Unidad 5

Proporcionalidad

× △

cantidad x	a	b
cantidad y	c	d

× △

× △

cantidad x	a	b
cantidad y	c	d

$\times \frac{1}{\triangle}$

En esta unidad aprenderás a

- Identificar si dos razones forman una proporción
- Aplicar las propiedades de las proporciones para encontrar razones equivalentes
- Encontrar el dato faltante en una proporción
- Identificar cantidades directamente proporcionales
- Identificar cantidades inversamente proporcionales

Variación de cantidades para obtener la misma razón

Recuerda

Completa escribiendo la razón y el valor de razón como muestra el ejemplo:

situación	razón (a:b)	valor de razón
1. Juan mezcló 6 cucharadas de café y 2 de azúcar. ¿Cuál es la razón entre azúcar y café?	2 : 6	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333...$
2. De 5 tiros libres Juan logra anotar 3 goles. ¿Cuál es la razón entre goles y tiros libres?		
3. En un salón hay 10 niñas y 12 niños. ¿Cuál es la razón entre niñas y niños?		
4. Carmen gasta 3 galones de los 6 galones del tanque de su vehículo. ¿Cuál es la razón entre galones gastados respecto al total?		

Analiza

Según la receta de María para aderezar un tazón de ensalada con salsa rosada se deben mezclar 2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa.

¿Cuántas cucharadas de mayonesa se deben mezclar para obtener el mismo sabor si se utilizan 6 cucharadas de ketchup?

Soluciona

Represento en una tabla la cantidad de cucharadas de cada ingrediente relacionadas con la cantidad de tazones de ensalada que se pueden aderezar.

Para aderezar 1 tazón:

	ketchup	mayonesa	
2			3

2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa.

Para aderezar 2 tazones:

	ketchup	mayonesa	
4			6

4 cucharadas de ketchup y 6 cucharadas de mayonesa.

× 3   × 3

Para aderezar 3 tazones:

	ketchup	mayonesa	
6			$\square$

6 cucharadas de ketchup y 9 cucharadas de mayonesa.

Ketchup: De 2 a 6 cucharadas, son 3 veces 2 cucharadas.
Mayonesa: 3 veces 3 cucharadas, son 9 cucharadas.
R: Se necesitan 9 cucharadas de mayonesa.

Comprende

Cuando se tiene una razón entre dos cantidades la cual se quiere mantener para conservar el mismo sabor, tono, consistencia etc., se pueden aumentar en la misma razón hasta encontrar las cantidades que se necesitan.

Ejemplo: ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se necesitan si se utilizan 10 cucharadas de ketchup?

× 5 | | × 5

ketchup	mayonesa
2 cucharadas	3 cucharadas
10 cucharadas	□ cucharadas

En 10 cucharadas de ketchup hay 5 veces 2 cucharadas. Entonces de mayonesa son 5 veces 3 cucharadas, 15 cucharadas.

□ = 15

R: 15 cucharadas.

Resuelve

1. En cada literal encuentra la cantidad □ para que la receta tenga el mismo sabor:

a.

× □ | | × □

chocolate	leche
3 tazas	2 tazas
12 tazas	□ tazas

b.

× □ | | × □

café	leche
2 tazas	1 taza
□ tazas	7 tazas

c.

agua	jugo de limón
7 vasos	2 vasos
14 vasos	□ Vasos

d.

ketchup	mayonesa
2 cucharadas	5 cucharadas
□ cucharadas	15 cucharadas

2. Cierta receta indica que la relación entre tazas de agua y harina es 3 : 4
   a. Por 6 tazas de agua. ¿Cuántas tazas de harina se deben utilizar?
   b. Por 16 tazas de harina. ¿Cuántas tazas de agua se deben utilizar?

Desafíate

Para preparar café con leche el abuelo José dice que la relación entre tazas de café, leche y cucharadas de azúcar es 2 : 1 : 3. Para preparar café con leche con el mismo sabor utilizando 8 tazas de café, ¿cuántas tazas de leche y cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar?

Proporciones

Recuerda

¿Cuándo dos razones son equivalentes?

Analiza

Ana y Carlos mezclaron témperas azules y blancas para obtener un tono celeste. Ana utilizó 3 témperas azules y 4 blancas. Carlos utilizó 6 témperas azules y 8 blancas.

a. Encuentra el valor de razón entre témperas azules y blancas que utilizó cada uno.

b. ¿Obtuvieron el mismo tono de celeste?

Soluciona

a. Encuentro la razón entre temperas de Ana, el antecedente es 3 y el consecuente es 4, la razón es 3 : 4. El valor de razón es:

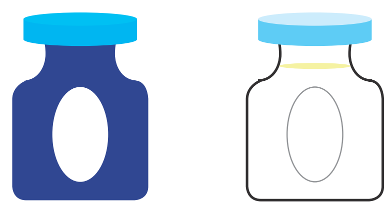
$$\frac{3}{4} = 0.75$$

La razón entre temperas de Carlos tiene antecedente 6 y consecuente 8, la razón es 6 : 8
Y el valor de la razón es:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

R: La razón es 0.75

b. Como al simplificar el valor de razón de Carlos se obtiene el mismo valor de razón de Ana, entonces las mezclas de pintura de ambos tienen el mismo tono de celeste.

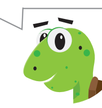


Carmen

Comprende

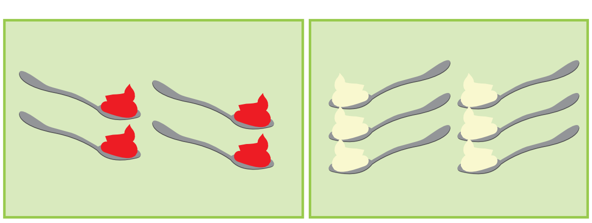
- Cuando dos razones tienen el mismo valor de razón se pueden escribir separadas por el signo igual.
  La igualdad entre dos razones equivalentes se llama **proporción**. Como 3: 4 y 6: 8 son razones equivalentes, se escribe:
  3 : 4 = 6 : 8
- Y se lee tres es a cuatro como seis es a ocho.

Una proporción también se puede escribir utilizando el símbolo :: en lugar del signo =, así 3:4 :: 6:8 representa una proporción.

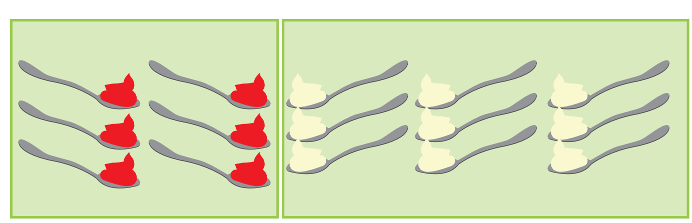


Resuelve

1. ¿Son las razones dadas en cada literal equivalentes? en caso de serlo escríbelas en forma de proporción.
   a. 2 : 3 y 6 : 9 b. 16 : 12 y 4 : 3 c. 4 : 5 y 8 : 15
2. Carlos y Daniel prepararon salsa rosada, escribe la razón de ketchup y mayonesa de cada una de las recetas; explica si tienen el mismo sabor.



Carlos



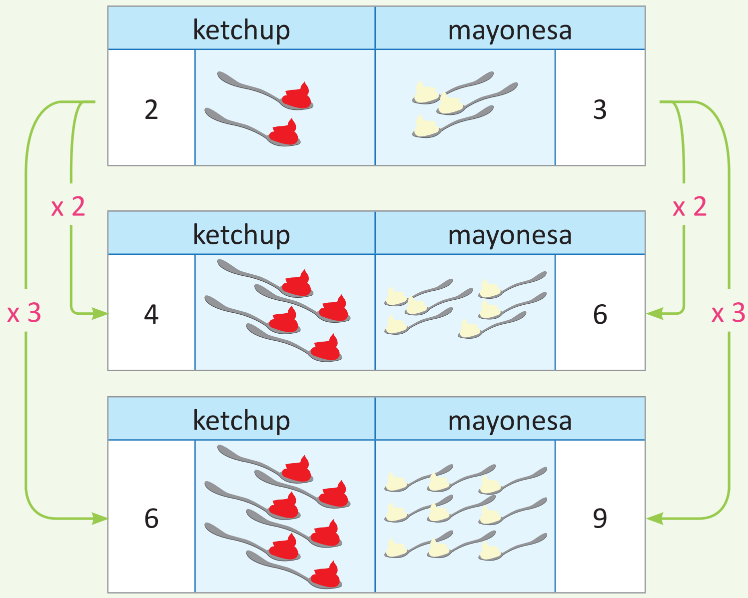
Daniel

3. Para preparar charamuscas de café con leche la mamá de Beatriz utiliza 4 vasos de café y 3 vasos de leche.
   a. Encuentra el valor de la razón de café y leche.
   b. Beatriz decidió preparar charamuscas y mezcló 12 vasos de café con 9 vasos de leche. ¿El sabor de estas charamuscas será el mismo de las que prepara su mamá?

Propiedad de las proporciones

Analiza

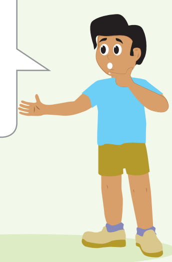
Miguel y Ana quieren encontrar una forma sencilla para obtener la misma razón entre cucharadas de ketchup y mayonesa al preparar salsa rosada. Observa la propiedad que Miguel y Ana encontraron y explícala.



a.

× 2
$2 : 3 = 4 : 6$
× 2

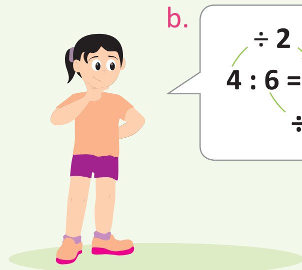
× 3
$2 : 3 = 6 : 9$
× 3



b.

