Unidad 6. Teorema de Pitágoras

Competencia de la Unidad

Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en figuras y cuerpos geométricos y aplicarlo en la resolución de problemas del entorno.

Relación y desarrollo

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Áreas y volúmenes de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras.
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Teorema de Pitágoras	1	1. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1
	1	2. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2
	1	3. Teorema de Pitágoras, parte 1
	1	4. Teorema de Pitágoras, parte 2
	1	5. Cálculo de la medida de un cateto
	1	6. Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras
	1	7. Triángulos notables
	1	8. Recíproco del teorema de Pitágoras
2. Aplicación del teorema de Pitágoras	1	1. Cálculo de la altura y volumen de un cono
	1	2. Cálculo de la medida de la altura y volumen de la pirámide cuadrangular
	1	3. Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro
	1	4. Cálculo del área de un hexágono
	1	5. Practica lo aprendido
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Aplicación del teorema de Pitágoras
	1	8. Practica lo aprendido
	1	9. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6

17 horas clase + prueba de la Unidad 6

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Teorema de Pitágoras
A través del cálculo de áreas se encuentra la longitud de la hipotenusa, conociendo la medida de los catetos y realizando construcciones que permitan encontrar fácilmente esta medida; posteriormente se establece el teorema de Pitágoras y se realiza el cálculo de la medida de un cateto utilizando las fórmulas que relacionan los catetos y la hipotenusa. Se estudian además, algunos resultados importantes, como el recíproco del teorema y su uso para encontrar la medida de triángulos notables.

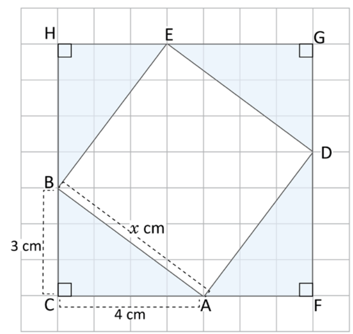
Lección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras
Se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver diversos problemas aplicados, ya sea en el entorno, como en la misma matemática. De estos últimos, la importancia del teorema reside en el cálculo de alturas de sólidos y determinación de áreas de ciertos objetos.

Indicador de logro. Encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en particular, utilizando áreas.

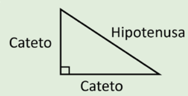
1.1 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1

① **P** En la figura, el ΔABC, ΔDAF, ΔEDG y ΔBEH son triángulos rectángulos y congruentes.

a) Encuentra el área del cuadrado CFGH.
b) Encuentra el área del cuadrilátero ADEB.
c) Demuestra que el cuadrilátero ADEB es un cuadrado verificando ∢BAD = 90°.
d) Encuentra la medida del lado AB.



En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo de 90°, se llaman **catetos**, mientras que el lado que es opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.



② **S** a) CF = 4 + 3 = 7(cm), por lo tanto, el área es: $7^2 = 49(\text{cm}^2)$.

b) El área del cuadrilátero ADEB se puede calcular restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos que son congruentes.

$$\begin{aligned}(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4\\ &= (4+3)^2 - \frac{3\times 4}{2}\times 4\\ &= 49 - 24\\ &= 25\ (\text{cm})^2\end{aligned}$$

c) ∢BAD = 180°– (∢CAB + ∢DAF)
= 180°– (∢CAB + ∢ABC), dado que ΔABC ≌ ΔDAF
= 180°– 90° = 90°

De la misma manera se tiene que ∢ADE = ∢DEB = ∢EBA = 90°.

En el cuadrilátero ADEB, los lados son congruentes y los ángulos son congruentes así que es un cuadrado.

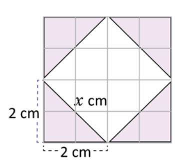
d) El área del cuadrado ADEB es AB^2, por otra parte el área es 25 cm^2. Luego $AB^2 = 25$, AB = 5(cm).

C Formando cuadrados con 4 triángulos rectángulos congruentes y calculando el área se puede calcular la medida del la hipotenusa sabiendo los catetos.

Los registros arqueológicos indican que por el año 2000 a. C., los egipcios unían 12 segmentos de soga de la misma longitud. Estiraban cinco de estos segmentos consecutivos luego tirando del lazo formaban un triángulo rígido con un ángulo recto. Este triángulo de lados 3, 4 y 5 es conocido como el triángulo sagrado egipcio.

Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.

③ En la siguiente figura, encuentra el valor de x:

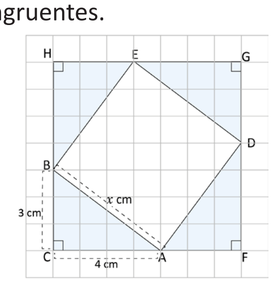


$x = 2\sqrt{2}$

Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.1**

(P) En la figura, ΔABC, ΔDAF, ΔEDG y ΔBEH son congruentes.



a) Encuentra el área del cuadrado CFGH
b) Encuentra el área de ADEB
c) Demuestra que ADEB es un cuadrado
d) Encuentra el lado AB

(S)
a) CF = 4 + 3 = 7 cm. El área es $7^2 = 49$ cm^2.
b) $(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$
$= (4+3)^2 - \frac{3\times 4}{2} \times 4$
$= 49 - 24$
$= 25$ cm^2.
c) ∢BAD = 180° – (∢CAB + ∢DAF)
= 180° – (∢CAB + ∢ABC);
dado que ΔABC ≌ ΔDAF
= 180° – 90° = 90°.
d) El área del cuadrado es AB^2
$AB^2 = 25$ cm^2 entonces AB = 5 cm.

(R) $x = 2\sqrt{2}$

Secuencia:
De todos los teoremas utilizados en tercer ciclo, el teorema de Pitágoras resulta ser el que más se utiliza en bachillerato de forma que permite demostrar otros resultados importantes. En octavo grado se estudia la geometría y la forma lógica de demostrar un resultado, en esta unidad se realizan dos demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras y en una de ellas son necesarios conocimientos sobre semejanza de triángulos vistos en la unidad anterior.

Propósito:
①, ② Mediante una secuencia ordenada de pasos, encontrar la medida de la hipotenusa. En la figura se puede observar que cada cuadrado tiene lado 1, esto facilita responder el primer literal. Al momento de resolver se debe recordar que (FGHC) expresa el área del cuadrilátero FGHC.

Lo importante es encontrar el área de ADEB y demostrar que es un cuadrado ya que de esta forma solo se necesita extraer la raíz cuadrada para encontrar el lado.

③ Solución del ítem.

Según los datos de la imagen.
Área del cuadrado grande:
$(4\ \text{cm})^2 = 16\ \text{cm}^2$
Área de un triángulo:
$\frac{2\times 2}{2} = 2\ \text{cm}^2$
Suma de las áreas de los cuatro triángulos:
$4 \times 2 = 8\ \text{cm}^2$
Área del cuadrado blanco:
$16\ \text{cm}^2 - 8\ \text{cm}^2 = 8\ \text{cm}^2$

Por tanto, el valor de x es:
$x = \sqrt{8}$ cm o lo que es igual $x = 2\sqrt{2}$ cm.
Este tipo de simplificación se estudió en la Unidad 2, raíz cuadrada.

Observación:
Se pueden denotar los vértices con A, B, C y D para resolver de modo similar al Problema inicial. Además, se asume que los triángulos son congruentes y no es necesario demostrar que el espacio en blanco es un cuadrado.

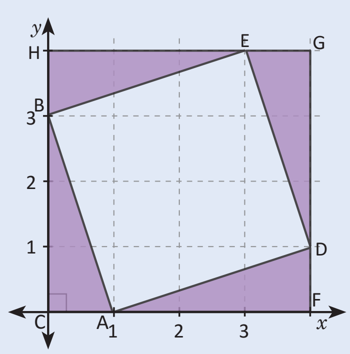
Secuencia:
En la clase anterior se estudió un procedimiento para calcular la longitud de la hipotenusa haciendo uso de áreas, para esta clase se utiliza el mismo algoritmo con la diferencia de que ahora se trata de un triángulo rectángulo cuyos vértices son puntos del plano. Los puntos están ubicados sobre los ejes, por lo que es sencillo encontrar la medida de los catetos.

Propósito:
①, ② Lo importante es utilizar la idea de la clase anterior para resolver, por lo que se debe construir un cuadrado sobre la hipotenusa y luego observar que a su alrededor se forman tres triángulos congruentes con el primero, de esta forma puede aplicarse el resultado de la clase 1.1.

③ Se debe indicar que este es un resultado particular, pero que puede utilizarse el mismo procedimiento en otros triángulos rectángulos.

④ Solución de los ítems.

b)



Debe utilizarse la cuadrícula del cuaderno para estos ejercicios, particularmente en b), debe prolongarse un poco más para poder realizar la construcción.

$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (CFGH) - (ABC) \times 4\\
&= (4)^2 - \frac{3 \times 1}{2} \times 4\\
&= 16 - 6\\
&= 10
\end{aligned}
$$

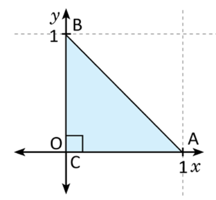
Entonces $AB^2 = 10$.
Por lo tanto, $AB = \sqrt{10}$.

