Unidad 7. Ángulo inscrito y central

Competencias de la Unidad

Determinar la medida de los ángulos inscritos y semiinscritos en una circunferencia, utilizando los teoremas y relaciones sobre cuerdas y arcos en una circunferencia, para estudiar las características y propiedades de figuras planas.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen de prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ángulo central e inscrito	1	1. Elementos de la circunferencia
	1	2. Definición y medida de ángulos inscritos
	1	3. Ángulo inscrito, parte 1
	1	4. Ángulo inscrito, parte 2
	1	5. Teorema del ángulo inscrito
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Arcos congruentes
	1	8. Practica lo aprendido
2. Aplicación de ángulo central e inscrito	1	1. Construcción de tangentes a una circunferencia
	1	2. Cuerdas y arcos de la circunferencia
	1	3. Aplicación con semejanza de triángulos
	1	4. Paralelismo
	1	5. Cuatro puntos en una circunferencia
	1	6. Ángulo semiinscrito
	2	7. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 7

16 horas clase + prueba de la Unidad 7

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Ángulo central e inscrito
En la clase 1.2 se determina el teorema del ángulo central de una forma intuitiva, utilizando los instrumentos geométricos, para que en las clases posteriores a esta lección se realice la demostración formal del mismo.

Lección 2: Aplicación de ángulo central e inscrito
Habiendo demostrado el teorema de la medida del ángulo inscrito anteriormente, en esta lección se hace uso de este resultado como herramienta principal para la deducción de algunas propiedades.

1.1 Elementos de la circunferencia

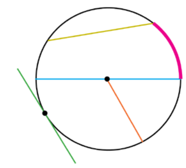
Secuencia:
En primero y segundo ciclo se conocieron los elementos del círculo, luego en séptimo se retomó el círculo para trabajar con sus elementos, determinar el significado de recta tangente a la circunferencia y deducir propiedades a partir de las características de dos círculos que se intersecan. Para esta clase se hace un recordatorio de los elementos del círculo, con la diferencia de que se presentan como elementos de la circunferencia; además, se presenta a la recta tangente a la circunferencia como un elemento más. En este grado los estudiantes ya tienen claridad en cuanto a comprender la relación entre el círculo y la circunferencia, por lo que se espera que no haya confusión en ellos respecto al título de la clase.

① Para este caso el primer ítem se considera completo al escribir los nombres de todos los literales.

Indicador de logro. Identifica los elementos de una circunferencia.

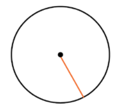
1.1 Elementos de la circunferencia

P Escribe el nombre que reciben los elementos dibujados en la siguiente circunferencia:

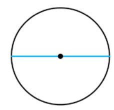


S

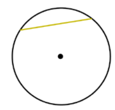
Segmentos.



El segmento que va del centro a un punto de la circunferencia se llama **radio.**

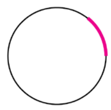


El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro se llama **diámetro.**



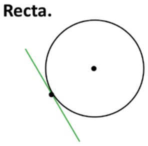
El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro se llama **cuerda.**

Arco.



La parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella se llama **arco.**

Recta.



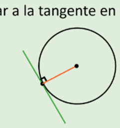
La recta que toca la circunferencia en un punto se llama **tangente.**

El punto donde la recta tangente toca la circunferencia se llama: **punto de tangencia.**

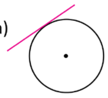
C Los elementos de la circunferencia son:

- Los segmentos: radio, diámetro y cuerda
- Las rectas: tangente
- El arco de la circunferencia

El radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.

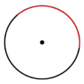


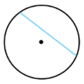
① 1. Escribe el nombre de los elementos señalados en cada circunferencia:

a)  Recta tangente

b)  Radio

c)  Diámetro

d)  Arco

e)  Cuerda

2. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el nombre del elemento que es $\frac{1}{2}$ del diámetro? Radio

b) ¿Cuál es el nombre de la cuerda de mayor longitud de una circunferencia? Diámetro

c) ¿Cómo es la recta tangente y el radio al punto de tangencia de una circunferencia? Perpendiculares

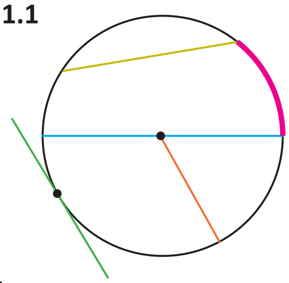
d) Al colocar dos puntos sobre la circunferencia, ¿cuántos arcos se forman? Dos

144

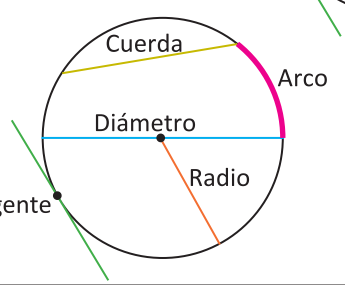
Tarea: página 148 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 1.1**

Ⓟ Escribe el nombre de cada elemento en la circunferencia.



Ⓢ



Ⓡ

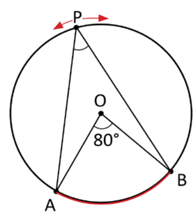
1.
   a) Recta tangente
   b) Radio
   c) Diámetro
   d) Arco
   e) Cuerda

2.
   a) Radio
   b) Diámetro
   c) Perpendiculares
   d) Dos

Indicador de logro. Distingue los tipos de ángulos inscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.

1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

P Realiza el dibujo en una hoja de papel y mide el ∢BPA desplazando el punto P a diferentes lugares de la circunferencia. Compara la medida de ∢BPA con la medida del ∢BOA.

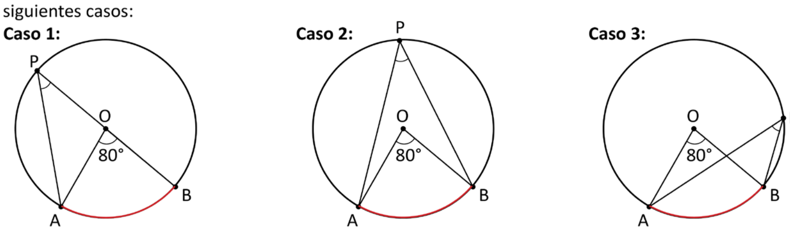


El ángulo BOA se llama **ángulo central**, porque su vértice es el centro de la circunferencia.

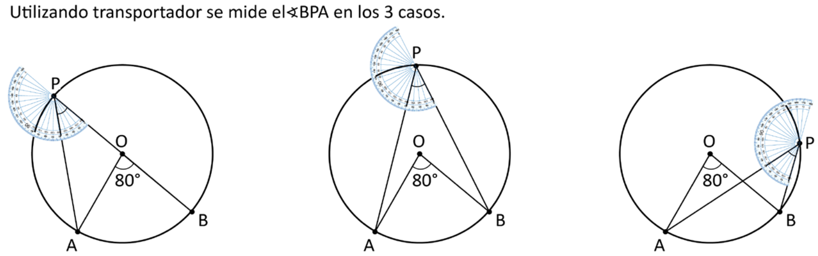
Observa que el ∢BPA y el ∢BOA comparten el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$.

① **S** Utilizando regla y compás para hacer el dibujo y desplazar el punto P en la circunferencia, se tienen los siguientes casos:

Caso 1: **Caso 2:** **Caso 3:**



Utilizando transportador se mide el∢BPA en los 3 casos.



En los tres casos la medida del ∢BPA = 40°.
Y el ∢BOA = 2∢BPA o bien el ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

C Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman: **ángulos inscritos**.

Subtender el mismo arco significa compartir el mismo arco.

En una circunferencia se cumple que la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

② Determina la medida de un ángulo inscrito a una circunferencia cuyo ángulo central correspondiente al mismo arco mide 160°. Utiliza un esquema como en el Problema inicial.

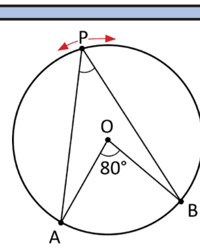
145

Unidad 7

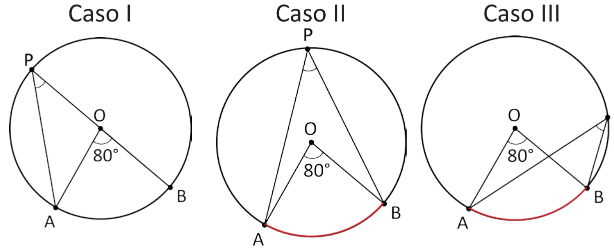
Tarea: página 149 del Cuaderno de Ejercicios.

P **Fecha:** **U7 1.2**

Mide el ∢BPA desplazando P en diferentes posiciones en la circunferencia. Compara la medida del ∢BPA con la del ∢BOA.

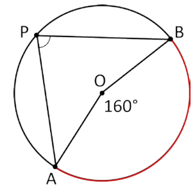


S



En los tres casos ∢BPA = 40°, y ∢BOA = 2∢BPA o ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

R



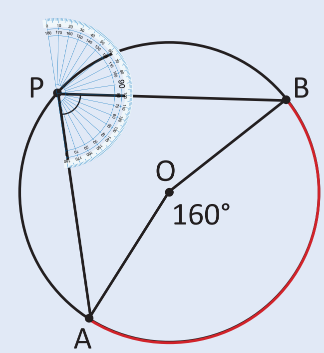
La medida del ∢BPA = 80°

∢BOA = 2∢BPA
o bien
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Secuencia:
Para esta clase se introduce el concepto de ángulo inscrito en una circunferencia y al mismo tiempo se presenta la propiedad relacionada a su medida. Se plantea la propiedad intuitivamente a partir de la construcción, es decir, a través del uso de los instrumentos de geometría. Esta clase es importante porque en las tres siguientes se retoman algunos elementos vistos en ella, los cuales se detallarán en el apartado de propósitos.

Propósito:
① Presentar los 3 posibles casos que se pueden dar al hacer el movimiento del punto en la circunferencia. Pueden ser más formas las que los estudiantes hagan, pero cualquiera de las formas hechas por ellos se corresponderá a uno de los casos presentados. El 1 hace referencia al caso en el que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito, el 2 al caso en el que el ángulo central está al interior del ángulo inscrito y el 3 al caso en el que el ángulo central está fuera del ángulo inscrito.

② Resolución del ítem.



La medida del ∢BPA = 80°

∢BOA = 2∢BPA
o bien
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

Secuencia:
Siendo que en la clase anterior se estableció la propiedad referente a la medida de un ángulo inscrito intuitivamente, para esta clase se hará de una manera formal, para ello se tomará una situación similar al caso 1 de la Solución de la clase anterior.

Propósito:
① Aplicar el concepto de radio de una circunferencia, las características de un triángulo isósceles, la propiedad de la medida de un ángulo externo de un triángulo para la resolución del Problema inicial. El primer paso en la estrategia de solución es determinar que el ΔAOP es isósceles, dado que sus lados coinciden con dos radios de la circunferencia. Luego se aplica que la medida del ángulo externo BOA es la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él, que en este caso son iguales por el hecho de que ΔAOP es isósceles.

② Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

③ Solución de algunos ítems.

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, x = 2(10°) = 20°.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.

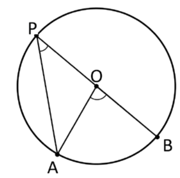
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{40°}{2}$ = 20°.

Indicador de logro. Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo lado coincide con un diámetro de la circunferencia.

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

① P Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro queda en algún lado del ΔBPA.



El diámetro es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

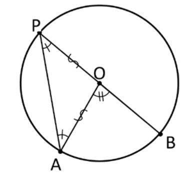
S En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia).

Entonces, ∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales).

Por otra parte ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢OPA. Como ∢OPA = ∢BPA.

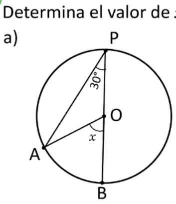
Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.



C En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.**

② E Determina el valor de x para cada caso.

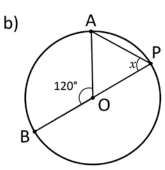
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(30°) = 60°.

b)



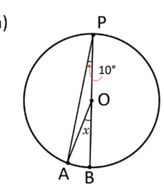
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

Por lo tanto, $x = \frac{120°}{2}$ = 60°.

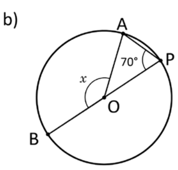
③ Determina el valor de x para cada caso.

a)



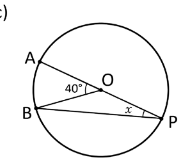
x = 20°

b)



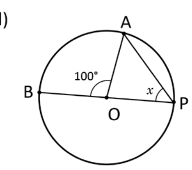
x = 140°

c)



x = 20°

d)



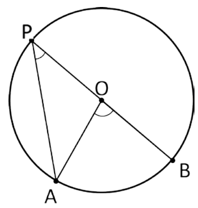
x = 50°

146

Tarea: página 150 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 1.3**

P Demuestra que ∢BOA = 2∢BPA.

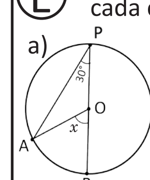


S

En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia) **(1)**
∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales)
∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP) **(2)**
∢BOA = 2∢OPA (por (1) y (2))
Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.

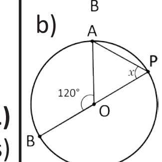
E Determinando x en cada caso.

a)



∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto,
x = 2(30°) = 60°.

b)



∢BOA = 2∢BPA
Entonces,
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA
Por lo tanto, $x = \frac{120}{2}$ = 60°.

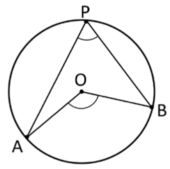
R a) x = 20° b) x = 140°
c) x = 20° d) x = 50°

Indicador de logro. Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo ángulo central está al interior del ángulo inscrito.

1.4 Ángulo inscrito, parte 2

① **P**

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está dentro del ∢BPA.



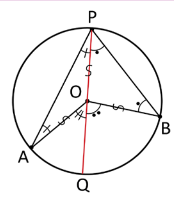
S

Se traza el diámetro QP.

∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO (por lo visto en la clase 3).

Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



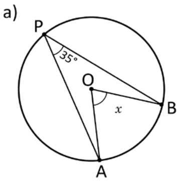
C

En los ángulos inscritos que tiene en el interior el ángulo central, que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**.

② **E**

Determina el valor de x para cada caso.

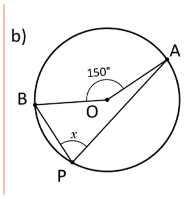
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, $x = 2(35°) = 70°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

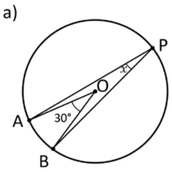
Entonces ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

Por lo tanto $x = \frac{150°}{2} = 75°$.

③

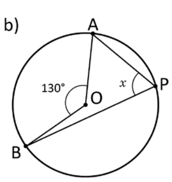
Determina el valor de x para cada caso.

a)



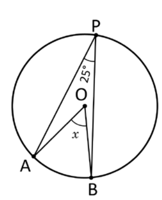
$x = 15°$

b)



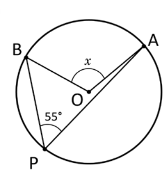
$x = 65°$

c)



$x = 50°$

d)



$x = 110°$

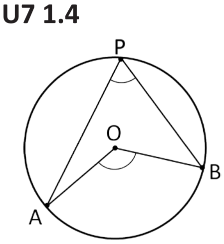
Unidad 7

147

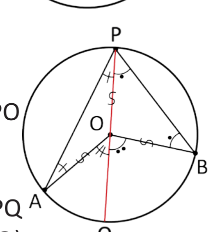
Tarea: página 151 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 1.4**

Ⓟ Demuestra que:
∢BOA = 2∢BPA
cuando el centro está dentro del ∢BPA.

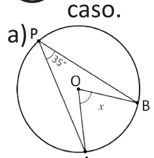


Ⓢ Se traza el diámetro QP.
∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO
(por lo visto en la clase 3)
Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ
= 2(∢QPA + ∢BPQ)
Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



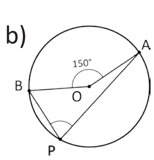
Ⓔ Determinando x en cada caso.

a)



Como
∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.

b)



Como
∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto,
$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

Ⓡ a) $x = 15°$ b) $x = 65°$

c) $x = 50°$ d) $x = 110°$

Secuencia:
Para esta clase se toma una situación similar al caso 2 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase anterior.

Propósito:
① El primer paso en la estrategia de solución, es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del Problema inicial de la clase anterior y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta para realizar la demostración.

② Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

③ Resolución de algunos ítems.

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{30°}{2} = 15°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(25°) = 50°$.

1.5 Teorema del ángulo inscrito

Secuencia:
Se toma una situación similar al caso 3 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase 1.3.

Propósito:
① El primer paso en la estrategia de solución es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del caso 1 tal como la de Problema inicial de la clase 1.3 y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta más para realizar la demostración.

② Además de que se aborda la Conclusión es importante señalar en el recuadro de información adicional que el nombre que recibe la relación existente entre las medidas del ángulo inscrito y central es **Teorema del ángulo inscrito**.

③ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

④ Solución de algunos ítems.

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{42°}{2} = 21°$.

b) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(45°) = 90°$.

d) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $z = \frac{180°}{2} = 90°$.

Como ∢BOA = 2∢BQA.

Entonces, ∢BQA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $y = \frac{180°}{2} = 90°$.

Como ∢BOA = 2∢BRA.

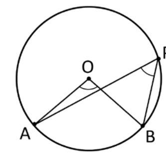
Entonces, ∢BRA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

Indicador de logro. Utiliza el teorema del ángulo inscrito para determinar la medida de ángulos en la circunferencia.

1.5 Teorema del ángulo inscrito

① **P** Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está fuera del ∢BPA.



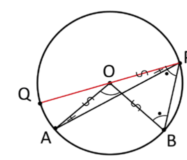
S Se traza el diámetro QP.

∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ (por lo visto en la clase 3).

Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA.

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



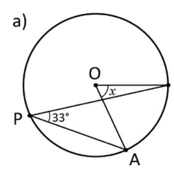
② **C** En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**.

Además los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.

Este resultado se conoce como **El teorema del ángulo inscrito**.

③ **E** Determina el valor de x para cada caso.

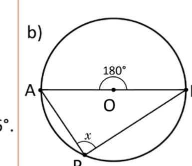
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, $x = 2(33°) = 66°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

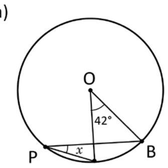
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

El ángulo inscrito a la semicircunferencia mide 90°.

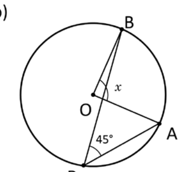
④ Determina el valor de x, y y z para cada caso.

a)



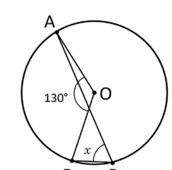
$x = 21°$

b)



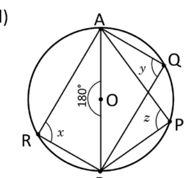
$x = 90°$

c)



$x = 65°$

d)

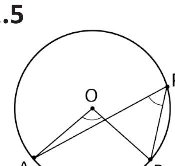


$x = 90°$ $y = 90°$
$z = 90°$

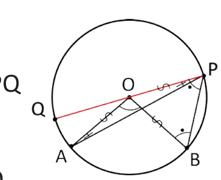
Tarea: página 152 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 1.5**

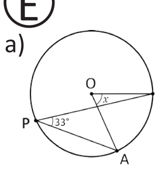
Ⓟ Demuestra que ∢BOA = 2∢BPA. Cuando el centro está fuera del ∢BPA.