÷ 2
$4 : 6 = 2 : 3$
÷ 2

÷ 3
$6 : 9 = 2 : 3$
÷ 3



Soluciona

a. Miguel encuentra una relación entre los antecedentes y los consecuentes.

× 2
$2 : 3 = 4 : 6$
× 2

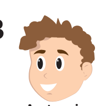
El antecedente y el consecuente se multiplican por 2 y se obtiene una razón equivalente.

× 3
$2 : 3 = 6 : 9$
× 3

El antecedente y el consecuente se multiplican por 3 y se obtiene una razón equivalente.

b. Ana encuentra una relación entre los antecedentes y los consecuentes.

÷ 2
$4 : 6 = 2 : 3$
÷ 2


Antonio

El antecedente y el consecuente se dividen entre 2 y se obtiene una razón equivalente.

÷ 3
$6 : 9 = 2 : 3$
÷ 3

En este caso el antecedente y el consecuente se dividen entre 3 y se forma una proporción.

Comprende

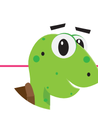
Propiedad de proporciones

- Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por el mismo número se obtiene una razón equivalente.
- Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se dividen por el mismo número se obtiene una razón equivalente.

También se pueden obtener razones equivalentes multiplicando o dividiendo por un número decimal o una fracción.

× 1.5
$2 : 3 = 3 : 4.5$
× 1.5

Dos es a tres como tres es a cuatro punto cinco.



Resuelve

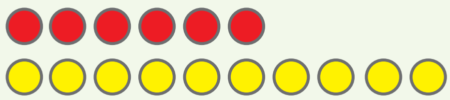
1. Encuentra tres razones equivalentes a la razón 3 : 4 multiplicando el antecedente y el consecuente por el mismo número.
2. Encuentra tres razones equivalentes a la razón 6 : 24 dividiendo el antecedente y el consecuente por el mismo número.

Razón equivalente más simple

Analiza

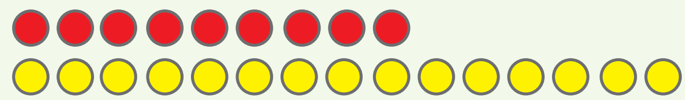
Carlos hizo una mezcla con 6 témperas rojas y 10 témperas amarillas y Beatriz con 9 témperas rojas y 15 témperas amarillas. ¿Obtuvieron el mismo tono de anaranjado?

Carlos



6 : 10

Beatriz



9 : 15

Soluciona

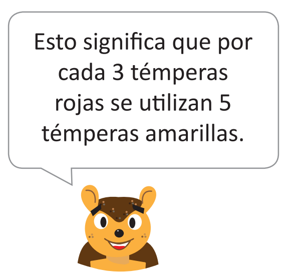
Para que tengan el mismo tono de anaranjado las razones entre pintura roja y amarilla deben ser equivalentes.
Entonces para cada razón encuentro la razón equivalente más simple:

Carmen

÷ 2
6 : 10 = 3 : 5
÷ 2

igual

÷ 3
9 : 15 = 3 : 5
÷ 3



Ambas razones son equivalentes a la razón 3 : 5
Por lo tanto: 6 : 10 = 9 : 15
R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Las razones entre pintura roja y amarilla deben ser equivalentes; estas razones serán equivalentes si tienen el mismo valor, por lo tanto encuentro el valor de razón y simplifico:

$6 : 10 \longrightarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

igual

$9 : 15 \longrightarrow \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Julia

Ambas razones tienen el mismo valor de razón; por lo que son equivalentes.

R: El tono de anaranjado de Carlos y Beatriz es el mismo.

Comprende

Encontrar una razón equivalente con números menores es **simplificar la razón**; cuando se obtiene la razón equivalente con los números menores posibles se obtiene la **razón equivalente más simple o simplificada**.

¿Qué pasaría?

Encuentra la razón equivalente más simplificada de 12 : 30

1. ÷ 2
$\frac{12}{30} = \frac{6}{15}$
÷ 2
Pero aún se puede simplificar más

2. ÷ 3
$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
÷ 3
Ya no se puede simplificar más, entonces:
÷ 6
12 : 30 = 2 : 5
÷ 6

R: 2 : 5

Resuelve

1. Para cada razón, encuentra la razón equivalente más simple.
   a. 6 : 4 b. 16 : 20 c. 30 : 18 d. 10 : 35 e. 12 : 8

2. Juan y Ana quieren saber quién de ellos hace más goles al cobrar tiros libres, Juan hizo 14 tiros libres y de estos 6 fueron goles, y Ana de 21 tiros libres logró 9 goles. ¿Quién hace más goles?

Proporciones entre números decimales y números naturales

Recuerda

Calcula: a. 0.7 × 10 b. 1.3 × 10

Analiza

Juan quiere preparar una receta de pan dulce y otra de atol, por lo que utiliza los siguientes ingredientes:

Receta A
0.5 libras de azúcar
0.6 libras de harina

Receta B
2.4 cucharadas de canela molida
3 cucharadas de maicena

Los términos de la razón pueden ser números decimales.

Juan quiere obtener el mismo sabor pero solo puede medir libras y cucharadas completas.
¿Qué cantidades debe usar para preparar las recetas?

Soluciona

Receta A

La razón entre azúcar y harina es:

0.5 : 0.6

0.5 : 0.6 = (0.5×10) : (0.6×10)
= 5 : 6

Multiplico el antecedente y consecuente por 10 para obtener la razon equivalente.

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta A utilizando 5 libras de azúcar y 6 libras de harina.

Receta B


Antonio

La razón entre canela y maicena es:

2.4 : 3

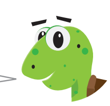
2.4 : 3 = (2.4×10) : (3×10)
= 24 : 30
= 4 : 5

Multiplico el antecedente y consecuente por 10

Divido entre el MCD de 24 y 30, que resulta 6 para obtener la razón equivalente más simple.

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta B utilizando 4 cucharadas de canela y 5 cucharadas de maicena.

Juan obtendrá el mismo sabor, lo que cambiará es la cantidad de porciones de pan y de atol para los cuales se preparará la receta; por lo que obtendrá más porciones.



Comprende

Una razón expresada con números decimales, se puede convertir en una razón equivalente con números naturales. Cuando los números solo tienen una cifra decimal se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Multiplicar el antecedente y el consecuente por 10, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
2. Si la razón obtenida se puede simplificar, se simplifica.

Resuelve

1. Encuentra la razón equivalente más simplificada donde el antecedente y el consecuente sean números naturales:
   a. 0.4 : 0.9 b. 0.9 : 1.5 c. 1.5 : 3 d. 2 : 3.5

2. Ana hace 7 galletas de mantequilla con 1.4 tazas de mantequilla y 2.1 tazas de harina.
   a. ¿Cuántas tazas de mantequilla y harina debe utilizar si quiere hacer 70 galletas?
   b. ¿Cuántas tazas de mantequilla y harina debe utilizar si quiere hacer 10 galletas?

3. Encuentra una razón equivalente donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.
   a. 0.56 : 0.31 b. 1.25 : 6

Proporciones entre fracciones y números naturales

Recuerda

Calcula: a. $\frac{4}{3} \times 3$ b. $\frac{5}{2} \times 6$

Analiza

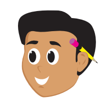
Para la cobertura de un pastel una receta utiliza $\frac{1}{3}$ de taza de mantequilla y $\frac{4}{3}$ de taza de queso crema.

a. Expresa la razón entre la cantidad de tazas de mantequilla y queso crema.

b. Si solo se tiene un depósito que puede medir tazas completas ¿Cuántas tazas de mantequilla y queso crema se deben utilizar?

Soluciona

a. La razón entre la cantidad de mantequilla y queso crema es: $\frac{1}{3} : \frac{4}{3}$ **R:** $\frac{1}{3} : \frac{4}{3}$


José

b. Utilizando la propiedad de proporciones al multiplicar el antecedente y el consecuente por el mismo número se obtiene una razón equivalente. Por lo que multiplico el antecedente y el consecuente por 3; así:

$$\frac{1}{3} : \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 1 : 4$$

Entonces se puede elaborar la cobertura con el mismo sabor utilizando 1 taza de mantequilla por cada 4 tazas de queso crema. **R:** 1 : 4

¿Qué pasaría?

¿Cómo se encuentra una razón equivalente con números naturales de la razón $\frac{5}{2} : \frac{4}{3}$?

Se multiplica el antecedente y consecuente por el mcm de los denominadores, en este caso el mcm de 2 y 3 es 6

$$\frac{5}{2} : \frac{4}{3} = \left(\frac{5}{2} \times 6\right) : \left(\frac{4}{3} \times 6\right)$$

$= 15 : 8$ **R:** 15 : 8

Comprende

Una razón expresada con fracciones se puede convertir en una razón equivalente con números naturales siguiendo los pasos:

1. Multiplicar el antecedente y el consecuente por el mcm de los denominadores, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
2. Si la razón obtenida se puede simplificar, se simplifica.

Resuelve

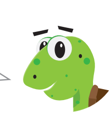
1. Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. $\frac{4}{5} : \frac{7}{5}$ b. $\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$ c. $\frac{3}{4} : \frac{9}{4}$ d. $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$

e. $\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$ f. $\frac{1}{7} : \frac{3}{4}$ g. $\frac{3}{7} : 4$ h. $2 : \frac{4}{5}$

Recuerda que un número natural puede convertirse en fracción con el denominador 1, por ejemplo:

$3 = \frac{3}{1}$



Desafíate

Miguel preparó su café con una razón entre azúcar y café $\frac{2}{5} : \frac{4}{3}$, Carmen preparó su café a una razón de $\frac{1}{2} : \frac{5}{3}$ ¿Obtuvieron ambos el mismo sabor del café?