Observación:
En el plan de pizarra, el cuadrado y los triángulos congruentes deben construirse en el momento de la solución y no antes de esto.

Indicador de logro. Encuentra la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices son puntos del plano cartesiano.

1.2 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2

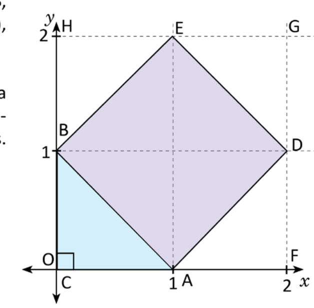
① **P** Encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0).



Un punto en el plano cartesiano se representa por (a, b), donde a es el valor en el eje x, y b en el eje y.

② **S** Se construye un cuadrado que contenga como uno de sus lados la hipotenusa del triángulo ABC, es decir que tenga como lado AB, este cuadrado tendrá como vértices los puntos A(1, 0), D(2, 1), E(1, 2) y B(0, 1).

Construyendo triángulos congruentes al triángulo ABC, se forma el cuadrado FGHC. El área del cuadrado ADEB se obtiene restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos.



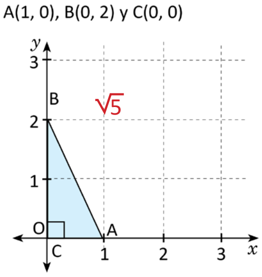
$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4\\
&= (2)^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4\\
&= 4 - 2\\
&= 2
\end{aligned}
$$

③ Entonces $AB^2 = 2$ (por el área de ADEB).
Por lo tanto $AB = \sqrt{2}$ (raíz cuadrada positiva).

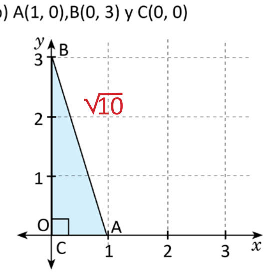
④ **C** En el triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0),B(0, 1) y C(0, 0), la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

R Encuentra la hipotenusa para los triángulos formados por los vértices de cada literal.

a) A(1, 0), B(0, 2) y C(0, 0)



b) A(1, 0),B(0, 3) y C(0, 0)



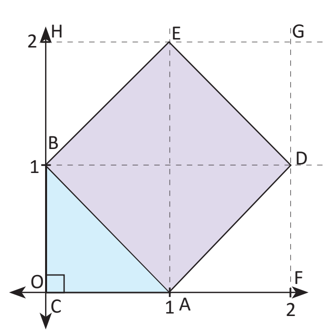
Unidad 6

129

Tarea: página 131 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.2**

Ⓟ Encuentra la medida de AB, si A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0).



Ⓢ Se construye un cuadrado sobre AB. También se construyen triángulos congruentes al ABC.

$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4\\
&= 2^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4\\
&= 4 - 2\\
&= 2
\end{aligned}
$$

Entonces $AB^2 = 2$.
Por lo tanto, $AB = \sqrt{2}$.

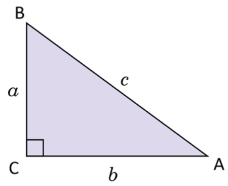
Ⓡ a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$

1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

Indicador de logro. Demuestra el teorema de Pitágoras utilizando áreas de triángulos y cuadrados.

1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

① **P** Dado el ΔABC, tal que $CA = b$, $AB = c$ y $BC = a$; con $\measuredangle BCA = 90°$. Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$, aplicando el procedimiento de la clase 1.



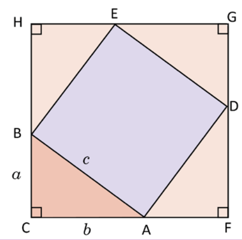
② **S** Construyendo un cuadrado que tenga como uno de sus lados la hipotenusa AB.

Al construir tres triángulos rectángulos congruentes al ΔABC, cuyas hipotenusas sean los tres lados restantes del cuadrado ADEB, se forma el cuadrado CFGH en el que cada uno de sus lados mide $a + b$.

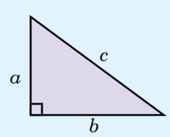
Si se encuentra el área del cuadrado CFGH de dos formas distintas:

Forma 1.
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

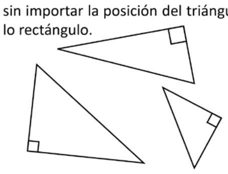
Forma 2.
$A_2 = c^2 + 4(\frac{ab}{2}) = c^2 + 2ab$.
Como el área es la misma se tiene que $A_1 = A_2$.
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.



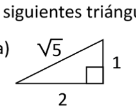
③ **C** En todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa, es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Este resultado es conocido como el **teorema de Pitágoras**.

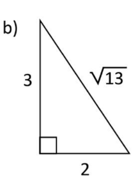


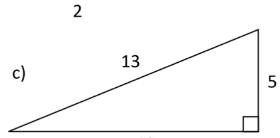
El teorema de Pitágoras se cumple sin importar la posición del triángulo rectángulo.



④ Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

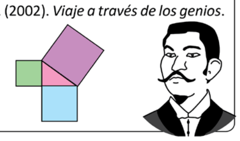
a)


b)


c)


Euclides (300 a. C.) enunció la siguiente proposición: "En los triángulos rectángulos, el área del cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros lados del triángulo".

Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.

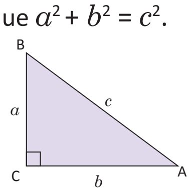


130

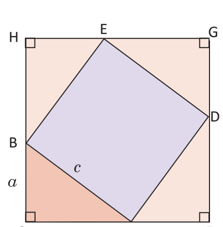
Tarea: página 132 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.3**

Ⓟ Dado el triángulo rectángulo ABC. Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$.



Ⓢ



Forma 1.
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Forma 2.
$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$.

$A_1 = A_2$. Porque el área es la misma.

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Ⓡ a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
Además, $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

Secuencia:
En las clases anteriores se obtuvo la medida de la hipotenusa, como la raíz cuadrada del área del cuadrado que se forma sobre ella. En esta clase se demuestra el teorema de Pitágoras siempre utilizando áreas, como se hizo en la clase 1.1, solo que esta vez de manera general.

Propósito:
①, ② Demostrar la validez de la relación $a^2 + b^2 = c^2$, debe insistirse en recordar el procedimiento utilizado en la clase 1 como pista para resolver este problema. Por lo tanto, deberían construir el cuadrado sobre la hipotenusa como primer paso.

En la solución, es posible establecer:
$A_1 = A_2$, ya que ambas son formas distintas de representar el área del cuadrado.

③ Lo importante es que el estudiante comprenda que el teorema se cumple para cualquier par de catetos, esta igualdad siempre es cierta. Además no importa la posición del triángulo, si es rectángulo siempre se cumplirá la relación.

④ Solución de algunos ítems.

a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
Además, $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

b)
$2^2 + 3^2 = 4 + 9$
$= 13$
Además, $(\sqrt{13})^2 = 13$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

c)
$12^2 + 5^2 = 144 + 25$
$= 169$
Además, $13^2 = 169$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

De la Unidad 2, se sabe que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Materiales:
Fotocopias del triángulo rectángulo con cuadrados construidos sobre los lados, para realizar el paso a paso descrito en ④. La figura se encuentra en la página 186, en el material complementario del libro de texto.

Secuencia:
En las clases 1.3 y 1.4 se usan dos formas diferentes para demostrar el teorema de Pitágoras, en ellas se utilizan dos conceptos diferentes; en 1.3 se utiliza congruencia respecto a los triángulos formados y en 1.4 se utiliza semejanza de triángulos que es el contenido de la unidad anterior.

Propósito:
①, ② Para comprender mejor la demostración pueden separarse los triángulos formados e identificar primero los lados correspondientes. Para concluir el resultado, se suman las relaciones obtenidas de la semejanza de los triángulos formados con el triángulo ABC.

③ Lo importante es mencionar que existen muchas maneras de demostrar el teorema de Pitágoras, aquí únicamente se presentan dos.

④ Esta es otra forma de verificar el teorema de Pitágoras, para hacerlo se debe seguir el paso a paso encerrado en cada recuadro, debe leerse de izquierda a derecha.

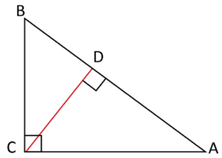
Los trazos de los segmentos paralelos y perpendiculares deben realizarse utilizando regla y escuadra.

Lo importante es verificar que los recortes coinciden perfectamente con el cuadrado mayor.

Indicador de logro. Demuestra el teorema de Pitágoras utilizando semejanza de triángulos.

1.4 Teorema de Pitágoras, parte 2

① **P** Utiliza semejanza de los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ y $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ para establecer que en el ΔABC, se cumple que $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



② **S** Trazando la altura del vértice C al lado AB, se forman los triángulos rectángulos ADC y CDB.
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ (tiene dos ángulos congruentes).