Ⓢ Se traza el diámetro QP.
∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ (por lo visto en la clase 3)
Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ
∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ
= 2(∢BPQ – ∢APQ)
= 2∢BPA.
Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.

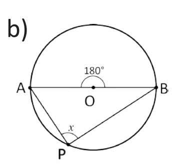


Ⓔ a)



Como:
∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto,
$x = 2(33°) = 66°$.

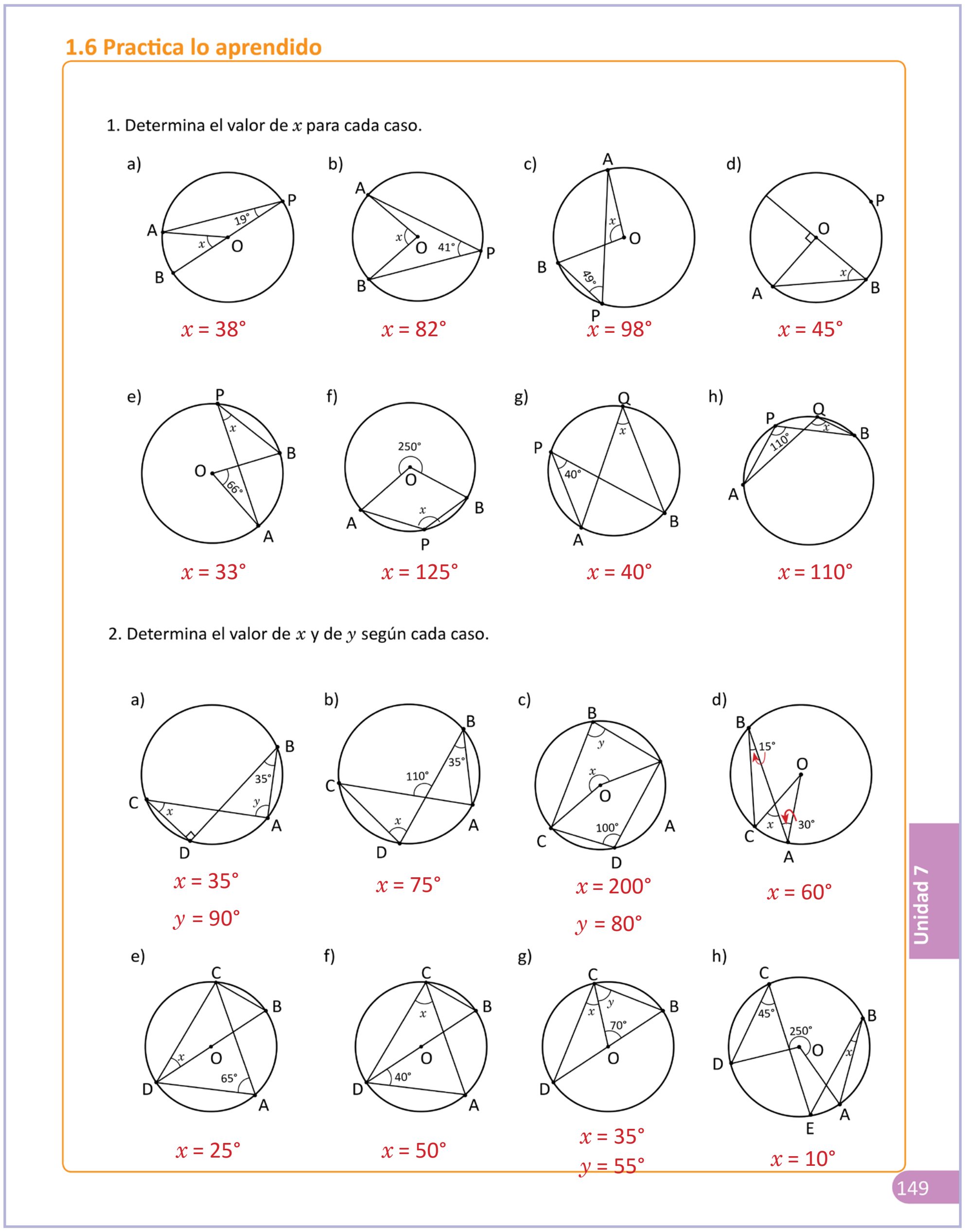
b)



Como:
∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto,
$x = \frac{180}{2} = 90°$.

Ⓡ a) $x = 21°$ b) $x = 90°$
c) $x = 65°$ d) $x = 90°$
$y = 90°$
$z = 90°$

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.



1.6 Practica lo aprendido

1. Determina el valor de x para cada caso.

a) $x = 38°$ b) $x = 82°$ c) $x = 98°$ d) $x = 45°$

e) $x = 33°$ f) $x = 125°$ g) $x = 40°$ h) $x = 110°$

2. Determina el valor de x y de y según cada caso.

a) $x = 35°$, $y = 90°$ b) $x = 75°$ c) $x = 200°$, $y = 80°$ d) $x = 60°$

e) $x = 25°$ f) $x = 50°$ g) $x = 35°$, $y = 55°$ h) $x = 10°$

Unidad 7

149

Tarea: página 153 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Como ∢BOA = 2∢BPA

Por lo tanto, x = 2(19°) = 38°.

e) Como ∢BOA = 2∢BPA

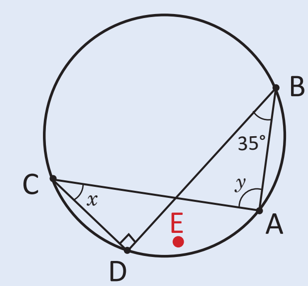
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{66°}{2} = 33°$.

h) x = ∢BQA = ∢BPA = 110°, porque ambos ángulos inscritos subtienden al $\overset{\frown}{AB}$.

2.

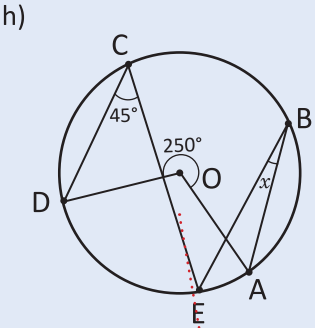
a)



Como ∢CED = 90° – 35° = 55°, entonces ∢BEA = ∢CED = 55°.

Por tanto, y = 180° – 35° – 55° = 90°.

h)



Primero se traza $\overline{OE}$.

∢AOD = 360° – 250° = 110°

∢EOD = 2(45°) = 90°

∢AOD = ∢AOE + ∢EOD

110° = ∢AOE + 90°

∢AOE = 20°

Por lo tanto,

x = ∢ABE = $\frac{1}{2}$ ∢AOE = $\frac{20°}{2}$ = 10°.

x = 10°

Secuencia:
Para esta clase se establece la propiedad de que en ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida y recíprocamente si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida. Para la demostración de dicha propiedad se hace la construcción auxiliar de los respectivos ángulos centrales. Esta estrategia se emplea debido a que en séptimo se trabajó la longitud de arco de segmentos circulares cuyo ángulo se consideraba ángulo central en una circunferencia, por lo que ya saben que si dos arcos son iguales entonces deben ser iguales los ángulos centrales que los subtienden.

Propósito:
① Como primer paso para realizar la comparación, se trazan los ángulos centrales ∢BOA y ∢DOC, luego se determina que estos ángulos centrales son de igual medida porque $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ (en séptimo se trabajó la longitud de arco de un sector circular).

② Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

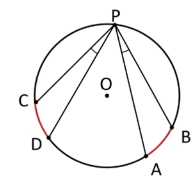
③ Solución de algunos ítems.
a) Como ∢BOA = ∢COD.
Por lo tanto, $y = x = \frac{20°}{2} = 10°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(23°) = 46°$.
Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.
Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 23°.

Indicador de logro. Determina la medida de ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida.

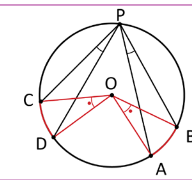
1.7 Arcos congruentes

① **P** Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la siguiente figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



La notación $\overset{\frown}{AB}$, significa la porción de arco comprendida entre el punto A y el punto B.

S Se construyen los ángulos ∢BOA y ∢DOC.
∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis).
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC (por ángulo inscrito).
Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.

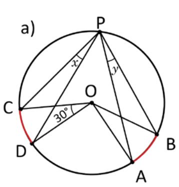


C En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.

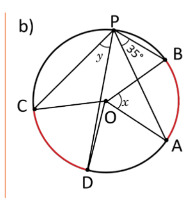
② **E** Determina el valor de x y y para cada caso donde $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.

a)



Como ∢BOA = ∢DOC.
Por lo tanto,
$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

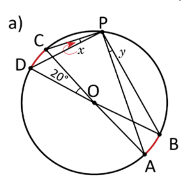
b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(35°) = 70°$.
Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.
Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

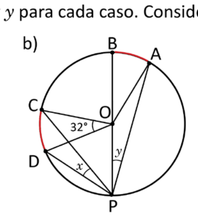
③ Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

a)



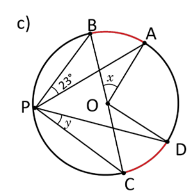
$x = y = 10°$

b)



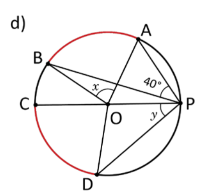
$x = y = 16°$

c)



$x = 46°$
$y = 23°$

d)

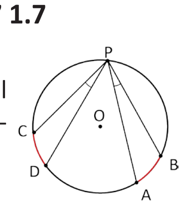


$x = 80°$
$y = 40°$

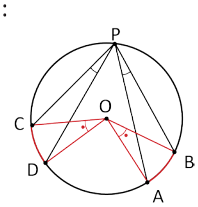
Tarea: página 154 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 1.7**

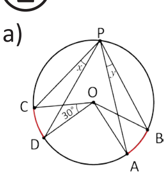
P
Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



S
Se construyen los ángulos:
∢BOA y ∢DOC.
∢BOA = ∢DOC
($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis)
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y
∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC
(por ángulo inscrito)
Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.

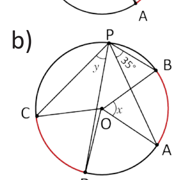


E
a)



Como
∢BOA = ∢DOC.
Por lo tanto,
$y = x = \frac{30}{2} = 15°$.

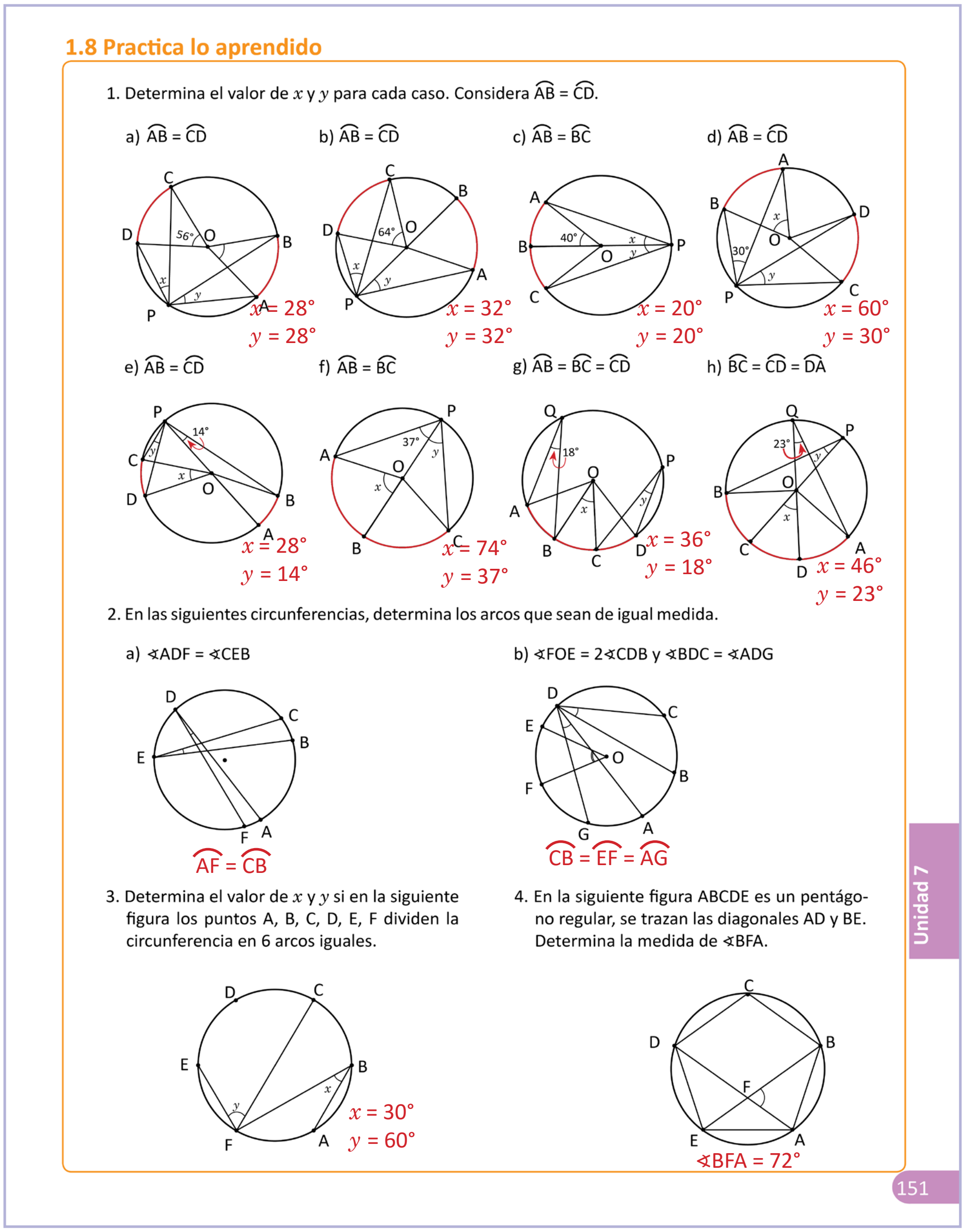
b)



Como
∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.
Por otra parte,
∢BOA = ∢DOC.
Entonces,
y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

R a) $x = y = 10°$ b) $x = y = 16°$
c) $x = 46°$, $y = 23°$ d) $x = 80°$, $y = 40°$

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.


1.8 Practica lo aprendido

1. Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

a) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ $x = 28°$ $y = 28°$

b) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ $x = 32°$ $y = 32°$

c) $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ $x = 20°$ $y = 20°$

d) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ $x = 60°$ $y = 30°$

e) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ $x = 28°$ $y = 14°$

f) $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ $x = 74°$ $y = 37°$

g) $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ $x = 36°$ $y = 18°$

h) $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA}$ $x = 46°$ $y = 23°$

2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que sean de igual medida.

a) ∢ADF = ∢CEB $\widehat{AF} = \widehat{CB}$

b) ∢FOE = 2∢CDB y ∢BDC = ∢ADG $\widehat{CB} = \widehat{EF} = \widehat{AG}$

3. Determina el valor de x y y si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.

$x = 30°$ $y = 60°$

4. En la siguiente figura ABCDE es un pentágono regular, se trazan las diagonales AD y BE. Determina la medida de ∢BFA.

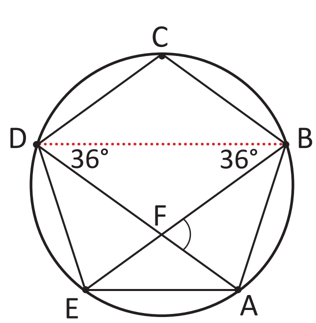
∢BFA = 72°

Unidad 7

151

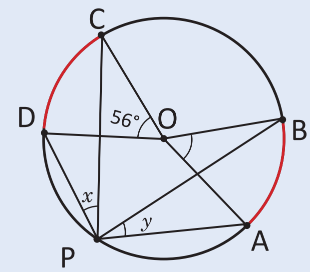
Tarea: página 155 del Cuaderno de Ejercicios.

4.
Como se tiene un pentágono regular cada uno de los arcos delimitados por sus vértices tienen igual medida. Por tanto, cada arco corresponde a un ángulo central de $\frac{360°}{5} = 72°$. Entonces, ∢FBD = ∢FDB = $\frac{72°}{2} = 36°$.
En el ΔBFD, ∢BFA = ∢FBD + ∢FDB = 72°.



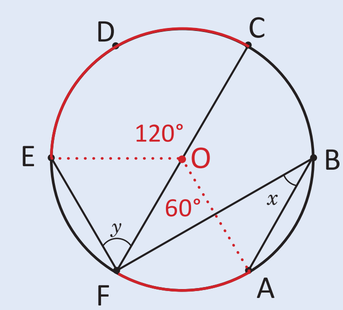
Solución de algunos ítems:

1.
a)



∢BOA = ∢DOC porque $\widehat{BA} = \widehat{CD}$,
∢BOA = ∢DOC = 56° por ser ángulos opuestos por el vértice.
Por tanto,
$x = y = \frac{56}{2} = 28°$.

3.
Como son seis arcos iguales entonces los 360° de la circunferencia deben dividirse también en seis ángulos iguales.
360 ÷ 6 = 60°.
Es decir, por cada arco corresponde un ángulo central de 60°.



Como ∢COE = 2∢CFE.

Entonces, ∢CFE = $\frac{1}{2}$ ∢COE.

Por lo tanto, $y = \frac{120°}{2} = 60°$.

Como ∢AOF = 2∢ABF.

Entonces, ∢ABF = $\frac{1}{2}$ ∢AOF.

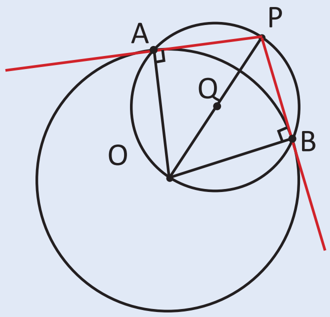
Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2} = 30°$.

2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

Secuencia:
En séptimo grado se presentó por primera vez el concepto de recta tangente a una circunferencia, por lo que los estudiantes ya conocen este tipo de rectas. Para esta clase se construyen dos rectas tangentes de manera que estas pasen por un punto externo a la circunferencia. Además, haciendo uso de la propiedad de ángulos inscritos se concluye que una recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la recta tangente en ese punto.

Propósito:
① Después de realizar la construcción de las rectas tangentes, se debe señalar la información contenida en el recuadro de recordatorio, en la que se establece que una recta perpendicular a un radio sobre un punto de la circunferencia es una recta tangente.

② Solución de los ítems.
1.



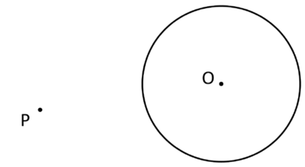
2.
a) Sí

b) Porque los ΔOAP y ΔOBP son triángulos rectángulos y sus hipotenusas y uno de sus catetos que les corresponden a los radios son de igual medida (criterio de congruencia de triángulos rectángulos). Por tanto, AP = BP.

Indicador de logro. Construye las tangentes a una circunferencia desde un punto fuera de dicha circunferencia.