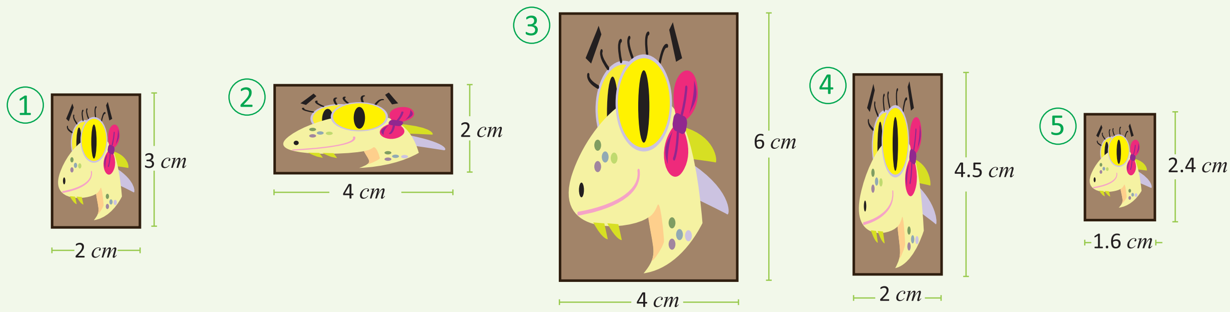
Aplicación de las proporciones

Analiza

Observando las siguientes fotografías:

a. Para cada una encuentra el valor de razón entre las medidas de la base y la altura, después simplifícalas.

b. Encuentra en cuáles de las fotografías la imagen se ve de la misma forma y contesta, ¿qué relación hay entre el valor de razón de estas fotografías?



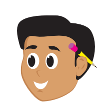
Soluciona

a.

Fotografía	base (cm)	altura (cm)	valor de razón
1	2	3	$\frac{2}{3} = 0.66...$
2	4	2	$\frac{4}{2} = 2$
3	4	6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.66...$
4	2	4.5	$\frac{2}{4.5} = 0.444...$
5	1.6	2.4	$\frac{1.6}{2.4} = \frac{2}{3} = 0.66...$

b. La imagen se ve de la misma forma en 1, 3 y 5
Estas fotografías tienen igual valor de razón 0.66... esto significa que la base es 0.66... veces la altura. Como el valor de razón es igual, escribo las relaciones en forma de proporción:

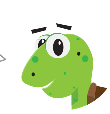
1 y 3: $2 : 3 = 4 : 6$
1 y 5: $2 : 3 = 1.6 : 2.4$
3 y 5: $4 : 6 = 1.6 : 2.4$


José

Comprende

- Se llama **relación de aspecto de una imagen** a la razón entre su base y su altura.
- Dos imágenes tienen la misma relación de aspecto si las razones entre base y altura forman una proporción.

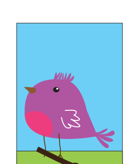
Aunque las dimensiones en los televisores sean distintas, la imagen se ve igual ya que la relación de aspecto es la misma. En televisiones tradicionales la relación de aspecto es 4 : 3 y en los panorámicos es 16 : 9



Resuelve

Carlos quiere imprimir la siguiente fotografía en un tamaño más grande, manteniendo la misma relación de aspecto. ¿Cuál o cuáles de los siguientes tamaños se pueden elegir?

1. Base: 12 cm y altura: 18 cm
2. Base: $\frac{1}{3}$ cm y altura: $\frac{1}{2}$ cm
3. Base: 16 cm y altura: 20 cm
4. Base: 1.2 cm y altura: 1.8 cm



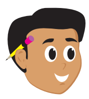
Proporciones con un dato desconocido

Analiza

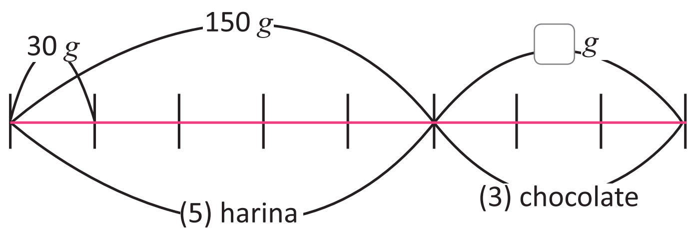
Para preparar galletas de chocolate, la razón entre la cantidad de harina y chocolate es 5 : 3; Beatriz quiere utilizar un paquete de 150 g de harina, ¿cuántos gramos de chocolate debe utilizar?

Soluciona

Represento gráficamente:



José



5 : 3 = 150: □

Las primeras 5 marcas representan 150 gramos.
Entonces 1 marca equivale a :

$$150 \div 5 = 30$$

Por lo que cada marca representa 30 g
La cantidad de chocolate abarca 3 marcas, y cada marca representa 30 gramos, entonces:

$$30 \times 3 = 90$$

La cantidad desconocida □ vale 90 g

R: Se necesitan 90 g de chocolate.

Para mantener el mismo sabor de las galletas la razón entre la harina y el chocolate que debe utilizar Beatriz debe ser equivalente a 5 : 3 entonces si □ representa la cantidad desconocida de chocolate, se debe tener la siguiente proporción:

$$5 : 3 = 150 : \square$$

Utilizando la propiedad de las proporciones; la relación que hay entre los antecedentes también se debe cumplir para los consecuentes, en este caso: 150 ÷ 5 = 30, por lo que 5 × 30 = 150

× 30

$$5 : 3 = 150 : \square$$

× 30

Antonio

Entonces: □ = 3 × 30

= 90

R: 90 g de chocolate.

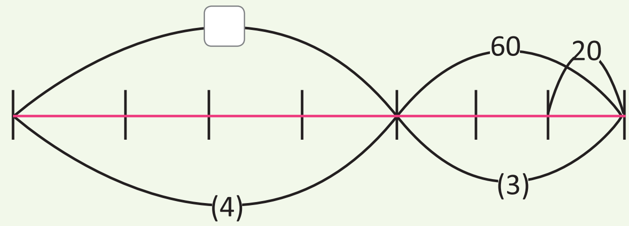
Comprende

Para encontrar un dato faltante en una proporción se puede:

- Auxiliar de la representación gráfica.
- Utilizar la propiedad de proporciones.

¿Qué pasaría?

¿Cuál es el valor del dato desconocido en la siguiente proporción 4 : 3 = □ : 60?



60 ÷ 3 = 20
20 × 4 = 80
□ = 80

R: 80

60 ÷ 3 = 20, por lo que 3 × 20 = 60

$$4 : 3 = \square : 60 \quad (\times 20)$$

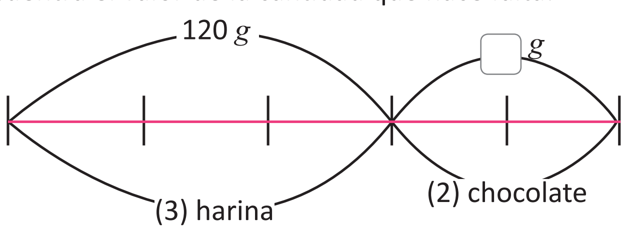
□ = 4×20
□ = 80

R: 80

Resuelve

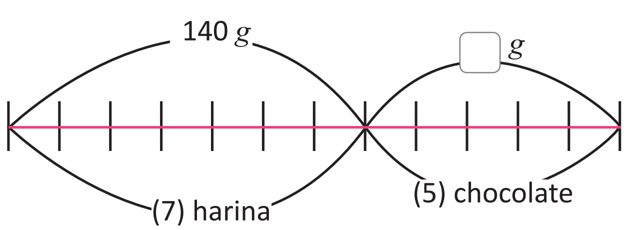
1. Encuentra el valor de la cantidad que hace falta:

a.



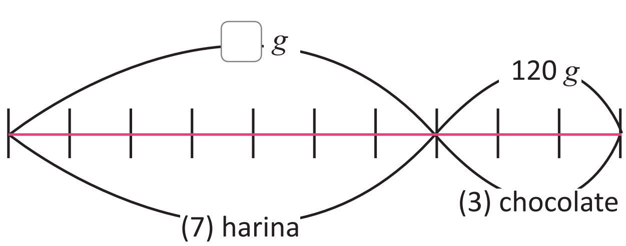
3 : 2 = 120 : □

b.



7 : 5 = 140 : □

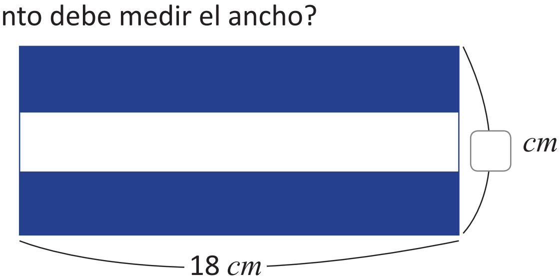
c.



7 : 3 = □ : 120

d. 4 : 5 = 20 : □ e. 7 : 3 = 350 : □ f. 2 : 3 = □ : 30

2. Ana quiere construir una bandera rectangular, de tela, cuya razón entre el largo y el ancho sea 3 : 2. Si el largo mide 18 *cm;* ¿cuánto debe medir el ancho?



Resolución de problemas aplicando proporciones

Analiza

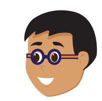
En una rifa los organizadores quieren que hayan 3 papelitos premiados por cada 5 papelitos no premiados. Si en una caja se colocan 60 papelitos premiados. ¿Cuántos papelitos no premiados se deben colocar?

Soluciona

La razón entre papelitos premiados y no premiados es 3 : 5

Si $\square$ es la cantidad desconocida de papelitos no premiados, se debe cumplir la siguiente proporción:

$$3 : 5 = 60 : \square$$



Utilizo la propiedad de proporciones para encontrar la cantidad desconocida:

60 ÷ 3 = 20, por lo que 3 × 20 = 60

× 20

3 : 5 = 60 : $\square$

× 20

$\square$ = 5 × 20

$\square$ = 100

R: Deben colocar 100 papelitos no premiados.