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y CBD).

Entonces, $BC^2 = AB \times DB$ (propiedad fundamental de las proporciones).

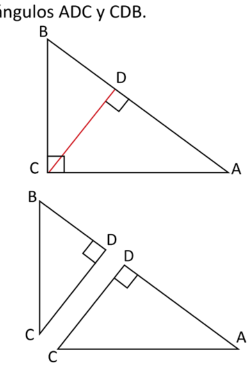
$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (tiene dos ángulos congruentes).

$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y ADC).

Entonces, $CA^2 = AB \times AD$ (propiedad fundamental de las proporciones).

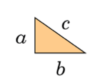
Luego, $CA^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB) = AB^2$.

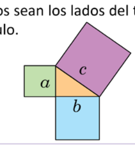
Por lo tanto, $BC^2 + CA^2 = AB^2$.

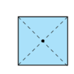


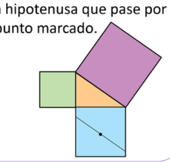
③ **C** Se puede utilizar semejanza de triángulos para demostrar el teorema de Pitágoras.

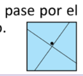
④ **Verificación del teorema de Pitágoras con recortes**: Verifica que el área del cuadrado más grande (de área c^2) es igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados (cuyas áreas son b^2 y a^2).

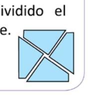
Dibuja un triángulo rectángulo.


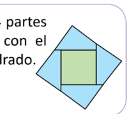
Recorta tres cuadrados con páginas de color, cuyos lados sean los lados del triángulo.


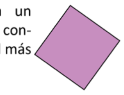
Dobla el cuadrado celeste por sus diagonales; desdobla y marca su punto de intersección.


Traza un segmento paralelo a la hipotenusa que pase por el punto marcado.


Traza un segmento perpendicular a este último y que pase por el mismo punto.


Corta las 4 partes en que ha quedado dividido el cuadrado celeste.


Une las 4 partes cortadas con el otro cuadrado.


Se forma un cuadrado congruente al más grande.


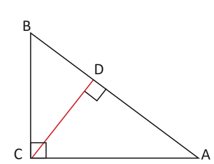
Unidad 6

131

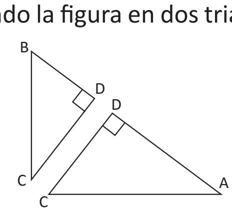
Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.4**

Ⓟ En la figura:
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ y $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Demuestra que $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



Ⓢ Separando la figura en dos triángulos.



1. Como $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
   $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (por semejanza)
   Entonces, $BC^2 = AB \times DB$.
2. Como $\Delta ABC \sim \Delta ACD$
   $\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (por semejanza)
   Entonces, $CA^2 = AB \times AD$.

$$\begin{aligned} CA^2 + BC^2 &= AB \times AD + AB \times DB \\ &= AB \times (AD + DB) \\ &= AB \times AB \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

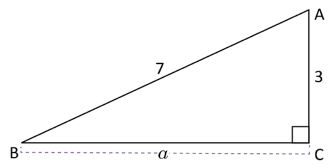
Por tanto, $BC^2 + CA^2 = AB^2$.

1.5 Cálculo de la medida de un cateto

Indicador de logro. Encuentra la longitud de un cateto desconocido, utilizando el teorema de Pitágoras.

1.5 Cálculo de la medida de un cateto

① **P** En el siguiente triángulo rectángulo ABC, encuentra la medida del cateto BC, es decir, el valor de a.



② **S** Como el triángulo es rectángulo se cumple que $3^2 + a^2 = 7^2$ (teorema de Pitágoras)

Despejando a^2, $a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$.

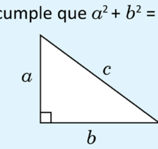
Por definición de raíz cuadrada, $a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, como $a > 0$.

Por lo tanto: $a = 2\sqrt{10}$.

En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa mide 7 y el cateto 3, el segundo cateto mide $2\sqrt{10}$.

③ **C** En general, en un triángulo rectángulo de lados a, b y c, debido a que se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la hipotenusa y los catetos se pueden encontrar de la siguiente manera:

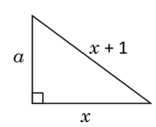
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$



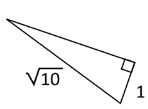
④ **E** Determina el valor del cateto a en términos de x. Considera $x > 0$.

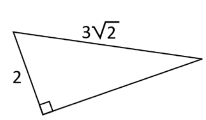
Entonces, $a^2 = (x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.

Por lo tanto, $a = \sqrt{2x + 1}$.



⑤ Encuentra en los siguientes triángulos la longitud de los lados desconocidos:





La medida del lado es 3

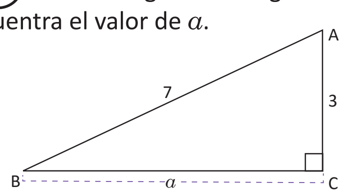
La medida del lado es $\sqrt{14}$

132

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.5**

Ⓟ En el triángulo rectángulo ABC, encuentra el valor de a.



Ⓢ En el triángulo rectángulo:

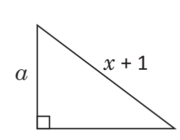
$3^2 + a^2 = 7^2$ (por teorema de Pitágoras)

$a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$

$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Por tanto, $a = 2\sqrt{10}$.

Ⓔ Determina a en terminos de x. Considera $x > 0$.



Por el teorema de Pitágoras.

$a^2 = (x + 1)^2 - x^2$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2$

$= 2x + 1$

$a = \sqrt{2x + 1}$

Ⓡ 1. La medida del lado es 3.
2. La medida del lado es $\sqrt{14}$.

Secuencia:
En las clases anteriores se ha demostrado el teorema de Pitágoras y verificado si los valores de los lados, en distintos triángulos rectángulos cumplen esta relación. De ahora en adelante se utilizará el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de lados desconocidos en triángulos rectángulos.

Propósito:
①, ② Utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar uno de los catetos. En el último paso se plantea una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = b$. Como se estudió en la Unidad 3, este problema tiene dos soluciones con distinto signo, en este caso solo se utiliza la solución positiva, ya que se trata del lado de un triángulo.

③ No es importante memorizar estas tres fórmulas, pero si es esencial que se memorice la ecuación del teorema de Pitágoras, ya que las fórmulas se deducen simplemente despejando la variable desconocida.

④ En este caso, la solución queda expresada en términos de una variable. La condición $x > 0$ es necesaria porque la medida de los lados es positiva.

⑤ Solución de los ítems.
En el primer triángulo.
Nombrando por a el lado desconocido

$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$a^2 = 10 - 1$$
$$a = \sqrt{9}$$
$$a = 3$$

Para el segundo triángulo.
Nombrando por a el lado desconocido

$$(3\sqrt{2})^2 = 2^2 + a^2$$
$$\sqrt{18})^2 = 4 + a^2$$
$$a^2 = 18 - 4$$
$$a = \sqrt{14}$$

Secuencia:
En la clase anterior se calculó la longitud de un lado desconocido en un triángulo, utilizando el teorema de Pitágoras. En esta clase, para encontrar la medida del lado, el teorema se debe aplicar hasta dos veces, además para resolver se deben aplicar otros resultados de la geometría.

Propósito:
①, ② Dado que el triángulo ABC es rectángulo y se conoce la medida de BC, únicamente hace falta conocer la medida de CA para poder aplicar el teorema de Pitágoras y así obtener BA, lo importante es utilizar las hipótesis para realizar esto.

③ Solución de algunos ítems.

1.
Sea M el punto donde se intersecan las diagonales.
En el triángulo ABM se cumple:

$$\begin{aligned} AM^2 &= 2^2 + 3^2 \\ &= 4 + 9 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto, AM = $\sqrt{13}$.
En el triángulo CDM se cumple:

$$\begin{aligned} DM^2 &= MC^2 + CD^2 \\ 4^2 &= MC^2 + (\sqrt{5})^2 \\ MC^2 &= 16 - 5 \\ MC &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

Por tanto, MC = $\sqrt{11}$.

Luego, AC = AM + MC, AC = $\sqrt{13} + \sqrt{11}$.

2.
Como el ΔABC es rectángulo, se cumple que:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ 8^2 &= AB^2 + 5^2 \\ AB^2 &= 64 - 25 \\ AB &= \sqrt{39} \end{aligned}$$

Además, ΔABC ~ ΔADE (por AA).
Entonces,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

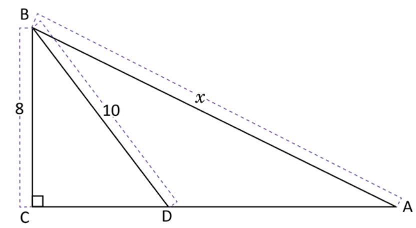
$$\frac{AE}{8} = \frac{3}{\sqrt{39}}$$

$$AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$$

Indicador de logro. Calcula la longitud del lado de un triángulo utilizando el teorema de Pitágoras dos veces.

1.6 Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras

① **P** Encuentra la medida de la hipotenusa del triángulo ABC, sabiendo que el triángulo ABD es isósceles.



