Matemática

7

Libro de Texto

Segunda edición

ESMATE

Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Lic. Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Lic. Óscar de Jesús Águila Chávez
Director Nacional de Educación Media (Tercer Ciclo y Media)
Director del Proyecto ESMATE

Licda. Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Directora Nacional de Educación Básica

Licda. Mélida Hernández de Barrera
Directora Nacional de Prevención y Programas Sociales

Ing. Wilfredo Alexander Granados Paz
Gerente de Gestión y Desarrollo Curricular de Educación Media
Coordinador del Proyecto ESMATE

Lic. Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Jefe del Departamento de Especialistas en Currículo de Educación Media
Coordinador del equipo de Educación Básica, proyecto ESMATE

Lic. Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación (Matemática)
Coordinador del equipo de Tercer Ciclo y Bachillerato, proyecto ESMATE

Equipo Técnico Autoral del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
Félix Abraham Guevara Menjívar

Equipo de diagramación

Neil Yazdi Pérez Guandique
Francisco René Burgos Álvarez
Michael Steve Pérez Guandique
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

Revisión a nivel nacional por especialistas formados dentro del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio.
Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Segunda edición, 2019.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se puede apreciar, transformaciones de figuras, proporciones, potencias de números. La imagen se construye a partir de secuencia de cuadrados.

372.704 5
M425 Matemática 7 : libro de texto / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Reina Maritza Pleitez, Diana Marcela Herrera, César Omar Gómez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, Félix Abraham Guevara ; diagramación Neil Yazdi Pérez, Francisco René Burgos, Michael Steve Pérez, Judith Samanta Romero ; corrección de estilo Mónica Marlene Martínez, Marlene Elizabeth Rodas. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
188 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-60-7 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991-, coaut. II. Título.
BINA/jmh

Matemática

7

Libro de Texto
Segunda edición

ESMATE

Estimados jóvenes:

Es grato dirigirnos a ustedes con el propósito de felicitarlos por iniciar un nuevo año escolar con mucho entusiasmo, voluntad y entrega.

Desde "El proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media"(ESMATE), hemos trabajado este libro de texto, el cual presenta una nueva propuesta para el abordaje de la matemática.

Estamos convencidos que saber matemática significa tener una excelente herramienta para el desarrollo de sus capacidades productivas y ciudadanas; ya que les ayuda a ser más eficientes, a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Tenemos la seguridad de que su encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología constructiva, retadora y exigente, con el único fin de que los conocimientos matemáticos les enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en sus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Recuerden que en nuestro país todos los jóvenes son capaces de aprender y desarrollarse. Mantengan la confianza en sus capacidades, porque todos pueden alcanzar el éxito con esfuerzo, disciplina y dedicación.

Mucho ánimo ya que contamos con lo mejor de ustedes para desarrollar un mejor El Salvador.

Atentamente,

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Presentación del libro

Segunda edición

En la presente edición se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes de tercer ciclo del sistema educativo nacional.

Íconos

La letra P representa el Problema inicial. En el primer momento de cada clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática la cual permite introducir el contenido que se va a desarrollar.

La letra S simboliza la Solución. En este segundo momento, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Con la C de Conclusión se llega a la explicación del contenido. Aquí se relacionan los momentos P y S para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

La letra E representa un ejemplo. A veces es necesario presentar un problema adicional, que permita consolidar el contenido de la clase.

El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

Información complementaria

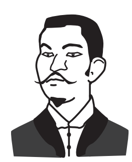
En el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional como historia de la matemática, esto se representa con diferentes colores:

Presaberes

Pista

Información adicional

En la información adicional donde aparezca la imagen del Dr. Alberto Sánchez, es porque se presenta historia de la matemática como un recurso de aprendizaje.



Alberto Sánchez (1864-1896)

El Dr. Alberto Sánchez, un matemático salvadoreño del siglo XIX, describió una curva que él llamó la cornoide, este fue uno de sus trabajos más relevantes como matemático.
Esta curva aparece en la contraportada de este libro.

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 de la lección 2 de la unidad 1 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 Orden de los números negativos y su valor absoluto

Indica el número de clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta morada en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 1

