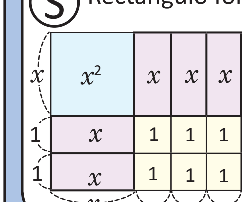
Fecha: **U1 3.3**

P Con las siguientes piezas:



Forma un rectángulo y encuentra la factorización de $x^2 + 5x + 6$.

S Rectángulo formado.



$x^2 + 5x + 6$
$= (x + 2)(x + 3)$

Buscar dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6.

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5

E Factorizar $y^2 + 13y + 30$:

Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

$y^2 + 13y + 30$
$= (y + 3)(y + 10)$

③ **C**

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).
2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

④ **E**

Factoriza $y^2 + 13y + 30$:
Se deben buscar dos números cuyo producto sea +30 y cuya suma sea +13. Como la suma es positiva, entonces ambos números deben ser positivos:

Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

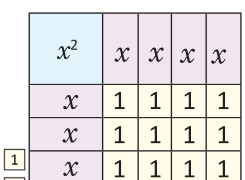
Por lo tanto, $a = 3$, $b = 10$ y
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$.

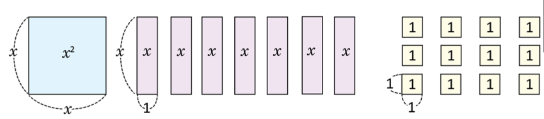
⑤

1. En la siguiente figura:

a) Reubica las siguientes piezas de modo que se forme un rectángulo.

b) Encuentra el área del rectángulo formado en términos de su base y altura.





$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

2. Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 + 3x + 2$ $= (x + 1)(x + 2)$

b) $x^2 + 9x + 20$ $= (x + 4)(x + 5)$

c) $y^2 + 8y + 12$ $= (y + 6)(y + 2)$

d) $y^2 + 11y + 30$ $= (y + 5)(y + 6)$

Propósito:

③ Formalizar el procedimiento que se debe seguir para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto $(x + a)(x + b)$. Para visualizar este hecho se puede utilizar el siguiente esquema:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

④ Hay finitas maneras de expresar 30 como producto de dos números, mientras que hay infinitas formas de expresar 13 como suma de dos números, por esta razón en la tabla se deben escribir primero dos números cuyo producto sea +30 y se escribe el resultado de la suma en la siguiente columna, se repite este procedimiento hasta que la suma sea +13, el número que se busca.

⑤ Para los problemas correspondientes al numeral 2 se utiliza la estrategia de resolución de problemas por ensayo y error, dado que se debe experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la buscada.

Solución de algunos ítems.

2. b) $x^2 + 9x + 20$

Pareja	Producto	Suma
1 y 20	+20	+21
2 y 10	+20	+12
4 y 5	+20	+9

Por lo tanto,
$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

d) $y^2 + 11y + 30$

Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13
5 y 6	+30	+11

Por lo tanto,
$y^2 + 11y + 30 = (y + 5)(y + 6)$.

Secuencia:
En la clase anterior se formalizó el proceso para factorizar polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en esta clase se factoriza este mismo tipo de polinomios con la diferencia de que en estos casos los términos pueden tener signo negativo.

Propósito:
①, ② Se utiliza el siguiente hecho:
$ab > 0$, si a y b tienen el mismo signo.
$ab < 0$, si a y b tienen diferente signo.
Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.
Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$.

Así se puede disminuir la cantidad de parejas a probar.

③ Establecer el proceso para factorizar trinomios de la forma:
$x^2 + (a + b)x + ab$ para todos los casos posibles. Es importante mencionar que $a > 0$ y $b > 0$, para evitar confusión en el uso del signo negativo.

④ Solución de algunos ítems.

2. a) $x^2 + x - 2$

Pareja	Producto	Suma
1 y −2	−2	−1
−1 y 2	−2	+1

Por lo tanto,
$x^2 + x - 2 = (x + (-1))(x + 2)$
$= (x - 1)(x + 2)$.

d) $y^2 - 4y - 32$

Pareja	Producto	Suma
−1 y 32	−32	+31
−2 y 16	−32	+14
−4 y 8	−32	+4
−8 y 4	−32	−4

Por lo tanto,
$y^2 - 4y - 32 = (y + (-8))(y + 4)$
$= (y - 8)(y + 4)$.

Indicador de logro. Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ que involucren términos con signo negativo en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

① **P** Factoriza los polinomios:
a) $x^2 - 13x + 36$
b) $y^2 - 6y - 40$

② **S** a) El trinomio cumple las condiciones para factorizarlo en el producto notable $(x + a)(x + b)$. Se buscan dos números cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13. Como la suma es negativa y el producto positivo, ambos números deben ser negativos:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Puedes desarrollar $(x - 4)(x - 9)$ para comprobar si la factorización es correcta.

Entonces:
$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$
$= (x - 4)(x - 9)$
Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) De nuevo, se buscan dos números cuyo producto sea −40 y cuya suma sea −6. Como el producto es negativo (−40), entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

En la tabla faltan las parejas 5, −8 y −5, 8, pero ya se han encontrado los números que satisfacen.