② **S** Para calcular el valor de x, se necesita saber la medida del cateto CA.

Debido a que el ΔABD es isósceles, el lado DA es 10.

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔDBC.

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36, \text{ con } CD > 0$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

Dado que CA = CD + DA, se tiene que CA = 10 + 6 = 16.

Finalmente se aplica el teorema de Pitágoras en el ΔABC:

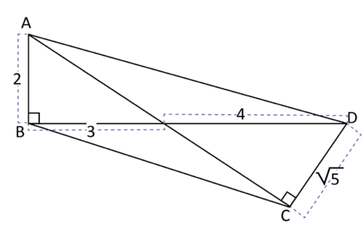
$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

Por lo tanto $x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

C Para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras, identifica los triángulos rectángulos en la figura y utiliza los valores que se proporcionan en ella, para determinar la medida de los lados desconocidos.

Unidad 6

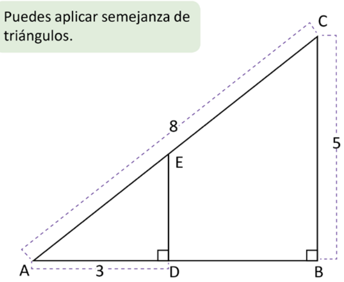
③ 1. Determina la medida de la diagonal AC en el cuadrilátero ABCD.



AC = $\sqrt{13} + \sqrt{11}$

2. Calcula la medida de la hipotenusa del ΔADE.

Puedes aplicar semejanza de triángulos.



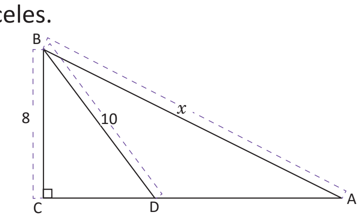
AE = $\frac{24}{\sqrt{39}}$

133

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.6**

Ⓟ Encuentra x sabiendo que ABD es isósceles.



Ⓢ DA = 10, porque ΔABD es isósceles.
Aplicando el teorema de Pitágoras.

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

CA = CD + DA.
CA = 10 + 6.

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔABC:
$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

Por lo tanto, $x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

Ⓡ
1. AC = $\sqrt{13} + \sqrt{11}$
2. AE = $\frac{24}{\sqrt{39}}$

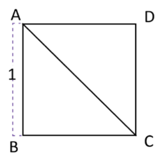
1.7 Triángulos notables

Indicador de logro. Calcula la medida de los lados de los triángulos notables, utilizando el teorema de Pitágoras.

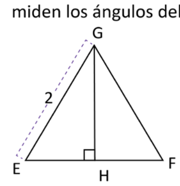
1.7 Triángulos notables

① **P**

1. ¿Cuánto mide la diagonal CA del cuadrado ABCD, cuyos lados miden 1?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔABC?



2. ¿Cuánto mide la altura del triángulo equilátero EFG cuyos lados miden 2?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔEFG?



La altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este (o a su prolongación).

② **S**

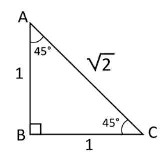
1. La diagonal CA es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ABC y ACD. Solo se aplica el teorema de Pitágoras a cualquiera de estos triángulos para poder encontrar la medida de la hipotenusa CA.

En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\Rightarrow CA = \sqrt{2}$

Por lo tanto, la diagonal de ABCD es $\sqrt{2}$.

Como la diagonal CA del cuadrado ABCD es bisectriz del ∢DAB y ∢BCD, entonces los ángulos ∢CAB y ∢BCA del ΔABC miden 45°.



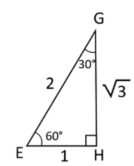
2. Como ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF. Por lo tanto EH = 1.

En el ΔEHG: $EH^2 + HG^2 = GE^2 \Rightarrow HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$\Rightarrow HG = \sqrt{3}$

Por lo tanto, la altura de ΔEHG es $\sqrt{3}$.

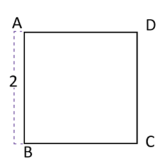
El ∢GEH = 60° debido a que el ΔEFG es equilátero, mientras que el ∢HGE = 30°, debido a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



C A los triángulos ABC y EHG se les denomina **triángulos notables** y serán de mucha utilidad en el estudio de la trigonometría en bachillerato.

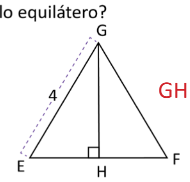
③

1. ¿Cuál es la medida de la diagonal del siguiente cuadrado?



La diagonal mide $\sqrt{8}$

2. ¿Cuál es la medida de la altura del siguiente triángulo equilátero?



$GH = 2\sqrt{3}$

3. ¿Cuál es el área del triángulo EFG del ejercicio 2?

El área del triángulo es $4\sqrt{3}$.

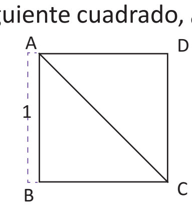
134

Tarea: página 136 del Cuaderno de Ejercicios.

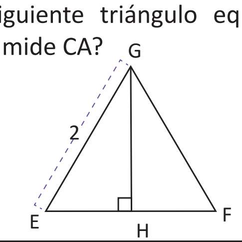
Fecha: **U6 1.7**

P

1. En el siguiente cuadrado, ¿cuánto mide GH?



2. En el siguiente triángulo equilátero, ¿cuánto mide CA?



S

1. ΔABC es rectángulo. Por tanto,

$CA^2 = AB^2 + BC^2$
$= 1^2 + 1^2$
$= 2$
$CA = \sqrt{2}$

2. Como ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF, entonces EH = 1.

$GE^2 = HG^2 + EH^2$
$HE^2 = GE^2 - EH^2$
$= 2^2 - 1^2$
$= 3$
$GH = \sqrt{3}$

R

1. $CA = \sqrt{8}$
2. $GH = 2\sqrt{3}$

Secuencia:
Los triángulos notables serán de utilidad en bachillerato, en los contenidos de trigonometría, por lo que en esta clase se realiza el procedimiento para conocer la medida de los lados de los triángulos, utilizando el teorema de Pitágoras.

Propósito:
①, ② Encontrar la diagonal de un cuadrado y la altura de un triángulo equilátero, utilizando el teorema de Pitágoras. A estos triángulos, con estas características específicas se les conoce como **triángulos notables**.

③ Solución de los ítems.

1.
Se resuelve de forma semejante al Problema inicial.

$CA^2 = 2^2 + 2^2$
$= 4 + 4$
$= 8$
$CA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

2.
Como ΔEHG ≅ ΔFHG, por el criterio AA, EH = HF entonces EH = 2.

Luego:
$GH^2 = 4^2 - 2^2$
$= 16 - 4$
$= 12$
$GH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3.
$\text{Área} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Secuencia:
En las clases 1.3 y 1.4 se estableció el teorema de Pitágoras, donde la hipótesis es el triángulo rectángulo y se obtiene como conclusión la relación entre los catetos y la hipotenusa. En esta clase se estudia que el recíproco de este enunciado también es cierto, es decir que, si tres lados de un triángulo cumplen esta relación, el triángulo es rectángulo. El recíproco de un teorema se estudia en la Unidad 6 de octavo grado.

Propósito:
①, ② La idea es utilizar un triángulo rectángulo, en el que no se conoce la hipotenusa y los catetos tienen la misma medida que el del Problema inicial. Al lograr establecer que los triángulos son congruentes, se obtiene que los ángulos correspondientes son iguales; por tanto, ABC es también rectángulo.

③ Cuando hay tres números que cumplen esta relación se les llama **terna pitágorica** y tienen como propiedad, que siempre es posible formar con ellos un triángulo rectángulo.

④ Al tener una terna de números, para verificar, se debe identificar el mayor de ellos, el cuadrado de este número tiene que ser igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

⑤ Solución de algunos ítems.

a) $3^2 = 9$
$2^2 + 2^2 = 8$
No se cumple el recíproco del teorema de Pitágoras, por tanto, no es un triángulo rectángulo.

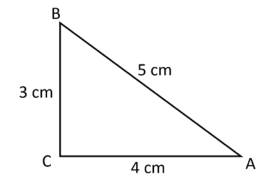
b) $(\sqrt{41})^2 = 41$
$4^2 + 5^2 = 25 + 16 = 41.$
Por tanto, sí forman un triángulo rectángulo.

c) $(25)^2 = 625$
$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$
Por tanto, sí forman un triángulo rectángulo.

Indicador de logro. Utiliza el recíproco del teorema de Pitágoras para verificar si un triángulo es rectángulo.

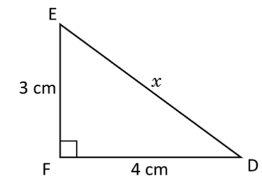
1.8 Recíproco del teorema de Pitágoras

① **P** En el ΔABC, se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demuestra que la medida del ∢ACB es 90°.



② **S** 1. Considerando el triángulo rectángulo ΔDEF, con lados EF = 3 cm, FD = 4 cm.