Comprende

Para resolver problemas de proporciones donde se desconoce algún dato, se deben identificar las razones equivalentes involucradas y luego resolver utilizando la propiedad de proporciones o la representación gráfica.

Ten cuidado al plantear la proporción, los datos deben estar en el mismo orden:

premiados

3 : 5 = 60 : $\square$

no premiados

¿Qué pasaría?

En un granja la razón de patos y gallinas es 1 : 4; si en la granja hay 100 gallinas. ¿Cuántos patos hay?

PO: 1: 4 = $\square$: 100

100 ÷ 4 = 25, por lo que 4 × 25 = 100

× 25

1 : 4 = $\square$: 100

× 25

$\square$ = 1 × 25

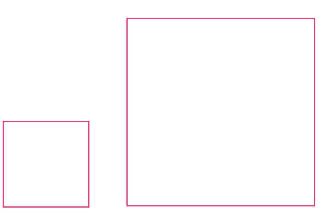
R: 25

Resuelve

1. Para elaborar una receta de salsa agridulce se utiliza salsa inglesa y salsa de tomate, con una razón de 2 : 3 entre salsa inglesa y salsa de tomate. Si se utilizan 50 mililitros de salsa inglesa. ¿Cuántos mililitros de salsa de tomate se deben utilizar?
2. En una comunidad la razón entre el número de hombres y mujeres es 9 : 10; si hay 2,000 mujeres en esta comunidad. ¿Cuál es el número de hombres?
3. En un salón de clases la razón entre la cantidad de varones y niñas es 5 : 3; si en el salón hay 10 varones.
   a. ¿Cuántas niñas hay?
   b. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

Desafíate

La razón entre las longitudes de los lados de dos cuadrados es 2 : 5; el perímetro de uno de ellos es 24 cm. ¿Cuál es la longitud del lado del otro cuadrado?



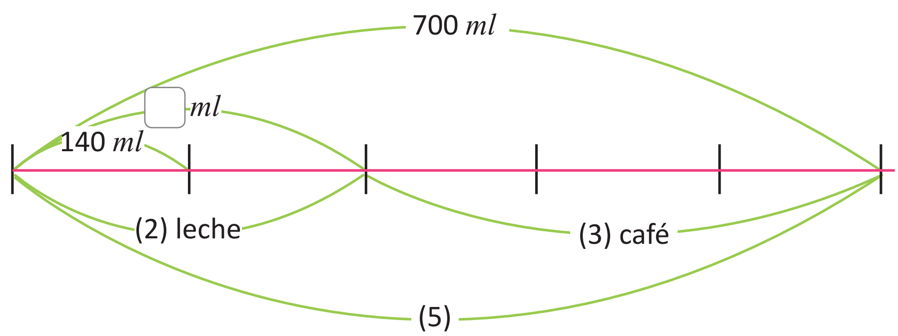
Reparticiones proporcionales

Analiza

Antonio quiere preparar 700 *ml* de café con leche manteniendo el sabor a una razón, entre la cantidad de leche y café de 2 : 3. ¿Cuántos mililitros de leche necesita?

Soluciona

Represento la información del problema gráficamente:



En este caso el total de marcas son 5 y estas representan 700 *ml*, entonces obtengo el valor que representa cada marca:

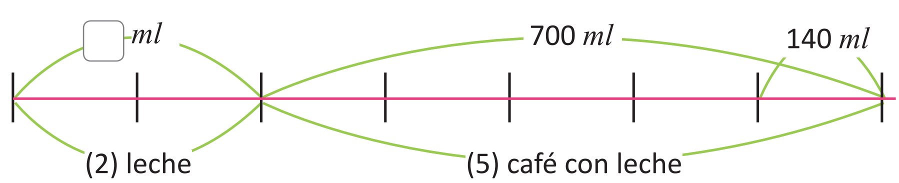
$$700 \div 5 = 140$$

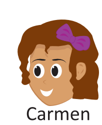
Cada marca representa 140 mililitros. Entonces la cantidad de leche abarca 2 marcas y cada una representa 140 mililitros, por lo tanto:

$$140 \times 2 = 280$$

R: Se necesitan 280 mililitros de leche.

La cantidad total de la mezcla son 700 mililitros, esta cantidad gráficamente se representa con 5 marcas, y la cantidad de leche se representa con 2 marcas, entonces represento gráficamente así:





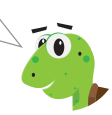
Utilizo la propiedad de proporciones:

$$2 : 5 = \square : 700$$

700 ÷ 5 = 140, por lo que 5 × 140 = 700

$$\overset{\times 140}{2 : 5 = \quad : 700}$$
$$\times 140$$

El total de café con leche también se puede considerar como uno de los términos de la razón.



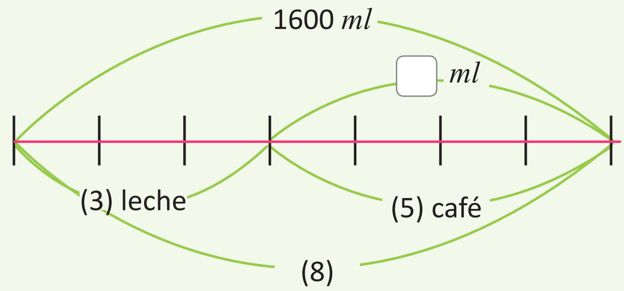
R: Se necesitan 280 mililitros de leche.

Comprende

Para resolver problemas donde cierta cantidad se debe repartir en una razón determinada, se puede representar gráficamente o utilizar la propiedad de proporciones, para encontrar el dato que hace falta.

¿Qué pasaría?

Para la siguiente representación, ¿cuál es el valor de $\boxed{}$?



Encuentro el valor de cada marca:
1,600 ÷ 8 = 200
La cantidad de mililitros de café abarca 5 marcas entonces:

200 × 5 = 1,000

Para repartir 1,600 *ml* de café con leche a una razón de 3: 5 entre leche y café se necesitan 1,000 *ml* de café.
R: 1,000 *ml*

Utilizo la propiedad de las proporciones:

5: 8 = ☐ : 1, 600

1600 ÷ 8 = 200, por lo que 8 × 200 = 1,600

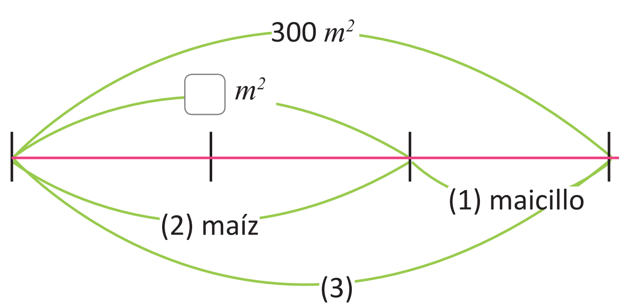
× 200
5 : 8 = ☐ : 1600
× 200

☐ = 5 × 20
☐ = 1,000

R: Se necesitan 1,000 *ml* de café.

Resuelve

1. Doña María tiene un terreno de 300 m^2 de área. Ella quiere sembrar maíz y maicillo de manera que la razón entre el área de maíz y maicillo sea 2: 1. ¿Cuántos metros cuadrados medirá el área para la siembra de maíz?



2. La razón entre la cantidad de niñas y niños en un salón es 5: 3, en total hay 32 alumnos. ¿Cuántas niñas hay en el salón?

3. Para una rifa se han colocado 120 papelitos en una caja. Si la razón entre papeles premiados y no premiados es 1: 7 ¿Cuántos papeles no premiados hay en la caja?

4. María y Luis invirtieron dinero para la venta de yuca frita. María aportó $16.00 y Luis aportó $14.00 El dinero recolectado después de la venta fue de $60.00 y quieren repartirlo en proporcionalidad a lo aportado. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

Desafíate

La razón entre la cantidad de dulces de Juan y Ana es 3:5, la diferencia entre las cantidades es 8 dulces. ¿Cuántos dulces tiene cada uno?

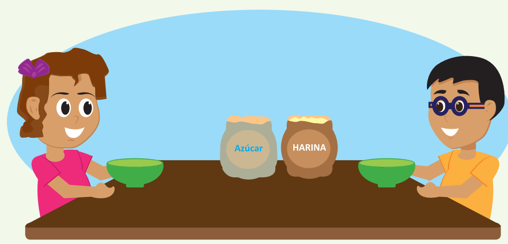
Aplica lo aprendido

1. Doña Beatriz es la dueña de una pupusería, ella considera que la razón entre la cantidad de harina y queso es 5 : 3; es decir, 5 libras de harina por cada 3 libras de queso. Para vender pupusas el sábado en la tarde comprará 9 libras de queso. ¿Cuántas libras de harina debe comprar?

2. ¿Son las razones dadas equivalentes?; y en caso de serlo, escríbelas en forma de proporción:
   a. 2 : 5 y 8 : 20 b. 4 : 5 y 16 : 30

3. Encuentra tres razones equivalentes a la razón 30 : 50

4. Juan y Marta observan que doña Julia utiliza 9 cucharadas de azúcar y 21 cucharadas de harina para preparar atol de maíz tostado. Analiza el comentario de cada uno y explica si el comentario es falso o verdadero.



5. Para preparar arroz con leche Carlos encontró una receta que indica que debe utilizar 0.6 libras de arroz y 0.3 libras de azúcar; pero Carlos solo puede medir libras completas. Si él quiere preparar la menor cantidad posible en libras completas ¿Qué cantidades debe usar para preparar la receta?

6. La preparación de una mezcla para pegar ladrillos, según un albañil es que la razón entre cemento y arena sea $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$ ¿Cómo se puede expresar esta misma razón utilizando números naturales en la forma más simple posible?