2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

P Dada la siguiente circunferencia y el punto P, construye con regla y compás las rectas que pasan por el punto P y son tangentes a la circunferencia.



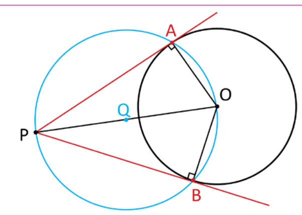
① **S** Tomando el punto medio del segmento PO, denotado por Q.

Se traza la circunferencia con centro Q y radio QO.

Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

Entonces, ∢OAP = ∢PBO = 90° (ambos subtienden un arco de 180°).

Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.



La recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la tangente a la circunferencia.

C Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada siguiendo los pasos de la solución.

②
1. Dibuja otra circunferencia y otro punto P fuera de dicha circunferencia, diferentes a los del inicio de la clase y construye las tangentes a la circunferencia que pasen por el punto P.

2. Con base al ejercicio de la clase responde:

   a) ¿Son iguales los segmento PA y PB?

   b) ¿Por qué?

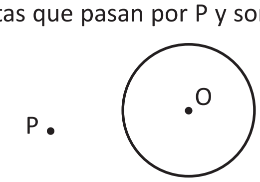
Puedes aplicar congruencia de triángulos para justificar tu respuesta.

152

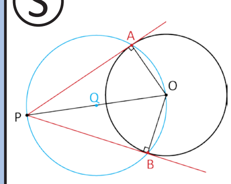
Tarea: página 156 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.1**

P Construye las rectas que pasan por P y son tangentes a la circunferencia.



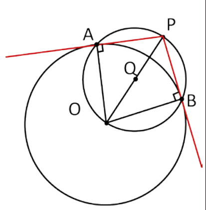
S



1. Tomando el punto medio de $\overline{PO}$, denotado por Q, se traza la circunferencia con centro Q y radio $\overline{QO}$.
3. Se marcan los puntos A y B donde se intersecan las circunferencias.
4. Entonces, ∢OAP = ∢PBO = 90° (ambos subtienden un arco de 180°).
   Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.

R

1.

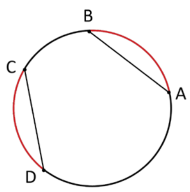


Indicador de logro. Utiliza las cuerdas y los arcos congruentes para clasificar figuras con lados iguales.

2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.



① **S**

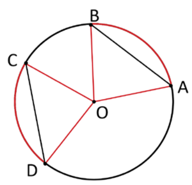
Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

∢BOA = ∢DOC (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LAL).

Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).



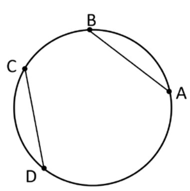
Para aplicar el criterio de congruencia LAL es necesario que dos lados y el ángulo entre ellos sean congruentes.

C

En una circunferencia si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.

② **E**

En la siguiente figura AB = CD. Compara la longitud de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

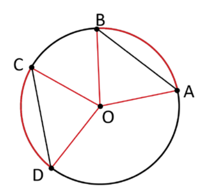


Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LLL).

Luego, ∢BOA = ∢DOC (por la congruencia).

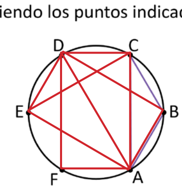
Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (el ángulo central es igual).



Unidad 7

③

Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal. Observa el ejemplo:



a) ABC BA = BC (porque $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$).
R. ABC es un triángulo isósceles.

b) ABDE c) ACE d) ACD

e) ABCDEF f) DEF g) ABCD

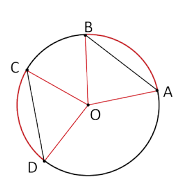
153

Tarea: página 157 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.2**

Ⓟ En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.

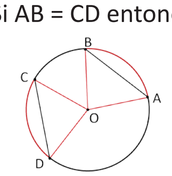
Ⓢ



Trazando los radios OA, OB, OC y OD.
∢BOA = ∢DOC (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LAL).
Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).

Ⓔ Si AB = CD entonces:



Al trazar OA, OB, OC y OD.
ΔBOA ≅ ΔDOC. (Por LLL)
∢BOA = ∢DOC (por congruencia)
Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
(El ángulo central es igual)

Ⓡ
b) AB = DE y AE = BD
(porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$)
R. ABDE es un rectángulo.

Secuencia:
Anteriormente se han trabajado los criterios de congruencia de triángulos; también se ha mostrado que si 2 arcos tienen igual medida entonces los ángulos centrales que los subtienden tienen igual medida. Lo anterior se usa como herramienta para establecer que en una circunferencia si la medida de 2 arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden es igual.

Propósito:
① Primero se construyen los ΔBOA y ΔDOC que son isósceles porque cada lado de ellos tiene la misma medida ya que son radios de la circunferencia. Luego por el criterio LAL se determina que los triángulos son congruentes (los lados en color rojo son de igual medida así como el ángulo comprendido entre ellos ya que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

② Determinar que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, con una construcción similar a la de los ΔBOA y ΔDOC, con la diferencia que se aplica el criterio LLL para determinar que los triángulos son congruentes ya que como hipótesis se establece que AB = CD. Luego a partir de la congruencia establecida se concluye que los arcos son iguales ya que son subtendidos por ángulos de igual medida.

③ Solución del ítem.
b) ∢ABD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro).
De la misma manera:
∢BDE = ∢DEA = ∢EAB = 90°.
R. ABDE es un rectángulo.
c) AC = CE = EA (porque $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EA}$)
ACE es un triángulo equilátero.
d) ∢ACD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro)
R. ACD es un triángulo rectángulo.
e) AB = BC = CD = DE = EF = FA
∢ABC = ∢BCD = ∢CDE = ∢DEF = ∢EFA (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$)
R. ABCDEF es un hexágono regular.
f) DE = EF (porque $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF}$)
R. DEF es un triángulo isósceles.
g) AB = CD (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (porque ∢ACB = ∢DBC como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
R. ABCD es un trapecio isósceles.

Secuencia:
Anteriormente se ha trabajado el teorema de los ángulos opuestos, y se determinó si dos triángulos son semejantes. De igual manera en la clase 1.7 de esta unidad los estudiantes aprendieron que dos ángulos inscritos tienen la misma medida si subtienden arcos de igual medida. Por lo que en esta clase se usan esos hechos para demostrar que para determinar la semejanza entre triángulos como los del Problema inicial es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Propósito:
① Después de realizar la semejanza de los triángulos, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

② Después de determinar la medida del segmento ED, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

③ Solución de los ítems.

1.

a) Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (por criterio de semejanza AA).

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por lo tanto,

$BE = x = AE \times \frac{EC}{ED} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$x = 2$ cm

b) En los triángulos ΔADC y ΔBCD, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 90°$, $CA = DB$ y $\overline{CD}$ es común.

Por lo tanto, $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

Luego $x = BC = 4$

$x = 4$ cm

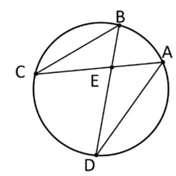
2. En los ΔACP y ΔDBP, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP$ (por ser ángulos inscritos subtendidos por $\overset{\frown}{AD}$), $\sphericalangle P$ es común.

Por lo tanto, $\Delta ACP \sim \Delta DBP$ (Por el criterio de semejanza AA).
No se hacen necesarias otras condiciones.

Indicador de logro. Resuelve problemas con triángulos semejantes utilizando el teorema del ángulo inscrito.

2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

P En la siguiente figura determina si se cumple que el $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

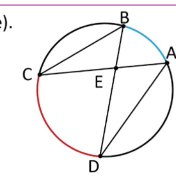


① **S** En la figura $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ (son opuestos por el vértice).

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$ (subtienden el mismo arco).

Pero $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ y $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$.

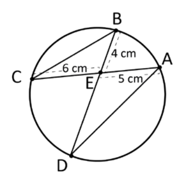
Por lo tanto, $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (por criterio AA).



Para aplicar el criterio AA solo es necesario que dos ángulos sean congruentes.

C Para determinar semejanza entre triángulos es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

② **E** En la siguiente figura determina la medida del segmento ED.



Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

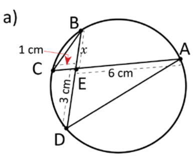
Por lo tanto, $ED = EC \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$.

ED = 7.5 cm

Cuando dos triángulos son semejantes, la razón entre sus lados homólogos se mantiene constante.

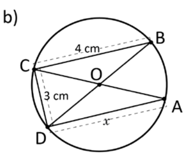
③ 1. Determina x en las siguientes figuras:

a)



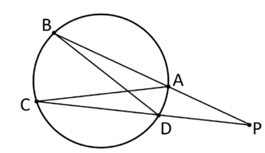
$x = 2$ cm

b)



$x = 4$ cm

2. En la siguiente figura determina qué condiciones son necesarias para que $\Delta ACP \sim \Delta DPB$.



¿Es necesario algo más?

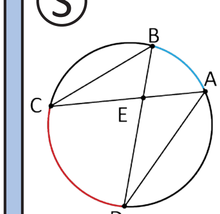
154

Tarea: página 158 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.3**

Ⓟ En la figura determina si se cumple que el $\Delta AED \backsim \Delta BEC$.

Ⓢ

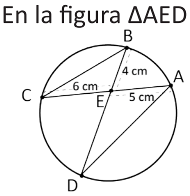


En la figura $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$.
(Son opuestos por el vértice)
$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$.
(Subtienden el mismo arco)

Pero $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ y $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$

Por lo tanto, $\Delta AED \sim \Delta BEC$.
(Por criterio AA).

Ⓔ En la figura $\Delta AED \backsim \Delta BEC$



Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por tanto, $ED = EC \times \frac{AE}{BE}$

$= 6 \times \frac{5}{4}$

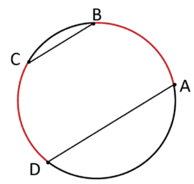
$= 7.5$

Ⓡ 1. a) $x = 2$ cm
b) $x = 4$ cm

Indicador de logro. Utiliza arcos congruentes para determinar el paralelismo entre cuerdas.

2.4 Paralelismo

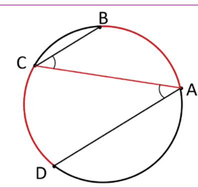
P En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.



S Trazando la cuerda AC.

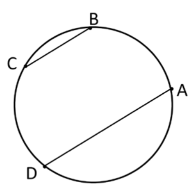
Entonces, ∢BCA = ∢DAC (dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

Por lo tanto, BC ∥ AD (los ángulos alternos internos son iguales).



C En una circunferencia, si se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.

① **E** Compara los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ de la circunferencia, si BC ∥ AD.

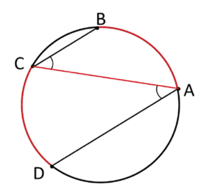


Trazando la cuerda AC.

∢BCA = ∢DAC (ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (teorema del ángulo inscrito).

Este resultado es el recíproco del ejercicio inicial.



② Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ b) ∢DBC = ∢BDA c) CB = DA d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$

e) AB = BC f) ∢ACD = ∢ADB g) AC = BD h) ΔABC ≅ ΔDCB

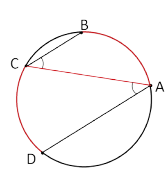
Unidad 7

Tarea: página 159 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.4**

P En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.

S

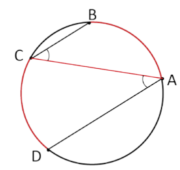


Trazar la cuerda AC.

Entonces, ∢BCA = ∢DAC. (Dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)

Por lo tanto, BC ∥ AD.
(Los ángulos alternos internos son iguales).

E Si BC ∥ AD:



Trazando la cuerda AC.
∢BCA = ∢DAC
(ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
(teorema del ángulo inscrito).

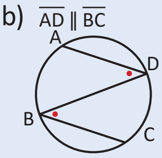
R b), c), d), g) y h)

Secuencia:
Ahora se establece que si en una circunferencia se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el final de un arco y el inicio del otro son paralelas.
En octavo grado, se trabajaron las condiciones de paralelismo entre dos rectas. En el problema se hace la construcción de $\overline{AC}$ y como ∢ACB = ∢CAD (por subtender arcos iguales) se determina que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos (∢ACB y ∢CAD son alternos internos). Además en la clase 1.7 se determinó que si 2 arcos tiene la misma medida entonces los ángulos inscritos que los subtienden tienen la misma medida.

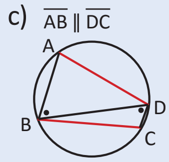
Propósito:
① En el Ejemplo se trabaja el recíproco de la propiedad en la Conclusión, es decir, a partir de que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ determinar que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

② Solución del ítem.
Condiciones suficientes (b, c, d, g y h):

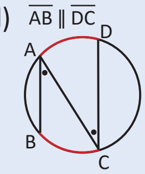
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



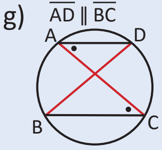
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

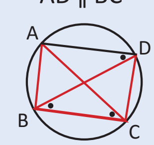


g) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



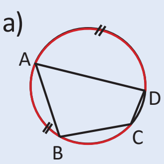
Si AC = BD entonces, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

h) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



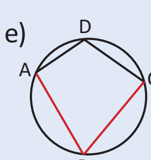
Condiciones no suficientes (a, e y f):

a)



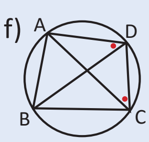
El punto B podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

e)



El punto D podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

f)



El punto C podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{BD}$.

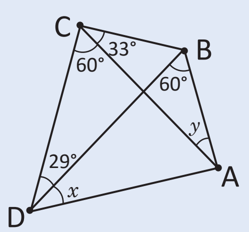
2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

Secuencia:
Para esta clase se determina que si dos ángulos son iguales y comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia. Para esto se analizan los resultados obtenidos a partir de la posición que ocupa un punto P en la circunferencia (dentro, sobre y fuera de ella).

Propósito:
① La redacción del Problema inicial debe ser: Sean A, B y C puntos fijos sobre la circunferencia y P otro punto que puede estar dentro, sobre o fuera de la circunferencia. Si ∢ABC = ∢APC se cumple y ambos ángulos comparten el segmento AC, demostrar que el punto P está sobre la misma circunferencia.

② En la solución se abordan los tres casos que se pueden dar, para determinar que cuando el punto no está sobre la circunferencia los ángulos tienen diferente medida.

③ Solución de algunos ítems.
a)



Como ∢ACD = ∢ABD y ambos comparten el segmento DA, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

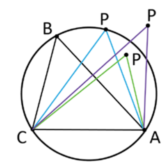
Como ∢ADB y ∢ACB subtienden el mismo arco entonces:
x = ∢ADB = ∢ACB = 33

Luego, como ∢BAC y ∢BDC subtienden el mismo arco entonces:
y = ∢BAC = ∢BDC = 29
x = 33° y y = 29°

Indicador de logro. Determina las condiciones para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia.

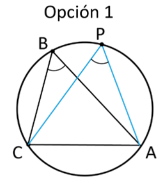
2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

① **P** Considerando ∢ABC = ∢APC y que ambos ángulos comparten el segmento AC. Demuestra que los puntos A, B, C y P están en una misma circunferencia.



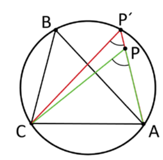
② **S** El punto P tiene 3 opciones, sobre, dentro o fuera la circunferencia.

Opción 1



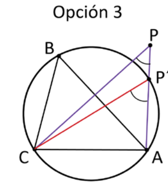
En este caso:
∢ABC = ∢APC.
Por lo tanto, A, B, C y P deben estar en una misma circunferencia.

Opción 2



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C < ∢APC
Dado que ∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP
Por lo tanto, **∢ABC < ∢APC**.

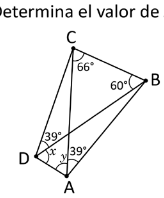
Opción 3



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.
Dado que ∢AP´C = ∢APC + ∢PCP'.
Por lo tanto, **∢ABC > ∢APC**.

C Si dos ángulos iguales, además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

E Determina el valor de x y y.

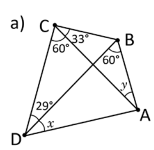


Como ∢CAB = ∢CDB y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

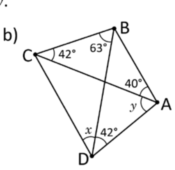
Se debe cumplir que **∢BCA = ∢BDA**, entonces x = 66°.
Y además se debe cumplir que **∢CBD = ∢CAD**, entonces y = 60°.

③ Determina el valor de x y y.

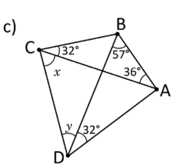
a)



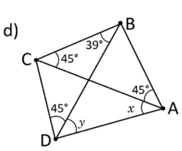
b)



c)



d)



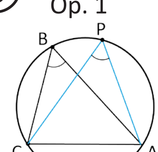
x = 33° y y = 29° x = 40° y y = 63° x = 57° y y = 36° x = 39° y y = 45°

Tarea: página 160 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.5**

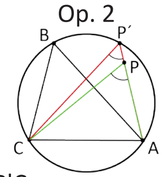
Ⓟ Si A, B y C están fijos sobre la circunferencia y P puede estar dentro, sobre o fuera de ella. Si ∢ABC = ∢APC y comparten $\overline{AC}$. Demostrar que P está sobre la circunferencia.

Ⓢ Op. 1



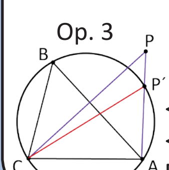
En este caso:
∢ABC = ∢APC.

Op. 2



∢ABC = ∢AP'C.
∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP > ∢AP'C.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C < ∢APC.

Op. 3



∢ABC = ∢AP'C.
∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' > ∢APC.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.

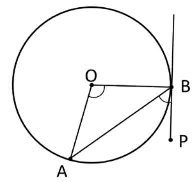
Ⓔ Determinando x y y.
∢CAB = ∢CDB y comparten $\overline{CB}$.
A, B, C y D están sobre una misma circunferencia.
∢BCA = ∢BDA, x = 66°
∢CBD = ∢CAD, y = 60°

Ⓡ
a) x = 33° y y = 29°
b) x = 40° y y = 63°
c) x = 57° y y = 36°
d) x = 39° y y = 45°

Indicador de logro. Determina las medidas de ángulos semiinscritos utilizando la medida del ángulo central.

2.6 Ángulo semiinscrito

① **P** Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la siguiente figura.

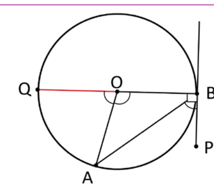


② **S** Se traza el diámetro QB.

Entonces, ∢AOQ = 2∢ABO (teorema del ángulo inscrito).

También, ∢AOQ = 180° – ∢BOA (ángulo suplementario).

Luego 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$.



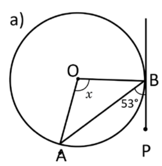
Por lo tanto, ∢PBA = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA (por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

C El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**.

En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito, es igual a la mitad de la medida del ángulo central, que subtiende el mismo arco que la cuerda.**

E Determina el valor de x para cada caso.

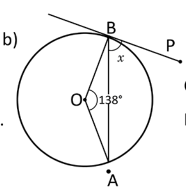
a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.

Por lo tanto, x = 2(53°) = 106°.

b)

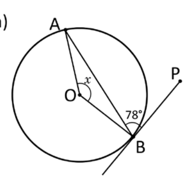


Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{138°}{2}$ = 69°.