Entonces:
$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$
$= (y + 4)(y - 10)$
Por lo tanto, $y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

③ **C** Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan 2 números positivos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan 2 números negativos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan 2 números, uno positivo y el otro negativo cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$, según sea el caso.

④ Factoriza:
a) $x^2 + x - 2$
$= (x + 2)(x - 1)$
b) $x^2 - 10x + 21$
$= (x - 7)(x - 3)$
c) $x^2 - 7x - 30$
$= (x - 10)(x + 3)$
d) $y^2 - 4y - 32$
$= (y - 8)(y + 4)$
e) $y^2 - 14y + 33$
$= (x - 3)(x - 11)$
f) $x^2 + 13x + 42$
$= (x + 6)(x + 7)$

22

Tarea: página 21 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.4**

Ⓟ Factoriza los polinomios:
a) $x^2 - 13x + 36$
b) $y^2 - 6y - 40$

Ⓢ a)

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Por lo tanto,
$x^2 - 13x + 36 = (x + (-4))(x + (-9))$
$= (x - 4)(x - 9)$.

b)

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

Por lo tanto,
$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y + (-10))$
$= (y + 4)(y - 10)$.

Ⓡ a) $(x + 2)(x - 1)$
b) $(x - 7)(x - 3)$

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

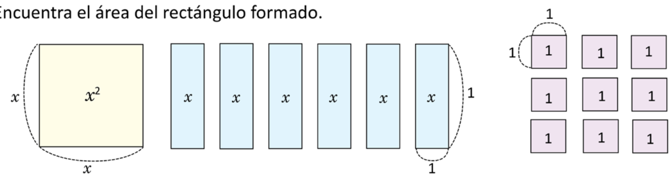
Indicador de logro. Factoriza trinomios cuadrados perfectos en el producto notable $(x+a)^2$ o $(x-a)^2$.

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Unidad 1

① **P** Realiza lo siguiente:

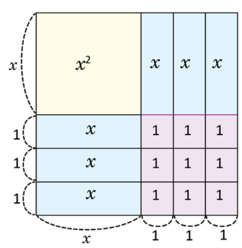
a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Coloca las piezas de modo que se forme un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo formado.



② **S**

a) El área descrita por las piezas es:
$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9$.

b) El rectángulo formado por las piezas es:



Altura ⟶ $x + 3$
Base ⟶ $x + 3$

c) Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:
$$(x+3)(x+3) = (x+3)^2$$
Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

③ Puede utilizarse lo visto en las clases anteriores, buscar dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$
$= (x+3)^2$.

La factorización resulta en el cuadrado de un binomio. Este producto notable se desarrolla:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 6x + 9$ en el cuadrado de un binomio debe buscarse un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, justamente es 3. Por lo tanto:

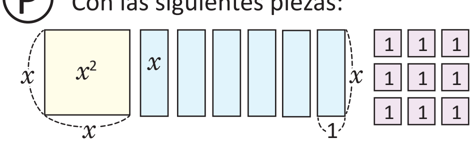
$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

23

Tarea: página 22 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U 3.5**

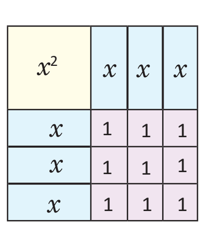
Ⓟ Con las siguientes piezas:



a) Escribe el área que describen.
b) Forma un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo.

Ⓢ a) Área de las piezas:
$x^2 + 6x + 9$

b)



c) $(x+3)^2$
Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 10x + 25$
Se observa que:
$25 = 5^2$
$10 = 2(5)$
$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(5)x + 5^2$
$= (x-5)^2$

Ⓡ a) $(x+2)^2$
b) $(x-4)^2$
c) $(x-9)^2$

Materiales:
Algeblocks, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:
En las clases anteriores se estudió el concepto de factorización y se han factorizado trinomios cuadrados utilizando productos notables, también se han utilizado áreas para ejemplificar geométricamente lo que sucede al factorizar un polinomio. Para esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es un **trinomio cuadrado perfecto**.

Propósito:
①, ② Verificar que el rectángulo formado con las piezas dadas, es en realidad un cuadrado y utilizar este hecho para ejemplificar la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

③ Desarrollar el método visto en la clase anterior para encontrar la factorización del polinomio.

Posibles dificultades:
Comprender que el objetivo del problema es manipular las piezas hasta que se forme perfectamente un rectángulo. Las indicaciones dadas deben presentarse con la mayor claridad posible.

Propósito:

④ Establecer el procedimiento para factorizar un trinomio cuadrado perfecto en el producto notable $(x + a)^2$ o $(x - a)^2$, dependiendo de si el signo del segundo término del trinomio es positivo o es negativo.

⑤ Factorizar el trinomio utilizando el procedimiento visto en la conclusión.

⑥ Solución de algunos ítems.