7. ¿Cuáles de las siguientes dimensiones se pueden utilizar para imprimir la fotografía siguiente y guardar la misma relación de aspecto?

10 cm

8 cm

(a) base: 4 cm y altura: 5 cm
(b) base: 16 cm y altura: 30 cm

8. Encuentra el valor desconocido en las siguientes proporciones:
   a. 2: 5 = 8: $\boxed{}$ b. 7: 5 = $\boxed{}$: 25

9. En una rifa el organizador quiere que la razón entre papelitos premiados y no premiados sea 2 : 7; si se colocan 16 papelitos premiados, ¿cuántos papelitos no premiados se deben colocar?

10. Don Juan quiere preparar 120 libras de mezcla para pegar ladrillos manteniendo una razón entre cemento y arena de 1 : 3 ¿Qué cantidades de cemento y arena debe usar?

Repaso de cantidades variables

1. Carlos está jugando a formar rectángulos con 14 fósforos.
   a. Conociendo algunas posibles cantidades para la base, completa las de la altura del rectángulo.

fósforos de la base	1	2	3	4	...
fósforos de la altura					...

   b. ¿Qué relación existe entre la cantidad de fósforos de la base y la cantidad de fósforos de la altura?

2. La madre de Carlos es 3 años mayor que su padre, la siguiente tabla muestra algunas posibilidades.
   a. Conociendo la edad de la madre, escribe las edades del padre.

madre de Carlos	28	29	30	31	32	...
padre de Carlos						...

   b. ¿Qué relación existe entre las edades de la madre y el padre de Carlos?

3. A José y Carlos les regalaron 8 dulces que deberán repartirse. ¿Cómo representamos en un **PO** la relación de la cantidad de dulces de José(▲) y los dulces de Carlos(■)?

4. Juan y Ana se reparten 7 paletas. Si x representa la cantidad de paletas que recibe Juan y y representa la cantidad de paletas que recibe Ana. ¿Cómo se escribe la relación de estas cantidades en un solo **PO** utilizando x y y? Ayúdate completando la tabla.

número de paletas de Juan (x)	1	2	3	4	5	6	...
número de paletas de Ana (y)							...

5. Marta es madre de Beatriz y Juan, cada día le da a Beatriz $3.00 dólares más que a Juan, ya que Beatriz viaja a la universidad.
   a. Completa la tabla con las posibles cantidades que reciben Beatriz y Juan.
   b. Representa en un **PO** la relación entre la cantidad de dinero de Beatriz x y la cantidad de dinero de Juan y.

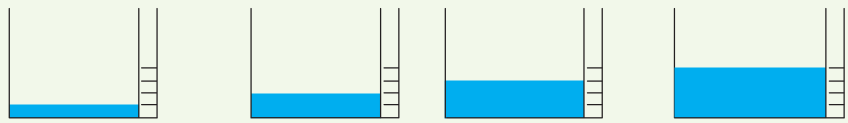
dinero de Beatriz x ($)	4	5	6	7	8	...
dinero de Juan y ($)						...

Relación de proporcionalidad directa

Analiza

Antonio abre un chorro y vierte agua en un recipiente, luego toma nota de la altura del agua al pasar 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos y así sucesivamente. Observa los datos que obtuvo y explica.
¿Qué sucede con la altura del agua cuando la cantidad de minutos se duplica o se triplica?

1 minuto | 2 minuto | 3 minuto | 4 minuto



5 cm | 10 cm | 15 cm | 20 cm

Soluciona

Represento los datos en una tabla.


Carmen

× 2 × 3 × 2

tiempo (min)	1	2	3	4	...
altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2 × 3 × 2

R: Si el tiempo se duplica o triplica, entonces la altura también se duplica o se triplica.

Comprende

- Cuando dos cantidades ▲ y ■ cumplen que al multiplicarse ▲ por 2, por 3, etc. la otra cantidad ■ también se multiplica por 2, por 3, respectivamente se dice que las cantidades son **directamente proporcionales** y esta relación se llama **proporcionalidad directa**.

El tiempo transcurrido y la altura del agua en un recipiente son cantidades directamente proporcionales.

Resuelve

1. Un automóvil recorre una carretera con una rapidez de 40 km por hora.
   a. Completa la tabla escribiendo la cantidad de kilómetros recorridos al variar la cantidad de horas.

tiempo transcurrido (horas)	1	2	3	4	5	...
distancia recorrida (km)						...

   b. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al transcurrir 6 horas?
   c. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al transcurrir 9 horas?

2. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de papayas y el precio. Estas cantidades son directamente proporcionales. Completa los precios que hacen falta.

× 5 × 3 × 2

número de papayas ▲	1	2	3	4	5	...
precio ($) ■	2	4				...

Propiedad de la proporcionalidad directa

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos que Antonio anotó de la relación entre el tiempo y la altura del agua en un depósito.

a. Encuentra el cociente de la altura entre el tiempo. ¿Cuánto resulta?

b. ¿Cuánto aumenta la altura del agua cada minuto?

tiempo (*min*)	1	2	3	4	5	6	...
altura (*cm*)	5	10	15	20	25	30	...
cociente							

Soluciona

a. Observo el resultado del cociente:

tiempo (*min*)	1	2	3	4	5	6	...
altura (*cm*)	5	10	15	20	25	30	...
cociente	5	5	5	5	5	5	

R: El cociente siempre resulta 5

b. El cociente siempre resulta 5, esto quiere decir que la altura aumenta 5 *cm* por minuto.

Carlos

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad directa

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la longitud y el peso de un tipo de alambre.

longitud (*m*)	1	2	3	4	5	6	...
peso (*g*)	7	14	21	28	35	42	...

a. Encuentra el cociente del peso entre la longitud.

b. ¿Cuál es el peso por metro de este tipo de alambre?

2. La siguiente tabla muestra la cantidad de hectáreas sembradas y el peso del maíz cosechado.

maíz (*ha*)	1	2	3	4	5	6	...
peso (toneladas)	3	6	9	12	15	18	...

a. Encuentra el cociente del peso entre el área sembrada.

b. ¿Cuál es el peso del maíz cosechado por hectárea?

Identificación de cantidades directamente proporcionales

Recuerda

¿Cuándo se dice que dos cantidades son directamente proporcionales?

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

a. La longitud y el peso de una varilla de hierro.

longitud (m)	1	2	3	4	5	...
peso (libras)	3	6	9	12	15	...

b. El número de dulces de Ana y el número de dulces de Julia al repartirse 9 dulces.

dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
dulces de Julia	8	7	6	5	4	...

Soluciona

a. Verifico si cumple las condiciones de la proporcionalidad directa.

Julia

× 5

× 2 × 3 × 2

longitud (m)	1	2	3	4	5	...
peso (libras)	3	6	9	12	15	...

× 2 × 3 × 2

× 5

- La longitud cambia 2 veces, 3 veces, 5 veces y el peso también cambia 2 veces; 3 veces, 5 veces.
- Además el cociente entre el peso y la longitud siempre es 3, significa que por cada metro de varilla el peso aumenta en 3 libras.

  R: La longitud y el peso de una varilla de hierro son directamente proporcionales.

b. Verifico si cumple las condiciones de proporcionalidad directa.

× 3 × 2

× 2

dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
dulces de Julia	8	7	6	5	4	...

~~× 2~~

~~× 3~~ ~~× 2~~

- La cantidad de dulces de Ana cambia, 2 veces, 3 veces, pero la cantidad de dulces de Julia no cambia 2 veces, 3 veces.
- El cociente entre los dulces de Julia y Ana no siempre da el mismo número.

  R: Por lo tanto, la cantidad de dulces de Ana y la cantidad de dulces de Julia no son directamente proporcionales.

Comprende

- Para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales se puede verificar que cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4... la otra también se multiplica por 2, por 3, por 4 respectivamente.
- Además el cociente entre las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad directa).

  Si no se cumplen estas condiciones las cantidades no son directamente proporcionales.

Resuelve

1. Identifica si las cantidades son directamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son directamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son; justifica tu respuesta.

   a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
peso (g)	2	4	6	8	10	...

   b. La cantidad de galones de gasolina y el costo de la compra:

cantidad (gal)	1	2	3	4	5	...
costo ($)	3	6	9	12	15	...

   c. La base y la altura de un rectángulo de 24 cm de perímetro.

   d. La cantidad de cortes en una tira y el número de trozos obtenidos.

número de cortes	1	2	3	4	5	...
número de trozos	2	3	4	5	6	...

Desafíate

¿Son la longitud del lado de un cuadrado y su área cantidades directamente proporcionales? Explica.

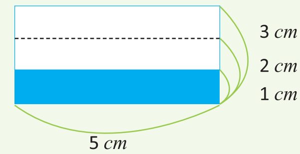
lado del cuadrado (cm)	1	2	3	4	5	...
área (cm^2)	1	4	9	16	25	...

Otras cantidades directamente proporcionales

Analiza

a. Completa la tabla escribiendo los valores del área de un rectángulo de base 5 cm cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)						...



b. ¿Son la altura del rectángulo y su área cantidades directamente proporcionales?

c. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, si x representa la altura y y representa el área. Escribe en un **PO** la relación de estas cantidades.

Soluciona

a. Completo la tabla, utilizando la fórmula del área del rectángulo:

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...

b. La altura del rectángulo y su área son directamente proporcionales, ya que si la altura se duplica, o triplica, el área también se duplica o triplica; además el cociente entre el área y la altura siempre da 5

c. La fórmula del área del rectángulo es:

área = base × altura

Si x representa la altura y y representa el área, y la base es 5, entonces la relación se puede escribir en un **PO** de la siguiente manera:

PO: $y = 5 \times x$

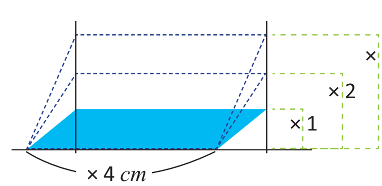
Comprende

La expresión $y = 5 \times x$ representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales.
Otros ejemplos de relaciones entre cantidades directamente proporcionales son $y = 2 \times x$, $y = 3 \times x$, etc.