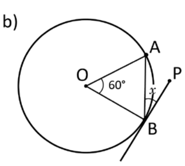
③ Determina el valor de x para cada caso:

a)



x = 156°

b)



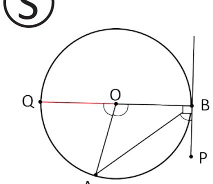
x = 30°

Tarea: página 161 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U7 2.6**

Ⓟ Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la figura.

Ⓢ



Se traza el diámetro QB.

∢AOQ = 2∢ABO.
(Teorema del ángulo inscrito)

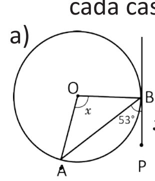
∢AOQ = 180° – ∢BOA.
(Ángulo suplementario)

2∢ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$

Por lo tanto, ∢PBA = 90° – ∢ABO = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA. (Por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

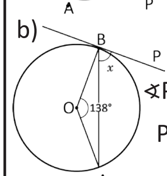
Ⓔ Determinando x para cada caso.

a)



∢BOA = 2∢PBA
Por tanto,
x = 2(53°) = 106°.

b)



∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA
Por lo tanto,
$x = \frac{138°}{2}$ = 69°.

Ⓡ a) x = 156°
b) x = 30°

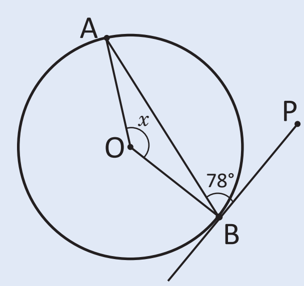
Secuencia:
Se introduce el término de ángulo semiinscrito así como la propiedad referente a su medida. Para tal caso, se construye una situación similar a la presentada en el Problema inicial de la clase 1.3 (es decir, que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito) como un primer paso en la estrategia para hacer la deducción formal de la propiedad.

Propósito:
① Haciendo uso del teorema del ángulo inscrito y la condición de ángulos suplementarios, realizar la comparación de los ángulos. En un primer momento se hace la construcción auxiliar del diámetro QB para construir un ángulo inscrito similar al del caso 1 de la Solución de la clase 1.2.

② Señalar la importancia de las construcciones auxiliares (que en este caso fue la del diámetro) para poder realizar algunas demostraciones en geometría.

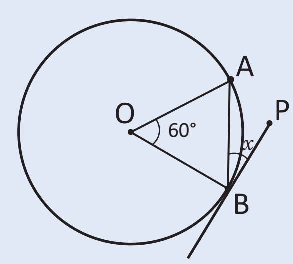
③ Solución de los ítems.

a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.
Por lo tanto, x = 2(78°) = 156°
x = 156°.

b)



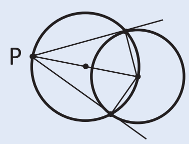
Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2}$ = 30°

x = 30°.

Solución de algunos ítems de la clase 2.7.

1. Un ejemplo de solución puede ser:



3.

a) ∢EAB = ∢EDC porque ambos subtienden a $\overset{\frown}{BC}$.

b) ∢ABE = ∢ACD porque ambos coinciden con ángulos inscritos que subtienden a $\overset{\frown}{AD}$.

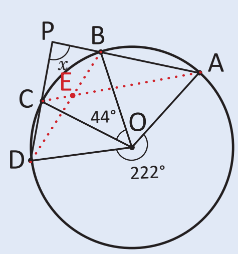
c) ΔABE es semejante al ΔDCE porque 2 de sus ángulos son iguales (AA).

Solución de algunos ítems de la clase 2.8.

a) Como ∢ADB = ∢ACB y ambos comparten el segmento AB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.
Como ∢ACD y ∢ABD subtienden el mismo arco entonces:
x = ∢ACD = ∢ABD = 41°
Luego, como ∢BAC y ∢BDC subtienden el mismo arco entonces:
y = ∢BDC = ∢BAC = 34°

x = 41° y y = 34°

d)



Primero se trazan $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.
Como ∢AOD = 222° es central entonces los ángulos inscritos:
∢ABD = ∢ACD = 111°
porque los dos subtienden al $\overset{\frown}{AD}$.

Luego ∢BOC = 44° es central entonces el ángulo inscrito ∢CAB = 22° porque ambos subtienden al $\overset{\frown}{BC}$.
También:
∢ACP = 180° – ∢ACD
= 180° – 111°
= 69°
porque los ángulos están sobre $\overline{DP}$.

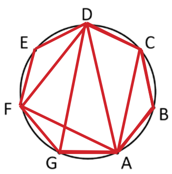
Por último:
22 + 69 + x = 180
x = 89°

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de ángulo central e inscrito.

2.7 Practica lo aprendido

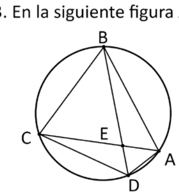
1. Dibuja una circunferencia y un punto P fuera de ella, construye con regla y compás las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto P.

2. Los puntos A, B, C, D, E, F, G dividen la circunferencia en 7 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal.



a) ABC	b) ACDF	c) ADG	d) ABCDEFG
Triángulo isósceles AB = BC	Trapecio isósceles CD ∥ AF y AC = FD	Triángulo isósceles AD = DG	Heptágono regular Los lados y los ángulos son congruentes respectivamente.

3. En la siguiente figura A, B, C, D están en una circunferencia. Responde:



a) ¿Cómo son los ángulos ∢EAB y ∢EDC?

b) ¿Cómo son los ángulos ∢ABE y ∢ACD? ¿Por qué?

c) ¿Cómo son los triángulos ΔABE y ΔDCE? ¿Por qué?

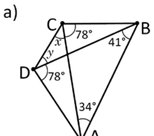
4. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos haya al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ b) ∢CAB = ∢CDB c) AC = AD d) ΔABC ~ ΔCDA

2.8 Practica lo aprendido

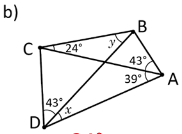
Determina el valor de x o y, según corresponda.

a)



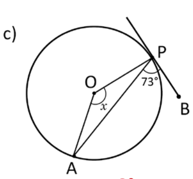
x = 41°
y = 34°

b)



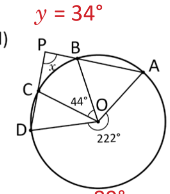
x = 24°
y = 39°

c)



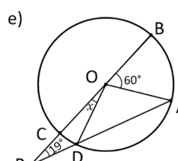
x = 146°

d)



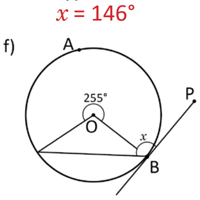
x = 89°

e)



x = 22°

f)



x = 127.5°

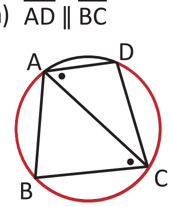
Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

Clase 2.7

4.

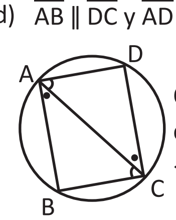
Condiciones suficientes:

a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ entonces $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
Por tanto, ∢ACB = ∢CAD.

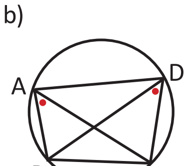
d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Como ΔABC ~ ΔCDA entonces,
∢CAB = ∢ACD, ∢BCA = ∢DAC.

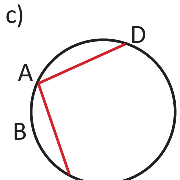
Condiciones no suficientes:

b)



El punto D podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

c)



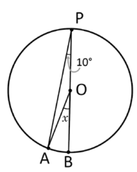
El punto B podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

Prueba de la Unidad 7: Ángulo inscrito y central **Matemática 9º**

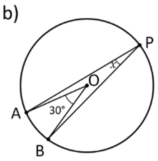
Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

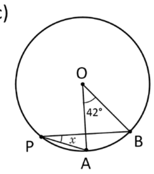
1. Determina el valor de x para cada caso.

a)


Respuesta:
x =

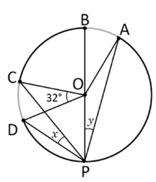
b)


Respuesta:
x =

c)


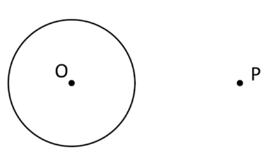
Respuesta:
x =

2. Determina el valor de x, y y. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.



Respuesta:
x =
y =

3. Traza dos rectas tangentes a la circunferencia que pase por el punto P. Utiliza regla y compás.



1

Descripción.
La prueba de esta unidad está formada por 8 numerales, el numeral 1 tiene más de un literal, es importante aclarar que cada literal será tomado como un ítem; por tanto, esta prueba contiene 10 ítems (5 en la página 1 y 5 en la página 2).

Criterios para asignar puntos parciales.
Ítems del 1a al 1c:
No aplica punto parcial.

Ítem 2:
Determina el valor de una sola incógnita.

Ítem 3:
No aplica punto parcial.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 1a – C 1.3
Ítem 1b – C 1.4
Ítem 1c – C 1.5
Ítem 2 – C 1.7 y 1.5
Ítem 3 – C 2.1

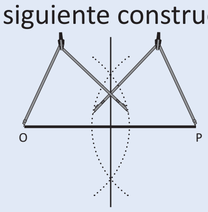
Algunos procedimientos:
Ítem 1a:
$x = 10° \times 2 = 20°$

Ítem 1b:
$x = \frac{30°}{2} = 15°$

Ítem 1c:
$x = \frac{42°}{2} = 21°$

Ítem 2:
$x = \frac{32°}{2} = 16°$
Como AB = CD, $\sphericalangle AOB = 32°$.
$y = \frac{32°}{2} = 16°$

Ítem 3:
Construir la circunferencia cuyo centro sea el punto medio del segmento PO. Para determinar el punto medio de $\overline{PO}$ se hace la siguiente construcción:



Por último, se trazan los segmentos de P hacia cada una de las intersecciones de la circunferencia construida y la circunferencia de centro O.

Ítem 4:
Determina que se forma un triángulo rectángulo o isósceles, pero no ambas conclusiones.

Ítem 5:
Determina que $\Delta BEC \sim \Delta AED$ por el criterio AA y plantea la proporción: $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$ pero no determina correctamente el valor de x.

Ítem 6:
No aplica punto parcial.

Ítem 7:
Determina el valor de una sola incógnita.

Ítem 8:
No aplica punto parcial.

Relación entre los ítems y las clases del Libro de texto.
Ítem 4 – C 1.5 y 2.2
Ítem 5 – C 2.3
Ítem 6 – C 2.4
Ítem 7 – C 2.5
Ítem 8 – C 2.6

Algunos procedimientos
Ítem 4:
Como $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$, BC = CA.
Como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BA}$, AB es el diámetro, luego $\sphericalangle ACB = 90°$.

Ítem 5:
Como $\Delta EBC \sim \Delta EAD$, $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$, entonces $x = \frac{1}{3} \times 6 = 2$.

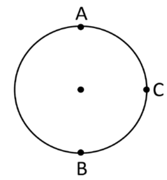
Ítem 7:
Como $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, los puntos A, B, C y D están en una circunferencia.
Por lo tanto, $x = \sphericalangle ACB = 33°$ y $y = \sphericalangle BDC = 24°$.

Ítem 8:
$x = 78° \times 2 = 156°$

Observaciones.
Ítem 5:
Se permiten las siguientes proporciones:

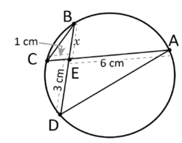
$$\frac{6}{x} = \frac{3}{1},\ \frac{x}{1} = \frac{6}{3} \text{ o } \frac{1}{x} = \frac{3}{6}$$

4. Si $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BA}$, ¿qué figura se forma uniendo los puntos ABC?



Respuesta:

5. Determina x en las siguientes figuras.

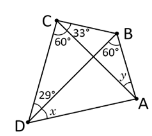


Respuesta:
x = cm

6. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.
a) $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA$ b) CB = BA

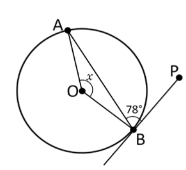
Respuesta:

7. Determina el valor de x, y y.



Respuesta:
x =
y =

8. Determina el valor de x.



Respuesta:
x =

2

Unidad 8. Medidas de dispersión

Competencias de la Unidad

Calcula e interpreta las medidas de dispersión para analizar críticamente situaciones de su contexto que requieran del análisis de datos.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Representación de datos en tabla
- Gráfica de barras
- Pictogramas
- Gráfica de líneas
- Moda, mediana y media
- Porcentajes

Séptimo grado

Unidad 7: Gráfica de faja y circular
- Gráfica de faja
- Gráfica circular

Octavo grado

Unidad 8: Organización y análisis de datos estadísticos
- Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
- Medidas de tendencia central
- Valor aproximado y dígitos significativos

Noveno grado

Unidad 8: Medidas de dispersión
- Dispersión
- Propiedades de la desviación típica

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Dispersión	1	1. Rango para datos no agrupados
	1	2. Desviación respecto a la media
	1	3. Varianza para datos no agrupados
	1	4. Desviación para datos no agrupados
	1	5. Agrupación de datos
	1	6. Media aritmética y rango para datos agrupados
	1	7. Varianza para datos agrupados
	1	8. Desviación típica
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Practica lo aprendido
2. Propiedades de la desviación típica	1	1. Desviación típica de una variable, más una constante
	1	2. Desviación típica de una variable multiplicada por una constante
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

12 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Dispersión
Se introduce la definición de medidas de dispersión para datos agrupados y no agrupados. Las medidas introducidas en esta lección son rango, varianza y desviación típica.

Lección 2: Propiedades de la desviación típica
Se introducen las propiedades de la desviación típica como una herramienta para el cálculo de la desviación típica de un conjunto de datos que se han modificado, ya sea sumándolos o multiplicándolos por una constante.

Secuencia:
Anteriormente se trabajaron las medidas de tendencia central para datos no agrupados y agrupados, por lo que en esta unidad se trabajan las medidas de dispersión, igualmente para datos no agrupados y agrupados. Para esta clase se presenta el significado de medidas de dispersión y se introduce el concepto de rango o amplitud de los datos. Inicialmente se trabajará con datos no agrupados.

Vale recordar que en tercer ciclo todas las medidas de tendencia central y de dispersión se denotan por las letras griegas mayúsculas, porque no se trabaja con muestras, por tanto se debe tener cuidado de no utilizar las notaciones $\overline{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{s^2}$ cuando se utilice la media aritmética y la varianza respectivamente. Las notaciones muestrales de las medidas de tendencia central y de dispersión serán utilizadas hasta bachillerato.

Indicador de logro. Identifica la dispersión de distribuciones de datos, utilizando el rango para datos no agrupados.

1.1 Rango para datos no agrupados

P En la tabla se presenta la tarifa mensual (en dólares) por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador:

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

¿Cómo se calcula la media aritmética, mediana y moda para datos no agrupados?

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de las tarifas de cada una de las residenciales.

b) Para cada residencial calcula la diferencia entre la tarifa más alta y la más baja. ¿Cuál residencial tiene la mayor diferencia?

S a) Para calcular la media aritmética (μ) se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número de datos, la mediana es el dato que ocupa la posición central cuando estos se ordenan de menor a mayor y la moda es el dato con mayor frecuencia (el que más se repite).

Para la residencial 1:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{12+11+12+13+12+18}{6}\\ &= \frac{78}{6}\\ &= 13\end{aligned}$$

La media aritmética es \$13.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:

11, 12, 12, 12, 13, 18

Por ser un número par de datos, la mediana es la media de los datos que ocupan las posiciones 3 y 4:

$$\frac{12+12}{2} = 12$$

La mediana es igual a \$12. Por último, la moda es \$12 para la residencial 1, pues es el dato que más se repite.

Para la residencial 2:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{10+13+12+11+12+12+14}{7}\\ &= \frac{84}{7}\\ &= 12\end{aligned}$$

La media aritmética es \$12.

160

Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.1**

P

Para cada residencial:
a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.
b) Calcula la diferencia entre la tarifa más alta y la más baja. ¿Cuál residencial tiene la mayor diferencia?

S

a) Residencial 1: μ = 13, mediana = 12 y moda = 12
Residencial 2: μ = 12, mediana = 12 y moda = 12
b) Residencial 1: 18 – 11 = 7
Residencial 2: 14 – 10 = 4
Por tanto, la mayor diferencia es de la residencial 1.

R

1.
Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

2.
a) μ = 30°, mediana = 30° y moda = 29°.
μ = 30.43°, mediana = 30° y moda = 30°.
b) Semana 1, rango = 3°
Semana 2, rango = 10°
La semana 2 tiene los datos más dispersos.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:
10, 11, 12, 12, 12, 13, 14
El dato que ocupa la posición central (cuarta posición) es 12, es decir, la mediana de la residencial 2 es igual a \$12. Finalmente, la moda es igual a \$12 para la residencial 2, pues es el dato que más se repite.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente cuadro:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	\$13	\$12
Mediana	\$12	\$12
Moda	\$12	\$12

b) Para la residencial 1 la tarifa más alta es \$18, la más baja es \$11 y la diferencia es 18 − 11 = 7.
Para la residencial 2 la tarifa más alta es \$14, la más baja es \$10 y la diferencia es 14 − 10 = 4.

Por lo tanto, la diferencia de la tarifa más alta y la más baja es mayor en la residencial 1.

C

Las **medidas de dispersión** indican qué tanto se dispersan o agrupan los datos con respecto a su media aritmética.

El **rango** es una medida de dispersión que para una serie de datos no agrupados es igual a la diferencia del dato mayor y el dato menor. Al **rango** también se le llama **amplitud.** En el Problema inicial, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas, ya que el rango es mayor.

①

1. Observa los datos no agrupados de las series A y B. ¿En cuál serie los datos están más dispersos?

	Serie A	Serie B
1	20.3	20.9
2	20.8	20.5
3	21.0	24.0
4	20.5	29.5
5	21.1	21.0
6	20.2	19.1
7	20.4	16.4

Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

2. María registra la temperatura en dos semanas diferentes, obteniendo los resultados de la derecha.

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de cada semana.

b) Calcula el rango de cada semana, ¿en cuál de ellas los datos están más dispersos?

Semana 1	
Día	Temperatura
domingo	32°
lunes	31°
martes	29°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	29°
sábado	29°

Semana 2	
Día	Temperatura
domingo	35°
lunes	34°
martes	32°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	27°
sábado	25°

a) μ = 30°, mediana = 30° y moda = 29°.
μ = 30.43°, mediana = 30° y moda = 30°.
b) Semana 1, rango = 3°
Semana 2, rango = 10°
La semana 2 tiene los datos más dispersos.

Unidad 8

161

① Solución de los ítems:

1.
Serie A
Dato menor: 20.2
Dato mayor: 21.1
Rango: 21.1 − 20.2 = 0.9 dólares
Serie B
Dato menor: 16.4
Dato mayor: 29.5
Rango: 13.1 dólares

Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

2.
a) Semana 1

Media.

$$\mu = \frac{32 + 31 + 29 + 30 + 30 + 29 + 29}{7}$$
$$\mu = \frac{210}{7}$$
$$\mu = 30°$$

Mediana.
Ordenando los datos se tiene:
29, 29, 29, 30, 30, 31, 32
La mediana es 30°.

