Unidad 3. Ecuación cuadrática

Competencia de la Unidad

Resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando diferentes métodos de resolución, para modelar y solucionar problemáticas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuacion cuadrática

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ecuación cuadrática	1	1. Sentido y definición de la ecuación cuadrática
	1	2. Soluciones de la ecuación cuadrática
	1	3. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$
	1	4. Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$
	1	Prueba del primer trimestre
	1	5. Solución de ecuaciones de la forma $(x + m) = n$
	1	6. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$
	1	7. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$
	1	8. Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b)$
	1	9. Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas
	1	10. Solución de ecuaciones completando cuadrados
	1	11. Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
	1	12. Fórmula general de la ecuación cuadrática
	1	13. Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática
	1	14. Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas
	2	15. Practica lo aprendido

Lección	Horas	Clases
2. Aplicaciones de la ecuación cuadrática	1	1. Discriminante de la ecuación cuadrática
	1	2. Uso del discriminante en resolución de problemas
	1	3. Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas
	1	4. Practica lo aprendido
	1	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 3

21 horas clase + prueba de Unidad 3 + prueba del primer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Ecuación cuadrática
Se define una ecuación cuadrática y se le da sentido observando su aparición en distintos problemas. Se estudian las soluciones de ecuaciones cuadráticas utilizando diferentes métodos, en un primer momento resolviendo por raíz cuadrada y luego por métodos de factorización, se estudia también la solución de ecuaciones cuadráticas a través de complementar cuadrados, finalizando con el uso de la fórmula general.

Lección 2: Aplicaciones de la ecuación cuadrática
Se estudia el discriminante de una ecuación cuadrática, así como su uso en la resolución de problemas. Se realizan también diversos problemas de aplicación y análisis sobre ecuaciones cuadráticas.

Secuencia:
El estudio de las ecuaciones comienza en séptimo grado, se analizan las distintas propiedades de la igualdad y se utilizan para encontrar el valor numérico que satisface la igualdad. Posteriormente en octavo grado, se le da sentido a una ecuación de primer grado con dos incógnitas a través de problemas cotidianos y se estudian los distintos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones.
En la unidad anterior se estudió la raíz cuadrada, analizando su sentido y definición, estableciendo raíces cuadradas positivas y negativas y realizando operaciones con ellas; en esta unidad es importante que el estudiante domine este conocimiento, sobre todo el hecho de que hay dos números que al elevarse al cuadrado dan como resultado el mismo número.

Propósito:
①, ② Al traducir el problema al lenguaje algebraico resulta el planteamiento de una ecuación cuadrática, no se trata de solucionar este problema, sino de obtener el planteamiento de la ecuación.

③ Definir formalmente una ecuación cuadrática como ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; como anteriormente se definieron los números reales, se debe establecer que a, b y c son números reales y $a \neq 0$, de lo contrario la ecuación no sería de segundo grado.

④ Resolver un problema similar al primero, en este caso la variante es que para obtener la ecuación cuadrática debe desarrollarse el producto de un monomio con un binomio.

⑤ Solución del ítem 3.

3. Sea x el número entero, su consecutivo es $x + 1$.
   Entonces, al multiplicar ambos:
   $x(x + 1) = 42$
   $x^2 + x - 42 = 0$
   Esta es la ecuación cuadrática determinada.

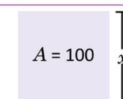
Observación: Se considerará correcto expresar ecuaciones en la forma:
$x^2 = a$ o $x^2 - a = 0$.

Indicador de logro. Plantea ecuaciones cuadráticas e identifica la necesidad de resolverla.

1.1 Sentido y definición de la ecuación cuadrática

① **P** Don Antonio tiene un terreno cuadrado para cultivar frijol, ¿cómo se puede determinar la medida de los lados del terreno si este tiene un área de 100 m²?

② **S** Haciendo un esquema de la situación:



Utilizando x para simbolizar la longitud del lado.

El área del terreno es de 100 m², entonces se puede plantear la ecuación:
$$x^2 = 100$$

El área del cuadrado es: $A = L^2$ Donde L es la longitud del lado al cuadrado.

Para determinar la medida de los lados del terreno hay que resolver esta ecuación.

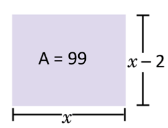
③ **C** La ecuación planteada en el problema es $x^2 = 100$, si se transpone el 100, también se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, en la cual la incógnita está elevada al cuadrado. Este tipo de ecuaciones son llamadas **ecuaciones cuadráticas.**

En general, se define ecuación cuadrática como las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b, c números reales y $a \neq 0$.

Transponer en una ecuación significa pasar de un miembro de la ecuación al otro.

Por ejemplo: $2x^2 - 3 = 0$, $9x^2 - 3 = 0$, $(x + 5)^2 - 16 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x = 0$, etc.

④ **E** Don Miguel tiene un terreno rectangular cuyo largo tiene 2 m más que el ancho y su área es de 99 m². Determina la ecuación que simboliza el problema representando con x la medida del largo.

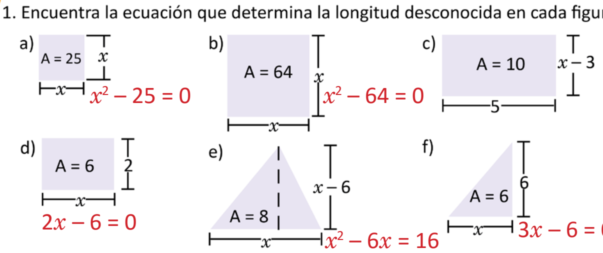


Aplicando el área del rectángulo ($A = base \times altura$). $x(x - 2) = 99$

Desarrollando el producto: $x^2 - 2x = 99$

Transponiendo el 99: $x^2 - 2x - 99 = 0$

⑤ 1. Encuentra la ecuación que determina la longitud desconocida en cada figura.



a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 - 64 = 0$ c) $5(x - 3) = 10$ d) $2x - 6 = 0$ e) $x^2 - 6x = 16$ f) $3x - 6 = 0$

También se puede plantear el mismo problema con un triángulo, se debe tener presente que el área del triángulo es: $A = \frac{base \times altura}{2}$

2. Determina cuáles de las ecuaciones planteadas en el ejercicio anterior son cuadráticas. a), b), e).
3. Determina la ecuación para encontrar dos números enteros consecutivos que al multiplicarlos resulten 42. x: el menor número. $x^2 + x - 42 = 0$

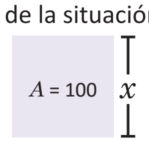
58

Tarea: página 60 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.1**

Ⓟ Don Antonio tiene un terreno cuadrado con área 100 m². ¿Cómo se puede determinar la medida de los lados?

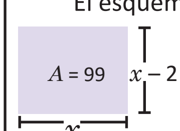
Ⓢ Esquema de la situación:



El área del terreno es 100 m².
La ecuación planteada es $x^2 = 100$.

Podemos determinar la medida del lado del cuadrado utilizando esta ecuación.

Ⓔ Si x representa el largo del terreno. El esquema representa la situación.



La ecuación que determina el área del rectángulo es:
$x(x - 2) = 99$
$x^2 - 2x = 99$
$x^2 - 2x - 99 = 0$

Ⓡ a) $x^2 = 25$
b) $x^2 = 64$
c) $5(x - 3) = 10$
d) $2x = 6$
e) $\frac{x(x - 6)}{2} = 8$
f) $3x = 6$

Indicador de logro. Determina la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

1.2 Soluciones de la ecuación cuadrática

① **P** Determina cuáles de los números, −4, −3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.

a) $3x = 12$ b) $x^2 - x - 12 = 0$

② **S** Utilizando −4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$
−4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando −3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$
−3 no es solución de la ecuación a), pero si es solución de la ecuación b).

Utilizando 3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$
3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando 4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$
4 es solución de ambas ecuaciones.

Por lo tanto, la ecuación a) tiene una solución (4), y la ecuación b) tiene dos soluciones (4 y −3).

③ **C** Los valores de la incógnita que cumplen una ecuación cuadrática se llaman **soluciones.**

El proceso de **resolver una ecuación cuadrática** consiste en encontrar todas las soluciones de ella. En la ecuación cuadrática pueden haber hasta dos soluciones.

Las ecuaciones lineales tienen solamente una solución.

④ 1. Determina cuáles de los números en los paréntesis son soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2 - 9 = 0$ (−3, −1, 1, 3) −3, 3
b) $2x - 6 = 0$ (−3, −1, 1, 3) 3
c) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (−4, −2, 2, 4) −2, 4
d) $2x + 8 = 0$ (−4, −2, 2, 4) −4
e) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (−3, −1, 1, 3) −3, −1
f) $4x + 12 = 0$ (−3, −1, 1, 3) −3
g) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (−4, −2, 2, 4) 4
h) $x - 4 = 0$ (−3, −1, 1, 3) Ningún valor es solución.

2. Determina cuáles de las ecuaciones del numeral anterior son cuadráticas y cuáles lineales. Justifica la respuesta. a), c), e), g) son cuadráticas.
b), d), f) y h) son lineales.

Unidad 3

59

Tarea: página 61 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.2**

(P) Cuáles de los números, −4, −3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.
a) $3x = 12$
b) $x^2 - x - 12 = 0$

(S) Para −4.
a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 8$
−4 no es solución de ninguna ecuación.

Para −3.
a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$
−3 es solución de b).

Para 3.
$3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = -6$
3 no es solución de ninguna ecuación.

Para 4.
$3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 0$
4 es solución de ambas ecuaciones.

(R) a) −3 y 3
b) 3
c) −2 y 4
d) −4
e) −1 y −3
f) −3
g) 4
h) Ningún valor es solución.

Secuencia:
En la clase anterior, a través del planteamiento de algunas situaciones traducidas al lenguaje algebraico se le dio sentido y significado a una ecuación cuadrática, para esta clase se estudia el hecho de que una ecuación cuadrática puede tener hasta dos soluciones.

Propósito:
①, ② Verificar si un número es solución de una ecuación sustituyendo el número por la variable y comprobando si se cumple la igualdad.

③ Definir las soluciones de una ecuación cuadrática y establecer que una ecuación cuadrática puede contar con cero, una o hasta dos soluciones y reconocer que las ecuaciones lineales tienen a lo sumo una solución.

Secuencia:
En la clase 1, a partir de un problema se planteó una ecuación y se definió como cuadrática. Para esta clase se utiliza la información de este mismo problema, con el propósito de encontrar los valores que satisfacen la ecuación planteada.