Resuelve

1. La longitud de la base del siguiente paralelogramo es 4 cm

   a. Completa la tabla escribiendo los valores del área cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.



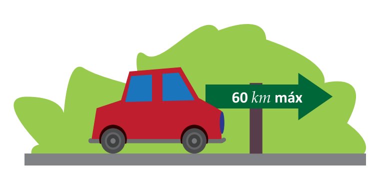
altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área del paralelogramo escribe un **PO** que relacione la longitud de la altura x y el área y.

2. Un automóvil transita por una carretera a una rapidez de 60 km por hora.

   a. Completa la tabla.

tiempo transcurrido x (horas)	1	2	3	4	5	...
distancia recorrida y (km)						...



   b. Tomando en cuenta que ***distancia = rapidez × tiempo*** escribe un **PO** que relacione el tiempo transcurrido x con la distancia recorrida y

Expresión y = constante × x

Analiza

La siguiente tabla muestra los datos que obtuviste en la clase anterior del área de un rectángulo de base 5 cm al variar su altura.

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
cociente $y \div x$						...

a. Completa la última fila de la tabla con el cociente del área entre la altura ($y \div x$).
b. Explica qué obtuviste en el literal a.
c. ¿Qué relación hay entre el número que obtuviste y el **PO:** $y = 5 \times x$?

Soluciona

a. Calculo el cociente:

Antonio

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
cociente $y \div x$	$5 \div 1 = 5$	$10 \div 2 = 5$	$15 \div 3 = 5$	$20 \div 4 = 5$	$25 \div 5 = 5$	...

b. El cociente siempre es 5 esto significa que el área aumenta 5 cm^2 por cada centímetro que aumenta la altura.
c. El cociente siempre es 5, y el **PO:** $y = 5 \times x$ contiene a este número 5; entonces el número que está en el **PO** se obtiene calculando el cociente de $y \div x$.

Comprende

- Cuando y es proporcional a x, el cociente de $y \div x$ es siempre el mismo valor, a este valor se le llama **constante**.
- Cuando esto sucede la relación entre x y y se puede expresar: $y = constante \times x$

Algunas relaciones entre cantidades son de la forma ***x + constante = y***, ***constante - x = y***; pero estas cantidades no son directamente proporcionales.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la cantidad de dinero que Juan acumula al ahorrar mensualmente.
   a. Encuentra el cociente de $y \div x$
   b. Escribe un **PO** que relacione el número de meses transcurridos x y la cantidad de dinero ahorrado y

tiempo transcurrido x (meses)	1	2	3	4	5	...
dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20	...
cociente $y \div x$						...

2. La siguiente tabla muestra el impuesto a las telefonías que se aplica según el monto de la recarga en El Salvador.
   a. Encuentra el cociente de $y \div x$
   b. Escribe un **PO** que relacione el monto de la recarga x con el monto del impuesto y

monto de la recarga x ($)	1	2	3	4	5	...
impuesto y (centavos)	5	10	15	20	25	...
cociente $y \div x$						...

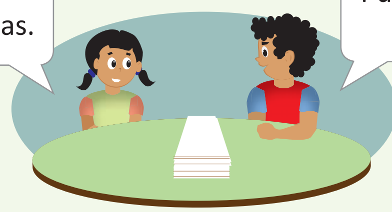
Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales

Analiza

¿Cómo se puede empacar un paquete de 300 hojas de papel bond sin contarlas una a una? Utiliza la estrategia y la información de María y Antonio.

El peso y es directamente proporcional a la cantidad de hojas x. Puedo resolver utilizando el peso de un paquete de 10 hojas.

La altura y es directamente proporcional a la cantidad de hojas x. Puedo resolver utilizando la altura de un paquete de 100 hojas.



n˚ de hojas x	10	300
peso y (g)	40	$\square$

n˚ de hojas x	100	300
altura y (cm)	1	$\square$

Soluciona


Julia

Utilizo la estrategia de María. Ella encontró el peso de un paquete de 10 hojas. Con el peso de 10 hojas obtengo el peso de una hoja y luego calculo el peso de 300 hojas.

Peso de una hoja: $40 \div 10 = 4$
Peso de 300 hojas: $4 \times 300 = 1{,}200$

R: Se prepara un paquete que pese 1,200 g

Utilizo la estrategia de Antonio, él encontró la atura de un paquete de 100 hojas. Como $300 = 100 \times 3$; entonces la cantidad de hojas se multiplica por 3, como la altura es directamente proporcional al número de hojas, la altura también se multiplica por 3

× 3

n˚ de hojas x	100	300
altura y (cm)	1	$\square$

× 3

Entonces $\square = 1 \times 3 = 3$
R: Se prepara un paquete de 3 cm de altura.

Comprende

Se puede preparar la cantidad aproximada de papel utilizando:
- El peso es directamente proporcional al número de hojas.
- La altura es directamente proporcional al número de hojas.

Así, no es necesario contar todas las hojas.

Resuelve

1. Al pesar 15 tuercas del mismo tipo pesan 32 g. ¿Cómo se pueden preparar 120 tuercas sin contarlas una a una?

¿El peso de las tuercas es directamente proporcional a la cantidad de tuercas? ¿Cuántas veces cabe 15 en 120?

× $\square$

n˚ de tuercas	15	120
peso (g)	32	$\square$

× $\square$

2. En la librería "Papelitos" preparan paquetes de 750 pliegos de cartulina. Un paquete de 150 pliegos de cartulina mide 3 cm ¿Cómo se puede preparar cada paquete de 750 pliegos sin contarlos uno a uno?

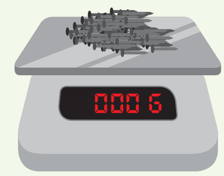
n˚ de pliegos	150	750
altura (cm)	3	$\square$

¿La altura es directamente proporcional al número de pliegos?

Proporcionalidad directa con un dato desconocido

Analiza

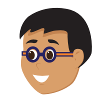
Al pesar 90 clavos del mismo tipo en una báscula pesan 180 g; en la misma báscula se coloca un puñado de estos clavos y pesan 20 g ¿Cuántos clavos hay sobre la báscula?



n° de clavos x	$\square$	90
peso y (g)	20	180

Soluciona

El peso es directamente proporcional al número de clavos.
Encuentro el cambio en el peso de los clavos.


Carlos

n° de clavos x	$\square$	90
peso y (g)	20	180

$\square \xrightarrow{\times 9} 90$, $20 \xrightarrow{\times 9} 180$

180 ÷ 20 = 9, entonces 20 × 9 es igual a 180, por lo tanto:

$$\square \times 9 = 90$$
$$\square = 90 \div 9 = 10$$

R: 10 clavos.

Obtengo el peso de cada clavo: 180 ÷ 90 = 2 (g) Cada clavo pesa 2 gramos.
Entonces, encuentro cuántas veces cabe 2 en 20

20 ÷ 2 = 10 **R:** Hay 10 clavos.

Comprende

Aplicando la definición o la propiedad de proporcionalidad directa, se puede encontrar un valor desconocido de dos cantidades que son directamente proporcionales.

Resuelve

1. Don José pasó a una gasolinera y solicitó 4.5 galones de gasolina, el costo de la compra fue de $13.5; otro señor pasó y el costo de la compra fue $27.00, ¿cuántos galones de gasolina compró el otro señor?

cantidad de gasolina x (gal)	4.5	$\square$
precio y ($)	13.5	27

¿Son el número de galones de gasolina y el precio cantidades directamente proporcionales?
¿Cuántas veces $13.5 cabe en $27.00?

2. Al pesar 36 chibolas iguales en una báscula pesan 324 g
En la misma báscula se pesa otro grupo de chibolas y pesan 81 g, ¿cuántas chibolas se pesaron la segunda vez?

n° de chibolas x	$\square$	36
peso y (g)	81	324

Aplica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de pasajeros de un autobús y el costo del pasaje. Estas cantidades son directamente proporcionales. ¿Qué números corresponden a ⓐ, ⓑ y ⓒ?

× 5 × 3 × 2

número de pasajeros	1	2	3	4	5	...
costo (centavos)	20	40	60	80	100	...

× ⓐ × ⓑ × ⓒ

2. Identifica si las siguientes cantidades son directamente proporcionales o no. Justifica tu respuesta.
   a. El número de cajas de lapiceros y la cantidad de lapiceros.

n° de cajas	1	2	3	4	5	...
n° de lapiceros	12	24	36	48	60	...

   b. Las edades de María y Juan al pasar los años.

edad de María	15	16	17	18	19	...
edad de Juan	12	13	14	15	16	...

3. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un rectángulo de base 4 cm cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)	4					...

   b. Utilizando la fórmula ***área* = *base* × *altura*.** Escribe un **PO** que relacione la altura x y el área y.

4. a. Completa la tabla que contiene la relación del área de un triángulo de base 6 cm; cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm...

altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
área y (cm^2)	3					...
cociente $y \div x$						

   b. Escribe un **PO** que relacione la altura x y el área y.