Moda.
La moda es 29°

Semana 2

Media.

$$\mu = \frac{35 + 34 + 32 + 30 + 30 + 27 + 25}{7}$$
$$\mu = \frac{213}{7}$$
$$\mu = 30.43°$$

Mediana.
Ordenando los datos se tiene:
25, 27, 30, 30, 32, 34, 35
La mediana es 30°.

Moda.
La moda es 30°

b) Semana 1
Dato menor: 29
Dato mayor:32
Rango: 32 − 29 = 3°
Semana 2
Dato menor: 25
Dato mayor: 35
Rango: 10°

Como el rango es mayor para la semana 2, entonces es la serie más dispersa.

1.2 Desviación respecto a la media

Secuencia:
Para esta clase se aborda el concepto de desviación de los datos respecto a la media y el hecho de que la suma de todas las desviaciones es cero. Este concepto es necesario para abordar la varianza de un conjunto de datos en la siguiente clase.

Indicador de logro. Identifica distribuciones de datos que se encuentran más dispersas respecto a la media.

1.2 Desviación respecto a la media

P

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

En las series de datos de la tarifa mensual por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador, se obtuvo lo siguiente:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	\$13	\$12
Mediana	\$12	\$12

a) ¿Cuál de las medidas; media o mediana, consideras puede ser más representativa para cada distribución?

b) En ambas series, encuentra las diferencias de cada dato y su media aritmética, ¿cómo se relacionan estas diferencias con la dispersión?

S

a) Para la residencial 1: la mayoría de los datos son menores a \$13, que es el valor de la media. Esto es debido a que la media se ve afectada por el sexto dato (\$18) que difiere considerablemente de los demás; entonces, para esta distribución la mediana puede ser un dato más representativo.

Para la residencial 2: tanto la media como la mediana tienen el mismo valor, puede tomarse cualquiera de los dos como dato más representativo de la distribución.

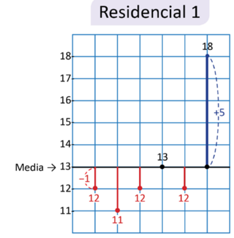
b) En la tabla se presentan las diferencias de cada uno de los datos y la media:

Residencial 1	
x	$x-\mu$
12	12−13 = −1
11	11−13 = −2
12	12−13 = −1
13	13−13 = 0
12	12−13 = −1
18	18−13 = 5

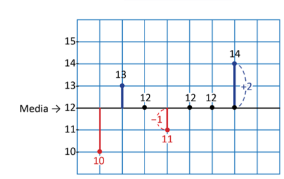
Residencial 2	
x	$x-\mu$
10	10−12 = −2
13	13−12 = 1
12	12−12 = 0
11	11−12 = −1
12	12−12 = 0
12	12−12 = 0
14	14−12 = 2

Sin tomar en cuenta los signos negativos, las diferencias reflejan la distancia de cada uno de los datos a su media aritmética. Lo anterior puede observarse mejor en los siguientes esquemas:

Residencial 1



Residencial 2



Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.2**

P Con los datos de la tabla:
a) ¿Entre la media y mediana, cuál consideras más representativa para cada residencial?
b) En ambas series, calcula las diferencias de cada dato y su media. ¿Cómo se relacionan estas diferencias con la dispersión?

S a) Residencial 1: la media se ve afectada por el sexto dato que es muy diferente de los demás. La mediana es más representativa.
Residencial 2: la media y la mediana tienen el mismo valor. Puede tomarse cualquiera de las dos.
b) Los datos de la residencial 2 están a menor distancia de su media; y en los datos de la residencial 1, el último de ellos está relativamente lejos de su media.

E
$\Sigma(x-\mu)$
$= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5$
$= -1 - 2 - 1 - 1 + 5$
$= -5 + 5$
$= 0$

R
Serie A: 9, −2, 0, −3 y −4
Media: 6, Mediana: 4, Rango: 13
Serie B: 1, 2, −1, 0 y −2
Media: 7, Mediana: 7, Rango: 4
Serie C: 6, −4, −1, 1 y −2
Media: 9, Mediana: 8, Rango: 10
Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

En ellos se observa que los datos de la residencial 2 se encuentran a menor distancia con respecto a su media aritmética ($12); mientras que en los datos de la residencial 1, el último de ellos está relativamente lejos de su media aritmética ($13).

① **C**

En una distribución, a la diferencia de cada uno de los datos (x) y su media aritmética (μ) se le llama **desviación** respecto a la media (o simplemente desviación), se simboliza por $x - \mu$ e indica la diferencia de cada uno de los datos a la media aritmética. La suma de todas las desviaciones se simboliza por $\Sigma(x - \mu)$ y siempre es igual a cero:

Suma de todas las desviaciones = 0

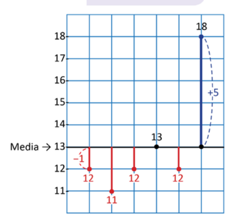
es decir,

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

E

Utilizando el Problema inicial, verifica que la suma de todas las desviaciones con respecto a la media es cero.

Residencial 1



En el esquema puede notarse que el valor absoluto de la suma de las distancias negativas es igual al de la positiva, haciendo que el resultado sea cero. También puede hacerse el cálculo:

$$\begin{aligned}\Sigma(x - \mu) &= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5\\ &= -1 - 2 - 1 - 1 + 5\\ &= -5 + 5\\ &= 0\end{aligned}$$

②

En la siguiente tabla se presentan tres series de datos no agrupados.

Completa cada una de las tablas y con base en las desviaciones, respecto a la media responde:

¿En cuál distribución los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media?

Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

Serie A	
x	$x - \mu$
15	9
4	–2
6	0
3	–3
2	–4
Media	6
Mediana	4
Rango	13

Serie B	
x	$x - \mu$
8	1
9	2
6	–1
7	0
5	–2
Media	7
Mediana	7
Rango	4

Serie C	
x	$x - \mu$
15	6
5	–4
8	–1
10	1
7	–2
Media	9
Mediana	8
Rango	10

Unidad 8

163

Propósito:

① Definir el concepto de desviación respecto a la media. También se explica que el significado de la notación:

$$\Sigma(x - \mu)$$

es indicar la suma de todas las desviaciones, por lo que es recomendable mencionar que el símbolo Σ se lee "sumatoria".

② Solución del ítem.

Serie A

$\mu = 6$

Serie A	
x	$x - \mu$
15	15 – 6 = 9
4	4 – 6 = –2
6	6 – 6 = 0
3	3 – 6 = –3
2	2 – 6 = –4
Media	6
Mediana	4
Rango	13

Serie B

$\mu = 7$

Serie B	
x	$x - \mu$
8	8 – 7 = 1
9	9 – 7 = 2
6	6 – 7 = –1
7	7 – 7 = 0
5	5 – 7 = –2
Media	7
Mediana	7
Rango	4

Serie C

$\mu = 9$

Serie C	
x	$x - \mu$
15	15 – 9 = 6
5	5 – 9 = –4
8	8 – 9 = –1
10	10 – 9 = 1
7	7 – 9 = –2
Media	9
Mediana	8
Rango	10

Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

Secuencia:
En la clase 1.2 se trabajó el concepto de desviación de los datos respecto a la media, por lo que en esta clase ya se puede abordar el concepto de la varianza de un conjunto de datos no agrupados.

Indicador de logro. Utiliza la varianza para datos no agrupados para justificar la dispersión de los datos de la serie.

1.3 Varianza para datos no agrupados

P Las desviaciones con respecto a la media pueden resultar complicadas de interpretar debido al signo negativo en alguna de ellas y cuando se tienen muchos datos.

En las tablas aparecen las desviaciones respecto a la media de los datos de la clase anterior:

Residencial 1	
x	$x - \mu$
12	12 − 13 = − 1
11	11 − 13 = − 2
12	12 − 13 = − 1
13	13 − 13 = 0
12	12 − 13 = − 1
18	18 − 13 = 5

Residencial 2	
x	$x - \mu$
10	10 − 12 = − 2
13	13 − 12 = 1
12	12 − 12 = 0
11	11 − 12 = − 1
12	12 − 12 = 0
12	12 − 12 = 0
14	14− 12 = 2

a) Calcula el cuadrado de cada una de las desviaciones con respecto a su media.
b) Calcula la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior. Esta media aritmética se simboliza con σ^2 (σ es la letra griega sigma).

S a) En las tablas se presentan los cuadrados de cada una de las desviaciones, en la columna $(x - \mu)^2$.

Residencial 1		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
11	11 − 13 = − 2	$(-2)^2 = 4$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
13	13 − 13 = 0	$0^2 = 0$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
18	18 − 13 = 5	$5^2 = 25$

Residencial 2		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
10	10−12 = −2	$(-2)^2 = 4$
13	13−12 = 1	$1^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
11	11−12 = −1	$(-1)^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
14	14−12 = 2	$2^2 = 4$

b) La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior (que se simboliza por σ^2) se calcula sumando todos los resultados, de la última columna, de cada tabla y dividiéndolos entre el total de datos.

Para la residencial 1:
$$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

Para la residencial 2:
$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

164

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.3**

P Con la información de las tablas, calcula:
a) El cuadrado de cada desviación $(x - \mu)$.
b) La media aritmética de los valores obtenidos en a), y simbolízala con σ^2.

S
a) Residencial 1:
1, 4, 1, 0, 1 y 25

Residencial 2:
4, 1, 0, 1, 0, 0 y 4

b)
$$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

Entre mayor es σ^2 los datos tienen mayor dispersión.

R Serie A:
9, −2, 0, −3 y −4
81, 4, 0, 9, 16
$\sigma^2 = 22$
Serie B:
1, 2 , −1, 0, −2
1, 4, 1, 0, 4
$\sigma^2 = 2$
Serie C:
6, −4 , −1, 1, −2
36, 16, 1, 1, 4
$\sigma^2 = 11.6$
La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el rango.

La medida (σ^2) sirve también para calcular la dispersión de los datos con respecto a su media. Se puede observar que cuanto mayor sean las desviaciones respecto a la media, mayor es σ^2 y por consiguiente más dispersos se encontrarán los datos.

σ^2 en la residencial 1 se ve afectada por la desviación del último dato cuyo cuadrado es 25, dando como resultado que sea mayor a σ^2 de la residencial 2. Por lo tanto, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas.

C

A la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones se le llama **varianza**, se denota por σ^2 y se calcula:

$$Varianza = \frac{\text{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\text{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos y μ es la media aritmética de la serie de datos. En el problema inicial, la varianza de la serie de datos de la residencial 1 es $\sigma^2 \approx 5.33$; mientras que la varianza de la serie de datos de la residencial 2 es $\sigma^2 \approx 1.43$.

Como esta medida es sensible a cada uno de los datos de la serie, la varianza revela aspectos en la dispersión que no refleja el rango. Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como dato representativo de la distribución.

① En las tablas se presentan las tres series de datos no agrupados de la clase anterior.

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

Varianza (σ^2)	22

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

Varianza (σ^2)	2

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

Varianza (σ^2)	11.6

Completa cada una de las tablas y calcula la varianza de cada serie. Con base en ella, justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos. Compáralo con el resultado obtenido en la clase anterior.

La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el Rango, con la varianza también se determina que la serie A tiene más dispersión.

Unidad 8

165

① Solución del ítem.

Serie A

μ = 6

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	15 – 6 = 9	$9^2 = 81$
4	4 – 6 = –2	$(-2)^2 = 4$
6	6 – 6 = 0	$0^2 = 0$
3	3 – 6 = –3	$(-3)^2 = 9$
2	2 – 6 = –4	$(-4)^2 = 16$

$\sigma^2 = \frac{81 + 4 + 0 + 9 + 16}{5}$

$\sigma^2 = \frac{110}{5}$

$\sigma^2 = 22$

Varianza (σ^2)	22

Serie B

μ = 7

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8	8 – 7 = 1	$1^2 = 1$
9	9 – 7 = 2	$2^2 = 4$
6	6 – 7 = –1	$(-1)^2 = 1$
7	7 – 7 = 0	$0^2 = 0$
5	5 – 7 = –2	$(-2)^2 = 4$

$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 4}{5}$

$\sigma^2 = \frac{10}{5}$

$\sigma^2 = 2$

Varianza (σ^2)	2

Serie C

μ = 9

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	15 – 9 = 6	$6^2 = 36$
5	5 – 9 = –4	$(-4)^2 = 16$
8	8 – 9 = –1	$(-1)^2 = 1$
10	10 – 9 = 1	$1^2 = 1$
7	7 – 9 = –2	$(-2)^2 = 4$

$\sigma^2 = \frac{36 + 16 + 1 + 1 + 4}{5}$

$\sigma^2 = \frac{58}{5}$

$\sigma^2 = 11.6$

Varianza (σ^2)	11.6

La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el rango, con la varianza también se determina que la serie A tiene más dispersión.

Secuencia:
Como ya se ha trabajado la varianza de un conjunto de datos, se introduce la desviación típica como la raíz cuadrada de la varianza.

Propósito:
① Establecer que a partir de la desviación típica se puede determinar cuál de las dos series está más dispersa. Presentar las ilustraciones obtenidas a partir del desarrollo de b), c) y d) no tienen como objetivo deducir cuál serie tiene mayor dispersión a partir de ellas, más bien solo hacen una presentación gráfica de lo que es una desviación típica.

Indicador de logro. Justifica la dispersión de una serie utilizando la desviación típica.

1.4 Desviación típica para datos no agrupados

P Con la tarifa mensual por el servicio de agua potable, en dos residenciales de San Salvador, realiza lo siguiente:

a) Calcula la raíz cuadrada de la varianza de ambas series y simbolízala por σ (sin el cuadrado). ¿Sigue siendo mayor el resultado de la residencial 1 que cuenta con datos más dispersos?
b) Coloca los datos de cada residencial como puntos sobre la recta numérica.
c) Resta y suma el respectivo valor de σ a cada media aritmética. Coloca estos números sobre la recta.
d) Según lo observado en la recta, ¿cuáles datos están más dispersos?

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18
σ^2	5.33 (dólares al cuadrado)

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14
σ^2	1.43 (dólares al cuadrado)

① S a) La raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 1 es:

$$\sigma = \sqrt{5.33}$$
$$\approx 2.31$$

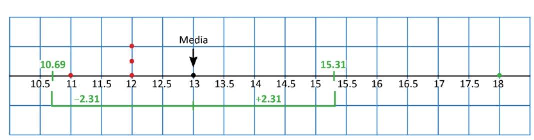
Mientras que la raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 2 es:

$$\sigma = \sqrt{1.43}$$
$$\approx 1.20$$

El resultado de la residencial 1 sigue siendo mayor que el de la residencial 2.

b) Cada punto representa uno de los datos; si dos o más datos tienen el mismo valor, entonces se ubican verticalmente sobre el valor correspondiente (los puntos rojos son los datos menores que la media, los azules los mayores, y los negros los que tienen igual valor que la media).

c) **En la serie de la residencial 1:** Para conocer la cantidad de datos que quedan a una distancia σ de su media (13) se le resta y suma a μ el valor de σ (que es 2.31) dando como resultado 10.69 y 15.31 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los seis datos de la serie quedan a una distancia de 2.31 de la media aritmética.



166

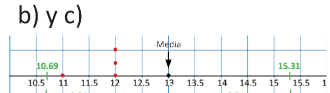
Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

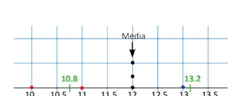
Fecha: **U8 1.4**

P a) Calcula la raíz cuadrada de σ^2. ¿Sigue siendo mayor el valor de la serie 1?
b) Coloca los datos de cada serie en una recta.
c) Coloca en la recta, la resta y suma del respectivo valor de σ a cada media.
d) ¿Cuál serie está más dispersa?

S a) Residencial 1 es: $\sigma = \sqrt{5.33} \approx 2.31$
Residencial 2 es: $\sigma = \sqrt{1.43} \approx 1.20$
El resultado de la serie 1 sigue siendo mayor que el de la 2.

b) y c)



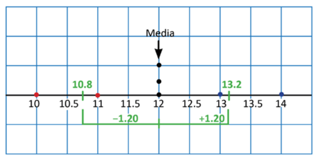


d) La σ de la serie 1 es mayor que la de la 2, por tanto está más dispersa.

R
a) Serie A: $\sigma = 4.69$
Serie B: $\sigma = 1.41$
Serie C: $\sigma = 3.41$

b) Serie A: 4, 6, 3 y 2. 4 datos
Serie B: 8, 6, y 7. 3 datos
Serie C: 8, 10 y 7. 3 datos

En la serie de la residencial 2: Al restar y sumar σ (1.20) a la media (12) se obtiene como resultado 10.8 y 13.2 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los siete datos de la serie quedan a una distancia de 1.20 de la media aritmética.



d) Aparentemente no hay mucha diferencia en las dos series, sin embargo, el hecho que σ sea menor para la residencial 2 indica que los datos se encuentran a una menor distancia de su media aritmética que los datos de la residencial 1, y por tanto, las tarifas mensuales de la residencial 1 se encuentran más dispersas (esto por influencia del dato cuyo valor es $18).

C

A la raíz cuadrada de la varianza se le denomina **desviación típica**, se denota por σ y se calcula así:

$$\textit{Desviación Típica} = \sqrt{\textit{Varianza}}$$

$$= \sqrt{\frac{\textit{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\textit{Número de datos}}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}}$$

A la desviación típica también se le llama **desviación estándar.**

La desviación típica da un tipo de promedio de las desviaciones con respecto de la media μ, o sea, un promedio de las distancias de cada dato a su media aritmética, algo que no hace la varianza por expresarse en unidades cuadradas.

Cuanto mayor sea la desviación típica, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como medida representativa de la serie de datos. La desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será negativo.

② Con las series de datos A, B y C del ejercicio de la clase anterior realiza los siguiente:

Serie A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	4.69

Serie B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	1.41

Serie C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	3.41

a) Calcula la desviación típica de cada una de las series de datos.
b) Determina, en cada serie, la cantidad de datos que quedan a una distancia de una desviación típica con respecto a su media.

Serie A: 4, 6, 3 y 2. 4 datos
Serie B: 8, 6, y 7. 3 datos
Serie C: 8, 10 y 7. 3 datos

Unidad 8

167

② Solución del ítem.

a) Serie A

$\mu = 6$

Serie A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	$\sqrt{22} = 4.69$

Serie B

$\mu = 7$

Serie B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	$\sqrt{2} = 1.41$

Serie C

$\mu = 9$

Serie C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	$\sqrt{11.6} = 3.41$

b) Serie A

$\mu - \sigma = 6 - 4.69 = 1.31$

$\mu + \sigma = 6 + 4.69 = 10.69$

Datos: 4, 6, 3 y 2.

4 datos

Serie B

$\mu - \sigma = 7 - 1.41 = 5.59$

$\mu + \sigma = 7 + 1.41 = 8.41$

Datos: 8, 6, y 7.

3 datos

Serie C

$\mu - \sigma = 9 - 3.41 = 5.59$

$\mu + \sigma = 9 + 3.41 = 12.41$

Datos: 8, 10 y 7.

3 datos

1.5 Agrupación de datos

Secuencia:
En octavo los estudiantes aprendieron a agrupar en clases una serie de datos, por lo que ya tienen nociones de este trabajo, en esta clase se orienta para que recuerden lo realizado anteriormente.