Índice

Unidad 1
Números positivos, negativos y el cero 1

Unidad 2
Suma y resta de números
positivos, negativos y el cero 11

Unidad 3
Multiplicación y división de números
positivos, negativos y el cero 25

Unidad 4
Comunicación con símbolos 53

Unidad 5
Ecuaciones de primer grado 87

Unidad 6
Proporcionalidad directa e inversa 113

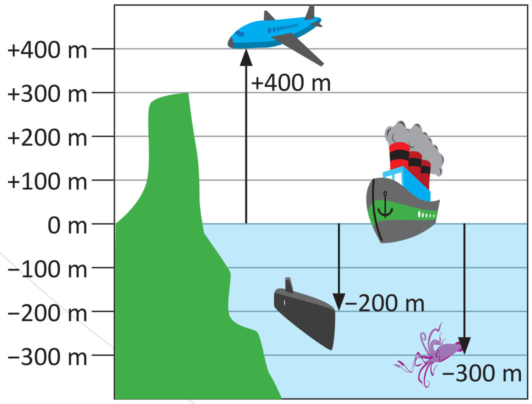
Unidad 7
Gráfica de faja y circular 139

Unidad 8
Figuras planas y construcción
de cuerpos geométricos 151

Unidad 1

Números positivos, negativos y el cero

En la antigüedad una de las principales actividades económicas fue el comercio, el cual conllevó la necesidad de la creación y sustentación de un sistema numérico que ayudara a contar. Fue en este contexto histórico que surgió la necesidad de saber cómo interpretar en dicho sistema numérico, la situación de tener un "crédito" o una "deuda", por ello en el siglo VII el matemático hindú Brahmagupta introduce las propiedades y reglas de los números negativos, este concepto fue aceptado por los matemáticos hasta finales del siglo XVIII, cuando Leonhard Euler brindó algunas fundamentaciones teóricas sobre este sistema numérico.



Aplicación de los números negativos para la representación de alturas.

A partir de su común aceptación y fundamentación matemática como números menores que la nada y superiores a algo infinito negativo, se han utilizado estos números en áreas científicas para medición de temperaturas, movimientos en sentidos contrarios, alturas de montañas o profundidades de océanos, valores de carga eléctrica, resolución de ecuaciones que modelan situaciones de la vida cotidiana, deudas (como se originó el concepto), entre otras.

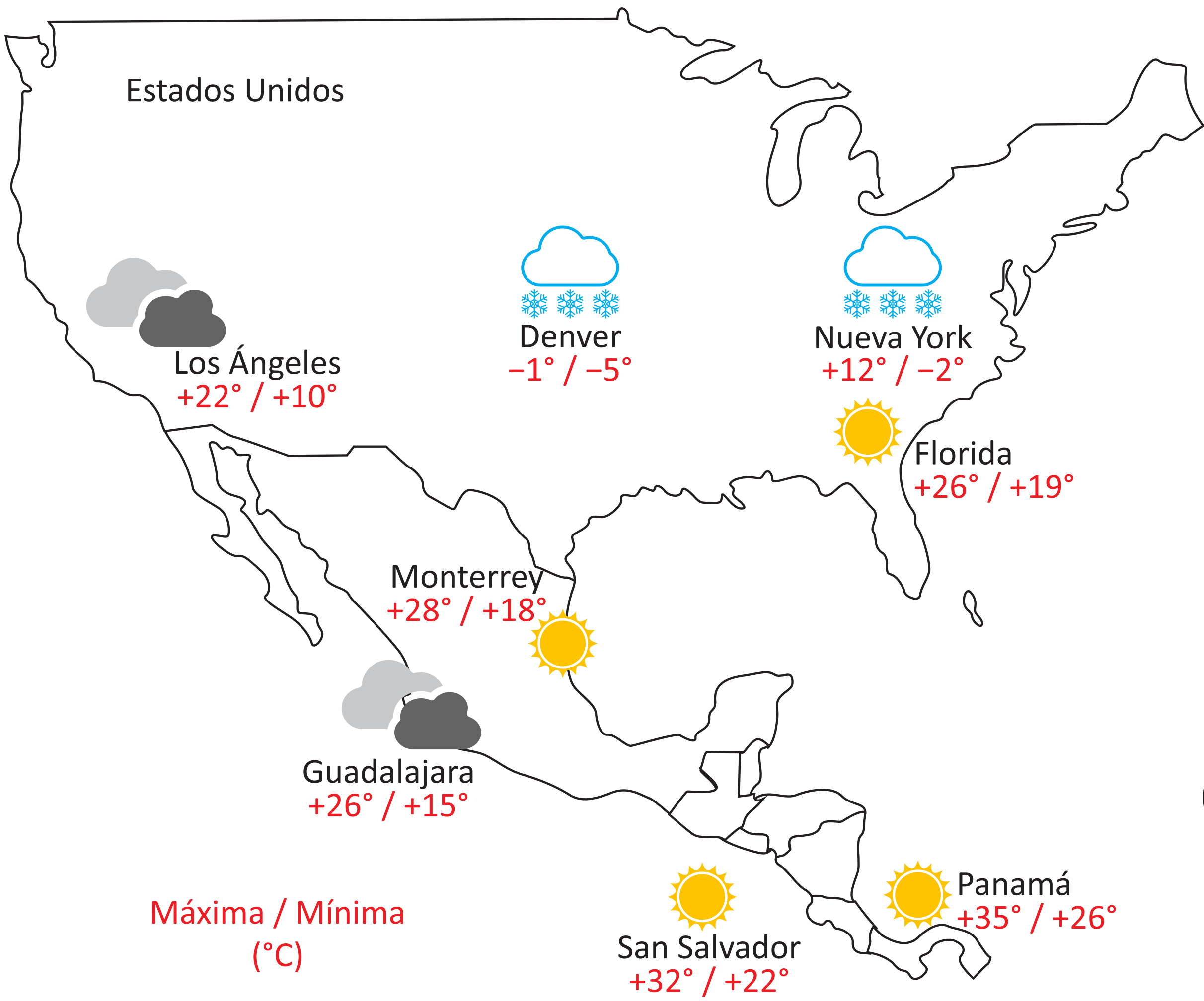
En esta unidad aprenderás sobre el concepto y la definición de los números negativos, positivos y el cero, además de su representación geométrica en la recta numérica y el concepto de valor absoluto.