1. a) $x^2 + 4x + 4$

Se tiene que:

$$4 = 2^2$$
$$4 = 2(2)$$

Por tanto,

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

Se tiene que:

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por tanto,

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

④ **C**

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9.$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de $3(3^2 = 9)$; además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)x + 3^2$$
$$= (x + 3)^2.$$

⑤ **E**

Factoriza:

$$x^2 - 10x + 25$$

Es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a) El término independiente es el cuadrado de un número:

25 es el cuadrado de 5 ($5^2 = 25$, y se tiene $a = 5$).

b) El coeficiente de x es el doble de 5:

$$2a = 2(5) = 10.$$

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

⑥

Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 4$ $= (x + 2)^2$

b) $x^2 - 8x + 16$ $= (x - 4)^2$

c) $y^2 - 18y + 81$ $= (x - 9)^2$

d) $y^2 + 14y + 49$ $= (x + 7)^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ $= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$ $= \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$

24

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

Indicador de logro. Factoriza la diferencia de cuadrados como el producto notable $(x + a)(x - a)$.

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

Unidad 1

① **P** En la figura 1, al cuadrado de lado x se le ha quitado un cuadrado de lado a (figura 2); dando como resultado la figura 3, cuya área es: $x^2 - a^2$.

Realizando un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

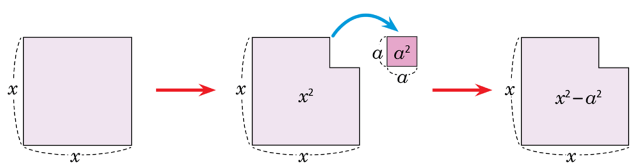


Figura 1 Figura 2 Figura 3

② **S** Se puede hacer un corte y reubicar las piezas como se muestra a continuación:

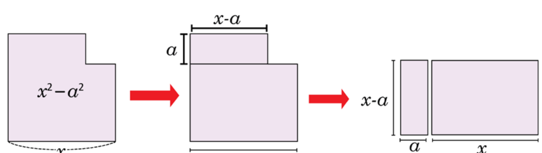


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para la solución se dividió el rectángulo en estas piezas, sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Observa que el área de la figura 1 es $x^2 - a^2$ y que el área de la figura 3 es $(x + a)(x - a)$.
Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

③ **C** Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

④ **E** Factoriza: $x^2 - 9$.

Para factorizar $x^2 - 9$, el término independiente 9 es igual al cuadrado de 3, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

⑤ Factoriza:

a) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ b) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ c) $y^2 - 25 = (y + 5)(y - 5)$

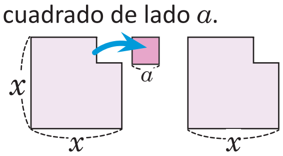
d) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e) $y^2 - \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$ f) $x^2 - \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

25

Tarea: página 23 del Cuaderno de Ejercicios.

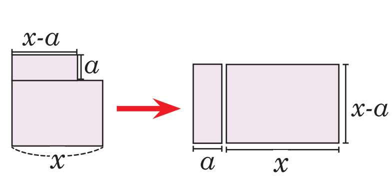
Fecha: **U1 3.6**

Ⓟ Al cuadrado de lado x se le quita un cuadrado de lado a.



Divide en piezas la figura y forma un rectángulo.

Ⓢ



Área: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 9$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Ⓡ a) $x^2 - 1$
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 - 1^2 \\ &= (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

b) $(x + 4)(x - 4)$

c) $(y + 5)(y - 5)$

Materiales:
Piezas recortables, carteles para ejemplificar las piezas utilizadas.

Secuencia:
En clases anteriores se han estudiado métodos para factorizar trinomios utilizando productos notables que se estudiaron en la lección anterior. Ahora se estudiará cómo factorizar una diferencia de cuadrados utilizando el producto notable de la suma por la diferencia de un binomio.

Propósito:
①, ② Formar un rectángulo utilizando piezas de papel manipulables a partir de la figura 2, que representa un cuadrado de lado x al que se le ha quitado un cuadrado de lado a.

Observación:
En la página 182 del Libro de Texto aparece la misma imagen de la figura 2 ampliada, se pueden utilizar fotocopias de esta página para facilitar la distribución del material a manipular.

③ Formalizar el proceso para factorizar la diferencia de cuadrados, a partir del resultado obtenido en la solución.

④ Se expresan los cuadrados de x y 3 con el objetivo de hacer evidente que se trata de una diferencia de cuadrados.

⑤ Solución de algunos ítems.

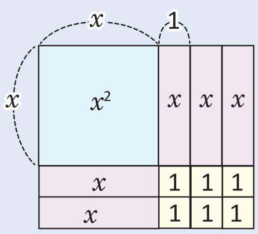
b) $x^2 - 16$
$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= x^2 - 4^2 \\ &= (x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

d) $x^2 - y^2$
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Secuencia:
Para esta clase se presenta un resumen de todas las factorizaciones vistas en clases anteriores y una serie de problemas donde se utilice cualquier tipo de factorización para resolver.