5. En una fábrica de dulces se preparan minibolsas con 32 dulces. Se sabe que 8 dulces pesan 72 g, ¿cómo se puede preparar una minibolsa sin contar los dulces uno a uno?

n° de dulces	8	32
peso (g)	72	☐

6. Ana compró 36 platos por $108.00 dólares, su amiga también compró de estos mismos platos y pagó $27.00 dólares, ¿cuántos platos compró la amiga de Ana?

n° de platos	☐	36
costo ($)	27	108

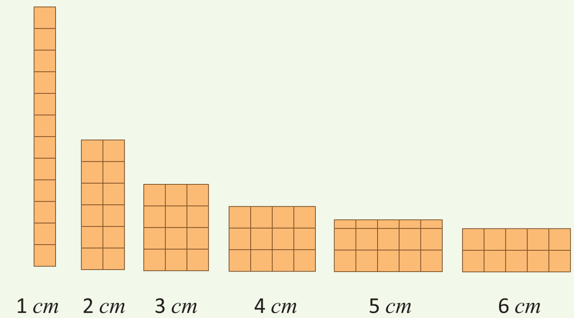
Relación de proporcionalidad inversa

Analiza

Carlos y Ana están dibujando rectángulos de área 12 cm^2. Observa y responde:

a. ¿Cómo cambia la longitud de la altura a medida que la longitud de la base aumenta o disminuye?

b. Si la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, ¿cómo cambia la longitud de la altura?



Soluciona

a. Observo que al aumentar la longitud de la base, la longitud de la altura disminuye.

b. Escribo la relación entre la base y la altura en una tabla y analizo la relación de la altura cuando la longitud de la base se duplica o se triplica.

Cuando la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, la longitud de la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$ o por $\frac{1}{3}$, respectivamente.

base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

$\times 3$ $\times 2$ $\times 3$ $\times 2$

$\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{2}$

Comprende

- Cuando dos cantidades x y y cumplen que al multiplicarse una por 2, por 3, etc. la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, respectivamente, se dice que las cantidades son **inversamente proporcionales** y esta relación se llama **proporcionalidad inversa**.

Resuelve

1. La tabla contiene la relación entre las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de área 18 cm^2 Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa las longitudes que hacen falta.

base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura (cm)							...

2. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de personas en un salón de 36 m^2 de área y el área que corresponde por persona. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa los espacios que hacen falta.

$\times 3$ $\times 2$

número de personas	1	2	3	4	...
área por persona (m^2)	36	18			...

Propiedad de la proporcionalidad inversa

Analiza

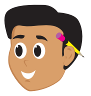
La siguiente tabla contiene los datos obtenidos en la clase anterior sobre la base y la altura de un rectángulo de área 12 cm^2. Calcula el producto de la base por la altura. ¿Cuánto resulta?

base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura y (cm)	12	6	4	3	2.5	2	...
producto							

Soluciona

Calculo el producto:

base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura y (cm)	12	6	4	3	2.5	2	...
producto	12	12	12	12	12	12	



José

El producto de la base por la altura es igual al área, por lo tanto el producto siempre es 12

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad inversa.
Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales el producto de estas cantidades siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la relación entre los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un automóvil para ir de la ciudad A a la ciudad B.

rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60	...
tiempo y (horas)	12	6	3	2	1	...

a. ¿Son la rapidez y el tiempo cantidades inversamente proporcionales?
b. ¿Cuál es la distancia que separa las ciudades A y B?

2. Una botella con jugo se reparte en vasos. La tabla contiene la cantidad de líquido en cada vaso dependiendo del número de vasos. Estas cantidades son inversamente proporcionales.

n° de vasos	2	4	8	10	...
capacidad (ml)	500	250			...
producto					

a. ¿Cuál es la capacidad de la botella?
b. Completa la tabla.

Identificación de cantidades inversamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

a. La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
tiempo y (h)	16	8	4	2	1	...

b. Las longitudes de la base y altura de un rectángulo de perímetro 18 cm

base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

Soluciona

a. Verifico si cumple las propiedades de la proporcionalidad inversa.

$\times 2$ $\times 8$ $\times 4$

rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
tiempo y (h)	16	8	4	2	1	...

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{8}$ $\times\frac{1}{4}$

- Si la rapidez cambia 2 veces, 4 veces, 8 veces, el tiempo cambia $\frac{1}{2}$ veces, $\frac{1}{4}$ veces y $\frac{1}{8}$ veces, respectivamente.
- También el producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta 80, esto significa que la distancia recorrida son 80 km
  R: La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia son inversamente proporcionales.

b. Verifico si cumple las propiedades de la proporcionalidad inversa.

Antonio

$\times 4$ $\times 3$ $\times 2$

base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

$\times\cancel{\frac{1}{4}}$ $\times\cancel{\frac{1}{2}}$ $\times\cancel{\frac{1}{3}}$

- Al aumentar la longitud de la base, la longitud de la altura disminuye; pero si la base cambia 2 veces, 3 veces, 4 veces, la longitud de la altura no cambia $\frac{1}{2}$ veces, $\frac{1}{3}$ veces, $\frac{1}{4}$ veces.
- El producto de la base por la altura no siempre resulta el mismo número.
  R: Las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm no son inversamente proporcionales.

Comprende

- Para identificar si dos cantidades son inversamente proporcionales se puede verificar que cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4,... la otra se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, respectivamente.
- Además el producto es constante.

Resuelve

1. Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta.

a. El número de estudiantes para una excursión y el costo del pasaje.

número de estudiantes	5	10	15	20	25	...
pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...

b. El número de chocolates de Julia y Mario al repartirse 8 chocolates.

chocolates de Julia	1	2	3	4	5	...
chocolates de Mario	7	6	5	4	3	...

c. El número de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento en una granja.

número de gallinas	200	400	600	800	...
número de días	30	15	10	7.5	...

Expresión y = constante ÷ x

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
producto $x \times y$						

a. Completa la última fila de la tabla con el producto de la rapidez por el tiempo.
b. Utilizando la relación de ***distancia = rapidez × tiempo***. Escribe un **PO** que relacione la rapidez y el tiempo.

Soluciona

a. Completo la última fila encontrando el producto:

rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
tiempo y (horas)	1	2	4	8	16	...
producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

El producto es constante ya que siempre resulta 80

b. Utilizo la relación ***distancia = rapidez × tiempo***, en este caso x representa la rapidez y y representa el producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta 80, es decir que la distancia que recorre el auto son 80 km

distancia = rapidez × tiempo

$$80 = x \times y$$

Entonces el **PO** que relaciona la rapidez x y el tiempo y es $80 = x \times y$, también se puede escribir como $x \times y = 80$ o bien $y = 80 \div x$

R: $x \times y = 80$ *ó* $y = 8 \div x$

Comprende

Cuando x y y son cantidades inversamente proporcionales el producto $x \times y$ siempre es constante. Cuando esto sucede la relación entre x y y se puede expresar con el **PO:**

$x \times y = constante$ o $y = constante \div x$

Recuerda los **POs** que expresan la relación de proporcionalidad directa: son de la forma $y = constante \times x$

Resuelve

1. La siguiente tabla contiene los datos de la base y la altura de un rectángulo de 18 cm^2 de área.

base x (cm)	1	2	3	6	9	...
altura y (cm)	18					...
producto $x \times y$						

a. Completa la tabla.
b. Utilizando la fórmula del área del rectángulo, escribe un **PO** que relacione la longitud de la base x y la longitud de la altura y. (Escríbelo de dos formas distintas).

2. Un grupo de alumnos para una excursión contratan un autobús a precio fijo. Observa los datos de la tabla que contienen las posibilidades del número de estudiantes y el costo que correspondería por estudiante.

número de estudiantes x	24	18	12	8	6	...
precio por estudiante y (\$)	6	8	12	18	24	...
producto $x \times y$						

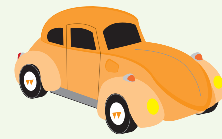
a. Completa la última fila de la tabla y responde, ¿cuál es el precio del autobús por hacer el viaje?
b. Escribe un **PO** que relacione el número de estudiantes x y el precio por estudiante y

Proporcionalidad inversa con un dato desconocido

Analiza

Un automóvil que circula a 60 km/h invierte 2 horas en cubrir la distancia que separa dos ciudades, si vuelve a realizar el viaje a una rapidez de 20 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará?

rapidez x (km/h)	60	20
tiempo y (h)	2	$\square$



Soluciona

Como la rapidez y el tiempo son cantidades inversamente proporcionales, el producto $x \times y$ siempre es constante.

rapidez x (km/h)	60	20
tiempo y (h)	1	$\square$
Producto $x \times y$	120	120

$x \times y = 120$

Entonces: $20 \times \square = 120$

$\square = 120 \div 20$

$\square = 6$

R: Si viaja a 20 km/h tardará 6 horas.

Resuelvo aplicando la definición de proporcionalidad inversa.

Julia

$\times \frac{1}{3}$

rapidez x (km/h)	60	20
tiempo y (h)	2	$\square$

$\times 3$

$60 \times \frac{1}{3} = 20$ la rapidez se multiplica por $\frac{1}{3}$

Entonces el tiempo se multiplica por 3

$\square = 2 \times 3$

$\square = 6$

R: Si viaja a 20 km/h tardará 6 horas.

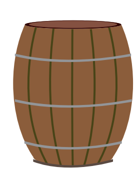
Comprende

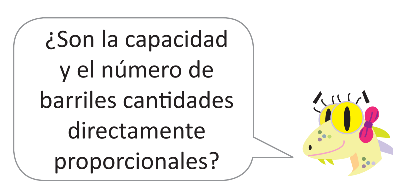
Se puede encontrar un valor desconocido en dos cantidades que son inversamente proporcionales utilizando la definición o la propiedad de proporcionalidad inversa, el producto es constante y si una cantidad cambia $\frac{1}{2}$ veces, $\frac{1}{3}$ veces, la otra cantidad cambia 2 veces o 3 veces, respectivamente.

Resuelve

1. Hay 8 barriles llenos de vino, con 200 litros cada uno. Se quiere envasar la misma cantidad de vino en 32 barriles iguales llenándolos completamente. ¿Cuál debe ser la capacidad de estos barriles?