Propósito:
① Las tablas presentadas en el literal a) de la Solución no se escriben en la pizarra porque quitan tiempo para el desarrollo de la clase, por lo que será mejor verificar la respuesta de los estudiantes directamente con las del libro de texto.

Observación:
En el literal a) los datos están ordenados, sin embargo, es más práctico colocarlos según el orden de la tabla original.

Indicador de logro. Organiza datos en una tabla de distribución de frecuencias.

1.5 Agrupación de datos

P Carlos y Antonio trabajan en la librería Maquilishuat. Durante 30 días registran la cantidad de cuadernos vendidos cada día, obteniendo el siguiente registro:

Carlos				
5	15	23	11	20
10	6	9	10	22
15	21	15	16	34
20	18	13	26	18
16	22	21	24	12
14	17	19	16	11

Antonio				
9	15	5	18	22
13	17	11	24	14
19	22	23	10	11
20	12	16	28	18
10	13	21	17	8
21	20	15	15	6

Cada casilla representa un día.

a) Clasifica el número de cuadernos vendidos en 6 grupos de 5 en 5, inicia en 5 y termina en 35.
b) Organiza los grupos en una tabla y determina el total de datos en cada grupo.

① **S**

a) Como deben ser 6 grupos y el primero de ellos debe comenzar en 5 y el último terminar en 35, entonces los grupos serán: de 5 a 10 cuadernos, de 10 a 15 cuadernos, de 15 a 20 cuadernos, de 20 a 25 cuadernos, de 25 a 30 cuadernos y de 30 a 35 cuadernos. Según lo anterior, los cuadernos vendidos por Carlos quedan clasificados de la siguiente forma:

Carlos			16			
			19			
			17	24		
		11	16	21		
		14	18	22		
		12	18	20		
		13	16	21		
	9	10	15	22		
	6	10	15	20		
	5	11	15	23	26	34
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

En el grupo "de 5 a 10" se colocan las cantidades 5, 6, 7, 8 y 9, si las hay; la cantidad final (10) se coloca en el grupo siguiente. De manera similar se hace para los demás grupos.

De forma similar se clasifican los cuadernos vendidos por Antonio:

En 8 días, Antonio vendió de 20 a 25

Antonio						
			15			
		13	15	20		
		10	17	21		
		12	18	21		
		11	16	20		
	6	10	19	23		
	8	14	17	22		
	5	11	18	24		
	9	13	15	22	28	
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

168

Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.5**

Ⓟ Con el registro mostrado en el libro de texto:
a) Clasifica el número de cuadernos vendidos en 6 grupos de 5 en 5, inicia en 5 y termina en 35.
b) Organiza los grupos en una tabla y determina el total de datos en cada grupo.

Ⓢ
b)

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos	Antonio
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

Ⓡ
a)
Comunidad 1

	14		
	14		
	14		
11	14		
11	13		
11	13	17	
11	12	17	20
11	12	16	19
10	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

Comunidad 2

11			
11			
11	14		
10	14		
10	14		
10	13		
10	13		
9	13		
9	13	17	20
9	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

b) y c)

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	8	10.5
12 a 15	11	13.5
15 a 18	6	16.5
18 a 21	5	19.5
TOTAL	**30**	

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	12	10.5
12 a 15	10	13.5
15 a 18	4	16.5
18 a 21	4	19.5
TOTAL	**30**	

b) La tabla queda de la siguiente manera:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos	Antonio
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

Este número representa la cantidad de días en los que Antonio vendió de 20 a 25 cuadernos.

C

La tabla en que se organizan los grupos de datos de una serie tal como en el Problema inicial se llama: **tabla de distribución de frecuencias.**

A los intervalos de datos formados se les llama **clases** y el total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**. Al tamaño de una clase se le llama ancho de clase y a los valores extremos **límites de clase**.

Por ejemplo, para la primera clase del Problema inicial los límites de clase son 5 y 10, el límite inferior es 5, el límite superior es 10 y el ancho de clase es 5. El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio**, se denota por Pm y se determina mediante la ecuación:

$$Pm = \frac{\textit{Límite superior + Límite inferior}}{2}$$

El punto medio de la primera clase es: $Pm = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$

② En dos comunidades de Morazán se hace un estudio sobre la edad de los menores de 21 años, obteniendo los siguientes resultados:

Comunidad 1					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

Comunidad 2					
14	13	9	17	15	9
9	14	15	20	18	12
13	10	9	11	10	13
16	12	12	11	10	13
18	11	14	10	19	9

a) Clasifica las edades de los menores de 21 años de cada comunidad en 4 grupos de 3 en 3, inicia en 9 y termina en 21.
b) Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
c) Con la tabla creada, agrega otra columna donde se muestre el punto medio de cada clase.

Unidad 8

169

② Resolución del ítem.

a)

Comunidad 1

	13		
	12		
	14		
	12		
11	13	17	
11	14	17	
10	12	16	18
11	12	16	19
9	12	15	20
11	14	16	18
9	14	15	19
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

Comunidad 2

9			
10			
11	14		
10	13		
11	12		
10	12		
11	13		
9	13		
10	12	16	19
9	14	15	18
9	13	15	18
9	14	17	20
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

b) y c)

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	7	10.5
12 a 15	11	13.5
15 a 18	7	16.5
18 a 21	5	19.5
TOTAL	**30**	

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	12	10.5
12 a 15	10	13.5
15 a 18	4	16.5
18 a 21	4	19.5
TOTAL	**30**	

Secuencia:
Anteriormente se trabajó el rango, la media aritmética y la agrupación de un conjunto de datos. Por lo que ya se puede trabajar con la media aritmética y rango para datos agrupados. Vale aclarar que en octavo grado también se trabajó con la media aritmética para datos agrupados por lo que este tema servirá como un recordatorio para los estudiantes.

Indicador de logro. Calcula la media aritmética e identifica la dispersión de distribuciones de datos, utilizando el rango para datos agrupados.

1.6 Media aritmética y rango para datos agrupados

P Carlos y Antonio trabajan en la librería Maquilishuat. Durante un mes registran la cantidad de cuadernos vendidos por día, obteniendo el siguiente dato:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días		Punto medio de cada clase (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)			
5 a 10	3	4	7.5	22.5	30.0
10 a 15	7	8			
15 a 20	10	9			
20 a 25	8	8			
25 a 30	1	1			
30 a 35	1	0			
TOTAL	30	30			

a) Completa la tabla y calcula la media aritmética para cada una de las series de datos (de Carlos y Antonio), ¿qué ocurre?
b) Identifica en cada una el límite superior de la última clase que posee frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase que posee frecuencia distinta de cero.
c) Realiza, para cada serie, la diferencia del límite superior y el límite inferior encontrado en el literal b. ¿En cuál serie los datos se encuentran más dispersos?

S a) Los valores de la tabla quedan de la siguiente manera:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días		Punto medio de cada clase (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)			
5 a 10	3	4	7.5	22.5	30.0
10 a 15	7	8	12.5	87.5	100.0
15 a 20	10	9	17.5	175.0	157.5
20 a 25	8	8	22.5	180.0	180.0
25 a 30	1	1	27.5	27.5	27.5
30 a 35	1	0	32.5	32.5	0.0
TOTAL	30	30			

La media aritmética de la serie de datos de Carlos se calcula:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f\times Pm}{\textit{Número de datos}}$$

$$\mu = \frac{22.5 + 87.5 + 175.0 + 180.0 + 27.5 + 32.5}{30}$$

$$= \frac{525}{30}$$

$$= 17.5$$

La media aritmética de la serie de datos de Antonio, se calcula de la misma manera que la de Carlos, y el resultado es 16.5.

170

Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.6**

P Separadamente, para los datos de Carlos y Antonio:
a) Completa la tabla y calcula la media, ¿qué ocurre?
b) Identifica los limites superior e inferior de la última y primera clase respectivamente, que tengan frecuencia distinta de cero.
c) Resta el límite inferior del superior determinado en b. ¿Cuáles datos están más dispersos?

S a) Carlos: $\mu = 17.5$ Antonio: $\mu = 16.5$

b)

	Límite superior	Límite inferior
Carlos:	35	5
Antonio:	30	5

c) Carlos: 35 − 5 = 30 Antonio: 30 − 5 = 25
La serie de Carlos se encuentra más dispersa.

R
a)
Pm: 45, 55, 65, 75, 85
$f_1 \times Pm$: 450, 605, 780, 825, 510
$f_2 \times Pm$: 360, 495, 780, 750, 680
8.°: μ = 63.4 minutos
9.°: μ = 63.4 minutos
Las medias son iguales.

b)
8.°: 50 minutos;
9.°: 60 minutos.

b) Para el caso de Carlos la última clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 30 a 35, que tiene frecuencia igual a 1 cuyo límite superior es 35, y la primera clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 5 a 10 (tiene frecuencia 3) cuyo límite inferior es 5.

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_C)
5 a 10	3
10 a 15	7
15 a 20	10
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	1
TOTAL	30

De igual forma se identifican las dos clases para el caso de Antonio:

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Antonio (f_A)
5 a 10	4
10 a 15	8
15 a 20	9
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	0
TOTAL	30

c) Para la serie de Carlos la diferencia es: 35 – 5 = 30.
Y para la serie de Antonio la diferencia es: 30 – 5 = 25.

Por lo tanto, los datos de la serie de Carlos se encuentran más dispersos.

C

El **rango** para una serie de datos agrupados es la diferencia del límite superior de la última clase con frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase con frecuencia distinta de cero. La **media aritmética** para series de datos agrupados se calcula así:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f{\times}Pm}{\textit{Número de datos}}$$

① En un centro escolar se registra el tiempo, en minutos, que los estudiantes de octavo y noveno grado miran televisión al día, los datos se muestran en la siguiente tabla de distribución de frecuencia:

Minutos	8° grado (f_1)	9° grado (f_2)	Pm	$f_1{\times}Pm$	$f_2{\times}Pm$
30 a 40	0	3	35	0	105
40 a 50	10	8	45	450	360
50 a 60	11	9	55	605	495
60 a 70	12	12	65	780	780
70 a 80	11	10	75	825	750
80 a 90	6	8	85	510	680
TOTAL	50	50			

8.°: μ = 63.4
9.°: μ = 63.4
Las medias son iguales

a) Completa la tabla, encuentra la media aritmética para cada una de las series de datos y compáralas.
b) Comparando los rangos, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos.
8.°: 50; 9.°: 60

Unidad 8

Propósito:
① Solución del ítem.
a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
35	0	105
45	450	360
55	605	495
65	780	780
75	825	750
85	510	680

Media 8.°.

$$\mu = \frac{0 + 450 + 605 + 780 + 825 + 510}{50}$$

$$\mu = \frac{3170}{50}$$

$\mu = 63.4$

Media 9.°.

$$\mu = \frac{105 + 360 + 495 + 780 + 750 + 680}{50}$$

$$\mu = \frac{3\,170}{50}$$

$\mu = 63.4$

Las medias de 8.° y 9.° son iguales.

b)
Para 8.°
90 – 40 = 50
Para 9.°
90 – 30 = 60

Como en 9.° los datos tienen un mayor rango entonces están más dispersos.

Secuencia:
Los estudiantes ya conocen la forma de agrupar en clases una serie de datos así como calcular la varianza de un conjunto de datos no agrupados, por lo que ahora se calculará esta medida para datos agrupados.

Propósito:

① En el literal b) del Problema inicial se espera que el estudiante relacione la forma de cálculo de la varianza para datos agrupados con la de datos no agrupados, y así determinar que la suma solicitada en el literal a) se tenga que dividir por el total de datos.

Indicador de logro. Calcula la varianza para datos agrupados.

1.7 Varianza para datos agrupados

P En la tabla aparecen los datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos durante 30 días:

①

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f\,(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5			
15 a 20	10	17.5	175.0			
20 a 25	8	22.5	180.0			
25 a 30	1	27.5	27.5			
30 a 35	1	32.5	32.5			
TOTAL	30					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

a) Completa la tabla y calcula la suma de los datos de la última columna.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

S a) La tabla completa se presenta a continuación:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15 a 20	10	17.5	175.0	0	0	0
20 a 25	8	22.5	180.0	5	25	200
25 a 30	1	27.5	27.5	10	100	100
30 a 35	1	32.5	32.5	15	225	225
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

La sumatoria de los datos de la última columna, $f(Pm - \mu)^2$, es:

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) Para calcular la varianza, basta dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en el literal a), es decir:

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$
$$\approx 33.33$$

Igual que en las series de datos no agrupados, la varianza se encuentra expresada en unidades cuadradas. Para este caso serían "días al cuadrado".

Por lo tanto, $\sigma^2 \approx 33.33$.

172

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.7**

Ⓟ Con base a la información presentada en la tabla:
a) Complétala y calcula la suma de los datos de la columna $f(Pm - \mu)^2$.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

Ⓢ
a) $\Sigma\, f(Pm - \mu)^2 = 300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$

b) Dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en a).

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$
$$\sigma^2 \approx 33.33$$

Ⓡ
1.
$Pm - \mu$: −9, −4, 1, 6, 11, 16
$(Pm - \mu)^2$: 81, 16, 1, 36, 121, 256
$f(Pm - \mu)^2$: 324, 128, 9, 288, 121, 0
$\sigma^2 = 29$
Como la varianza del conjunto de datos correspondiente a Carlos es mayor, entonces están más dispersos.

La varianza de una serie de datos agrupados se calcula de la siguiente forma:

$$Varianza = \frac{\text{Suma de los productos } f\,(Pm - \mu)^2}{\text{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(Pm - \mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos.

Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética.

②

1. Completa la tabla y calcula la varianza para la cantidad de cuadernos vendidos por Antonio. Luego determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos, comparando las varianzas.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Antonio (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	4	7.5	30.0	−9	81	324
10 a 15	8	12.5	100.0	−4	16	128
15 a 20	9	17.5	157.5	1	1	9
20 a 25	8	22.5	180.0	6	36	288
25 a 30	1	27.5	27.5	11	121	121
30 a 35	0	32.5	0.0	16	256	0
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**16.5**					

2. Con las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán de la clase 5 realiza lo siguiente:

a) Completa la siguiente tabla y calcula la varianza de los datos de la comunidad 1:

Edad en años	Cantidad de personas Comunidad 1 (f_1)	Punto medio (Pm)	$f_1 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
De 9 a 12	7	10.5	73.5	−4	16	112
De 12 a 15	11	13.5	148.5	−1	1	11
De 15 a 18	7	16.5	115.5	2	4	28
De 18 a 21	5	19.5	97.5	5	25	125
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**14.5**					

b) Elabora una tabla como la anterior para la comunidad 2 y calcula la varianza de sus datos.
c) Con base a lo anterior responde, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

Como los datos de la comunidad 2 tienen mayor varianza entonces están más dispersos.

Unidad 8

173

Comunidad 2.

	f_2	Pm	$f_2 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
	12	10.5	126	−3	9	108
	10	13.5	135	0	0	0
	4	16.5	66	3	9	36
	4	19.5	78	6	36	144
Total	30					
μ	13.5					

Propósito:

② Solución de los ítems.

1.

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
−9	81	324
−4	16	128
1	1	9
6	36	288
11	121	121
16	256	0

$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 324 + 128 + 9 + 288 + 121 + 0$
$= 870$

$\sigma^2 = \frac{870}{30}$

$\sigma^2 = 29$

Como la varianza del conjunto de datos correspondientes a Carlos es mayor, entonces están más dispersos.

2.

a)

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
−4	16	112
−1	1	11
2	4	28
5	25	125

$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 112 + 11 + 28 + 125$
$= 276$

$\sigma^2 = \frac{276}{30}$

$\sigma^2 = 9.2$

b) Para la comunidad 2
(observar la tabla de la izquierda)
$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 108 + 0 + 36 + 144$
$= 288$

$\sigma^2 = \frac{288}{30}$

$\sigma^2 = 9.6$

c) Como los datos de la comunidad 2 tienen mayor varianza entonces están más dispersos.

1.8 Desviación típica para datos agrupados

Secuencia:
Al igual que se trabajó la desviación típica para datos no agrupados, la desviación típica para datos agrupados se obtiene a partir de la varianza calculada para datos previamente agrupados.

Propósito:
① Se espera que el estudiante determine que el conjunto de datos distribuidos en clases, con mayor desviación típica es el que posee mayor dispersión, según lo aprendido en la clase 1.4 de esta unidad.

② Solución del ítem.

Para la comunidad 1.

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

Para la comunidad 2.

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

Los datos de la comunidad 1 tienen una mayor desviación típica. Por tanto están más dispersos.

Indicador de logro. Calcula la desviación típica para datos agrupados.

1.8 Desviación típica para datos agrupados

① **P** Calcula la desviación típica de la serie de datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos y Antonio durante 30 días y justifica en cuál de ellas los datos se encuentran más dispersos.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**
Media aritmética (μ)	**17.5**	**16.5**
Varianza (σ^2)	33.33	29

S Para datos agrupados en clases, la desviación típica sigue siendo igual a la raíz cuadrada de la varianza.
Para la serie de datos de Carlos:

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

Y para la serie de datos de Antonio:

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.39$$

Como la desviación típica de la distribución de Carlos es mayor a la de Antonio, se concluye que los datos de la distribución de Carlos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética 17.5.

C La desviación típica de una serie de datos agrupados se calcula:

$$\textit{Desviación típica} = \sqrt{\textit{varianza}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{n}}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos. Tanto para datos agrupados como no agrupados, la desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será un número negativo.

② Con base al ejercicio 2 de la clase anterior. Calcula la desviación típica (σ) de las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán y responde con base a esta medida, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

Los datos de la comunidad 1 tienen una mayor desviación típica. Por tanto, están más dispersos.

174

Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 1.8**

Ⓟ Para las series de datos de Carlos y Antonio, separadamente, calcula la desviación típica. Luego justifica cuál de ellas se encuentra más dispersa.

Ⓢ Para datos agrupados en clases la σ sigue siendo la raíz cuadrada de la varianza.

Carlos: $\sigma = \sqrt{33.33}$
$\sigma \approx 5.77$

Antonio: $\sigma = \sqrt{29}$
$\sigma \approx 5.39$

Como $5.77 > 5.39$, entonces los datos de Carlos son más dispersos.

Ⓡ Para la comunidad 1.

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

Para la comunidad 2.

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

Los datos de la comunidad 2 tienen una mayor desviación típica. Por tanto están más dispersos.

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes a la dispersión de un conjunto de datos.

1.9 Practica lo aprendido

1. Los siguientes datos representan las estaturas de 8 estudiantes en centímetros:
163, 162, 164, 163, 164, 162, 161, 185.
μ = 165.5 cm, Mediana: 163 cm, Rango: 185 – 161 = 24 cm
   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta.

2. Con los datos presentados en la siguiente tabla, determina cuáles de las series de datos B, C y D tienen igual desviación típica que la serie de datos de A. Justifica tu respuesta.

A	B	C	D
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
25	30	35.5	28
26	31	36.5	29
23	28	33.5	26
21	26	31.5	21
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
23	28	33.5	23
22	27	32.5	22

A: $\sigma \approx 1.47$
B: $\sigma \approx 1.47$
C: $\sigma \approx 1.47$
D: $\sigma = 2.7$
Según los cálculos solo la serie D posee una desviación diferente a la de A.