Solución de algunos ítems:

1. a)



Área total: $(x + 3)(x + 2)$

2. a) Factores: $5x$ y $x - 1$
   b) Factores: $-2x$ y $x + 10$
   c) Factores: $x + y$ y $5x - y$
   d) Factores: x, $x - 5$ y $2x + 3$
   e) Factores: $2x$, $3x + 4$ y $y + 1$
   f) Factores: $-y$, $2y + 9$ y $10 - 11y$

3. a) Como el producto es positivo (+), los dos números deben tener el mismo signo. Si los dos números son positivos, su suma sería positiva (+), pero si los dos números son negativos, el resultado de la suma sería de signo negativo. Por tanto, ambos números son negativos.

   b) $(x - 9)(x - 2)$

4. f) $y^2 + 5y - 50$

Pareja	Producto	Suma
1 y −50	−50	−49
−1 y 50	−50	+49
2 y −25	−50	−23
−2 y 25	−50	+23
5 y −10	−50	−5
−5 y 10	−50	−5

Por tanto,

$y^2 + 5y - 50 = (y - 5)(y + 10)$.

j) $y^2 - \frac{25}{36}$

$y^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{6}\right)\left(y + \frac{5}{6}\right)$

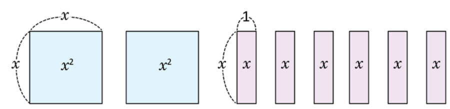
Indicador de logro. Resuelve problemas utilizando la factorización.

3.7 Practica lo aprendido

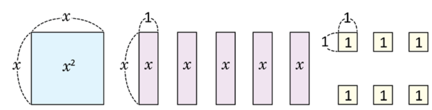
A continuación se presenta un resumen de las factorizaciones vistas hasta esta clase:

	Se factoriza:	Por ejemplo:
Factor común $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a) 

$2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

b) 

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $5x(x - 1)$ b) $(-2x)(x + 10)$
c) $(x + y)(5x - y)$ d) $x(x - 5)(2x + 3)$
e) $2x(3x + 4)(y + 1)$ f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. Para el trinomio $x^2 - 11x + 18$:

a) Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es −11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta.
b) Factoriza el trinomio.

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2 + 6xy = 2x(5x + 3y)$ b) $7xy - 21y^2 = 7y(x - 3y)$
c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2 = -x(x - 2y + 3y^2)$ d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2 = 3xy(3x - 5 - 7y)$
e) $x^2 - 6x - 55 = (x - 11)(x + 5)$ f) $y^2 + 5y - 50 = (y + 10)(y - 5)$
g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \left(x + \frac{5}{4}\right)^2$ h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2$
i) $x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$ j) $y^2 - \frac{25}{36} = \left(y + \frac{5}{6}\right)\left(y - \frac{5}{6}\right)$

26

Tarea: página 24 del Cuaderno de Ejercicios.

Indicador de logro. Utiliza el cambio de variable por un monomio para factorizar polinomios.

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

① **P** Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

¿Es posible utilizar factor común en cada caso? ¿Cuáles de los métodos vistos en clases anteriores puedes utilizar?

② **S**

a) Los términos del trinomio no tienen un monomio común, pero puede utilizarse directamente uno de los métodos vistos en clases anteriores. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el tercero es el cuadrado de $3y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

Además, $2(2x)(3y) = 12xy$, por lo que $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Se toman $2x = w$ y $3y = z$ y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 3y = z,\\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (w+z)^2 && \text{factorizando,}\\ &= (2x+3y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x \text{ y } z = 3y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$.

b) Igual que en el caso anterior, los términos del binomio, no tienen un monomio común. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el segundo es el cuadrado de $5y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

Se toman $2x = w$, $5y = z$ y se factoriza como diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 5y = z,\\ &= w^2 - z^2 && \text{factorizando,}\\ &= (w+z)(w-z) && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= (2x+5y)(2x-5y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 - 25y^2 = (2x+5y)(2x-5y)$.

③ **C** Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

④ Factoriza:

a) $9x^2 - 30x + 25$ $= (3x-5)^2$
b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ $= (4x+3y)^2$
c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$ $= \left(\frac{x}{2}+5\right)^2$
d) $36x^2 - 25$ $= (6x+5)(6x-5)$
e) $x^2 - 100y^2$ $= (x+100y)(x-100y)$
f) $\frac{x^2}{4} - y^2$ $= \left(\frac{x}{2}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$

Tarea: página 25 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.8**

(P) Factoriza los siguientes polinomios:
a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

(S) a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
Sea $2x = w$ y $3y = z$
$$\begin{aligned}(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 &= w^2 + 2(w)(z) + (z)^2\\ &= (w+z)^2\\ &= (2x+3y)^2\end{aligned}$$

Por tanto: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$.

b) $4x^2 - 25y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $25y^2 = (5y)^2$

$$\begin{aligned}4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2\\ &= (2x+5y)(2x-5y)\end{aligned}$$
Por tanto: $4x^2 - 25y^2 = (2x+5y)(2x-5y)$

(R) a) $(3x-5)^2$
b) $(4x+3y)^2$
c) $\left(\frac{x}{2}+5\right)^2$
d) $(6x+5)(6x-5y)$

Secuencia:
El cambio de variable fue utilizado anteriormente para reducir el producto de dos polinomios a otro más sencillo, o para transformar el producto de dos expresiones en apariencia complejas, en un producto notable ya conocido. Siguiendo con esta misma idea, en esta clase se utiliza el cambio de variable para que la factorización de los polinomios resulte más evidente y natural.