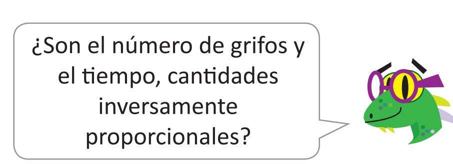
número de barriles x	8	32
capacidad y (l)	200	$\square$
producto $x \times y$		





2. Se llena un depósito en 6 horas, utilizando 4 grifos que vierten la misma cantidad de agua de forma constante. Si se usan 8 grifos con este mismo flujo de agua ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el depósito?

número de grifos x	4	8
tiempo (h)	6	$\square$
producto $x \times y$		



★Desafíate

Para enladrillar un piso se necesitan 40 ladrillos de 30 cm^2 ¿Cuántos ladrillos de 20 cm^2 se necesitarán para enladrillar la misma superficie?

número de ladrillos	40	$\square$
área de cada ladrillo (cm^2)	30	20

Aplica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de gallinas en una granja y el tiempo que tardan en comer cierta cantidad de alimento.
   a. ¿Qué números se deben escribir en lugar de ⓐ, ⓑ, ⓒ y ⓓ

× 2 × 3 × 5 × 4

número de gallinas	50	100	150	200	250	300	...
tiempo (días)	48	24	16	12	9.6	8	...

×ⓐ ×ⓑ ×ⓒ ×ⓓ

   b. ¿Son el número de gallinas y el tiempo que tardan en comer el alimento cantidades inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

2. Identifica cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales y explica tu respuesta.
   a. El número de niños y la cantidad de cinta que les corresponde si se reparten 30 metros de cinta.

número de alumnos	1	2	3	4	5	...
cinta (m)	30	15	10	7.5	6	...

   b. El número de paletas que les corresponde a Carlos y María si se reparten 9 paletas.

paletas de Carlos	1	2	3	4	5	...
paletas de María	8	7	6	5	4	...

3.
   a. Completa la tabla con los posibles valores que puede tomar la base y la altura de un paralelogramo de área 120 cm^2

base x (cm)	1	2	3	4	5	...
altura y (cm)	120					...

   b. Utilizando la fórmula del área de un paralelogramo, ***área* = *base* × *altura***, escribe un **PO** que relacione la longitud de la base x y la longitud de la altura y

4. Si 6 trabajadores siembran una parcela con maíz en 4 días.
   ¿cuánto tardarían en sembrar la misma parcela 12 trabajadores trabajando al mismo ritmo?

número de trabajadores	6	12
tiempo (días)	4	▢

Proprocionalidad directa e inversa

Analiza

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no son proporcionales. En caso de ser directamente proporcionales o inversamente proporcionales escribe el **PO** que relaciona x y y

a. La base y la altura de un rectángulo de perímetro 16 cm

base x (cm)	1	2	3	4	5	...
altura y (cm)	7	6	5	4	3	...

b. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda para recorrer 120 km de distancia.

rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
tiempo y (h)	6	3	2	1.5	...

c. La longitud de un alambre y su peso.

longitud x (m)	2	4	6	8	...
peso y (g)	18	36	54	72	...

Soluciona

Encuentro la relación entre x y y analizando, si el cociente es constante, o el producto es constante.

Julia

a. En este caso la suma de la base y la altura es siempre constante.
La base y la altura de un rectángulo de perímetro 16 cm no son cantidades directamente proporcionales, ni inversamente proporcionales.

base x (cm)	1	2	3	4	5	...
altura y (cm)	7	6	5	4	3	...
suma $x + y$	8	8	8	8	8	...

b. En este caso el producto de la rapidez por el tiempo es constante:

rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
tiempo y (h)	6	3	2	1.5	...
producto $x \times y$	120	120	120	120	...

Como el producto es constante, la rapidez y el tiempo son inversamente proporcionales, además:

distancia = rapidez × tiempo

PO: $120 = x \times y$ o $y = 120 \div x$

c. El cociente de peso del alambre entre la longitud del alambre es constante.

longitud x (m)	2	4	6	8	...
peso y (g)	18	36	54	72	...
cociente $y \div x$	9	9	9	9	...

Como el cociente es constante, la longitud y el peso son directamente proporcionales.

PO: $y = 9 \times x$

Comprende

- Se puede identificar si dos cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o tienen otro tipo de relación buscando si la suma, la resta, el producto o el cociente es constante.
- Cociente constante: proporcionalidad directa.
- Producto constante: proporcionalidad inversa.

Resuelve

1. Identifica si las siguientes cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o tienen otro tipo de relación, justifica tu respuesta. En caso de ser directamente o inversamente proporcionales escribe el **PO** que relaciona x y y

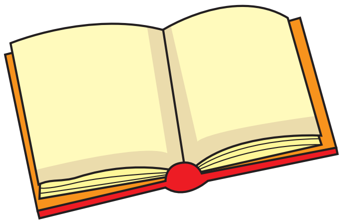
a. La base y la altura de un rectángulo de área 60 cm^2

base x (cm)	1	2	3	4	...
altura y (cm)	60	30	20	15	...

b. Las edades de Marta y Beatriz.

edad de Marta	10	11	12	13	...
edad de Beatriz	7	8	9	10	...

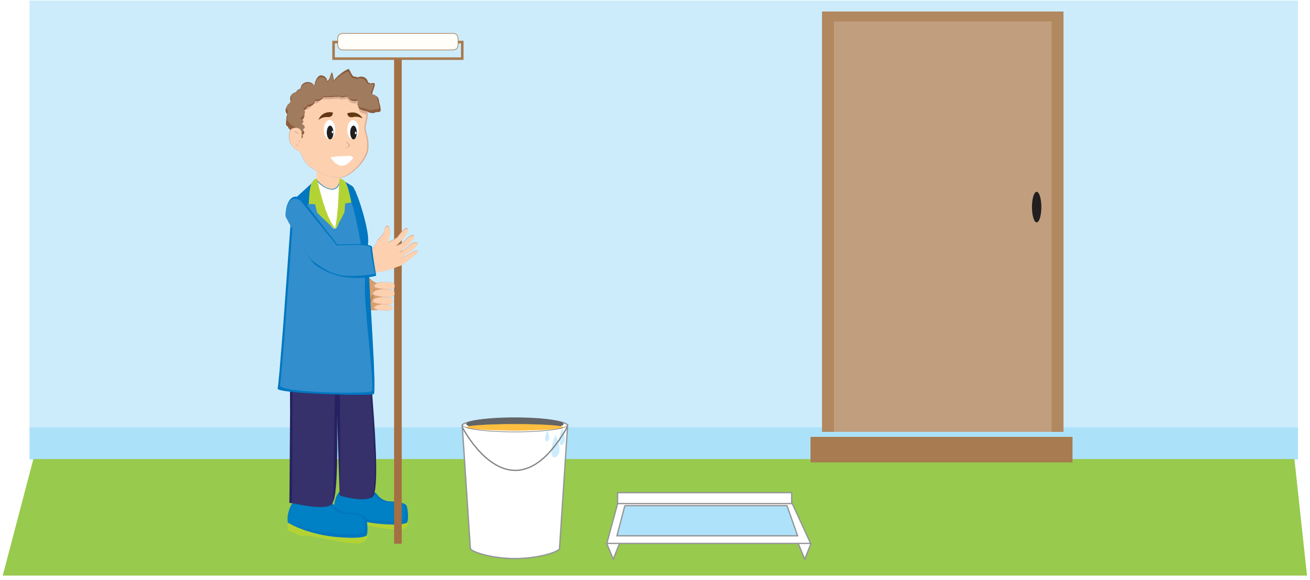
c. El número de páginas de un libro y su peso.



número de páginas	150	300	450	600	...
peso (lb)	2	4	6	8	...

d. El número de pintores y la cantidad de días que tardan en pintar una casa.

número de pintores	4	8	12	16	...
número de días	12	6	4	3	...



¿Sabías que...?

Existen dos algoritmos para encontrar un dato que falta en cantidades que son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Proporcionalidad directa

Si dos cantidades son directamente proporcionales se usa la regla de tres directa.

cantidad A	a	c
cantidad B	b	$\square$

La solución es: $\square = \dfrac{b \times c}{a}$

Ejemplo 1

Si 3 dulces pesan 18g. ¿Cuánto pesan 8 dulces?

El peso es directamente proporcional a la cantidad de dulces, entonces se utiliza la regla de tres directa.

La solución es:

número de dulces	3	8
peso (g)	18	$\square$

$$\square = \frac{18 \times 8}{3}$$

$$\square = \frac{144}{3}$$

$$\square = 48$$

R: 8 dulces pesan 48g.

Ejemplo 2:

Si 4 manzanas cuestan $1.00 dólar. ¿Cuánto cuestan 16 manzanas?

El precio es directamente proporcional a la cantidad de manzanas, entonces se utiliza la regla de tres directa.

La solución es:

número de dulces	4	16
peso (g)	1	$\square$

$$\square = \frac{1 \times 16}{4}$$

$$\square = \frac{16}{4}$$

$$\square = 4$$

R: 16 manzanas cuestan $4.00 dólares.

Proporcionalidad inversa

Si dos cantidades son inversamente proporcionales se usa la regla de tres inversa.

cantidad A	a	c
cantidad B	b	$\square$

La solución es: $\square = \dfrac{a \times b}{c}$

Ejemplo 1

Si 4 trabajadores pintan una casa en 2 días. ¿cuánto tardarán 8 trabajadores si trabajan al mismo ritmo?

El número de trabajadores y la cantidad de horas son inversamente proporcionales, entonces se utiliza la regla de tres inversa.

número de trabajadores	4	8
tiempo (días)	2	$\square$

La solución es: $\square = \dfrac{4 \times 2}{8}$

$$= \frac{8}{8}$$

$$= 1$$

R: 8 trabajadores pintarían la casa en 1 día.