Propósito:
①, ② Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 = 100$. Utilizando el concepto de raíz cuadrada, las soluciones del problema son los números que elevados al cuadrado dan como resultado el valor 100.

③ Justificar paso a paso el proceso para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = c$; al hacer referencia a esta ecuación es importante mencionar que $c > 0$ y que además siempre existen dos soluciones, una positiva y otra negativa. Siempre hay que recalcar que la ecuación cuadrática de esta forma tiene una solución negativa, y que en este caso, por hablar de una longitud, se descarta y se considera solo la positiva. Considerar que la siguiente expresión es un error:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

Pues $\sqrt{x^2}$ no es necesariamente igual a x, como se vio en la unidad de la raíz cuadrada.

④ La diferencia con el Problema inicial se encuentra en la forma de la ecuación, en este caso, el término constante se encuentra en el mismo lado de la ecuación que la variable, esto involucra realizar un paso más, primero se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada.

⑤ Solución del ítem 2:

x: edad de Julia.
$(x + 4)(x - 4) = 20$
$x^2 - 16 = 20$
$x^2 = 36$
$x = \pm 6$
Como $x > 0$, entonces la edad de Julia es 6 años.

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones de la forma $x^2 = c$.

1.3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática planteada en el problema de don Antonio de la primera clase.
$$x^2 = 100$$

② **S** Para resolver esta ecuación se puede utilizar la idea de las raíces cuadradas de un número.
Como $x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces: $x = \pm\sqrt{100}$.

Expresando sin el símbolo de radical, $x = \pm 10$.

Al elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado:
$3^2 = (-3)^2 = 9$

El problema de don Antonio era sobre la longitud de los lados del terreno, por lo que la solución negativa no se puede tomar en cuenta y por lo tanto, la solución del problema es: **10 m.**

③ **C** Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = c$ se siguen los pasos:

1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de c.
$x = \pm\sqrt{c}$
2. Se expresa el número sin el símbolo de radical, si es posible.

Por ejemplo: $x^2 = \frac{1}{4}$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
2. $x = \pm\frac{1}{2}$

④ **E** Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 20 = 0$.

Se transpone el número 20 en la ecuación $x^2 = 20$.

Se resuelve la ecuación $x^2 = 81$. 1. $x = \pm\sqrt{20}$ 2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

⑤ 1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 16$ — $x = \pm 4$
b) $x^2 = \frac{1}{9}$ — $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $x^2 = \frac{4}{9}$ — $x = \pm\frac{2}{3}$
d) $x^2 - 1 = 0$ — $x = \pm 1$
e) $x^2 - 9 = 0$ — $x = \pm 3$
f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ — $x = \pm\frac{1}{2}$
g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$ — $x = \pm\frac{4}{5}$
h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$ — $x = \pm\frac{2}{6}$

2. El hermano de Julia es 4 años mayor que ella y la hermana es 4 años menor, ¿qué edad tiene Julia si al multiplicar las edades de sus hermanos resulta 20?
La edad de Julia es 6 años.

60

Tarea: página 62 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.3**

Ⓟ Resuelve la ecuación:
$x^2 = 100$

Ⓢ Utilizando el concepto de raíz cuadrada.
$x^2 = 100$
$x = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10$
Los números que elevados al cuadrado dan 100 son 10 y −10.
Por tanto, son soluciones de la ecuación.

Ⓔ Resuelve la ecuación:
$x^2 - 20 = 0$
$x^2 = 20$
$x = \pm\sqrt{20}$
$x = \pm 2\sqrt{5}$

Ⓡ 1. a) $x = \pm 4$
b) $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $x = \pm\frac{2}{3}$
d) $x = \pm 1$
e) $x = \pm 3$

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones de la forma $ax^2 = c$.

1.4 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$

① **P** Marta y Mario juegan a "las adivinanzas", Marta le dice a Mario que ella está pensando un número que multiplicado con su triple da como resultado 12, ¿cómo puede determinar Mario el número que podría estar pensando Marta?

② **S** Representando por x el número que está pensando Marta.
Entonces el triple del número que está pensando Marta es representado por "$3x$".
Luego para representar que el número multiplicado con su triple es 12 , se plantea la siguiente ecuación: $x(3x) = 12$.

Multiplicando los términos: $3x^2 = 12$.

Despejando "x^2", $x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$.

Resolviendo la ecuación, $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, el número que está pensando Marta podría ser: **+2 o –2**.

③ **C** Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, $c \neq 0$ se siguen los pasos:

1. Se despeja el término x^2.
$$x^2 = \frac{c}{a}$$
2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de $\frac{c}{a}$.
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$
3. Se expresa sin el símbolo de radical o se simplifica a la mínima expresión, cuando se pueda.

Observa que si el signo de a es diferente al signo de c entonces $\frac{a}{c}$ tiene signo negativo, entonces la ecuación no tendría solución en los números reales porque no están definidas las raíces cuadradas de un número negativo.

④ **E** Resuelve la ecuación cuadrática: $3x^2 - 2 = 0$

Se transpone el –2 en la ecuación: $3x^2 = 2$

Se resuelve la ecuación $3x^2 = 2$. 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Cuando hay un radical en el denominador debe racionalizarse.

⑤ 1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 18$ $x = \pm 3$ b) $-4x^2 = -1$ $x = \pm\frac{1}{2}$ c) $x^2 = 7$ $x = \pm\sqrt{7}$

d) $-4x^2 + 4 = 0$ $x = \pm 1$ e) $10 - 2x^2 = 0$ $x = \pm\sqrt{5}$ f) $-x^2 + 2 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

Observa que las ecuaciones de la forma $x^2 = c$; son un caso especial de las de la forma $ax^2 = c$, cuando $a = 1$.

2. Encuentra las longitudes de una cancha de baloncesto, si el largo de la cancha es el doble de su ancho y tiene un área de 450 m². Las longitudes de la cancha de baloncesto son 15 m y 30 m.

Tarea: página 63 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.4**

Ⓟ Un número multiplicado con su triple da como resultado 12. ¿Cuál es el número?

Ⓢ Sea x ese número.

$x(3x) = 12$

$3x^2 = 12$ Dividiendo por 3

$x^2 = \frac{12}{3}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Por tanto, Marta pudo pensar dos números: +2 o –2.

Ⓔ Resuelve la ecuación: $3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$ Dividiendo por 3

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ⓡ 1. a) -3 y 3
b) $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$
c) $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$
d) -1 y 1
e) $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$

Secuencia:
Hasta esta clase se han resuelto ecuaciones cuadráticas donde se deben realizar a lo sumo dos pasos, uno de ellos puede ser despejar primero la variable y luego extraer la raíz cuadrada, para esta clase se estudia un tipo de ecuación cuadrática que puede resolverse hasta con tres pasos, es decir, en estos casos, se agrega el paso dividir por el número que está multiplicando a la variable.

Propósito:
①, ② A partir del Problema inicial se debe plantear una ecuación del tipo: $ax^2 = c$, esta ecuación se resuelve utilizando las propiedades de la igualdad vistas en séptimo y las propiedades de los radicales vistas en la unidad anterior.

③ Establecer los pasos que se deben seguir para resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 = c$.

④ La diferencia con el Problema inicial se encuentra en la forma de la ecuación, en este caso, se necesita transponer el término constante y luego dividir por el coeficiente que acompaña a la variable.

⑤ Solución de algunos ítems:

1. e) $10 - 2x^2 = 0$
$$-2x^2 = -10$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

2. Sea a: el ancho de la cancha de baloncesto.
$$a(2a) = 450$$
$$2a^2 = 450$$
$$a^2 = 225$$
$$a = \sqrt{225}$$
$$a = \pm 15$$

Como se trata de una longitud, se elige la solución positiva.
Por tanto, $a = 15$.

Las longitudes de la cancha de baloncesto son 15 m y 30 m.

Clasificación de los ítems según el dominio cognitivo.
La prueba consta de 14 numerales; sin embargo, en total se consideran 20 ítems, pues cada literal cuenta como un ítem. Los 20 ítems se clasifican de acuerdo a los dominios cognitivos, tal como se detalla a continuación:

Conocimiento (75 %). Del numeral 1 al 9. Como el numeral 2 tiene 3 literales, se considera que equivale a 3 ítems. Por tanto, el dominio cognitivo corresponde a 15 ítems en total.

Aplicación (15 %). Del ítem 10 al ítem 12.

Razonamiento (10 %). Del ítem 13 al ítem 14.

Notación.
U1 C1.2 Significa que el ítem corresponde a la clase 1.2 de la Unidad 1.

* Significa que si el estudiante responde por lo menos uno de estos y no proporciona la respuesta correcta, entonces se le da una puntuación parcial.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.

Ítem 1a – U1 C1.1
Ítem 1b – U1 C1.2
Ítem 1c – U1 C1.2
Ítem 2a – U1 C1.3 y U1 C2.1
Ítem 2b – U1 C1.3 y U1 C2.4
Ítem 3a – U1 C3.2
Ítem 3b – U1 C3.6
Ítem 4 – U2 C1.6
Ítem 5 – U2 C1.3
Ítem 6a – U2 C2.1
Ítem 6b – U2 C2.2
Ítem 7 – U2 C2.7

Prueba del primer trimestre **Matemática de 9º grado**

Fecha: ______________________
Nombre: ______________________ **Sección:** ________
Edad: ______ años **NIE:** __________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________

Indicación: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos.

1. Desarrolla los siguientes productos:
   a) $3x(x + 2y)$ b) $(x + 1)(y + 3)$ c) $(3x + 4)(x + 2)$

   Respuesta: Respuesta: Respuesta:

2. Desarrolla los siguientes productos notables:
   a) $(x + 3)(x - 2)$ b) $(x + 3)^2$ c) $(x + 3)(x - 3)$

   Respuesta: Respuesta: Respuesta:

3. Factoriza los siguientes polinomios:
   a) $10xy - 15y^2$ b) $x^2 - 1$

   Respuesta: Respuesta:

4. Expresa $2.\overline{6}$ como fracción: Respuesta:

5. Encuentra las raíces cuadradas de 4.

   Respuesta:

6. Efectúa las siguientes operaciones:
   a) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ b) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$

   Respuesta: Respuesta:

7. Racionaliza el siguiente número: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

   Respuesta:

1

8. ¿Cuáles de los siguientes números son las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$?