Propósito:
①, ② Factorizar expresiones algebraicas utilizando alguno de los tipos de factorización vistos anteriormente. En un primer momento el alumno puede solucionar como le resulte más conveniente, si es posible, siempre se debe resolver el problema utilizando cambio de variables para ejemplificar lo útil que resulta, pues hace más evidente la factorización a utilizar.

③ Establecer el uso del cambio de variable como herramienta que ayuda a factorizar polinomios.

④ Solución de algunos ítems.
a) $9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(5)(3x) + 5^2$

Sea $3x = w$
$= w^2 - 2(5)w + 5^2$
$= (w-5)^2$
$= (3x-5)^2$
Por tanto,
$9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$.

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$, sea $\frac{x}{2} = w$
$= w^2 - y^2$
$= (w+y)(w-y)$
$= \left(\frac{x}{2}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$
Por tanto,
$\frac{x^2}{4} - y^2 = \left(\frac{x}{2}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$.

Para el plan de pizarra, en la parte de la solución, se omite la expresión con el cambio de variable ya que es necesario exigirlo a los estudiantes.

Secuencia:
El estudio del cambio de variable para factorizar un polinomio, realizado en la clase anterior, fue únicamente cuando la variable a sustituir era un monomio, en esta clase se resuelven problemas donde es necesario realizar un cambio de variable por un binomio.

Propósito:
①, ② Utilizar el cambio de variable por un binomio para transformar la expresión en otra más simple y con la que es más evidente el tipo de factorización a utilizar.

③ Establecer en plenaria el proceso de factorización utilizando el cambio de variable por un binomio y recordar que al factorizar una expresión utilizando este método no se debe olvidar regresar a las variables originales.

④ Solución del ítem d.
$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2$

Sea $x + 3 = w$
$= y^2 - 2(w)y + w^2$
$= (y - w)^2$
$= (y - (x + 3))^2$
$= (y - x - 3)^2$

Por tanto,
$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2 = (y - x - 3)^2$.

Indicador de logro. Utiliza el cambio de variable por un binomio para factorizar polinomios.

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

① **P**

Factoriza:
a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$
b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

No desarrolles los productos que se encuentran dentro de cada polinomio. Utiliza un procedimiento similar al de la clase anterior para poder factorizar.

② **S**

a) Observa que $(x - 1)^2$ es el cuadrado de $x - 1$, $(y + 1)^2$ es el cuadrado de $y + 1$ y ambos se están restando. Puede factorizarse como diferencia de cuadrados, se toman $x - 1 = w$ y $y + 1 = z$ y se factoriza la diferencia de cuadrados:

$(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = w^2 - z^2$	Tomando $x - 1 = w$ y $y + 1 = z$,
$= (w + z)(w - z)$	factorizando,
$= (x - 1 + y + 1)[x - 1 - (y + 1)]$	sustituyendo nuevamente,
$= (x + y)(x - y - 2)$	

Por lo tanto, $(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = (x + y)(x - y - 2)$.

b) Observa que $(x + 1)^2$ es el cuadrado de $x + 1$, y^2 es el cuadrado de y, además el segundo término es el producto de 2 por $x + 1$ por y. Luego, el polinomio puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto: se toma $x + 1 = w$ y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 = w^2 + 2wy + y^2$	Tomando $x + 1 = w$,
$= (w + y)^2$	factorizando,
$= (x + 1 + y)^2$	sustituyendo nuevamente $x + 1 = w$,
$= (x + y + 1)^2$.	

Por lo tanto, $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 = (x + y + 1)^2$.

③ **C**

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Recuerda que cuando utilices un cambio de variable: después de factorizar debes realizar el cambio nuevamente, reducir los términos semejantes (si los hay) y ordenar los términos de los factores.

④

Factoriza:

a) $4x^2 - (y + 2)^2 = (2x + y + 2)(2x - y - 2)$
b) $(x + 3)^2 - 9y^2 = (x - 3y + 3)(x + 3y + 3)$
c) $(x - 5)^2 - (y - 1)^2 = (x + y - 6)(x - y - 4)$
d) $y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2 = (y - x - 3)^2$
e) $4x^2 - 4x(y - 7) + (y - 7)^2 = (2x - y + 7)^2$
f) $(x - 2)^2 + 2(x - 2)(y - 3) + (y - 3)^2 = (x + y - 5)^2$

28

Tarea: página 26 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.9**

Ⓟ Factoriza:
a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$
b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

Ⓢ a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$
Tomando: $x - 1 = w$ y $y + 1 = z$
$(w)^2 - (z)^2$
$= (w + z)(w - z)$
$= (x - 1 + (y + 1))(x - 1 - (y + 1))$
$= (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)$

Por tanto:
$(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)$
$= (x + y)(x - y - 2)$.

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$
Tomando: $x + 1 = w$
$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$
$= (w)^2 + 2(w)y + y^2$
$= (w + y)^2$
$= (x + 1 + y)^2$

Por tanto:
$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 = (x + 1 + y)^2$.