2. Utilizando el teorema de Pitágoras, $DE^2 = EF^2 + FD^2$
$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$\Rightarrow x = 5$



3. Como CA = FD, AB = DE y BC = EF se concluye que el ΔABC ≌ ΔDEF (la medida de los tres lados son iguales).

4. Como ΔABC ≌ ΔDEF y ∢DFE = 90°, entonces el ∢ACB = 90°.

Por lo tanto, se concluye que el ΔABC es rectángulo.

③ **C** Si en un triángulo, sus lados a, b y c, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, cuya hipotenusa es c. Este resultado es llamado el **recíproco del teorema de Pitágoras**.

Unidad 6

④ **E** Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, verifica si es un triángulo rectángulo.

Se debe verificar si se cumple que, la suma de los cuadrados de dos de ellos, es igual al cuadrado del tercero: $15^2 + 8^2 = 289$, $17^2 = 289$, luego $15^2 + 8^2 = 17^2$.

Observa que en un triángulo rectángulo, la hipotenusa tiene mayor longitud que los catetos.

Por el recíproco del teorema de Pitágoras se puede concluir que, el triángulo tiene un ángulo recto, y por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

⑤ Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 2 cm, 2 cm y 3 cm
No es un triángulo rectángulo.

b) 4 cm, 5 cm y $\sqrt{41}$ cm
Es un triángulo rectángulo.

c) 7, 24, 25
Es un triángulo rectángulo.

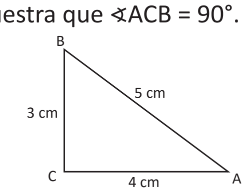
d) 2, 3, 4
No es un triángulo rectángulo.

135

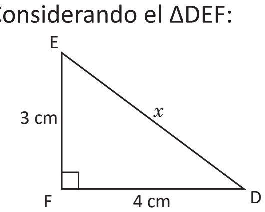
Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 1.8**

Ⓟ En ΔABC se cumple $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demuestra que ∢ACB = 90°.



Ⓢ Considerando el ΔDEF:



Utilizando el teorema de Pitágoras
$DE^2 = EF^2 + FD^2$
$x^2 = 3^2 + 4^2$
$= 9 + 16 = 25$
Entonces $x = 5$.
Como CA = FD, AB = DE y BC = EF entonces, ΔABC ≌ ΔDEF.

La congruencia de los triángulos permite establecer que ∢ACB = 90°.

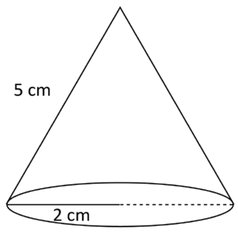
Ⓔ Las medidas de un triángulo son 15, 8 y 17. Además, se cumple que
$15^2 + 8^2 = 289 = 17^2$
Por el recíproco del teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo.

2.1 Cálculo de la altura y volumen de un cono

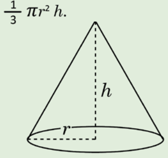
Indicador de logro. Calcula la altura y el volumen de un cono, utilizando el teorema de Pitágoras.

2.1 Cálculo de la altura y volumen de un cono

① **P** Calcula la altura y el volumen del cono.



El volumen de un cono de radio r y altura h es $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

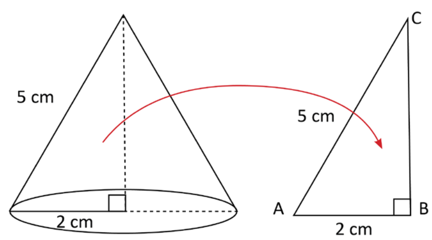


② **S** Se traza la altura en el cono y se forma un triángulo rectángulo el cual se denota como ΔABC, del cual ya se conoce la hipotenusa y un cateto, la altura del cono es el otro cateto de este triángulo, para calcularlo, se aplica el teorema de Pitágoras:

En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$$\Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$= 25 - 4$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

Por lo tanto, la altura del cono mide $\sqrt{21}$ cm.



El volumen del cono se obtiene con $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r = 2 cm y $h = \sqrt{21}$ cm, sustituyendo se tiene:

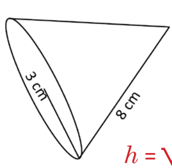
$$V_c = \frac{1}{3}\pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen del cono es $\frac{4\sqrt{21}\pi}{3}$ cm³.

C Para determinar el volumen o la altura desconocida de un cono, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

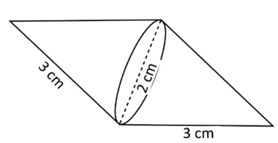
③

1. Determina la altura del siguiente cono.



$h = \sqrt{55}$ cm

2. Encuentra el volumen del siguiente sólido geométrico.



Volumen = $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$ cm³

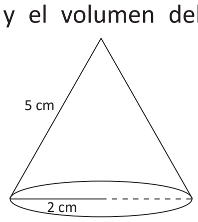
136

Tarea: página 138 del Cuaderno de Ejercicios.

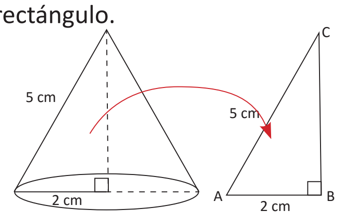
Fecha: **U6 2.1**

Ⓟ Calcula la altura y el volumen del cono.

Volumen del cono:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Ⓢ Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo.



En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$
$$BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$BC = \sqrt{21}$$
Así, r = 2 cm y $h = \sqrt{21}$ cm. Por tanto, el volumen es:
$$V_c = \pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3}\text{cm}^3$$

Ⓡ
1. $h = \sqrt{55}$ cm
2. Volumen = $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$ cm³

Secuencia:
En octavo grado se estudió que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, dados su radio y su altura es posible calcular este volumen. En esta clase la altura del volumen no está dada y debe encontrarse utilizando el teorema de Pitágoras. Además, en esta lección se utiliza este teorema, para resolver problemas aplicados al entorno y a la misma matemática.

Propósito:
①, ② Lo importante es observar que es posible calcular la altura del cono utilizando el teorema de Pitágoras ya que por definición, la altura de un sólido es perpendicular a la base. Este resultado se estudió en séptimo grado.

③ Solución de los ítems.

1.
Sea h la altura del cono.
$$8^2 = h^2 + 3^2$$
$$h^2 = 64 - 9$$
$$h = \sqrt{55} \text{ cm}$$

2.
En este problema, la figura está compuesta por dos conos, cuyo lado mide 3 cm y el radio de la base mide 1 cm.

Sea h la altura de cada cono.
$$3^2 = h^2 + 1^2$$
$$h^2 = 9 - 1$$
$$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Si V representa el volumen de cada cono.
$$V = \frac{1}{3}\pi(1)^2(2\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de toda la figura es:
$$2 \times \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

Secuencia:
En la clase anterior se estudió cómo calcular la altura de un cono utilizando el teorema de Pitágoras. Para esta clase, realizando un procedimiento similar, se encuentra la altura de una pirámide, pero se debe aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

Propósito:
①, ② Se observa que la altura de la pirámide forma un triángulo rectángulo, donde uno de sus catetos es la semidiagonal del cuadrado, de esta forma, para encontrar la altura se debe aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

③ Solución de los ítems.

1.
Sea d la diagonal del cuadrado.

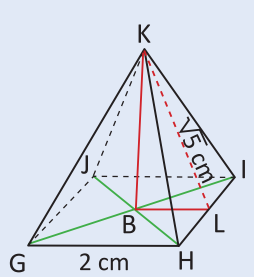
$$d^2 = (\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2$$
$$d^2 = 24$$
$$d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo que se forma.

$$6^2 = (\sqrt{6})^2 + h^2$$
$$h^2 = 36 - 6$$
$$h^2 = 30$$
$$h = \sqrt{30} \text{ cm}$$

2.
Dado que KL es altura del triángulo isósceles, por propiedad L es el punto medio del triángulo KHI.

Sea B el centro del cuadrado y la distancia de ese punto a L es la mitad del lado del cuadrado.



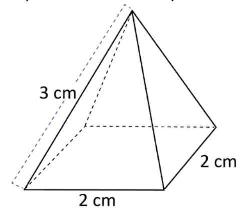
$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = 5 - 1$$
$$h = 2$$

Por tanto, el volumen de la pirámide es: $V = \frac{1}{3}4 \times 2 = \frac{8}{3}$ cm^3.

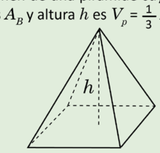
Indicador de logro. Calcula la altura y el volumen de una pirámide, utilizando el teorema de Pitágoras.

2.2 Cálculo de la medida de la altura y del volumen de la pirámide cuadrangular

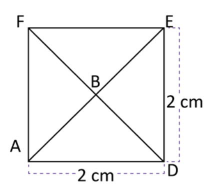
① **P** Calcula la altura y el volumen de la pirámide cuadrangular.



El volumen de una pirámide cuya área de la base es A_B y altura h es $V_p = \frac{1}{3}A_B\, h$.