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Respuesta:

9. Resuelve: $3x^2 = 15$

Respuesta:

10. Desarrolla: $(a + b - c)(a - b + c) - (a + b + c)(a - b - c)$

Respuesta:

11. ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$, si $a^2 + b^2 = 85$ y $ab = 42$?

Respuesta:

12. Factoriza el siguiente polinomio: $3x^2y - 6xy - 9y$

Respuesta:

13. Expresa $\sqrt{1.1\overline{6}}$ en la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$, donde a y b son números naturales.

Respuesta:

14. Demuestra la siguiente igualdad: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

Respuesta:

2

Ítem 8 – U3 C1.2
Ítem 9 – U3 C1.4
Ítem 10 – U1 C3.6
Ítem 11 – U1 C2.8
Ítem 12 – U1 C3.10
Ítem 13 – U2 C1.6, U2 C2.2 y U2 C2.7
Ítem 14 – U2 C1.1 y U2 C2.11

Algunos procedimientos.
Ítem 11.

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\\ &= 85 - 2(42)\\ &= 85 - 84\\ &= 1\end{aligned}$$

Ítem 13.

$$\begin{aligned}10x &= 11.6666666...\\ -x &= 1.1666666...\\ \hline 9x &= 10.5\\ x &= \frac{10.5}{9}\\ x &= \frac{105}{90}\end{aligned}$$

Luego, $\sqrt{\frac{105}{90}} = \sqrt{\frac{21}{18}} = \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$

Secuencia:
En clases anteriores se han resuelto ecuaciones cuadráticas de la forma: $ax^2 = c$, incluyendo el caso especial cuando $a = 1$, en estos casos, el exponente 2 corresponde a la variable; para esta clase, 2 es el exponente de $x + m$.

Propósito:
①, ② Se utiliza un cambio de variable para llevar la expresión al caso visto en la clase 1.3, luego de esto se debe realizar el proceso ya conocido por el estudiante; es importante regresar a la variable original y resolver la ecuación lineal para esta variable.

③ Se establecen formalmente los pasos a seguir para resolver una ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$. Es importante hacer ver que si $n = 0$ la solución es simplemente $x = -m$ y si $n < 0$, la ecuación no posee solución definida en los números reales.

④ A diferencia del Problema inicial, primero se debe transponer el número 12 al otro lado de la ecuación y luego resolver de la misma forma.

⑤ Solución del ítem 2.
2. Utilizando la información del problema, se plantea la ecuación:

$(x + 10)^2 = 144$ Tomando: $w = x + 10$
$w^2 = 144$
$w = \pm\sqrt{144}$
$w = \pm 12$ Sustituyendo: $x + 10 = w$
$x + 10 = \pm 12$
$x = -10 \pm 12$

Entonces, $x = -22$ y $x = 2$.

Como se trata de una longitud, se toma $x > 0$.

Por tanto, el lado del terreno debe aumentar en 2 m.

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$.

1.5 Solución de ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática $(x + 1)^2 = 25$.

② **S** Para resolver esta ecuación se representará la parte dentro del paréntesis $x + 1$ por $w = x + 1$ luego se usa la idea de raíz cuadrada.

$w^2 = 25$ Sustituyendo $w = x + 1$,
$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
$x + 1 = \pm 5$ sustituyendo nuevamente $x + 1 = w$.

La estrategia de representar una parte de la ecuación por una letra diferente se conoce como **cambio de variable.**

Es decir, $x + 1 = 5$ y $x + 1 = -5$.
$x = 5 - 1 = 4$ y $x = -5 - 1 = -6$ despejando x.

Finalmente las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = 25$ son: $\boldsymbol{x = 4}$ **y** $\boldsymbol{x = -6}$.

③ **C** Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + m)^2 = n$ se siguen los pasos:
1. Se cambia la variable $x + m$ por w:
$w^2 = n$
2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = n$:
$w = \pm\sqrt{n}$
3. Se sustituye a la variable inicial:
$x + m = \pm\sqrt{n}$
4. Se resuelve para la variable inicial:
$x = -m \pm\sqrt{n}$

Por ejemplo:
$(x - 3)^2 = 7$ Haciendo $w = x - 3$
1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

Observa que
Si $n = 0$; la ecuación solo tiene una solución, $x = -m$.

Si n es negativo; la ecuación no tiene solución.

④ **E** Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 5)^2 - 12 = 0$.

Se transpone -12 en la ecuación: $(x - 5)^2 = 12$.

Se resuelve la ecuación $(x - 5)^2 = 12$.

1. $w^2 = 12$ 2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

⑤ 1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 4)^2 = 4$
$x = -6, -2$
b) $(x - 2)^2 = 2$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$
c) $(-x - 3)^2 = 8$
$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$
d) $(x + 2)^2 = 0$
$x = -2$
e) $(x - 4)^2 - 16 = 0$
$x = 0, 8$
f) $(x + 3)^2 - 3 = 0$
$x = -3 \pm \sqrt{3}$
g) $(-x + 6)^2 - 12 = 0$
$x = 6 \pm 2\sqrt{3}$
h) $(1 - x)^2 = 0$
$x = 1$

2. ¿Cuánto debe aumentar cada lado del terreno cuadrado de don Antonio si quiere cultivar 144 m² de frijol?
Los lados del terreno deben aumentar en 2 m.

Recuerda que los lados del terreno de don Antonio medían 10 m cada uno, y se determinó en la clase 3 de esta lección.

62

Tarea: página 64 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.5**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$(x + 1)^2 = 25$

Ⓢ $(x + 1)^2 = 25$
$w^2 = 25$ Tomando $w = x + 1$
$w = \pm\sqrt{25}$
$w = \pm 5$
$x + 1 = \pm 5$ Sustituyendo $x + 1 = w$
$x = -1 \pm 5$
Por tanto, las soluciones son $x = 4$ y $x = -6$.

Ⓔ $(x - 5)^2 - 12 = 0$
$(x - 5)^2 = 12$ Transponiendo 12
$w^2 = 12$ Tomando $w = x - 5$
$w = \pm\sqrt{12}$
$w = \pm 2\sqrt{3}$
$x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$
$x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

Ⓡ 1. a) $x = -6, -2$
b) $x = 2 \pm \sqrt{2}$
c) $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

1.6 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$.

② **S** La siguiente propiedad se cumple para cualesquiera números reales A, B.

Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$

Además, la expresión $x^2 + 5x$ se puede factorizar sacando factor común x: $x^2 + 5x = 0$.

Y se tiene la ecuación: $x(x + 5) = 0$.

Se cumple que $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

Resolviendo la ecuación lineal $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Y las soluciones para la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$ son: $\mathbf{x = 0}$ o $\mathbf{x = -5}$.

Unidad 3

③ **C** Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando factor común:
$$x(x + b) = 0$$
2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0$$
3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo la ecuación lineal $x + b = 0$.
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

④ **E** ¿Cómo se resuelve la ecuación $ax^2 + bx = 0$? Por ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$.

Se factoriza $x(a + bx) = 0$ y luego se encuentran las soluciones.

1. $x(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ o $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$.

⑤ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 5x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = 5$

b) $x^2 + x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = -1$

c) $3x^2 + 5x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = -\frac{5}{3}$

d) $4x^2 - x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = \frac{1}{4}$

e) $-x^2 + x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = 1$

f) $-x^2 - 2x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = -2$

g) $2x^2 + 8x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = -4$

h) $-3x^2 + 6x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = 2$

63

Tarea: página 65 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.6**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$x^2 + 5x = 0$

Ⓢ Para dos números reales cualquiera A y B se cumple que: Si A × B = 0 entonces, A = 0 o B = 0.

$x^2 + 5x = 0$

$x(x + 5) = 0$ Tomando factor común

Se cumple que: $x = 0$ o $x + 5 = 0$

$x = 0$ o $x = -5$

Por tanto, las soluciones son:
$x = 0$ o $x = -5$.

Ⓔ Factoriza: $3x^2 + 2x = 0$

$3x^2 + 2x = 0$

$x(3x + 2) = 0$ Factor común x

$x = 0$ o $3x = -2$

$x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Ⓡ a) $x = 0$ o $x = 5$

b) $x = 0$ o $x = -1$

c) $x = 0$ o $x = -\frac{5}{3}$

d) $x = 0$ o $x = \frac{1}{4}$

Secuencia:
Anteriormente se resolvieron ecuaciones donde únicamente aparece la variable con exponente 2 y se da solución a una ecuación de la forma $ax^2 = c$, en esta clase se resuelven ecuaciones que poseen además un término en x con exponente 1, este tipo de ecuaciones se solucionarán utilizando la factorización.

Propósito:
①, ② Utilizar la factorización y el hecho de que si A × B = 0 entonces A = 0 o bien B = 0; para resolver la ecuación cuadrática, la solución serán aquellos valores que cumplan esta característica.

Observación: Desde el punto de vista de las soluciones como conjunto, debería escribirse $x = 0$ y $x = -5$, pues ambos valores cumplen ser solución. Se escribe $x = 0$ o $x = -5$ debido a la propiedad de los números reales mencionada en el resultado. De ser posible, aclarar esto con los estudiantes.

③ Es importante observar que para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza el factor común visto en la clase 3.2 de la Unidad 1.

④ La variante, respecto al Problema inicial, radica en el coeficiente de x, el cual es distinto de 1 y diferente de cero, por tanto, al factorizar la expresión, resulta $x(ax + b) = 0$; en este caso, resolver la ecuación lineal resultante involucra el proceso adicional de dividir por el coeficiente a.

⑤ Solución del ítem e.

$$-x^2 + x = 0$$
$$x(-x + 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ o } -x + 1 = 0$$
$$x = 1$$

Secuencia:
En la Unidad 1 se estudió la factorización de trinomios de la forma $x^2 + 2ax + a^2$, para esta clase se utiliza este conocimiento para resolver una ecuación de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

Propósito:
①, ② Como el trinomio $x^2 + 4x + 4 = 0$ se factoriza como $(x + 2)^2 = 0$, el único número que cumple esta relación es -2, por tanto, este tipo de ecuaciones solo tiene una solución.

③ En este caso, se debe realizar un cambio de variable adecuado para que sea más evidente que se trata de un trinomio cuadrado perfecto y resolver de forma similar al Problema inicial y además la solución de esta ecuación es una fracción.

④ Solución de algunos ítems.