Ⓡ a) $(2x + y + 2)(2x - y - 2)$
b) $(x - 3y + 3)(x + 3y + 3)$
c) $(x + y - 6)(x - y - 4)$
d) $(y - x - 3)^2$

Indicador de logro. Factoriza polinomios extrayendo factor común y utilizando productos notables.

Unidad 1

3.10 Factorizaciones sucesivas

① **P** Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

¿Es posible utilizar directamente alguno de los métodos vistos en las clases anteriores? ¿Qué deberías hacer primero?

② **S** Lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

El trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$: los dos números (uno positivo y otro negativo) cuyo producto es −6 y cuya suma es +1 son 3 y −2. Luego:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

③ **C** Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

④ **E** Factoriza el siguiente polinomio: $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$.

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \qquad \text{Factorizando } x^2 - 4x + 4 \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

⑤ Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

b) $2x^2 + 32x + 30$
$= 2(x + 15)(x + 1)$

c) $3x^2 + 12x + 12$
$= 3(x + 2)^2$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$
$= 5x(y - 3)(y - 2)$

e) $2x^2 - 18$
$= 2(x + 3)(x - 3)$

f) $-3y^2 + 300$
$= -3(y + 10)(y - 10)$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x - 2)^2$

h) $2x^2y - 12xy + 18y$
$= (2y)(x - 3)^2$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

29

Tarea: página 27 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.10**

Ⓟ Factoriza:
a) $2x^2 + 2x - 12$

Ⓢ $2x^2 + 2x - 12$
Extraer factor común 2.
$2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2) + 2(x) - 2(6)$
$= 2(x^2 + x - 6)$
Factorizando en la forma $(x + a)(x + b)$
$= 2(x + 3)(x - 2)$
Por tanto:
$2x^2 + 2x + 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

Ⓔ $-2x^2y + 8xy - 8y$
Extraer factor común $-2y$.
$-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4)$
$= -2y(x^2 - 4x + 4)$
$= -2y(x - 2)^2$
Por tanto:
$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Ⓡ a) $-2(x - 1)(x - 4)$
b) $2(x + 15)(x + 1)$
c) $3(x + 2)^2$

Secuencia:
Para esta clase se realiza más de un tipo de factorización en una misma expresión. A diferencia de las clases 3.8 y 3.9, los términos que aparecen en la expresión poseen un factor monomio común, por lo que el primer paso siempre es identificar el factor común y luego factorizar, a diferencia de las clases anteriores, donde la factorización resultaba inmediata al realizar un cambio de variable.

Propósito:
①, ② Resolver un problema donde se deban realizar dos factorizaciones para que la expresión quede totalmente factorizada; si la solución no es muy evidente en un principio, se puede utilizar la pista que se describe en el Problema inicial, generando la pregunta, ¿qué se debe hacer primero?

③ Formalizar el uso de las factorizaciones sucesivas, enfatizando el hecho de que el primer paso siempre debe ser verificar si las expresiones tienen un factor común.

④ Ejemplificar lo descrito en la solución, en un primer paso se extrae el factor común y posteriormente se utiliza la factorización de un trinomio cuadrado perfecto. Usualmente, si el término que está elevado al cuadrado es negativo, el monomio común es con signo negativo.

⑤ Solución de algunos ítems.

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= (-2)(x^2) + (-2)(-5x) + (-2)(4)$
$= -2(x^2 - 5x + 4)$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= (3z)(x^2) - (3z)(4y^2)$
$= 3z(x^2 - 4y^2)$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

Observación:
En i) no se utiliza el cambio de variable, este caso se estudiará en la siguiente clase.

Secuencia:
Anteriormente se realizaron factorizaciones sucesivas, donde el primer paso fue extraer el factor común y luego realizar la factorización, en esta clase se estudian siempre factorizaciones sucesivas, con la diferencia de que para la segunda factorización se debe realizar un cambio de variable.

Propósito:
①, ② Factorizar la expresión haciendo uso de factorizaciones sucesivas, utilizando el factor común y posteriormente un cambio de variable.

③ Se establece en general, el proceso que se debe seguir para factorizar un polinomio. La indicación es: buscar siempre un factor común como primer paso y luego utilizar otra factorización, si la expresión no posee factor común se debe proceder a factorizar directamente.

④ Solución de algunos ítems.

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(9n^2 + 3n - 2)$

Tomando $3n = w$.
$= 2m(w^2 + w - 2)$
$= 2m(w + 2)(w - 1)$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(9m^2 - 25n^2)$

Tomando $3m = w$ y $5n = z$.
$= 3(w^2 - z^2)$
$= 3(w + z)(w - z)$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= 3z(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

Tomando $2x = m$ y $3y = n$.
$= 3z(m^2 + 2mn + n^2)$
$= 3z(m + n)^2$
$= 3z(2x + 3y)^2$

Indicador de logro. Factoriza polinomios que impliquen combinaciones de los métodos vistos en clases anteriores.

3.11 Combinación de factorizaciones

① **P** Factoriza: $18x^2 - 200y^2$.

Debes extraer primero el factor común en cada caso.