② **S** Se traza la altura de la pirámide y se forma un triángulo rectángulo ABC, del cual solo se conoce la hipotenusa, pero no sus dos catetos. Se debe encontrar la medida del cateto BC, que es la altura de la pirámide, para ello se debe conocer el valor del cateto AB.

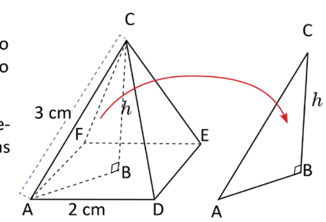


La base de la pirámide es un cuadrado donde $\overline{AB}$ es la semidiagonal. Como AD = 2 cm, entonces DE = 2 cm.

La medida de la diagonal EA se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔADE:

$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$\Rightarrow EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



Luego como $\overline{AB}$ es la semidiagonal, se tiene que AB = $\sqrt{2}$ cm. Con esta información ya se puede calcular la medida del cateto BC en el ΔABC; nuevamente aplicando el teorema de Pitágoras:

$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$

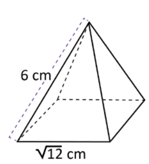
$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$, por lo tanto $h = \sqrt{7}$ (cm).

El volumen de la pirámide se obtiene con $V_p = \frac{1}{3}A_B\, h$; en este caso $A_B = 2 \times 2 = 4$ cm^2 y $h = \sqrt{2}$ cm, sustituyendo se obtiene que

$$V_p = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3.$$

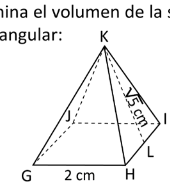
③ **C** Para determinar el volumen o la altura desconocida de una pirámide, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

1. Determina la altura de la pirámide cuadrangular.



$h = \sqrt{30}$

2. Si KL = $\sqrt{5}$ cm es la altura del triángulo isósceles KHI, determina el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular:



$V = \frac{8}{3}$

Unidad 6

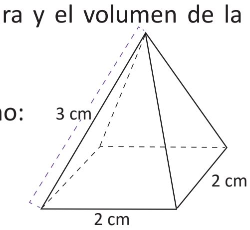
137

Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

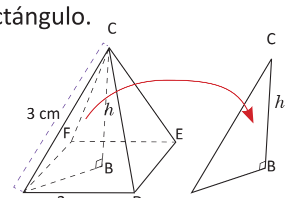
Fecha: **U6 2.2**

Ⓟ Calcula la altura y el volumen de la pirámide.

Volumen del cono:
$V = \frac{1}{3}A_b h$



Ⓢ Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo.



La medida de la diagonal EA se obtiene:
$$EA^2 = AD^2 + AB^2$$
$$EA^2 = 2^2 + 2^2$$
$$EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Encontrando BC:
$$BC^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2$$
$$BC^2 = 9 - 2$$
$$BC = \sqrt{7}$$

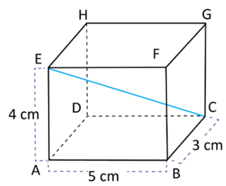
El volumen de la pirámide es:
$$V = \frac{4}{3}\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Ⓡ 1. $h = \sqrt{30}$ cm
2. Volumen = $\frac{8}{3}$ cm^3

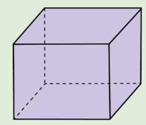
Indicador de logro. Calcula la medida de una de las diagonales de un ortoedro, utilizando el teorema de Pitágoras dos veces.

2.3 Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro

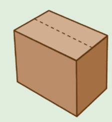
① **P** ¿Cuál es la medida de la diagonal CE del siguiente ortoedro?



Un ortoedro es un prisma recto, y tiene la característica de que sus caras forman entre sí ángulos rectos.



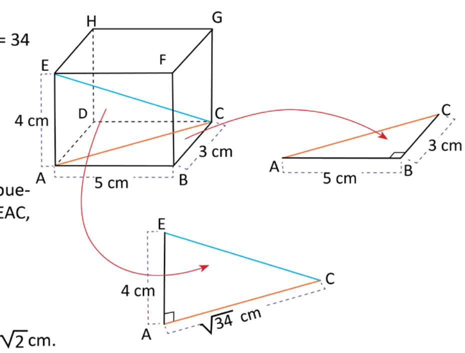
Las cajas que usualmente se utilizan son ortoedros.



② **S** La diagonal CE es la hipotenusa del ΔACE. Se debe encontrar la medida del cateto $\overline{AC}$, para luego calcular la medida de $\overline{CE}$. Como AC también es la hipotenusa del ΔACB, se puede encontrar su medida aplicando el teorema de Pitágoras:

En el ΔACB, $AC^2 = BA^2 + CB^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\Rightarrow AC = \sqrt{34}$



Como ya se conocen los catetos AC y EA, se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEAC, para encontrar el valor de la hipotenusa CE.

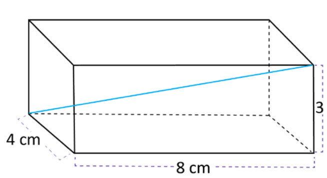
$CE^2 = AC^2 + EA^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$

$\Rightarrow CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Por lo tanto, la diagonal del ortoedro mide $5\sqrt{2}$ cm.

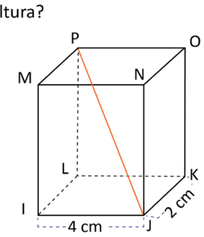
C Para determinar la longitud de la diagonal del ortoedro se utiliza el teorema de Pitágoras dos veces.

③ 1. Calcula la medida de la diagonal del ortoedro.



La diagonal mide $\sqrt{89}$ cm

2. Si en el ortoedro, la diagonal $JP = 3\sqrt{5}$, ¿cuánto mide su altura?



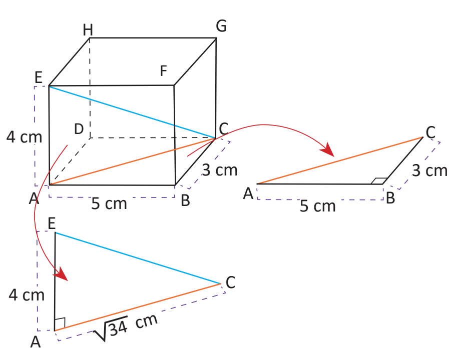
La altura del ortoedro es 5 cm

138

Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.3**

(P) Encuentra la medida de CE.



Aplicando Pitágoras.

En ΔACB: $AC^2 = BA^2 + CB^2$

$AC^2 = 5^2 + 3^2$

$= 25 + 9$

$AC^2 = 34$

$AC = \sqrt{34}$

En ΔEAC:

$CE^2 = AC^2 + EA^2$

$CE^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2$

$= 34 + 16$

$CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(R) 1. La diagonal mide $\sqrt{89}$ cm.

2. La altura del ortoedro es 5 cm.

Secuencia:

Anteriormente se ha estudiado, cálculo de la altura y volumen de un cono y de una pirámide. En esta clase se encuentra la diagonal de un ortoedro; además, esto permite desarrollar el razonamiento espacial del estudiante. Al igual que en la clase anterior, el teorema de Pitágoras se utiliza dos veces.

Propósito:

①, ② Lo importante es que el estudiante visualice que se pueden formar triángulos rectángulos, utilizando los ángulos rectos del ortoedro. Se pueden utilizar diversas analogías, como las cajas, o un salón de clases con forma de ortoedro.

③ Solución de los ítems.

1.

Aplicando el teorema de Pitágoras en la base y llamando x al lado desconocido:

$$x^2 = 8^2 + 4^2$$
$$x^2 = 64 + 16$$
$$x = \sqrt{80}$$

Aplicando nuevamente el teorema y llamando y al lado desconocido:

$$y^2 = 3^2 + (\sqrt{80})^2$$
$$y^2 = 9 + 80$$
$$y = \sqrt{89}$$

Por tanto, la diagonal mide $\sqrt{89}$ cm.

2.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔLJI, para encontrar LJ:

$$LJ^2 = 4^2 + 2^2$$
$$LJ^2 = 20$$
$$LJ = \sqrt{20}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PJL para encontrar LJ (la altura del triángulo).

$$PJ^2 = LP^2 + JL^2$$
$$(3\sqrt{5})^2 = LP^2 + (\sqrt{20})^2$$
$$PL^2 = 9 \times 5 - 20$$
$$PL = \sqrt{25} = 5$$

La altura del ortoedro es 5 cm.

Observación:

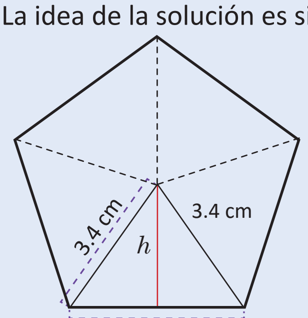
En el ortoedro su altura coincide con la medida de sus aristas verticales.

Secuencia:
En las clases anteriores se estudió el uso del teorema de Pitágoras para calcular la altura de algunos sólidos y posteriormente calcular su volumen. En el desarrollo de esta clase, se estudiará el cálculo del apotema de un hexágono utilizando el teorema de Pitágoras y posteriormente se calculará su área.