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$(x - 4)^2 = 0$
$x - 4 = 0$
$x = 4$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$
$w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 3y$
$(w + 1)^2 = 0$

$w + 1 = 0$ Sustituyendo $3y = w$
$3y + 1 = 0$
$y = -\frac{1}{3}$

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2+2ax+a^2 = 0$ utilizando el trinomio cuadrado perfecto.

1.7 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

① **P** Resuelve la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 4x + 4 = 0$.

② **S** Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$.

Entonces:
$x + 2 = 0$
$\boldsymbol{x = -2}$

El trinomio cuadrado perfecto se factoriza:
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

C Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando el trinomio cuadrado perfecto:
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$
2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio de la clase 6 y se determina la ecuación lineal a resolver $x + a = 0$.
3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática:
$\boldsymbol{x = -a}$

③ **E** Resuelve la siguiente ecuación cuadrática $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 2x$,
2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$ sustituyendo nuevamente $2x = w$,
3. $2x + 1 = 0$.
$x = -\frac{1}{2}$

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$x = -3$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$x = 4$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
$x = \frac{3}{2}$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$
$y = -\frac{1}{3}$

e) $y^2 - 10y + 25 = 0$
$y = 5$

f) $y^2 + 14y + 49 = 0$
$y = -7$

64

Tarea: página 66 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.7**

Ⓟ Resuelve la ecuación:
$x^2 + 4x + 4 = 0$

Ⓢ $x^2 + 4x + 4 = 0$ Factorizando el trinomio
$(x + 2)^2 = 0$ cuadrado perfecto.

Se resuelve como en la clase 1.5
$w^2 = 0$ Tomando $w = x + 2$
$x + 2 = 0$. Por tanto, $x = -2$.

Ⓔ Resuelve la ecuación:
$4x^2 + 4x + 1 = 0$

Tomando $w = 2x$
$4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$
$(w + 1)^2 = 0$
Sustituyendo $2x = w$ $(2x + 1)^2 = 0$
$2x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$

Ⓡ a) $x = -3$
b) $x = 4$
c) $x = \frac{3}{2}$
d) $y = -\frac{1}{3}$

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma: $(x + a)(x + b) = 0$.

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 2)(x - 3) = 0$.

② **S** Se tiene $\underbrace{(x-2)}_{A} \times \underbrace{(x-3)}_{B} = 0$ se debe cumplir que

$x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$

Resolviendo las ecuaciones lineales:

$x = 2$ o $x = 3$

Para cualesquiera números reales A, B se cumple que Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

C Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x - a)(x - b) = 0$ se siguen los pasos:

1. Se aplica la propiedad y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
   $x - a = 0$ o $x - b = 0$
2. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo las ecuaciones lineales:
   $x = a$ o $x = b$

Por ejemplo: $(x + 1)(x - 4) = 0$

1. $x + 1 = 0$ o $x - 4 = 0$
2. $x = -1$ o $x = 4$

③ **E** Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

En este caso primero se factoriza la expresión buscando el producto notable correspondiente, 2 números que multiplicados dan 6 y sumados 5, son 3 y 2.

Resolviendo: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

1. $x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
2. $x = -3$ o $x = -2$

Las expresiones de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ se factorizan de la siguiente manera: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

④ 1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x - 2)(x - 1) = 0$ $x = 2$ o $x = 1$
b) $(x + 5)(x - 3) = 0$ $x = -5$ o $x = 3$
c) $(x - 7)(x + 2) = 0$ $x = 7$ o $x = -2$
d) $(x + 4)(x + 3) = 0$ $x = -4$ o $x = -3$
e) $x^2 - 7x + 6 = 0$ $x = 6$ o $x = 1$
f) $x^2 - 2x - 8 = 0$ $x = 4$ o $x = -2$
g) $x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ o $x = 2$
h) $x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ o $x = 3$

2. Encuentra dos números consecutivos que al elevarlos al cuadrado y luego sumarlos, dé como resultado 25. -4 y -3, también 3 y 4.

Unidad 3

65

Tarea: página 67 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.8**

(P) Resuelve la ecuación cuadrática:
$(x - 2)(x - 3) = 0$

(S) Utilizando también el hecho de que:
Si A × B = 0, entonces A = 0 o B = 0.

Si $(x - 2)(x - 3) = 0$
Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 3$.

(E) $x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$
$x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
$x = -3$ o $x = -2$

(R) 1. a) $x = 2$ o $x = 1$
b) $x = -5$ o $x = 3$
c) $x = 7$ o $x = -2$
d) $x = -4$ o $x = -3$

Secuencia:
En la clase anterior se estudiaron las ecuaciones cuadráticas que se resuelven factorizando trinomios cuadrados perfectos, para esta clase se resolverán ecuaciones cuadráticas factorizando trinomios que no son cuadrados perfectos.

Propósito:
①, ② Utilizando el hecho de que dos números multiplicados entre sí dan como resultado cero si alguno de ellos es cero (visto en la clase 1.6), se encuentran los valores para x que cumplen esta relación.

Observación: Como en la clase 1.6, desde el punto de vista de las soluciones como conjunto, debería escribirse $x = 2$ y $x = 3$, pues ambos valores cumplen con ser solución. Se escribe $x = 2$ o $x = 3$ debido a la propiedad de los números reales mencionada en ②. De ser posible aclarar esto con los estudiantes.

③ Factorizar el trinomio de la ecuación de la forma que se hizo en la clase 3.3 de la Unidad 1 y resolver de forma similar al Problema inicial.

④ Solución de algunos ítems.

1. g) $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$

$x + 3 = 0$ o $x - 2 = 0$
$x = -3$ o $x = 2$

2. Sea x un número entero, el siguiente número entero que le sigue es $x + 1$.
$x^2 + (x + 1)^2 = 25$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$
$2x^2 + 2x - 24 = 0$
$x^2 + x - 12 = 0$
$(x + 4)(x - 3) = 0$

Las soluciones de esta ecuación son:
$x + 4 = 0$ o $x - 3 = 0$
$x = -4$ o $x = 3$

Las parejas de números que cumplen son: -4 y -3, y además 3 y 4.
Se verifica que:
$(-4)^2 + (-3)^2 = 25$
$(3)^2 + (4)^2 = 25$

Materiales:
Piezas de papel o cartoncillo, que sean manipulables.

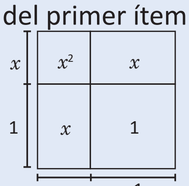
Secuencia:
Anteriormente se resolvieron ecuaciones cuadráticas utilizando factorización y el concepto de raíz cuadrada. Para esta clase se analiza cómo encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática utilizando modelos de área. Esta clase es una introducción al tema siguiente: Solución de ecuaciones completando cuadrados.

Propósito:
① La ecuación que determina el área de la figura es, $x^2 + 8x = 33$ cm². Mediante estas condiciones y modificando las piezas se debe encontrar el valor del lado x del cuadrado.

② Dividir el rectángulo de área $8x$ en dos piezas iguales, de tal modo que las piezas resultantes tengan un lado cuya medida sea x y puedan conectarse con los lados del cuadrado. Acomodando las piezas, resulta un espacio vacío con forma de cuadrado, se completa el espacio, la figura total resulta ser un cuadrado de lado $x + 4$, cuya área es 33 cm² + 16 cm² = 49 cm², para que esto se cumpla, $x = 3$.

Observación: Recalcar que el lado x indica un valor desconocido y que las medidas de las piezas solo son valores arbitrarios para poder manipularlas, no confundir esta medida con la solución para x. Además el tamaño de las figuras en el Problema inicial y solución debería ser el mismo, pero se adecuó debido al espacio disponible en la página.

③ Solución del primer ítem.



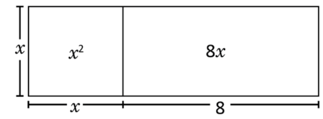
$(x + 1)^2 = 8 + 1$
$(x + 1)^2 = 9$
$x + 1 = 3$
$x = 2$

Observación: Para esta clase, se toma como solución únicamente el valor positivo porque se trabaja con áreas.

Indicador de logro. Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$.

1.9 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas

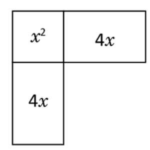
① **P** El área de la figura es 33 cm². Encuentra la medida del lado x utilizando una justificación geométrica.



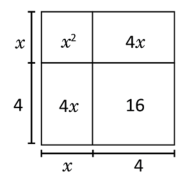
Puedes pensar en recortar y adecuar las piezas de modo conveniente.

② **S**

1. Dividiendo el rectángulo en dos partes iguales y girando 90° una de esas partes.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura inicial es 33 cm², si se agrega un cuadrado de lado 4, el área de la figura anterior es 49 cm².

Por tanto, el lado x debe tomar el valor de 3 cm, ya que **(7 cm)² = 49 cm²**.

Solución algebraica:
$x^2 + 8x = 33$
1. $x^2 + 4x + 4x = 33$
2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$
3. $(x + 4)^2 = 49$

Solución: $x = 3$

C Se pueden utilizar argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática.

Las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones, pero dado que se trata del lado de una figura solo se considera la positiva.

③ Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x = 8$
$x = 2$

b) $x^2 + 10x = 56$
$x = 4$

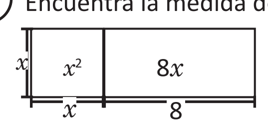
c) $x^2 + 6x = 27$
$x = 3$

66

Tarea: página 68 del Cuaderno de Ejercicios.

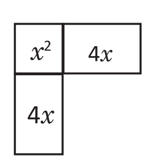
Fecha: **U3 1.9**

Ⓟ Encuentra la medida del lado x

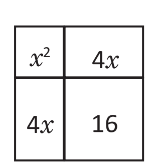


Área: 33 cm²

Ⓢ 1. Dividiendo el rectángulo en las dos partes iguales de la derecha.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura es:
33 cm² + 16 cm² = 49 cm².

Por tanto, $(x + 4)^2 = 49$.
$x + 4 = 7$
$x = 3$ $\quad x = 3$ cm

Ⓡ a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 3$

Indicador de logro. Utiliza el procedimiento de complementación de cuadrados, para resolver ecuaciones cuadráticas.

1.10 Solución de ecuaciones completando cuadrados

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 8x - 20 = 0$.

② **S** Para resolver se puede transformar a la forma $(x + m)^2 = n$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Se transpone el -20: $x^2 + 8x = 20$.