② **S** Los coeficientes de x^2 y y^2 tienen factor común 2:

$$18x^2 - 200y^2 = 2(9x^2) - 2(100y^2)$$
$$= 2(9x^2 - 100y^2)$$

Tomando en cuenta que $9x^2 = (3x)^2$, $100y^2=(10y)^2$

$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$ Tomando $3x = w$ y $10y = z$,
$= 2(w^2 - z^2)$ factorizando,
$= 2(w + z)(w - z)$ sustituyendo nuevamente,
$=2(3x + 10y)(3x - 10y)$.

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

③ **C** En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un monomio común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de sus factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

④ Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= (3z)(2x + 3y)^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$
$= 4m(3n + 1)^2$

30

Tarea: página 28 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.11**

Ⓟ Factoriza: $18x^2 - 200y^2$

Ⓢ $18x^2 - 200y^2$
Extrayendo factor común 2
$18x^2 - 200y^2$
$= 2(9x^2) - 2(100y^2)$
$= 2(9x^2 - 100y^2)$
$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$ Tomando $3x = w$ y $10y = z$
$= 2(w^2 - z^2)$
$= 2(w + z)(w - z)$ Sustituyendo nuevamente
$= 2(3x + 10y)(3x - 10y)$

Por tanto:
$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y)$.

Ⓡ a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(9x^2y^2 - 16)$
Tomando $3xy = w$
$-2(9x^2y^2 - 16)$
$= -2(w^2 - 4^2)$
$= -2(w + 4)(w - 4)$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3z(x + 2y)(x - 2y)$
c) $2m(3n + 2)(3n - 1)$
d) $3(3m + 5n)(3m - 5n)$
e) $3z(2x + 3y)^2$

Indicador de logro. Calcula operaciones aritméticas y áreas de regiones utilizando factorización.

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

① **P** Utilizando factorización, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

② **S**

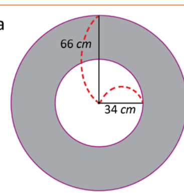
a) La operación es una diferencia de cuadrados:

$$99^2 - 1 = (99 + 1)(99 - 1)$$
$$= (100)(98)$$
$$99^2 - 1 = 9\,800$$

b) La operación también es una diferencia de cuadrados:

$$35^2 - 15^2 = (35 + 15)(35 - 15)$$
$$= (50)(20)$$
$$35^2 - 15^2 = 1\,000$$

③ **E** Calcula el área de la región sombreada (deja expresado el resultado en términos de π).



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. La región delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**.

Para calcular el área de la región sombreada debe restarse del área del círculo mayor, el área del círculo menor. El círculo mayor tiene radio 66 *cm*, y área:

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

El círculo menor tiene radio 34 *cm* y área:

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

Entonces, el área de la región sombreada es:

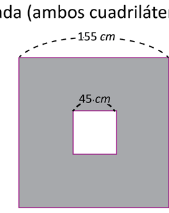
$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$ Se extrae factor común π,
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$ se factoriza como diferencia de cuadrados,
$= (100)(32)\pi$ se calculan las operaciones en los paréntesis,
$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$ se deja expresado en términos de π.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $3\,200\pi$ cm^2.

④ 1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $35^2 - 25^2$ = 600 b) $45^2 - 35^2$ = 800 c) $98^2 - 4$ = 9 600

2. Calcula el área de la región sombreada (ambos cuadriláteros son cuadrados):



= 22 000 cm²

Tarea: página 29 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U1 3.12**

(P) Encuentra el resultado de las siguientes operaciones. Utiliza la factorización.

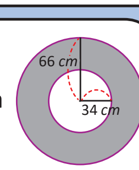
a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

(S)

a) $99^2 - 1$
$= 99^2 - 1^2$
$= (99 + 1)(99 - 1)$
$= (100)(98)$
$= 9\,800$

b) $35^2 - 15^2$
$= 35^2 - 15^2$
$= (35 + 15)(35 - 15)$
$= (50)(20)$
$= 1\,000$

(E) Calcula el área de la región sombreada.



$66^2\pi - 34^2\pi$
$= (66^2 - 34^2)\pi$
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$
$= (100)(32)\pi$
$= 3\,200\pi$

Por tanto:
El área es: $3\,200\pi$ cm²

(R) 1. a) 600 b) 800 c) 9 600

2. 22 000 cm².

Secuencia:
A lo largo de la lección se estudiaron distintas técnicas de factorización, ahora se utilizará el álgebra de las factorizaciones para simplificar los cálculos aritméticos en algunas operaciones.

Propósito:
①, ② Resolver dos problemas del cálculo aritmético utilizando el álgebra aprendida en esta lección.

③ Ejemplificar el uso de la factorización en el cálculo de áreas, simplificando las operaciones aritméticas. El área de la parte sombreada es la del círculo más grande menos el área del círculo contenido, como el área del círculo es el cuadrado del radio, la factorización que se utiliza es la diferencia de cuadrados.

④ Solución de algunos ítems.

1. a) $35^2 - 25^2$
$= (35 + 25)(35 - 25)$
$= (60)(10)$
$= 600$

2. Como el área de la región sombreada es la diferencia de las áreas de los dos cuadrados, entonces se puede aplicar la diferencia de cuadrados para resolver.