Propósito:
①, ② Utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el área del hexágono. Aunque no se sepa la fórmula para calcular el área de un hexágono, se puede encontrar su valor utilizando una idea un tanto ingeniosa. Se trata de dividir en triángulos congruentes, se puede demostrar que estos triángulos son equiláteros, en este caso se puede omitir esta parte y asumirlo directamente.

③ La altura de un triángulo equilátero, divide al otro lado en dos segmentos iguales, esto se conoce de grados anteriores, pero se puede hacer un pequeño recordatorio sobre esto antes de iniciar la clase o cuando se esté desarrollando la solución del problema.

④ Solución de algunos ítems.
2. Se trata de una variante, un pentágono. La idea de la solución es similar.



Como las figuras son congruentes, los triángulos son todos isósceles.

$$(3.4)^2 = h^2 + 2^2$$
$$h^2 = (3.4)^2 - 2^2$$
$$h^2 = 7.56$$
$$h \approx 2.75$$

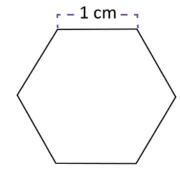
Área del triángulo:
$\frac{4 \times 2.75}{2} = 5.5$
Área del pentágono:
$5.5 \times 5 = 27.5$
Por tanto, el área del pentágono es aproximadamente 27.5 cm^2.

Observación: Utilizar calculadora solo para este ejercicio.

Indicador de logro. Calcula el área de un hexágono, conociendo la longitud de la altura del triángulo equilátero contenido en el hexágono.

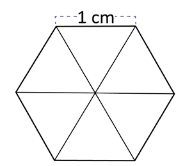
2.4 Cálculo del área de un hexágono

① **P** Calcula el área del hexágono regular, cuyos lados miden 1 cm.



Un polígono regular cumple que todos sus lados tienen la misma longitud, y todos los ángulos interiores tienen la misma medida.

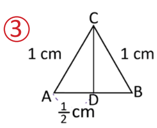
② **S** El hexágono regular está compuesto de 6 triángulos equiláteros congruentes. En este caso los 3 lados de cada triángulo miden 1 cm.



Se debe encontrar el área de un triángulo y luego multiplicarlo por 6, para encontrar el área del hexágono.

Se toma un triángulo cualquiera de los 6, y se denota por ΔABC. Se traza la altura desde el vértice C y utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra su longitud:

③



$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$

$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

El área del ΔABC es: $(\Delta ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$(cm)^2.

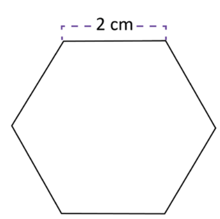
El área del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)^2.

A la perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados se le llama **apotema**.

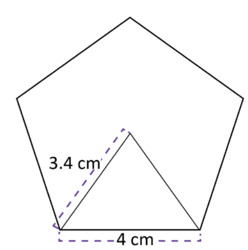
En el problema anterior la altura DC coincide con el apotema del hexágono.

C Para determinar el área de un polígono regular se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el apotema del polígono.

④ Encuentra la longitud del apotema y el área de los siguientes polígonos regulares.



El área del hexágono es aproximadamente $6\sqrt{3}$ cm



El área del pentágono es aproximadamente 27.5 cm

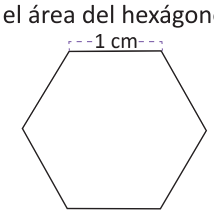
Unidad 6

139

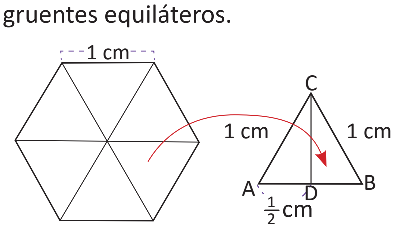
Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.4**

Ⓟ Calcula el área del hexágono.



Ⓢ Dividiendo en seis triángulos congruentes equiláteros.



$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$
$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4}$
$\Rightarrow DC^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\Delta ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2

El área del hexágono es: $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2

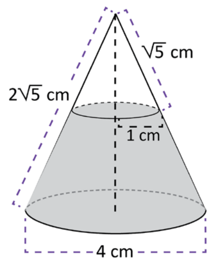
Ⓡ
1. Área: $6\sqrt{3}$ cm^2
2. Área, aproximadamente: 27.5 cm^2

Indicador de logro. Resuelve problemas sobre figuras y cuerpos geométricos donde se aplique el teorema de Pitágoras.

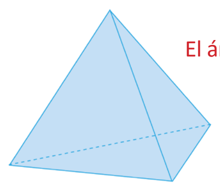
2.5 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen del sólido que está sombreado de gris.

El volumen del sólido sombreado es: $\frac{14}{3}\pi$



2. Determina el área total de la pirámide, si los triángulos son equiláteros y la medida de sus lados es 3.



El área es: $9\sqrt{3}$

2.6 Practica lo aprendido

1. Calcula la medida del segmento BC del siguiente ortoedro.

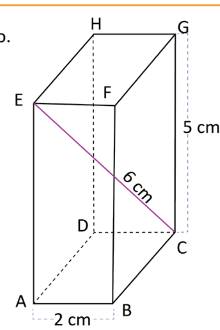
En el ΔACE, $6^2 = 5^2 + AC^2$

$AC^2 = 36 - 25$

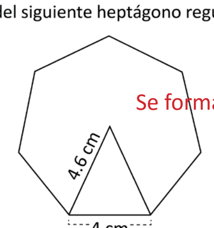
$AC = \sqrt{11}$

En el ΔABC, $(\sqrt{11})^2 = 2^2 + BC^2$

$BC^2 = 11 - 4$ entonces $BC = \sqrt{7}$



2. Calcula el área del siguiente heptágono regular.



Se forman siete triángulos isósceles congruentes, de altura h.

$h^2 = 4.6^2 - 2^2$

$h^2 = 17.16$

$h \approx 4.14$

Área de cada triángulo: $\frac{4 \times 4.14}{2} = 8.28$ cm²

Área del heptágono:

$8.28 \times 7 = 57.96$ cm²

140

Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems de la clase 2.5:

1.

Sea h_1 la altura del cono pequeño.

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h_1^2$$
$$h_1^2 = 5 - 1$$
$$h_1 = \sqrt{4}$$
$$h_1 = 2$$

Sea V_1 el volumen del cono pequeño.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times (1)^2 \times 2$$
$$V_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Sea h_2 la altura del cono grande.

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + h_2^2$$
$$h_2^2 = 20 - 4$$
$$h_2 = \sqrt{16}$$
$$h_2 = 4$$

Sea V_2 el volumen del cono grande.

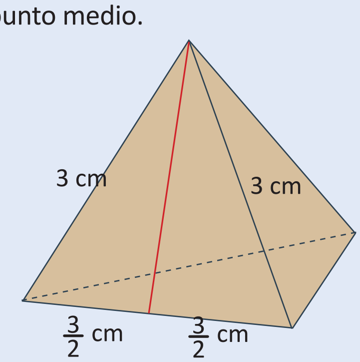
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 4$$
$$V_2 = \frac{16}{3}\pi$$

Por tanto, el volumen de la parte sombreada es:

$$\frac{16}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi$$

2.

Como sus caras son triángulos equiláteros, su altura intercepta al otro lado en el punto medio.



Sea h la altura de una cara del triángulo.

$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = 9 - \frac{9}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

El área de una cara es: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm².

El área total de la figura es: $4 \times \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$= 9\sqrt{3}$ cm².

Secuencia:
Hasta la clase anterior, se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas aplicados dentro de la misma matemática. En esta clase, se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas en contexto, los cálculos involucran números decimales.

Propósito:
①, ② En el problema debe asumirse que el triángulo formado ABC es rectángulo. Lo importante es comprender que se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar longitudes en un mapa, si se conocen dos distancias y si el triángulo formado por los tres puntos es un triángulo rectángulo.

③ Los datos son aproximados a los datos reales y pueden comprobarse con cualquier mapa confiable en internet.

④ Solución del ítem.

Sea h la altura del monumento a los Próceres.

$$h^2 = (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 = 515.3 - 118.8$$
$$h^2 = 396.5$$
$$h = 19.9$$

Aplicación de la matemática al entorno:
El estudiante debe comprender que algunos conocimientos matemáticos como el teorema de Pitágoras permiten resolver problemas concretos del contexto, debe comprender además que otros contenidos no poseen una aplicación directa pero que permiten la construcción de otros contenidos que sí son aplicables.

Indicador de logro. Aplica el teorema de Pitágoras a situaciones reales para calcular una distancia desconocida, realizando cálculos hasta un decimal.

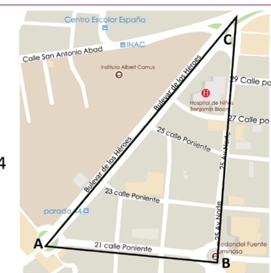
2.7 Aplicación del teorema de Pitágoras

① **P** La distancia desde la entrada principal de la Universidad de El Salvador en San Salvador (punto C) hasta la fuente luminosa (punto B) es de 554.8 m; mientras que desde la fuente luminosa hasta el punto de intersección, entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente (punto A) es 375.6 m. Encuentra la distancia entre los puntos A y C.