3. Observa las siguientes series de datos no agrupados:

	Serie A
1	30
2	25
3	11
4	20
5	14
6	26

	Serie B
1	18
2	20
3	19
4	21
5	22

   a) Calcula las desviaciones respecto a su media aritmética de cada serie y la desviación típica. $\sigma \approx 6.73$ $\sigma \approx 1.41$
   b) Comparando las desviaciones típicas, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos.
   Según las desviaciones típicas de cada una de las series, se concluye que la serie A está más dispersa.

4. Los siguientes datos representan el peso en libras de 9 personas que trabajan en una oficina.
160 *l*, 200 *l*, 164 *l*, 130 *l*, 140 *l*, 162 *l*, 161 *l*, 185 *l*, 154 *l*.
μ = 161.78 libras, Mediana: 161 libras, Rango: 200 – 130 = 70 libras
   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta.
   En los casos que la media y la mediana casi coinciden se elige la media porque es una medida más sensible a la variación de los datos de la serie y fácil a tratar.

Unidad 8

175

Tarea: página 180 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de los ítems.

1.

a) Media:

$\mu = \frac{163 + 162 + 164 + 163 + 164 + 162 + 161 + 185}{8}$

$\mu = \frac{1\,324}{8}$

μ = 165.5 cm

Mediana:

161, 162, 162, 163, 163, 164, 164, 185

$\frac{163 + 163}{2}$ = 163 cm

Rango:

185 – 161 = 24 cm

b) Se debe elegir la mediana porque 185 es un dato muy diferente a los demás y hace que la media sea de 165.5, aún cuando ninguno de los 7 datos restantes es al menos 165.

2.

Desviación típica para la serie:

A: $\mu = 23.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

B: $\mu = 28.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

C: $\mu = 34.3$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

D: $\mu = 25.9$, $\sigma^2 = \frac{72.9}{10} = 7.29$, $\sigma = 2.7$

Según los cálculos solo la serie D posee una desviación diferente a la de A.

3.

a) Desviación típica para la serie:

A: $\mu = 21$, $\sigma^2 = \frac{272}{6} \approx 45.33$, $\sigma \approx 6.73$

B: $\mu = 20$, $\sigma^2 = \frac{10}{5} = 2$, $\sigma \approx 1.41$

b) Según las desviaciones típicas de cada una de las series, se concluye que la serie A está más dispersa.

4.

a) $\mu = \frac{1\,456}{9} \approx 161.78$ libras

Mediana.
130, 140, 154, 160, 161, 162, 164, 185, 200
Mediana: 161 libras
Rango: 200 – 130 = 70 libras

b) En los casos que la media y la mediana casi coinciden, se elige la media porque es una medida más sensible a la variación de los datos de la serie.

1.10 Practica lo aprendido

Solución de algunos ítems.

1.

a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
55	825	935
65	1 300	1 365
75	1 800	2 025
85	1 870	1 700
95	1 805	1 425

Sucursal A

$\mu = \frac{7\,600}{100} = 76$ personas

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
–21	441	6 615
–11	121	2 420
–1	1	24
9	81	1 782
19	361	6 859

$\sigma^2 = \frac{17\,700}{100} = 177$

Sucursal B

$\mu = \frac{7\,450}{100} = 74.5$ personas

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
–19.5	380.25	6 464.25
–9.5	90.25	1 895.25
0.5	0.25	6.75
10.5	110.25	2 205
20.5	420.25	6 303.75

$\sigma^2 = \frac{16\,875}{100} = 168.75$

b) Según la varianza, los datos de la sucursal A tienen una mayor dispersión.

3.

$\mu = \frac{5\,396}{80} = 67.45$ pulgadas

Indicador de logro. Resuelve problemas correspondientes a la dispersión de un conjunto de datos.

1.10 Practica lo aprendido

1. Una tienda de ropa tiene dos sucursales A y B. En 100 días registran la cantidad de clientes atendidos en cada sucursal, los datos se presentan en la siguiente tabla:

Cantidad de clientes	Cantidad de días	
	Sucursal A	Sucursal B
50 a 60	15	17
60 a 70	20	21
70 a 80	24	27
80 a 90	22	20
90 a 100	19	15

a) Calcula la varianza para cada una de las sucursales. Sucursal A $\sigma^2 = 177$ Sucursal B $\sigma^2 = 168.75$

b) Con base a la varianza, ¿en cuál sucursal los datos se encuentran más dispersos?

Según la varianza, los datos de la sucursal A tienen una mayor dispersión.

2. Se realizó un estudio sobre el peso, en libras, de los estudiantes de noveno grado de un centro escolar. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Peso en libras	Sección A	Sección B
120 a 130	7	5
130 a 140	12	9
140 a 150	13	12
150 a 160	10	14
160 a 170	8	10

Utiliza la desviación típica para determinar en cuál de las secciones los pesos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética. Según la desviación, los datos de la sección A tienen una mayor dispersión.

Sección A $\sigma \approx 12.81$ libras Sección B $\sigma \approx 12.53$ libras

3. La estatura en pulgadas de cierto grupo de personas se muestra en la siguiente tabla. Sabiendo que $\mu = 67.45$

Estatura	f	Pm
60 - 62	1	61
62 - 64	4	63
64 - 66	8	65
66 - 68	30	67
68 - 70	37	69

a) Calcula la varianza.

b) Calcula la desviación típica.

176

Tarea: página 181 del Cuaderno de Ejercicios.

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
–6.45	41.6	41.6
–4.45	19.8	79.2
–2.45	6.0	48
–0.45	0.2	6
1.55	2.4	88.8

a) $\sigma^2 = \frac{263.6}{80} \approx 3.3.$

b) $\sigma \approx 1.82$ pulgadas.

2.1 Desviación típica de una variable más una constante

Indicador de logro. Calcula la desviación típica de distribuciones cuyos datos son la suma de una constante y una variable.

2.1 Desviación típica de una variable, más una constante

① **P** En una empresa se aumenta $50 al salario de 10 trabajadores; en la tabla de la derecha se muestran los salarios anteriores y el salario actual.

a) ¿Cuál es la media aritmética de ambas series de datos?
b) Calcula la desviación típica para ambas series de datos y compáralas, ¿qué ocurre?
c) ¿Qué pasaría con la desviación típica de los datos del salario actual si el aumento fuera de $60?

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	Salario actual (en dólares)
1	485	535
2	488	538
3	486	536
4	489	539
5	486	536
6	485	535
7	488	538
8	487	537
9	500	550
10	486	536

S a) La media aritmética de los salarios anteriores se calcula:

$$\mu = \frac{485 + 488 + 486 + 489 + 486 + 485 + 488 + 487 + 500 + 486}{10}$$
$$= 488$$

Si a los datos de una serie A se les suma una constante dando como resultado otra serie B, entonces la media de B es igual a la media de A más la constante.

De manera similar se calcula la media aritmética de los salarios actuales, cuyo resultado es 538. Por lo tanto, la media aritmética de los salarios anteriores es $488 y la de los salarios actuales es $538.

b) En la tabla se muestran las desviaciones, de los salarios anteriores, con respecto a su media aritmética $488 y sus respectivos cuadrados:

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	485	−3	9
2	488	0	0
3	486	−2	4
4	489	1	1
5	486	−2	4
6	485	−3	9
7	488	0	0
8	487	−1	1
9	500	12	144
10	486	−2	4
Media (μ)	**488**		

Unidad 8

177

Tarea: página 182 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.1**

P A partir de los datos de la tabla en el libro de texto; calcula:
a) La media de cada serie.
b) La desviación típica de cada serie y compáralas, ¿qué ocurre?
c) La desviación típica de cada serie si el aumento fuera de $60.

S a) Salarios anteriores: $\mu = 488$ Salarios actuales: $\mu = 538$
b) Salarios anteriores: $\sigma = 4.2$ Salarios actuales: $\sigma = 4.2$
c) La desviación típica sería igual, o sea $\sigma = 4.2$.

R
1. Serie A: $\sigma \approx 2.75$
Serie B: $\sigma \approx 2.75$
Sí, tiene la misma desviación típica. La serie B básicamente es la serie A con un aumento de 12 unidades para cada dato.
2. Al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada. Por tanto basta con calcular la desviación de la serie original.
$\sigma \approx 7.18$

Secuencia:
Así como en octavo grado se estudiaron las propiedades de la media aritmética, en noveno grado se trabajarán dos propiedades de la desviación típica. Para esta clase se estudia la desviación típica de una variable más una constante. Para ilustrar las propiedades se utilizan series simples para que facilite la comprensión a los estudiantes.

Propósito:
① En el literal a) de la Solución se puede hacer referencia a la propiedad de la media aritmética vista en octavo grado, la cual establece que "al sumar una constante a un conjunto de datos, la media de los datos originales aumenta en esa constante".

② Solución de los ítems.

1.

Serie A

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
25.1	0.92	0.85
26.4	2.22	4.93
27.5	3.32	11.02
20.7	–3.48	12.11
21.2	–2.98	8.88

$\mu = 24.18$

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

Serie B

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
37.1	0.92	0.85
38.4	2.22	4.93
39.5	3.32	11.02
32.7	–3.48	12.11
33.2	–2.98	8.88

$\mu = 36.18$

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

Sí, tiene la misma desviación típica. La serie B básicamente es la serie A con un aumento de 12 unidades para cada dato.

2. Dado que al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada, basta con calcular la desviación de la serie original.

$\mu = 14.1$ dólares

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$= 12.96 + 12.25 + 3.61 + 6.76 + 1.44 + 7.29 + 2.25 + 2.56 + 7.84 + 457.96$

$= 514.92$

$\sigma^2 = \frac{514.92}{10}$

$\sigma^2 \approx 51.49$

$\sigma \approx \sqrt{51.49} \approx 7.18$ dólares

Luego, la desviación típica se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+0+4+1+4+9+0+1+144+4}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{176}{10}}$$

$$= 4.2$$

Corrección: Debe ser ≈ en lugar de =.

De manera similar se calcula la desviación típica de los salarios actuales, cuyo resultado también es 4.2; es decir, la desviación típica a diferencia de la media aritmética, no se vio afectada al sumar 50 a cada uno de los datos.

c) Si el aumento fuera de \$60, entonces la desviación típica sería igual a la calculada para el salario anterior, o sea 4.2.

C Si a cada uno de los datos de una distribución A se les suma la misma constante c (c es un número cualquiera) dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a la desviación típica de la distribución A.

②

1. Observa la tabla con dos series de datos A y B, ¿tienen ambas distribuciones la misma desviación típica? Justifica tu respuesta y calcula el valor de la misma.

	Serie A	Serie B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

Sí, tiene la misma desviación típica. La serie B básicamente es la serie A con un aumento de 12 unidades para cada dato.

2. En la residencial Centroamérica aumentarán \$5 a la tarifa mensual por el servicio de agua potable. ¿Cuál será el valor de la desviación típica de la distribución teniendo en cuenta este cambio?

Casa	Tarifa a cancelar (en dólares)
1	10.50
2	10.60
3	12.20
4	11.50
5	12.90
6	11.40
7	12.60
8	12.50
9	11.30
10	35.50

Al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada. Por tanto, basta con calcular la desviación de la serie original. $\sigma \approx 7.18$ dólares.

2.2 Desviación típica de una variable multiplicada por una constante

Indicador de logro. Calcula la desviación típica de distribuciones cuyos datos son el producto de una constante por una variable.

Secuencia:
Para la clase 2.2 se da continuidad a la presentación y trabajo de las propiedades de la desviación típica. Se trabaja con la desviación típica de una variable por una constante.

Propósito:
① En el literal a) de la Solución se puede hacer referencia a la propiedad de la media aritmética vista en octavo grado, que establece que "al multiplicar un conjunto de datos por una misma constante la media aritmética de los datos originales queda multiplicada por dicha constante".

2.2 Desviación típica de una variable multiplicada por una constante

① P

Cinco corredores deciden que para el mes de febrero aumentarán al doble las longitudes que recorren cada semana para entrenar. En la tabla se presenta la longitud recorrida en enero y la longitud que se recorrerá en febrero.

a) Calcula la desviación típica de ambas series de datos.

b) Efectúa el cociente entre la desviación típica de febrero y la desviación típica de enero, ¿cuál es la relación entre ambos datos?

Corredores	Longitud recorrida en metros	
	Enero	Febrero
1	150	300
2	160	320
3	145	290
4	165	330
5	150	300

S

a) Para calcular la desviación típica es necesario tener la media aritmética de cada serie de datos. Para enero la media es:

$$\mu = \frac{150 + 160 + 145 + 165 + 150}{5} = 154.$$

Se calculan los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media aritmética 154 m, los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Corredores	Enero	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	150	–4	16
2	160	6	36
3	145	–9	81
4	165	11	121
5	150	–4	16
Media (μ)	**154**		

$$\sigma = \sqrt{\frac{16 + 36 + 81 + 121 + 16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{270}{5}}$$

$$= 7.35$$

Corrección: Debe ser ≈ en lugar de =.

La desviación típica de enero es 7.35.

Para los datos de febrero: como las longitudes se han aumentado al doble, (se han multiplicado por 2) entonces la media aritmética de febrero también aumenta al doble, o sea 308 m. La desviación típica se calcula de manera similar a la de enero, dando como resultado 14.7.

Unidad 8

179

Tarea: página 184 del Cuaderno de Ejercicios.

Fecha: **U8 2.2**

Ⓟ A partir de los datos de la tabla en el libro de texto; calcula:
a) La desviación típica de cada serie.
b) El cociente entre la desviación típica de febrero y la desviación típica de enero. ¿Cuál es la relación entre ambas series?

Ⓢ a) Enero: $\sigma = 7.35$ Febrero: $\sigma = 14.7$

b) $\frac{\textit{Desviación típica de febrero}}{\textit{Desviación típica de enero}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$

La desviación típica de febrero es el doble de la desviación típica de enero.

Ⓡ
1.
a) Serie B: Se multiplica la serie A por 1.5
Serie C: Se multiplica la serie A por 0.4
b) Serie A: $\sigma \approx 0.66$
Serie B: $0.66 \times 1.5 = 0.99$
Serie C: $0.66 \times 0.4 \approx 0.26$
2.
Reducir a la mitad es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva σ es: $17.07 \times \frac{1}{2} = 0.99$.

② Solución del primer ítem.

1.

a) Para obtener la serie B:
Se calculará el cociente entre un dato de la serie B y el correspondiente en la serie A.

$$\frac{\text{Serie B}}{\text{Serie A}} = \frac{18.75}{12.5} = 1.5$$

Para obtener la serie C:
Se calculará el cociente entre un dato de la serie C y el correspondiente en la serie A.

$$\frac{\text{Serie C}}{\text{Serie A}} = \frac{5}{12.5} = 0.4$$

b) $\mu = 12$

$\Sigma(x - \mu)^2$

$= 0.25 + 1 + 0.25 + 0.64 + 0.04$

$= 2.18$

$\sigma^2 = \frac{2.18}{5}$

$\sigma^2 \approx 0.44$

$\sigma \approx \sqrt{0.44} \approx 0.66$

Por tanto, la desviaciones para las otras series son:

Para B

$0.66 \times 1.5 = 0.99$

Para C

$0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. Reducir a la mitad cada dato es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva desviación típica será:

$$17.07 \times \frac{1}{2} \approx 8.54$$

3.

a) Para obtener la semana 2.
Se calculará el cociente entre un dato de la semana 2 y el correspondiente en la semana 1.

$$\frac{\text{Semana 2}}{\text{Semana 1}} = \frac{24}{8} = 3$$

b) Para la semana 1:

$\mu = 8$

$\Sigma(x - \mu)^2$

$= 0 + 1 + 9 + 1 + 9$

$= 20$

$\sigma^2 = \frac{20}{5}$

$\sigma^2 = 4$

$\sigma = \sqrt{4} = 2$ libros.

Por tanto, la desviación para la semana 2 es:

$2 \times 3 = 6$ libros.

b) El cociente es:

$$\frac{\textit{Desviación típica de febrero}}{\textit{Desviación típica de enero}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$$

Es decir, la desviación típica de febrero es el doble de la desviación típica de enero. Cuando los datos se multiplican por un número positivo, la desviación típica también se multiplica por ese número.

C Si a cada uno de los datos de una distribución A se les multiplica por la misma constante c (c es un número positivo), dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a multiplicar la desviación típica de la distribución A por la constante c.

②

1. En la tabla de abajo se presentan tres series de datos:

a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la serie A para obtener la serie B?, ¿y para obtener la serie C?
Serie B: se multiplica la serie A por 1.5. Serie C: se multiplica la serie A por 0.4.

b) Calcula la desviación típica de la serie A, con base a ella calcula la desviación típica de las series B y C.

A	B	C
12.5	18.75	5.0
11.0	16.5	4.4
11.5	17.25	4.6
12.8	19.2	5.12
12.2	18.30	4.88

Serie A: $\sigma \approx 0.66$
Serie B: $0.66 \times 1.5 = 0.99$
Serie C: $0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. En una serie de datos, la media aritmética de la distribución es 35 y la desviación típica es 17.07; si cada uno de los datos se reduce a la mitad, ¿cuál será el valor de la nueva desviación típica?
Reducir a la mitad es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva σ es: $17.07 \times \frac{1}{2} = 8.54$.

3. Una librería registra la cantidad de libros vendidos, de lunes a viernes, durante dos semanas.

a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la semana 1 para obtener los de la semana 2? Se tienen que multiplicar por 3.

b) Calcula la desviación típica para ambas semanas.

Días	Cantidad de libros vendidos	
	Semana 1	Semana 2
lunes	8	24
martes	9	27
miércoles	5	15
jueves	7	21
viernes	11	33

Para la semana 1:
$\sigma = 2$
Para la semana 2:
$\sigma = 2 \times 3 = 6$

Prueba de la Unidad 8: Medidas de dispersión **Matemática 9º**

Fecha: ______________________________
Nombre: ____ **Sección:**__________
Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: _______________________________________

Indicaciones: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos. Escribe la respuesta final en el recuadro correspondiente.

1. Para la serie de datos 6, 5, 2, 12, 4 y 1, calcula:
   a) El rango

   Respuesta:
   Rango:

   b) Varianza

   Respuesta:
   Varianza:

   c) Desviación típica (expresa la respuesta con la raíz cuadrada indicada, es decir, sin calcularla)

   Respuesta:
   Desviación:

2. Para los datos: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17 y 18:
   a) Construye una tabla de distribución de frecuencias con 5 clases, donde la primera clase inicie en 0 y la última termine en 20.
   (En la clase "De A a B", están incluidos datos que cumplen que A ≤ x < B)

	Clases	f
	De 0 a ☐	
	De ☐ a ☐	
	De ☐ a ☐	
	De ☐ a ☐	
	De ☐ a 20	
Total		

1

Descripción.
La prueba de esta unidad está formada por 4 numerales, algunos de los numerales tienen más de un literal, es importante aclarar que cada literal será tomado como un ítem; por tanto esta prueba contiene 10 ítems (4 en la página 1 y 6 en la página 2).

Criterios para asignar puntos parciales.