$155^2 - 45^2$
$= (155 + 45)(155 - 45)$
$= 200 \times 110$
$= 22\,000$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es 22 000 cm².

Solución de algunos ítems.

1. a) $3x^2 + 24x - 60$
$= 3(x^2 + 8x - 20)$
$= 3(x + 10)(x - 2)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$
Sea $w = 6x$ y $z = 5y$
$= w^2 - 2wz + z^2$
$= (w - z)^2$
$= (6x - 5y)^2$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$
Sea $w = 2x + 9$ y $z = 3x - 2$
$= w^2 - z^2$
$= (w + z)(w - z)$
$= (2x + 9 + 3x - 2)(2x + 9 - 3x + 2)$
$= (5x + 7)(-x + 11)$
$= -(5x + 7)(x - 11)$

2. c) 101^2
$101^2 = (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$
$= 10\,000 + 201 + 1$
$= 10\,201$

3. $102^2\pi - 98^2\pi$
$102^2\pi - 98^2\pi$
$= (102^2 - 98^2)\pi$
$= (102 + 98)(102 - 98)\pi$
$= 200 \times 4\pi$
$= 800\pi$ cm^2

Indicador de logro. Resuelve problemas utilizando factorizaciones sucesivas.

3.13 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 24x - 60 = 3(x + 10)(x - 2)$

b) $-4y^2 - 16y - 12 = -4(y + 3)(y + 1)$

c) $5x^2 - \frac{5}{4} = 5\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2 = (6x - 5y)^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4} = \left(2x + \frac{y}{2}\right)^2$

f) $64x^2 - 49y^2 = (8x + 7y)(8x - 7y)$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2 = -(5x + 7)(x - 11)$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z = 4z(x - 2y)^2$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x = 5x(y + 11)(y + 10)$

2. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

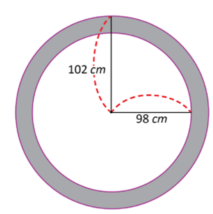
a) $75^2 - 25^2 = 5\,000$

b) $95^2 - 25 = 9\,000$

c) $101^2 = 10\,201$

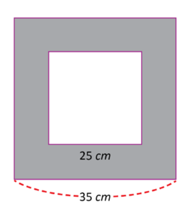
d) $47 \times 53 = 2\,491$

3. Calcula el área de la región sombreada:



$= 800\pi$ cm^2

4. Calcula el área de la región sombreada:



$= 600$ cm^2

32

Tarea: página 30 del Cuaderno de Ejercicios.

Prueba de la Unidad 1: Multiplicación de polinomios **Matemática 9º**

Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: _______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $6x(2x - y)$ b) $(5x - 2)(4y + 1)$ c) $(y + 10)(-x + 7y + 2)$

Respuesta:	Respuesta:	Respuesta:

2. Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(y + 10)(y + 4)$ b) $(x - 7)^2$ c) $(y + \frac{2}{5})(y - \frac{2}{5})$

Respuesta:	Respuesta:	Respuesta:

3. Desarrolla la siguiente expresión utilizando productos notables:

$(2x + 3y - 4)(2x + 3y + 4) + (xy + 6)(xy - 4)$

Respuesta:

1

Descripción:
La prueba de esta unidad está formada por 7 numerales; sin embargo, en total se consideran 14 ítems, pues cada literal cuenta como un ítem.

Criterios para asignar puntos parciales:
Para cada uno de los ítems que se presentan, la respuesta se considera parcialmente correcta si cumple con uno de los criterios que se establecen a continuación:

Ítem 3.
Si no se suman términos semejantes:
$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16 + x^2y^2 + 2xy - 24$

Los ítems 1 y 2 no poseen criterios para asignar puntos parciales, en este caso la respuesta se considera correcta o incorrecta.

Criterios para asignar puntos parciales:
Para cada uno de los ítems que se presentan, la respuesta se considera parcialmente correcta si cumple con uno de los criterios que se establecen a continuación:

Ítem 5 a y b.
a) Si se factoriza como $y(10y - 15x)$ o de esta otra forma $5(2y^2 - 3x)$.

b) Si no se factoriza el trinomio cuadrado: $4y(x^2 + 7x - 8)$.

Ítem 7.
Si no se desarrolla la expresión y se deja expresada la respuesta como $(2a + b)^2 - b^2$

Los ítems 4, 5b, 5c y 6 no poseen criterios para asignar puntos parciales, en este caso la respuesta se considera correcta o incorrecta.

4. ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 149$ y $ab = 70$?

Respuesta:

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10y^2 - 15xy$

b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

c) $y^2 - \frac{1}{25}$

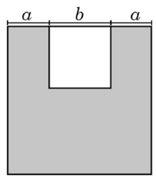
d) $4x^2y + 28xy - 32y = 0$

Respuesta a):	Respuesta b):	Respuesta c):	Respuesta d):

6. Utilizando la factorización, encuentra el resultado de la siguiente operación: $84^2 - 74^2$.

Respuesta:

7. Utilizando la factorización, expresa el área de la región sombreada en términos de a y b (ambos cuadriláteros son cuadrados):



Respuesta:

2