Sumando un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

Simplificando las fracciones y haciendo algunos cálculos se tendrá la ecuación: $x^2 + 8x + 16 = 36$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio la expresión es la siguiente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Y el término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Dado que la expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede ser expresada como $(x + 4)^2 = 36$.

Resolviendo esta ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$: $x + 4 = \pm 6 \Rightarrow x + 4 = 6$ o $x + 4 = -6$.

Por lo tanto, las soluciones son: $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{x = -10}$.

Unidad 3

③ **C** Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se siguen los pasos:

Por ejemplo: $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. Se pasa el término c al miembro derecho. — 1. $x^2 + 2x = 1$
2. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto. — 2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos. — 3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$. — 4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Soluciones. $x = -1 + \sqrt{2}$ o $x = -1 - \sqrt{2}$

A la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando este procedimiento se le conoce como solución por **complemento de cuadrados**.

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$ $\quad x = -3$ o $x = -1$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ $\quad x = 5$ o $x = 1$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ $\quad x = 7$ o $x = -1$

d) $x^2 - 8x + 16 = 0$ $\quad x = 4$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$ $\quad x = -1 \pm \sqrt{3}$

f) $x^2 - 4x + 2 = 0$ $\quad x = 2 \pm \sqrt{2}$

g) $x^2 + 5x + 5 = 0$ $\quad x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $x^2 + x - 1 = 0$ $\quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

67

Tarea: página 69 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.10**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$x^2 + 8x - 20 = 0$

Ⓢ
$x^2 + 8x - 20 = 0$
$x^2 + 8x = 20$ Transponiendo.
$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$ Completando cuadrados.
$x^2 + 8x + 16 = 36$
$(x + 4)^2 = 36$
$x + 4 = \pm 6$
$x = -4 \pm 6$

Por tanto, $x = -10$ o $x = 2$.

Ⓡ 1. a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$
$x^2 + 4x = -3$ Transponiendo.
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$ Completando cuadrados.
$x^2 + 4x + 4 = 1$
$(x + 2)^2 = 1$
$x + 2 = \pm 1$
$x = -2 \pm 1$

Por tanto, $x = -3$ o $x = -1$.

b) $x = 5$ o $x = 1$

c) $x = 7$ o $x = -1$

d) $x = 4$

Secuencia:
El proceso desarrollado en la clase anterior para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando áreas es muy importante para el desarrollo de esta clase, dado que se realizan algebraicamente los mismos procesos que se realizaron geométricamente en la anterior.

Propósito:
①, ② Darse cuenta que la ecuación no se puede resolver utilizando los métodos vistos en clases anteriores. El proceso utilizado tiene como objetivo completar un cuadrado perfecto para la variable x, para finalmente resolver una ecuación del tipo $(x + m)^2 = n$. Al explicar el proceso de solución se puede hacer la relación con los pasos realizados en la clase anterior.

Observación: Hay que indicar a los estudiantes que apliquen el método de la clase anterior.

③ Establecer formalmente los pasos a realizar para resolver una ecuación cuadrática utilizando el complemento de cuadrados.

Observación: Al proceso de solucionar una ecuación cuadrática por complemento de cuadrados se le llama también **completación de cuadrados.**

④ Solución del ítem a.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + 4x = -3$$
$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 4x + 2^2 = -3 + 2^2$$
$$(x + 2)^2 = 1$$
$$x + 2 = \pm 1$$
$$x = -2 \pm 1$$
$$x = -3, x = -1$$

Secuencia:
Ya que se cuenta con la estrategia de completar cuadrados perfectos para resolver una ecuación cuadrática, aquí se pretende establecer una serie de pasos para resolver una ecuación cuadrática, de modo que este método sea utilizado para deducir la fórmula general.

Propósito:
①, ② Utilizar los temas estudiados en la clase 1.10 y en la clase 1.5, para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática utilizando el método para completar cuadrados perfectos. Para este problema es necesario que los estudiantes apliquen varios conocimientos previos.

③ Sistematizar el proceso para resolver una ecuación cuadrática, siguiendo los pasos que sirven para deducir la fórmula general de dicha ecuación.

④ Se recomienda que los estudiantes comiencen con el literal c) de la parte de problemas y ejercicios, puesto que a) y b) al simplificar llevan una variable que lo hace más difícil, como lo muestra el siguiente ejercicio:

a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$$

$$x^2 + x = -\frac{1}{5}$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-4+5}{20}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{20}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

Posibles dificultades:
El proceso explicado en esta clase es un tanto complejo, lleva muchos pasos y es necesario verificar que los estudiantes realicen correctamente cada uno de ellos para llegar a la respuesta correcta.

Indicador de logro. Resuelve una ecuación cuadrática usando una secuencia de pasos, como una estrategia previa para deducir la fórmula general de la ecuación cuadrática.

1.11 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

① **P** Para resolver la siguiente ecuación sigue los pasos a), b), c).

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) Divide la ecuación por el coeficiente de x^2 y pasa el termino constante al lado derecho de la ecuación.
b) Suma por un numero conveniente y completa cuadrados.
c) Despeja la variable x.

② **S**

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando por un número conveniente.

$(x + \frac{5}{6})^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{25-12}{36}$ Sumando las fracciones de la derecha.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

③ **C** Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se divide la ecuación por el coeficiente a de x^2.
2. Se pasa el término constante al miembro derecho.
3. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo, sea un trinomio cuadrado perfecto.
4. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos necesarios.
5. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$	b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$	c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$	d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$
$x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$	$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$	$x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

68

Tarea: página 70 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.11**

Ⓟ Resuelve la ecuación siguiendo los pasos a), b) y c) que menciona el libro: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Ⓢ a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando a ambos lados.

$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$ Sumando las fracciones.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

Ⓡ a) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

b) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

c) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

d) $x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

Indicador de logro. Utiliza la completación de cuadrados para determinar la fórmula general de la ecuación cuadrática.

1.12 Fórmula general de la ecuación cuadrática

① **P** Encuentra la fórmula para resolver la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

② **S** Para resolver se puede dividir por "a" para transformar a la forma $x^2 + bx + c = 0$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Ahora se procederá resolviendo la ecuación cuadrática:

Primero se divide entre el coeficiente de x^2 ambos lados de la ecuación, para que el coeficiente sea 1.	$ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Luego se transpone $\frac{c}{a}$.	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Se completan cuadrados perfectos.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
Se hacen los cálculos.	$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
Se hacen los cálculos al lado derecho de la ecuación.	$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
Se resuelve la ecuación.	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

③ **C** Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la fórmula a la que se llegó al final de la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general de la ecuación cuadrática.** Y para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática se sustituyen los valores de a, b, c en la fórmula.

Por ejemplo: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Si se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

c) $x^2 + 3x - 9 = 0$ $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

Unidad 3

69

Tarea: página 71 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.12**

P Resuelve la ecuación cuadrática general.
$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

S
$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Dividiendo por a.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ Sumando a ambos lados.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ Completando cuadrados.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ Sumando las fracciones.

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Despejando x.

R
a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$
b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$
c) $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
d) $x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

Secuencia:
Para esta clase ya se cuenta con que los estudiantes pueden resolver una ecuación cuadrática particular siguiendo los pasos para deducir la fórmula general de la ecuación. Ahora se aplicará el método visto en la clase anterior para deducir la fórmula general.

Propósito:
①, ② Aplicar el método descrito a una ecuación cuadrática escrita en forma general, para deducir una fórmula que permita resolver cualquier ecuación cuadrática. Esta clase puede ser un poco compleja, el docente puede intervenir para guiar la solución de los estudiantes, si estos no encuentran un camino.

③ Presentar la fórmula general de la ecuación cuadrática y su forma de aplicación al tener una ecuación cuadrática particular.

④ Primero se trabaja un ítem en el que no se debe simplificar, y que la respuesta final inicia con un número positivo, luego el número es positivo, pero en el denominador queda un negativo, luego las respuestas inician con número negativo, y además en el tercer ítem se debe dar una simplificación en la raíz.

Solución de algunos ítems.

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$

$a = 5$, $b = -3$, $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$

$a = -4$, $b = -1$, $c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-4)(1)}}{2(-4)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

Otra forma:
Multiplicar ambos miembros por -1, se obtiene la ecuación $4x^2 + x - 1 = 0$, y al resolver: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

Secuencia:
Una vez establecida la fórmula general, ahora se trabajará un poco más con ella, identificando diferentes casos en donde las soluciones se pueden simplificar, o se pueden expresar por separado.

Propósito:
①, ② Presentar dos ecuaciones cuadráticas en cuya solución se aplica la fórmula general, en el caso del literal a) se debe simplificar y en el caso del literal b) se pueden determinar dos números racionales que satisfacen dicha ecuación. Siempre que se puedan calcular los valores racionales (exactos) de x, se debe hacer, no hay que dejar soluciones en la forma $x = \frac{-7 \pm 5}{6}$.

③ Describir el uso de la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática particular.

④ El objetivo es que los estudiantes comiencen trabajando ecuaciones cuadráticas en las que puedan determinar dos soluciones racionales, primero combinando la solución entera y fraccionaria, luego con dos soluciones fraccionarias, después cuando en la raíz el radicando sea 0 y tenga solo una solución fraccionaria, y finalmente las ecuaciones que llevan a soluciones donde hay que simplificar pero son irracionales.

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

$a = 2,\ b = 1,\ c = -1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$x = -1 \quad x = \frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = 9,\ b = -12,\ c = 4$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(9)(4)}}{2(9)}$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18}$

$x = \frac{2}{3}$

Posibles dificultades:
Al solucionar el literal a) del Problema inicial pueden cometer el error:

$$\frac{\overset{-1}{\cancel{-2}} \pm 2\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

Indicador de logro. Utiliza la fórmula general de la ecuación cuadrática identificando los valores de la ecuación general.

1.13 Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática

① **P** Resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

② **S** Sustituyendo en la fórmula general:

a) $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\underset{4}{\cancel{8}}}$ → Es necesario simplificar

$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ o $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

b) $a = 3,\ b = 5,\ c = -2$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$ → Es necesario calcular las raíces cuadradas de 49

$= \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x = \frac{-5 + 7}{6} \qquad x = \frac{-5 - 7}{6}$

$x = \frac{1}{3}$ o $x = -2$ → Se calculan las dos soluciones

③ **C** Para aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática solamente se identifican los valores de a, b, c en la ecuación cuadrática; al calcular las soluciones es posible que sea necesario simplificar o expresar las raíces como números racionales (cuando sea posible, determinar las raíces cuadradas del radicando).