Ítem 1a:
No aplica punto parcial

Ítem 1b:
Calcula la media aritmética

Ítem 1c:
No aplica punto parcial

Ítem 2a:
Determina todos los límites en las clases

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 1a – C1.1
Ítem 1b – C1.3
Ítem 1c – C1.4
Ítem 2a – C1.5

Algunos procedimientos.
Ítem 1a:
12 – 1 = 11

Ítem 1b:

$$\text{Media} = \frac{6+5+2+12+4+1}{6} = 5$$

Varianza

$$= \frac{(6-5)^2+(5-5)^2+(2-5)^2+(12-5)^2+(4-5)^2+(1-5)^2}{6}$$

$$= \frac{1+0+9+49+1+16}{6} = \frac{76}{6} = \frac{38}{3}$$

Ítem 1c:

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\frac{38}{3}} = \frac{\sqrt{114}}{3}$$

Observaciones:

Ítem 1c:

También se admite

$$\sqrt{\frac{38}{3}} \text{ o } \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}$$

Ítem 2b:
No aplica punto parcial

Ítem 2c:
Determina todos los puntos medios

Ítem 2d:
Calcula todos los valores correspondientes a la columna $(Pm - \mu)^2$

Ítem 2e:
No aplica punto parcial

Ítem 3:
No aplica punto parcial

Ítem 4:
No aplica punto parcial

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.

Ítem 2b – C1.6
Ítem 2c – C1.6
Ítem 2d – C1.7
Ítem 2e – C1.8
Ítem 3 – C2.1
Ítem 4 – C2.2

b) Calcula el rango para datos agrupados

Respuesta:
Rango:

c) Determina la media

	f	Pm	$f \times Pm$
Total			

Respuesta:
Media:

d) Calcula la varianza

	f	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
Total				

Respuesta:
Varianza:

e) Calcula la desviación (expresa la respuesta con la raíz cuadrada indicada, es decir, sin calcularla)

Respuesta:
Desviación:

3. Observa la tabla con dos series de datos A y B. ¿Tienen ambas distribuciones la misma desviación típica? Justifica tu respuesta y calcula el valor de la misma.

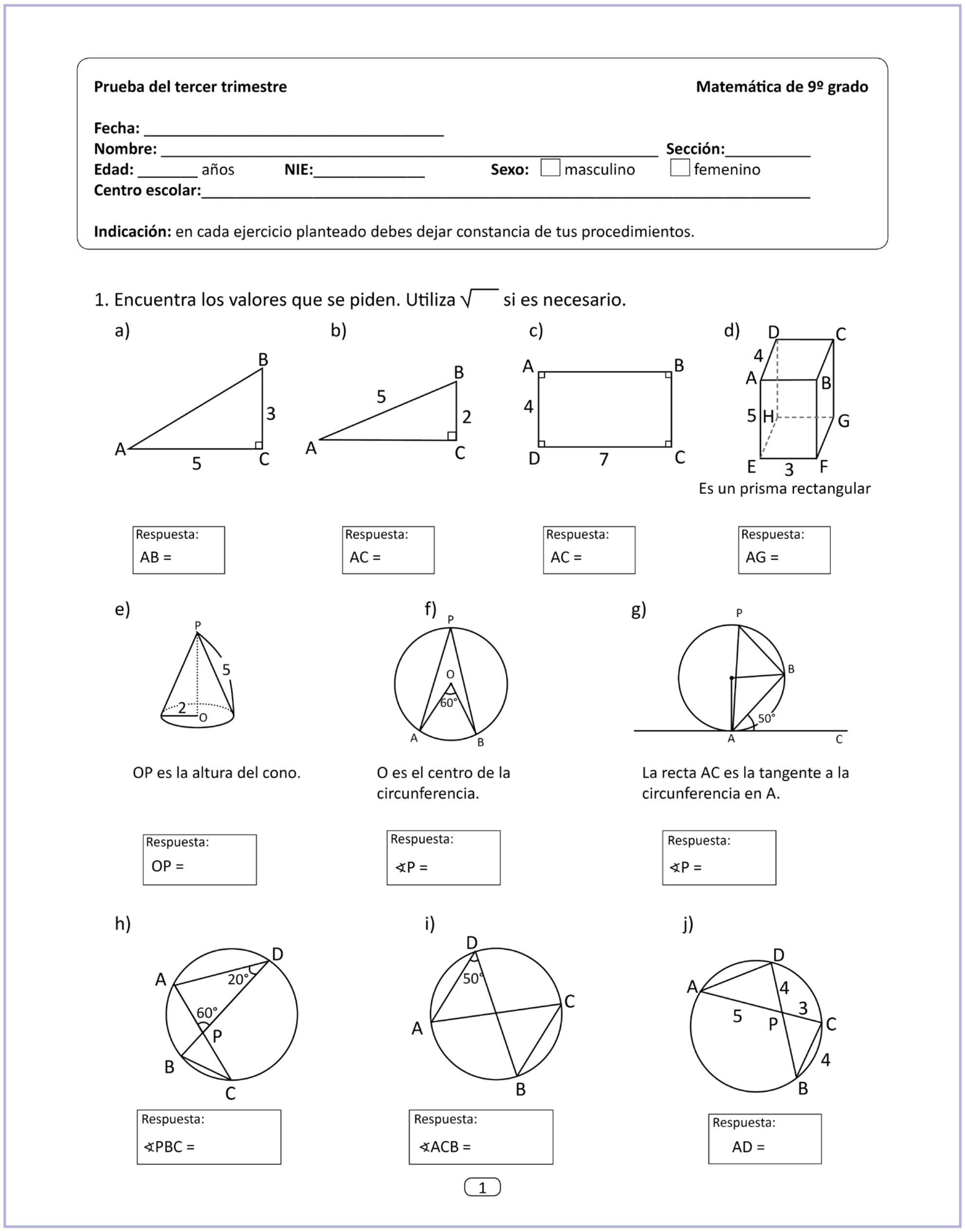
	Serie A	Serie B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

Respuesta:
Sí: No:
¿Por qué?

4. En una serie de datos, la media aritmética de la distribución es 35 y la desviación típica es 17.07; si cada uno de los datos se reduce a la mitad, ¿cuál será el valor de la nueva desviación típica?

Respuesta:
Desviación típica:
¿Por qué?

2



Prueba del tercer trimestre **Matemática de 9º grado**

Fecha: ______________________________

Nombre: ____ **Sección:**________

Edad: _______ años **NIE:**_____________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino

Centro escolar:____

Indicación: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos.

1. Encuentra los valores que se piden. Utiliza $\sqrt{}$ si es necesario.

Respuesta: AB =

Respuesta: AC =

Respuesta: AC =

Respuesta: AG =

OP es la altura del cono.

O es el centro de la circunferencia.

La recta AC es la tangente a la circunferencia en A.

Respuesta: OP =

Respuesta: ∢P =

Respuesta: ∢P =

Respuesta: ∢PBC =

Respuesta: ∢ACB =

Respuesta: AD =

1

Descripción.
La prueba consta de 9 numerales, sin embargo en total se consideran 20 ítems pues cada literal cuenta como un ítem. Los numerales 1, 3 y 4 tienen más de un literal. Los 20 ítems se clasifican de acuerdo a los dominios cognitivos tal como se detalla a continuación:

Conocimiento (75 %). Del numeral 1 al numeral 4. Los numerales 1, 3 y 4 tienen varios literales. Por tanto el dominio cognitivo corresponde a 15 ítems.

Aplicación (15 %). Del ítem 5 al 7.

Razonamiento (10 %). Ítem 8 y 9.

Notación.
U1 C1.2 Significa que el ítem corresponde a la clase 1.2 de la Unidad 1.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 1a – U6 C 1.3
Ítem 1b – U6 C 1.5
Ítem 1c – U6 C 1.6
Ítem 1d – U6 C 2.3
Ítem 1e – U6 C 2.1
Ítem 1f – U7 C 1.5
Ítem 1g – U7 C 2.6
Ítem 1h – U7 C 1.5
Ítem 1i – U7 C 1.5
Ítem 1j – U7 C 2.3

Algunos procedimientos.

Ítem 1e.
Utilizando el teorema de Pitágoras.
$5^2 = OP^2 + 2^2$
$OP^2 = 25 - 4$
$OP = \sqrt{21}$

Ítem 1g.
Por propiedad del ángulo semiinscrito, ∢P = ∢BAC = 50°.

Ítem 1j.
∢BDA = ∢BCA porque subtienden el mismo arco. ΔAPD~ΔPBC por el segundo criterio de semejanza (AA).

Luego, PC : PD = AD : BC
$3 : 4 = 4 : AD$
$$\frac{3}{4} = \frac{4}{AD}$$
$3AD = 16$
$$AD = \frac{16}{3}$$

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 2 – U8 C 1.1
Ítem 3a – U8 C 1.1
Ítem 3b – U8 C 1.2
Ítem 4a – U8 C 1.1
Ítem 4b – U8 C 1.4
Ítem 5 – U6 C 2.7
Ítem 6 – U6 C 1.7 y 2.4

Algunos procedimientos.

Ítem 3b.
La suma de los valores de los datos $x - \mu$ es de hecho la suma de todas las desviaciones y esta es igual a 0.

Ítem 5.
La imagen muestra una idea plana del enunciado.

$AP^2 = 300^2 + 500^2$
$AP^2 = 90\,000 + 250\,000$
$AP^2 = 340\,000$

También.
$AQ^2 = AP^2 - 300^2$
$AQ^2 = 340\,000 - 90\,000$
$AQ^2 = 250\,000$
$AQ = 500$

Por último.
$AB^2 = 300^2 + 500^2$
$AP^2 = 340\,000$
$AP = \sqrt{340\,000}$
$AP = \sqrt{100 \times 100 \times 34}$
$AP = 100\sqrt{34}$

2. Encuentra el rango de los siguientes datos:
5, 1, 2, 8, 6, 10

Respuesta:
Rango:

3. En la tabla, μ representa la media aritmética de diez datos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
datos (x)	2	4	1	7	6	5	3	7	5	6	$\mu = 4.6$
$x - \mu$	−2.6	−0.6	−3.6	2.4	1.4	0.4	−1.6	2.4	0.4	1.4	

a) Encuentra la suma de los valores de los datos.

Respuesta:
Suma:

b) Encuentra la suma de los valores de la última fila que corresponde a $x - \mu$.

Respuesta:
Suma:

4. Determina lo que se pide acerca de los siguientes datos: 4, 7, 6, 3, 9, 7.

a) La media aritmética.

Respuesta:
Media aritmética:

b) La desviación típica.

Respuesta:
Desviación típica:

5. La altura del punto A es de 300 m sobre el nivel del mar. La altura del punto B, que está a 500 m al norte del punto A, es de 600 m sobre el nivel del mar. Encuentra la distancia entre estos puntos.

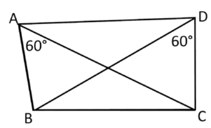
Respuesta:
Distancia: m

6. Encuentra el área del triángulo equilátero cuyos lados miden 2.

Respuesta:
Área:

2

7. Encuentra la medida del ∢ADB.



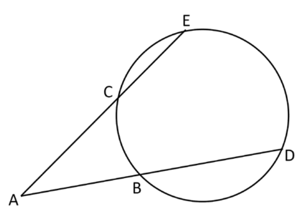
∢ABC = 100°

Respuesta:
∢ADB =

8. En el plano las coordenadas de dos puntos A y B sea (1, 3) y (5, 6). Encuentra la longitud del segmento AB.

Respuesta:
AB =

9. Encuentra la longitud del segmento CE.



AB = BD = 5, AC = 6

Respuesta:
CE =

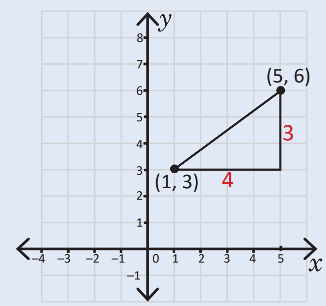
3

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 7 – U7 C 2.5
Ítem 8 – U6 C 2.7
Ítem 9 – U7 C 2.3

Algunos procedimientos.

Ítem 7.
∢BCA = 20° por ser suplementario a ∢CAB y ∢ABC.
Como ∢A = ∢D y ambos comparten el segmento BC, entonces A, B, C, D están en una misma circunferencia.
Luego, ∢BCA = ∢ADB = 20° por subtender el mismo arco.

Ítem 8.



Al observar el plano, se puede obtener un triángulo rectángulo, donde la medida de AB viene dada por:

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$
$$AB^2 = 25$$
$$AB = 5$$

Ítem 9.
Trazando BE y CD, sea O el punto donde se interceptan.
∢E = ∢D, porque subtienden el mismo arco, además los triángulos ABE y ADC comparten ∢A. Entonces ΔABE ~ ΔACD (por AA).

$$AE : AD = AB : AC$$
$$AC + CE : AD = AB : AC$$
$$6 + CE : 10 = 5 : 6$$
$$6(6 + CE) = 10(5)$$
$$36 + 6CE = 50$$
$$6CE = 14$$
$$CE = \frac{14}{6}$$
$$CE = \frac{7}{3}$$

Descripción.
La prueba consta de 14 numerales, sin embargo, en total se consideran 20 ítems pues cada literal cuenta como un ítem. Los 20 ítems se clasifican de acuerdo a los dominios cognitivos tal como se detalla a continuación:

Conocimiento (75 %). Del numeral 1 al 9. Los numerales 1, 2, 4, 7 y 8 tienen varios literales. Por lo tanto, el dominio cognitivo corresponde a 15 ítems.

Aplicación (15 %). Del ítem 10 al 12.

Razonamiento (10 %). Ítem 13 y 14.

Notación.
U1 C1.2 Significa que el ítem corresponde a la clase 1.2 de la Unidad 1.
* Significa que si el estudiante responde por lo menos uno de estos y no proporciona la respuesta correcta, entonces se le da una puntuación parcial.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 1a – U1 C 2.1
Ítem 1b – U1 C 2.3
Ítem 2a – U1 C 3.6
Ítem 2b – U1 C 3.4
Ítem 3 – U2 C 1.3
Ítem 4a – U2 C 2.6
Ítem 4b – U2 C 2.11
Ítem 5 – U3 C 1.8
Ítem 6 – U4 C 1.6

Algunos procedimientos.
Ítem 5.
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
Por tanto, $x = -3$ o $x = 2$.

Prueba final de matemática **9º grado**

Fecha: ______________________
Nombre: ______________________ **Sección:** ________
Edad: ______ años **NIE:** __________ **Sexo:** ☐ masculino ☐ femenino
Centro escolar: ______________________

Indicación: en cada ejercicio planteado debes dejar constancia de tus procedimientos.

1. Desarrolla los siguientes productos notables:
   a) $(x + 2)(x - 1)$ b) $(x - 3)^2$

   Respuesta: Respuesta:

2. Factoriza los siguientes polinomios:
   a) $x^2 - 4$ b) $x^2 + x - 6$

   Respuesta: Respuesta:

3. Encuentra las raíces cuadradas de 9.

   Respuesta:

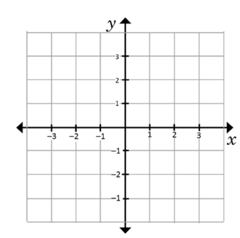
4. Efectúa las siguientes operaciones:
   a) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ b) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 1)$

   Respuesta: Respuesta:

5. Resuelve $x^2 - 2x - 3 = 0$.

   Respuesta:
   $x =$

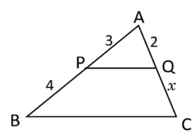
6. Traza la gráfica de la función $y = -\frac{1}{2}x^2$.



1

7. Encuentra el valor de x en cada figura.

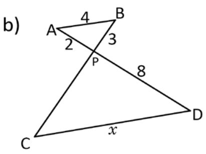
a)



BC ∥ PQ

Respuesta:
x =

b)

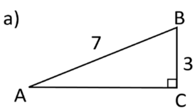


∢A = ∢C

Respuesta:
x =

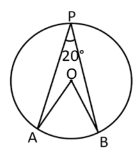
8. Encuentra los valores que se piden. Utiliza $\sqrt{}$ si es necesario.

a)



Respuesta:
AC =

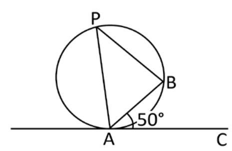
b)



O es el centro de la circunferencia.

Respuesta:
∢AOB =

c)



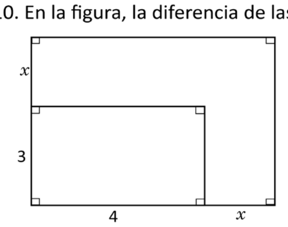
La recta AC es la tangente a la circunferencia en A.

Respuesta:
∢P =

9. Determina la varianza de los siguientes datos: 5, 8, 3, 11, 7, 2.

Respuesta:
Varianza:

10. En la figura, la diferencia de las áreas de los rectángulos es 44. Encuentra el valor de x.



Respuesta:
x =

2

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.

Ítem 7a – U5 C 3.5
Ítem 7b – U5 C 2.2
Ítem 8a – U6 C 1.5
Ítem 8b – U7 C 1.4
Ítem 8c – U7 C 2.6
Ítem 9 – U8 C 1.3
Ítem 10 – U1 C 2.1 y U.3 C 1.8

Algunos procedimientos.

Ítem 7a.

AB : PB = AQ : QC

$3 : 4 = 2 : x$

$3x = 8$

$x = \frac{8}{3}$

Ítem 7b.

ΔPAB ~ ΔPCD

PB : PD = AB : CD

$3 : 8 = 4 : x$

$3x = 32$

$x = \frac{32}{3}$

Ítem 8c.

Por propiedad, ∢P = ∢BAC = 50°.

Ítem 10.

$(x + 4)(x + 3) - 4 \times 3 = 44$

$x^2 + 7x - 44 = 0$

$(x + 11)(x - 4) = 0$

Como $x > 0$, $x = 4$.

Relación entre los ítems y las clases del libro de texto.
Ítem 11 – U4 C 1.9 y C2.3
Ítem 12 – U3
Ítem 13 – U5
Ítem 14 – U6

Algunos procedimientos.
Ítem 11.
Sí $a > 0$, la función toma el valor máximo en $x = -3$. Sustituyendo:

$$9a + c = 1 \text{ ...(1)}$$

El valor mínimo en $x = 0$.
Entonces,
$c = -8$. De (1) y (2), $a = 1$, $c = -8$.

Sí $a < 0$, la función toma el valor máximo en $x = 0$. Sustituyendo:

$$c = 1 \text{ ...(1)}$$

El valor mínimo en $x = -3$.
Entonces, $9a + c = -8$ ...(2)

De (1) y (2), $a = -1$, $c = 1$.

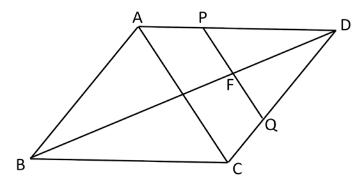
11. El valor máximo y mínimo de la función $y = ax^2 + c$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 1$ es 1 y -8 respectivamente. Encuentra a y c.

Respuesta:
$a =$, $c =$

12. Las soluciones de la ecuación $2x^2 + ax + b = 0$ son $\frac{3}{2}$ y -1. Determina los valores de a y b.

Respuesta:
$a =$, $b =$

13. En la figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. Demuestra que PF = FQ.



14. En la figura AB = AC = 5, BC = 4. Encuentra el área del círculo. (Sugerencia: considera el área del ΔABC).