② **S** En la situación anterior, se forma el triángulo rectángulo ABC, del cual ya se conoce la longitud de los catetos AB y BC. Utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra la longitud de la hipotenusa CA:

$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 \approx 141\,075.4 + 307\,803.0 = 448\,878.4$

$\Rightarrow CA \approx \sqrt{448878.4} \approx 670.$



③ **C** El teorema de Pitágoras es aplicable para medir distancias, así fue posible determinar que la distancia entre la entrada principal de la Universidad de El Salvador, la intersección entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente es 670 m.

④ Calcula la altura del monumento a los Próceres, ubicado en el centro de la plaza Libertad de San Salvador. Ese monumento fue inaugurado por el presidente Manuel Enrique Araujo el 5 de noviembre de 1911, tras cumplirse 100 años del Primer Grito de Independencia y está esculpido en bronce, mármol, granito y concreto.

Unidad 6

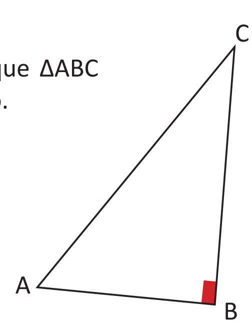
141

Tarea: página 144 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U6 2.7**

(P) La distancia entre B y C es 554.8 m, también entre A y B es 375.6. Encuentra la distancia entre A y C.

Asumiendo que ΔABC es rectángulo.



(S) $CA^2 = AB^2 + BC^2$
$= 375.6^2 + 554.8^2$
$\approx 141\,075.4 + 307\,803.0$
$\approx 448\,878.4$
Entonces, $CA \approx \sqrt{448\,878.4} \approx 670$ m.

(R) Sea h la altura del monumento a los Próceres.

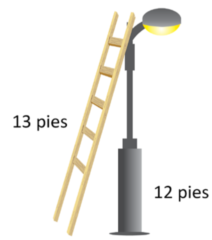
$$h^2 \approx (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 \approx 515.3 - 118.8$$
$$h^2 \approx 396.5$$
$$h \approx 19.9$$

Indicador de logro. Resuelve problemas sobre figuras y cuerpos geométricos donde se aplique el teorema de Pitágoras.

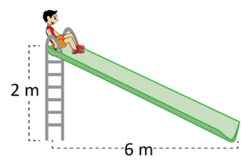
2.8 Practica lo aprendido

1. Mario tiene una escalera de 13 pies de longitud y quiere cambiar una lámpara que está a 12 pies de altura en un poste, ¿a qué distancia de la base del poste debe colocar la base de la escalera?

La distancia entre el poste y la escalera debe ser 5 pies



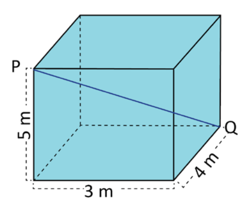
2. Miguel desea deslizarse por un tobogán, cuya altura máxima es 3.5 m. La distancia que hay entre el punto donde toca el suelo y la base del tobogán es de 6 m. ¿Qué distancia recorrerá en el tobogán?



Recorrerá 6.94 m.

3. En una cisterna de concreto, don Juan necesita colocar un alambre entre los puntos P y Q, ¿cuál debe ser la medida de este?

$PQ = 5\sqrt{2}$ m

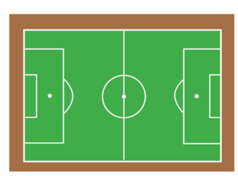


2.9 Practica lo aprendido

1. En la escuela El Zapote, se está preparando un evento alusivo a la paz, para ello, a José le han encomendado colocar en el muro de la escuela, las letras alusivas al evento, ¿cuántos centímetros de mecate le hacen falta para terminarlo?

Hacen falta 55.9 cm de mecate para terminarlo.

2. El césped del estadio Cuscatlán en San Salvador, tiene 107 m de largo y la diagonal mide 127 m, ¿cuál es el área de la cancha?



El área de la cancha es 7 319.9 m^2

142

Tarea: página 145 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems de la clase 2.8.

1. El poste con el suelo forman un ángulo de 90°, por tanto, puede aplicarse el teorema de Pitágoras.

Sea b la distancia a encontrar.

$$12^2 + b^2 = 13^2$$
$$b^2 = 169 - 144$$
$$b^2 = 25$$
$$b = 5$$

2. **Observación:** Para resolver este problema, utilizar los datos de la indicación y no los que aparecen en la imagen.

3. Se puede aplicar el teorema de Pitágoras en la base. Sea x la distancia desconocida:

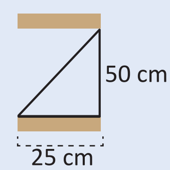
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

Aplicando nuevamente el teorema para encontrar PQ.

$$PQ^2 = 5^2 + 5^2$$
$$PQ = \sqrt{50}$$
$$PQ = 5\sqrt{2}$$

Solución de los ítems de la clase 2.9.

1. La altura de todas las letras es 50 cm.

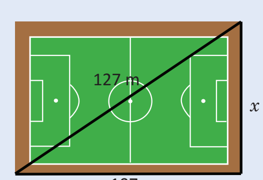


El triángulo que se forma es rectángulo. Sea h la hipotenusa.

$$h^2 = 25^2 + 50^2$$
$$h^2 = 625 + 2\,500$$
$$h^2 = 3\,125$$
$$h = 55.90$$

Hacen falta 55.9 cm de mecate para terminarlo.

2.



$$x^2 + 107^2 = 127^2$$
$$x^2 = 16\,129 - 11\,449$$
$$x^2 = 4\,680$$
$$x \approx 68.41$$

Área de la cancha:

68.41 m × 107 m ≈ 7 319.9 m^2

Prueba de la Unidad 6

Descripción:
La prueba de esta unidad esta formada por 7 numerales, algunos de los numerales tienen más de un literal, es importante aclarar que cada literal será tomado como un ítem; por tanto, esta prueba contiene 9 ítems (5 en la página 1 y 4 en la página 2).

Aspectos generales:
En esta página hay 5 ítems.

Criterios para asignar puntos parciales:

Ítem 1:
Si el resultado se expresa como $\sqrt{8}$.

Ítem 4:
Si encuentra solo un lado.
AC = 3 o CD = 6

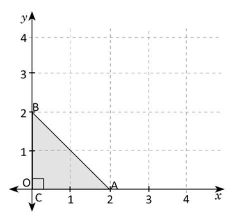
Solución de ítem 5:
No es posible.
$7^2 + 8^2 = 49 + 64 < 121 = 11^2$
No se cumple el recíproco del teorema de Pitágoras, por tanto, no se puede formar un triángulo rectángulo.

Prueba de la Unidad 6: Teorema de Pitágoras **Matemática 9º**

Fecha: ______________________
Nombre: ______________________ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________

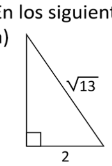
Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

1. Encuentra la hipotenusa para el triángulo formado por los vértices A(2, 0), B(0, 2) y C(0, 0).

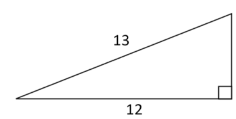


Respuesta:

2. En los siguientes triángulos, encuentra la longitud de los lados desconocidos.

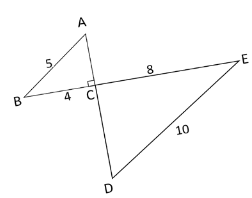
a)


Respuesta:

b)


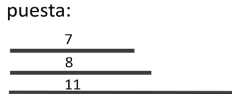
Respuesta:

3. Según los datos proporcionados en la figura, encuentra la medida del lado AD.

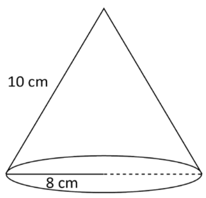


Respuesta:

4. ¿Se puede construir un triángulo rectángulo con los segmentos de la figura? Justifica tu respuesta:



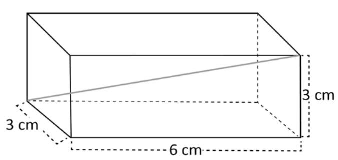
5. En la figura debajo.
   a) Encuentra la altura del cono
   b) Encuentra el volumen del cono



Respuesta: cm

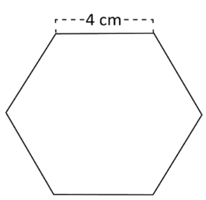
Respuesta: cm^3

6. Calcula la medida de la diagonal del siguiente ortoedro.



Respuesta: cm

7. Encuentra el área del siguiente hexágono regular.



Respuesta: cm^2

2

Aspectos generales:
En esta página hay cuatro ítems.

Criterios para asignar puntos parciales:

Ítem 8:
Si el resultado se expresa como $\sqrt{54}$.

Solución de ítem 9:
Se puede formar un triángulo equilátero, trazando las diagonales que pasan por los vértices.

Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}\ cm^2$$