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$
$x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
$x = 2$ o $x = -\frac{1}{3}$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{3}$ o $x = -\frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
$x = \frac{2}{3}$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$
$x = -\frac{5}{2}$

f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

70

Tarea: página 72 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.13**

Ⓟ Resuelve utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$ b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Ⓢ $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$x = \frac{\overset{1}{\cancel{-2}} \pm \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ o $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

$a = 3,\ b = 5,\ c = -2$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x = \frac{-5 - 7}{6}$ o $x = \frac{-5 + 7}{6}$

$x = -2$ o $x = \frac{1}{3}$

Ⓡ a) $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 2$ o $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = -\frac{1}{3}$ o $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = \frac{2}{3}$

e) $x = -\frac{5}{2}$

f) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Indicador de logro. Compara los métodos de solución desarrollados para resolver ecuaciones cuadráticas.

1.14 Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

① **P** Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ usando factorización, fórmula general y completando cuadrados, ¿coinciden las soluciones? Escribe en el cuaderno tu opinión sobre cada método.

② **S**

Factorización

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ o $x = -3$

Fórmula general

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$

$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$

$= \frac{-7 \pm 1}{2}$

$x = -3$ o $x = -4$

Completando cuadrados

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$(x + \frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$(x + \frac{7}{2})^2 = \frac{-48 + 49}{4}$

$(x + \frac{7}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$

$x = -3$ o $x = -4$

Observa que en este caso resultó más sencillo y práctico aplicar el método de factorización; además, el método de la fórmula general conlleva un poco más de cálculo, pero es aplicable a todos los casos; finalmente, el método completando cuadrados, para este caso resultó complejo, pero hay casos en que puede resultar más sencillo.

③ **C** Para escoger el método más eficiente de resolver ecuaciones cuadráticas se puede:

1. Resolver usando factorización.
2. Si no es posible encontrar una factorización se puede aplicar alguno de los otros dos métodos.

La fórmula general es aplicable en todos los casos pero en ocasiones puede conllevar un cálculo más complejo que si se utiliza otro método.

④ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ $\quad x = \pm\frac{2}{3}$

b) $4x^2 - 16 = 0$ $\quad x = \pm 2$

c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$ $\quad x = 7$ o $x = 5$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$ $\quad x = 9$ o $x = -1$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f) $5x^2 + 10x = 0$ $\quad x = 0$ o $x = -2$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$ $\quad x = 5$

h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$ $\quad x = 2$ o $x = \frac{1}{5}$

Unidad 3

71

Tarea: página 73 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 1.14**

Ⓟ Resuelve la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$, usando factorización, fórmula general y completando cuadrados.

Ⓢ Factorización

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ o $x = -3$

Fórmula cuadrática

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$

$x = \frac{-7 \pm 1}{2}$

$x = -4$ o $x = -3$

Completando cuadrados

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = -4$ o $x = -3$

Ⓡ a) $x = \pm\frac{2}{3}$

b) $x = \pm 2$

c) $x = 7$ o $x = 5$

d) $x = 9$ o $x = -1$

e) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f) $x = 0$ o $x = -2$

g) $x = 5$

h) $x = 2$ o $x = \frac{1}{5}$

Secuencia:
En las clases anteriores los estudiantes han aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas utilizando diferentes métodos, ahora se les presentarán diferentes ecuaciones cuadráticas, de modo que ellos determinen el método más conveniente para resolverlas.

Propósito:
①, ② Resumir los diferentes métodos que existen para resolver una ecuación cuadrática, y mencionar que en ocasiones es posible que algún método no sea tan adecuado para ciertas condiciones.

③ Brindar un criterio al estudiante sobre cómo escoger el método de resolución de una ecuación cuadrática.

④ Para asesorar correctamente a los estudiantes en determinar el método más conveniente se recomienda al docente que si la respuesta de la ecuación son números enteros, entonces es mejor utilizar la factorización, y si son fraccionarios, es mejor utilizar el despeje por raíz cuadrada o fórmula general.

Solución de algunos ítems.

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

$x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

$x = \pm\frac{2}{3}$

Este literal se puede resolver factorizando por diferencia de cuadrados, pero no todos los estudiantes lo harán de esta forma.

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x - 9)(x + 1) = 0$

$x - 9 = 0$ o $x + 1 = 0$

$x = 9$ o $x = -1$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)^2 = 0$

$x = 5$

Solución de algunos ítems de la clase 1.15:

1. Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Forma $(x + m)^2 = n$.

c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$

$(x - 4)^2 = 12$

$x - 4 = \pm 2\sqrt{3}$

$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Forma $x^2 + bx + c = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x = 1$

$x^2 + 4x + 2^2 = 1 + 2^2$

$(x + 2)^2 = 5$

$x + 2 = \pm\sqrt{5}$

$x = -2 \pm \sqrt{5}$

2. g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Solución de algunos ítems de la clase 1.16:

Forma $x^2 + bx = 0$

a) $x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$

$x = 0$ o $x = 7$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$

$x - 1 = 0$ o $x - 6 = 0$

$x = 1$ o $x = 6$

Indicador de logro. Resuelve ecuaciones cuadráticas, utilizando los métodos estudiados.

1.15 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos vistos en clase:

Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$ $x = \pm 1$

b) $-9x^2 = -1$ $x = \pm \frac{1}{3}$

c) $3x^2 - 27 = 0$ $x = \pm 3$

d) $21 - 3x^2 = 0$ $x = \pm\sqrt{7}$

e) $-x^2 - 3 = 0$ No tiene solución

Forma $(x + m)^2 = n$.

a) $(x + 1)^2 = 9$ $x = 2$ o $x = -4$

b) $(-x + 2)^2 = 3$ $x = 2 + \sqrt{3}$ o $x = 2 - \sqrt{3}$

c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$ $x = 4 + 2\sqrt{3}$ o $x = 4 - 2\sqrt{3}$

d) $(-3 - x)^2 = 0$ $x = -3$

e) $(5 - x)^2 + 3 = 0$ No tiene solución

Forma $x^2 + bx + c = 0$ (Completa cuadrados perfectos).

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = 1$ o $x = -3$

b) $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x = 2$ o $x = -6$

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x = -3$

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ $x = 4$ o $x = -2$

e) $x^2 - 8x + 12 = 0$ $x = 6$ o $x = 2$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$ $x = -2 \pm \sqrt{5}$

g) $x^2 + 2x + 4 = 0$ No tiene solución

h) $x^2 - x - 6 = 0$ $x = 3$ o $x = -2$

i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

j) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 3$ o $x = 2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ $x = 3$ o $x = \frac{2}{3}$

b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ $x = -5$ o $x = \frac{3}{4}$

c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$ $x = \frac{1}{3}$ o $x = \frac{3}{4}$

d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$ $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -\frac{3}{2}$

e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$

g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

h) $x^2 - 4x - 1 = 0$ $x = 2 \pm \sqrt{5}$

1.16 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

Forma $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$ $x = 0$ o $x = 7$

b) $2x^2 - x = 0$ $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$

c) $x^2 + 3x = 0$ $x = 0$ o $x = -3$

d) $4x^2 + 12x = 0$ $x = 0$ o $x = -3$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ $x = 4$

c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$ $x = -\frac{1}{4}$

d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ $x = -\frac{2}{3}$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$ $x = 1$ o $x = 6$

b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ $x = 3$ o $x = -2$

c) $(x + 5)(x - 7) = 0$ $x = -5$ o $x = 7$

d) $(x + 2)(x + 4) = 0$ $x = -2$ o $x = -4$

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ $x = 1$ o $x = 8$

b) $x^2 - 2x - 24 = 0$ $x = 6$ o $x = -4$

c) $x^2 + 7x - 18 = 0$ $x = -9$ o $x = 2$

d) $x^2 - 11x + 28 = 0$ $x = 7$ o $x = 4$

2. Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 6x = 7$ $x = 1$

b) $x^2 + 10x = 11$ $x = 1$

c) $x^2 + 8x = 9$ $x = 1$

72

Tarea: página 74 del Cuaderno de Ejercicios.

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$

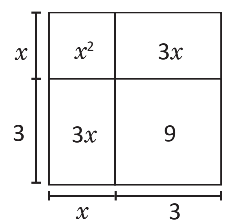
a) $x^2 - 9x + 8 = 0$

$(x - 1)(x - 8) = 0$

$x - 1 = 0$ o $x - 8 = 0$

$x = 1$ o $x = 8$

2. a) $x^2 + 6x = 7$



$(x + 3)^2 = 7 + 9$

$(x + 3)^2 = 16$

$x + 3 = 4$

$x = 1$

Indicador de logro. Determina e interpreta la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

2.1 Discriminante de la ecuación cuadrática

① **P** Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general. Observa el valor del radicando.

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $2x^2 + x + 1 = 0$

② **S**

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$
$= \frac{-3 \pm 1}{4}$
$x = -\frac{1}{2}$ y $x = -1$

El radicando es mayor que cero y hay dos soluciones.

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$
$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$
$= \frac{\cancel{-4}^{-1}}{\cancel{8}_{2}} = -\frac{1}{2}$

El radicando es cero y la solución es única.

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

Observa que no se han definido las raíces cuadradas de números negativos, entonces $\pm\sqrt{-7}$ no son números reales.

El radicando es menor que cero y no hay solución en los números reales.

Unidad 3

③ **C** El radicando de la fórmula general que viene dado por la expresión $b^2 - 4ac$ es llamado **el discriminante** de la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

Observa que el discriminante puede cumplir cualquiera de los siguientes tres casos:

a) $b^2 - 4ac > 0$
$2x^2 + 3x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones**.

b) $b^2 - 4ac = 0$
$4x^2 + 4x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene solo **una solución**.

c) $b^2 - 4ac < 0$
$2x^2 + x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática **no tiene solución en los números reales**.

El discriminante es cero porque la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto.

④ 1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones, comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ Tiene 2 soluciones.
b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ No tiene solución.
c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ Tiene 1 solución.
d) $x^2 - 2x = 0$ Tiene 2 soluciones.
e) $x^2 + 1 = 0$ No tiene solución.
f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$ Tiene 2 soluciones.
g) $4x^2 - 9 = 0$ Tiene 2 soluciones.
h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ Tiene 1 solución.

2. Determina cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.
Tiene 2 soluciones.

73

Tarea: página 75 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 2.1**

(P) Resuelve las ecuaciones cuadráticas con la fórmula general. Observa el radicando de cada ecuación.

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $2x^2 + x + 1 = 0$

(S)

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
$x = \frac{-3 \pm 1}{4}$
$x = -\frac{1}{2}$ o $x = -1$

El radicando es mayor que cero y la ecuación tiene 2 soluciones.

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$
$x = \frac{-4 \pm 0}{8}$
$x = -\frac{1}{2}$

El radicando es cero y la ecuación tiene 1 solución.

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

El radicando es menor que cero y la ecuación no tiene solución.

(R)
a) Tiene 2 soluciones b) No tiene solución c) Tiene 1 solución d) Tiene 2 soluciones
e) No tiene solución f) Tiene 2 soluciones g) Tiene 2 soluciones h) Tiene 1 solución

Secuencia:
Ya estudiados los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas, se introducirá el análisis del discriminante para saber la naturaleza de las soluciones de estas ecuaciones.

Propósito:
①, ② Examinar el radicando de la fórmula cuadrática en tres situaciones diferentes y compararlo con las soluciones de la ecuación cuadrática.

③ Definir el discriminante de una ecuación cuadrática, asociarlo con el radicando de la fórmula general y caracterizar las soluciones de la ecuación cuadrática con el valor del discriminante.

④ 1. a) $a = 1$, $b = 6$, $c = -9$
$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(-9)$
$= 36 + 36$
$= 72$
Tiene 2 soluciones.

b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$
$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2)$
$= 4 - 8$
$= -4$
No tiene solución.

c) $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$
$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1)$
$= 4 - 4$
$= 0$
Tiene 1 solución.

d) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$
$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(0)$
$= 4$
Tiene 2 soluciones.

2. $a = 1$, $b \neq 0$, $c = 0$
$b^2 - 4ac = b^2 - 4(1)(0)$
$= b^2 > 0$
Tiene 2 soluciones.

Secuencia:
Con el contenido visto en la clase anterior sobre el análisis del discriminante, ahora se puede introducir la resolución de problemas que conlleven este análisis.

Propósito:
①, ② Aplicar el valor del discriminante para mostrar la no existencia de dos números bajo las condiciones que enuncia el Problema inicial; para la solución es posible que a los estudiantes no se les ocurra multiplicar ambos miembros de la ecuación por x, pero si trabajan las ecuaciones de modo que sustituya una en otra, se deducirá la misma ecuación cuadrática y se tiene que analizar el mismo discriminante.

③ Brindar un procedimiento para plantear problemas mediante una ecuación cuadrática y utilizar el discriminante para resolverlos.

④ En esencia, todos los problemas equivalen a dar la suma de dos números y la multiplicación de estos.

1. Forma 1

$$x + y = 4$$
$$xy = c$$
$$x(4 - x) = c$$
$$4x - x^2 = c$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

Forma 2

$$x + y = 4$$
$$x^2 + xy = 4x$$
$$x^2 + c = 4x$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

Analizando el discriminante para cada literal de este problema se debe cumplir que:

a) $b^2 - 4ac > 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) > 0$
$16 - 4c > 0$
Por prueba y error se puede comprobar que $c < 4$.

b) $b^2 - 4ac = 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) = 0$
$16 - 4c = 0$
$16 = 4c$
$4 = c$

c) De manera análoga al literal a), se puede comprobar que $c > 4$.

Indicador de logro. Utiliza el discriminante para determinar si una ecuación cuadrática tiene una solución, dos o ninguna.

2.2 Uso del discriminante en resolución de problemas

① **P** Muestra que no existen dos números reales tales que su suma sea 4 y su producto sea 5.

② **S** Sean x y y los dos números. Debe cumplirse que $x + y = 4$ y además $xy = 5$.

Tomando la primera ecuación:

$x + y = 4$
$x^2 + xy = 4x$ Multiplicando por x en ambos lados,
$x^2 + 5 = 4x$ dado que $xy = 5$,
$x^2 - 4x + 5 = 0$ trasladando y ordenando los terminos en el lado izquierdo.

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:
$(-4)^2 - 4(1)(5) < 0$

Discriminante de una ecuación cuadrática: $b^2 - 4ac < 0$.

Entonces, no existen soluciones en los números reales para esta ecuación cuadrática. Por tanto, no existen números reales tales que la suma sea 4 y multiplicados den 5.

③ **C** Se puede utilizar el discriminante de una ecuación cuadrática para resolver diversos problemas. Se plantea la ecuación cuadrática y se analizan sus soluciones. En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) $b^2 - 4ac > 0$ Existen dos soluciones reales.
b) $b^2 - 4ac = 0$ Existe una solución real.
c) $b^2 - 4ac < 0$ No existen soluciones reales.

④
1. La suma de dos números es 4 y al multiplicarlos el resultado es c. Qué valores debe tomar c de forma que
   a) La ecuación tenga dos soluciones reales. $c < 4$
   b) La ecuación tenga una solución real. $c = 4$
   c) La ecuación no tenga soluciones reales. $c > 4$
2. Una persona asegura que su casa tiene forma rectangular y que el perímetro de la misma es de 18 m y que además, su área es de 21 m². Demuestra que la persona estaba mintiendo.
   Si un lado mide x m, la ecuación es $x^2 - 9x + 21 = 0$, y el discriminante es menor que cero.
3. Don José tiene un terreno rectangular de 700 m² de área, ¿puede cercar el terreno utilizando 100 m de alambre?
   No es posible, si un lado mide x m, la ecuación $x^2 - 50x + 700 = 0$, y el discriminante es menor que cero.

74

Tarea: página 76 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 2.2**

Ⓟ Muestra que no existen dos números que sumados den 4 y multiplicados 5.

Ⓢ Sean x, y los números.

$x + y = 4$
$xy = 5$
$x^2 + xy = 4x$ Multiplicando por x cada miembro de la ecuación.
$x^2 + 5 = 4x$ Sustituyendo $xy = 5$.
$x^2 - 4x + 5 = 0$ Ordenando.

Analizando el discriminante:
$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(5)$
$= 16 - 20 = -4 < 0$
Por lo tanto, no existen estos números.

Ⓡ 1a) $c < 4$ 1b) $c = 4$ 1c) $c > 4$

2. Sea x la longitud de un lado. La ecuación es $x^2 - 9x + 21 = 0$, y el discriminante es -3, por lo tanto no existe un terreno con estas dimensiones.

3. Sea x la longitud de un lado. La ecuación es $x^2 - 50x + 700 = 0$, y el discriminante es -300, por lo tanto, no alcanza la cantidad de alambre para el terreno.

Indicador de logro. Plantea ecuaciones cuadráticas que resuelven situaciones problemáticas.

2.3 Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas

① **P** Don Juan construirá su casa en un terreno rectangular de 72 m² de área y 36 m de perímetro. Para solicitar los permisos de construcción le piden las dimensiones del terreno, ¿cómo se podría determinar las dimensiones del terreno con esta información?

② **S** Si se representa el largo del terreno por x, ¿cómo se representa el ancho usando x?

Como la suma del largo y el ancho es igual a la mitad del perímetro $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$, entonces el ancho es "$18 - x$".

Planteando la ecuación y utilizando el valor de área $x(18 - x) = 72$.

Desarrollando: $-x^2 + 18x = 72 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 18x + 72.$

Utilizando factorización: $x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \Rightarrow (x - 12)(x - 6) = 0.$

Entonces: $x - 12 = 0$ o $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 12$ o $x = 6$.

Como x representa el lado más largo: $x = 12$.

Entonces, el ancho del terreno de don Juan es 6.

Por lo tanto, las dimensiones del terreno de don Juan son: **12 m de largo** y **6 m de ancho.**

③ **C** Para resolver una situación problemática, en general, se pueden seguir los pasos:

1. Si es posible, realizar un esquema de la situación del problema.
2. Se identifica la información que brinda el problema y se define qué cantidad representa la incógnita.
3. Se representan todas las cantidades con la misma incógnita.
4. Se plantea la ecuación cuadrática que hay que resolver (establecer la igualdad).
5. Se resuelve la ecuación cuadrática.
6. Se analizan si las soluciones son adecuadas al problema.

④

1. Se construirá una casa en un terreno de 28 m de perímetro y 48 m² de área, ¿cuáles son las dimensiones del terreno? 6 m y 8 m

2. La distancia en km recorrida por un avión está dada por la ecuación $x = 140t + 3t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en horas después del despegue. Determina cuánto dura un viaje en este avión desde El Salvador hasta Costa Rica si la distancia entre estos países es aproximadamente de 775 km.
5 horas

Unidad 3

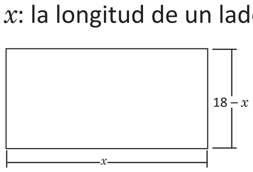
75

Tarea: página 77 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U3 2.3**

Ⓟ Determina las dimensiones de un terreno de 36 m de perímetro y 72 m² de área.

Ⓢ x: la longitud de un lado



$$x(18 - x) = 72$$
$$18x - x^2 = 72$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0$$
$$x = 12 \text{ o } x = 6$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno son 12 m y 6 m.

Ⓡ
1. Las dimensiones del terreno deben ser 6 m y 8 m.
2. El vuelo tarda 5 horas.

Secuencia:
Finalmente, después de tener todas las herramientas para resolver ecuaciones cuadráticas, es posible abordar algunos problemas de aplicación, en los cuales los estudiantes tengan que plantear la ecuación y luego resolverla.

Propósito:
①, ② Utilizar los tipos de problemas sobre determinar números que sumados dan una cantidad y multiplicados otra cantidad, en donde para plantear la ecuación cuadrática puede ocupar lo visto en la clase anterior.

③ Determinar un esquema general sobre cómo resolver problemas que impliquen el planteamiento de una ecuación cuadrática y su posterior solución.

④ El primer ítem está relacionado con el tipo de problema propuesto en el Problema inicial de esta clase y el de la anterior. En el segundo problema puede ser necesario que los estudiantes utilicen calculadora.

1. Planteando la ecuación:
Sea x la longitud de la base, y y la longitud de la altura.

$$x + y = 14$$
$$xy = 48$$
$$x(14 - x) = 48$$
$$14x - x^2 = 48$$
$$x^2 - 14x + 48 = 0$$
$$(x - 8)(x - 6) = 0$$
$$x = 8 \text{ o } x = 6$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno son 6 m y 8 m.

Aplicación a la vida cotidiana:
Para esta clase se da la aplicación de la fórmula física de movimiento acelerado en el ítem 2, en donde los valores son semejantes a los de un avión en la vida real. Así mismo se ve el énfasis en el desarrollo de capacidades productivas en el ítem 1 y el Problema inicial.

Observación:
El tiempo real de vuelo entre El Salvador y Costa Rica es aproximadamente 1 hora.

Resolución de algunos ítems:

1. $x(20 - x) = 50$

$$
\begin{aligned}
20x - x^2 &= 50\\
x^2 - 20x &= -50\\
x^2 - 20x + 10^2 &= -50 + 10^2\\
(x - 10)^2 &= 50\\
x - 10 &= \pm\sqrt{50}\\
x - 10 &= \pm 5\sqrt{2}\\
x &= 10 \pm 5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Si un lado mide $10 + 5\sqrt{2}$
entonces el otro lado mide:
$20 - (10 + 5\sqrt{2}) = 10 - 5\sqrt{2}$

Por lo tanto, las dimensiones son:
$10 - 5\sqrt{2}$ y $10 + 5\sqrt{2}$

2. $A = x^2$

$$
\begin{aligned}
(2x)^2 &= A + 48\\
(2x)^2 &= x^2 + 48\\
4x^2 &= x^2 + 48\\
3x^2 &= 48\\
x^2 &= 16\\
x &= \pm 4\\
x &= 4
\end{aligned}
$$

4. $x^2 + (x + 1)^2 = 25$

$$
\begin{aligned}
x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 25\\
2x^2 + 2x - 24 &= 0\\
x^2 + x - 12 &= 0\\
(x + 4)(x - 3) &= 0\\
x + 4 = 0 &\text{ o } x - 3 = 0\\
x = -4 &\text{ o } x = 3
\end{aligned}
$$

Si $x = -4$ entonces $x + 1 = -3$
Si $x = 3$ entonces $x + 1 = 4$

Se tienen dos soluciones:
-4 y -3 o 3 y 4

5. Se asume que el terreno es rectangular (ver clase 2.3).

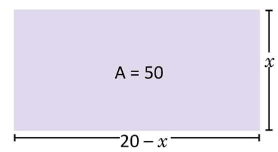
La mitad del perímetro es 15 m
Los lados miden x y $15 - x$
Entonces $x(15 - x) = 54$

$$
\begin{aligned}
15x - x^2 &= 54\\
x^2 - 15x + 54 &= 0\\
(x - 9)(x - 6) &= 0\\
x - 9 = 0 &\text{ o } x - 6 = 0\\
x = 9 &\text{ o } x = 6
\end{aligned}
$$

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes a la ecuación cuadrática.

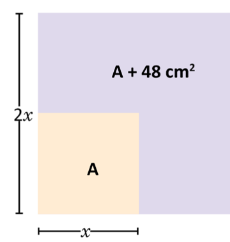
2.4 Practica lo aprendido

1. Encuentra las dimensiones del siguiente rectángulo.



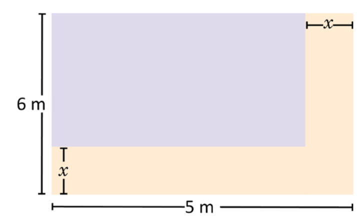
$10 + 5\sqrt{2}$ y $10 - 5\sqrt{2}$

2. Si se duplica el lado de un cuadrado su área aumenta en 48 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



4 cm

3. En la figura, el área del rectángulo sombreado de morado es de 12 cm², encuentra el valor de x.



$x = 2$ cm

4. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 25.

-4 y -3 o 3 y 4

5. Se construirá una casa en un terreno de 30 m de perímetro y 54 m² de área. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

6 m y 9 m

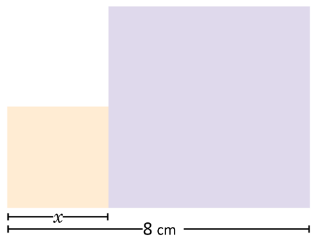
76

Tarea: página 78 del Cuaderno de Ejercicios.

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes a la ecuación cuadrática.

2.5 Practica lo aprendido

1. La siguiente figura está compuesta por dos cuadrados. ¿Cuánto valen los lados de ambos cuadrados si las dos áreas suman 34 cm^2?

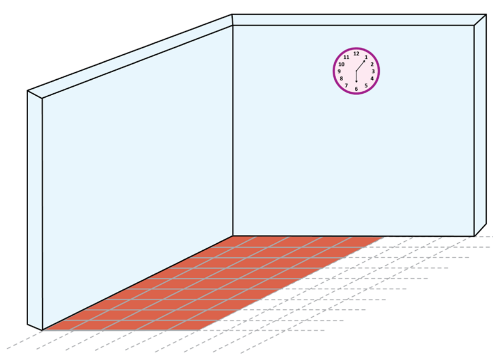


3 m y 5 m

2. Ana hará un marco de madera para un espejo cuadrado de 400 cm^2 de área. ¿Qué dimensiones tienen los lados del espejo?

20 cm

3. Se utilizaron 240 ladrillos cuadrados para poner el piso de una casa de 60 m^2 de área. Determina el tamaño de los ladrillos que se usaron.



0.5 m

Unidad 3

77

Tarea: página 78 del Cuaderno de Ejercicios.

Resolución de algunos ítems:

1.
$$x^2 + (8 - x)^2 = 34$$
$$x^2 + 64 - 16x + x^2 = 34$$
$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 5)(x - 3) = 0$$
$$x - 5 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$
$$x = 5 \text{ o } x = 3$$

Por lo tanto, las dimensiones son: 3 m y 5 m.

2.
$$x^2 = 400$$
$$x = \pm\sqrt{400}$$
$$x = \pm 20$$
$$x = 20$$

Por lo tanto, el espejo tiene dimensiones de 20 cm por lado.

3. Se debe determinar la longitud del lado del ladrillo.

Sea x la longitud de un ladrillo, entonces:

$$240x^2 = 60$$
$$x^2 = \frac{60}{240}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$x = 0.5$$

Resolución de algunos ítems:

4. x = número de bolsitas extra
$5 + x$ = número de bolsitas a comprar
$(5 + x)(5 + x) = 64$
$(5 + x)^2 = 64$
$5 + x = \pm 8$
$x = -5 + 8$ o $x = -5 - 8$
$x = 3$ o $x = -13$

Debe comprar 5 + 3 = 8 bolsitas.

5. Sea x el número de centavos que se aumentará, entonces:
$(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 42$
$100(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 100(42)$
$(40 + x)(90 - x) = 4\,200$
$3600 + 50x - x^2 = 4\,200$
$x^2 - 50x + 600 = 0$
$(x - 30)(x - 20) = 0$
$x - 30 = 0$ o $x - 20 = 0$
$x = 30$ o $x = 20$

Mario debe aumentar 20 o 30 centavos al pasaje.

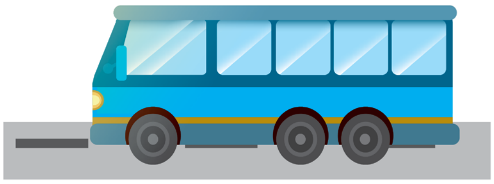
6. El delfín saldrá del agua cuando $h = 0$ y entrará al agua cuando $h = 0$.

$7t - 5t^2 = 0$
$t(7 - 5t) = 0$
$t = 0$ o $7 - 5t = 0$
$t = 0$ o $t = \frac{7}{5}$
$t = 0$ o $t = 1.4$

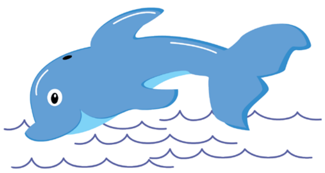
El delfín estará fuera del agua 1.4 segundos.

4. Ana compra 5 bolsitas con 5 chibolas cada una, y la señora de la tienda donde las compra le dijo que por cada bolsita extra que le comprara le aumentaría una chibola a cada bolsita, ¿cuántas bolsitas tiene que comprar Ana para obtener 64 chibolas? 8 bolsitas

5. Mario es conductor de un bus y sabe que si cobra \$0.40 de pasaje se sube un promedio de 90 personas por viaje, si por cada centavo de pasaje que aumente se subirá una persona menos, ¿cuánto debe aumentar Mario al pasaje para obtener \$42 al finalizar el viaje? 20 centavos o 30 centavos



6. La altura sobre el nivel del mar que lleva un delfín al salir del agua está dada por la ecuación $h = 7t - 5t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en segundos después que sale del agua. ¿Cuánto tiempo estará fuera del agua el delfín? 1.4 segundos

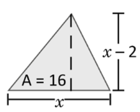


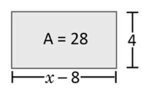
Prueba de la Unidad 3: Ecuación cuadrática **Matemática 9º**

Fecha: ________________________________
Nombre: ____ **Sección:**_________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ____

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente**.**

1. Encuentra la ecuación que determina la longitud de la base de las siguientes figuras.





Respuesta:

Respuesta:

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:
   a) $x^2 = 81$ b) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$

Respuesta:
a) b)

3. Resuelve $3x^2 = 243$.

Respuesta:

4. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:
   $x^2 - 5x - 6 = 0$

Respuesta:

1

Descripción:
La prueba de esta unidad está formada por 7 numerales; sin embargo, en total se consideran 9 ítems, pues cada literal cuenta como un ítem.

Criterios para asignar puntos parciales:
Para cada uno de los ítems que se presentan, la respuesta se considera parcialmente correcta si cumple con uno de los criterios que se establecen a continuación:

Ítem 2.
Si escribe solo una solución:
a) $x = 9$
b) $x = \frac{4}{5}$

Ítem 3.
$x = 9$

Los siguientes ítems no poseen puntos parciales:
Ítem 1.
Ítem 4.
Ítem 5.
Ítem 6.
Ítem 7.

5. Resuelve la ecuación cuadrática.
$4x^2 - 5x - 1 = 0$

Respuesta:

6. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones.
a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
b) $3x^2 + x + 5 = 0$

Respuestas:

7. Se quiere construir una casa en un terreno rectangular de área 48 m^2 y de perímetro 28 m. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Respuesta:

2