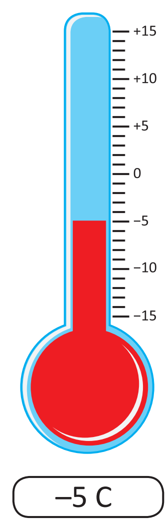
1.1 Números positivos, negativos y el cero para la temperatura

P

La imagen muestra el pronóstico del tiempo de algunas ciudades de Centroamérica y Norteamérica. Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será la temperatura máxima y mínima en San Salvador?
2. ¿Cuál será la temperatura máxima y mínima en Nueva York?
3. ¿En qué ciudad se registrará la temperatura más baja?





S

1. La temperatura máxima en San Salvador será de +32° C y se lee, más 32 grados centígrados. Y su mínima será de +22° C y se lee, más 22 grados centígrados.

2. La temperatura máxima en Nueva York será de +12° C y se lee, más 12 grados centígrados. La temperatura mínima en Nueva York será –2° C y se lee, menos 2 grados centígrados.

3. La temperatura más baja se registrará en Denver, donde la temperatura mínima será de –5° C (menos 5 grados centígrados).

El cerro El Pital se encuentra a 83 km de la capital de San Salvador, el cual es uno de los lugares más fríos en El Salvador, donde se han registrado temperaturas menores a los +1.2° C.

C

Para medir la temperatura se toma 0° C como el punto de referencia. Temperaturas por arriba de 0° C se representan con un signo (+) antes del número, por ejemplo +12° y se lee "más doce grados centígrados". Temperaturas debajo de 0° C se representan con un signo (–) antes del número, por ejemplo –5° C y se lee "menos 5 grados centígrados".

A los números que les antecede un signo (+) como +12 se les llama **números positivos** y a los números que les antecede un signo (–) como –12 se les llama **números negativos**. El número 0 no es positivo ni es negativo.

Ahora que ya se conocen números negativos como –5, al decir **números** se incluye **números positivos**, **0** y **números negativos.** Los números positivos se pueden expresar con o sin el signo (+), por ejemplo +5 es equivalente a escribir 5, e igualmente escribir 6 es equivalente a escribir +6. Vale aclarar que para escribir un número negativo nunca se debe omitir la escritura del signo (–). Por tanto, los números +1, +2, +3, +4, +5, ... son los mismos **números naturales** que se conocen. Algunos autores consideran al número 0 como el primer número natural, pero en este texto se considerará al 1 como el primero. También los números decimales y las fracciones pueden ser negativas.

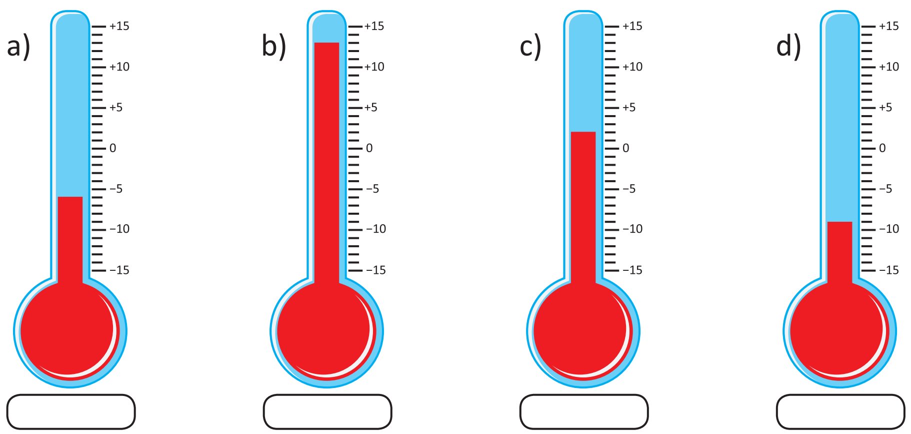
Números

Números negativos		*Números positivos*
$-\frac{4}{9}$ -3.6 ..., -3, -2, -1	0	$+\frac{4}{9}$ $+3.6$ *Números Naturales* +1, +2, +3, ... $+\frac{3}{5}$ $+1.5$

1. Expresa las siguientes temperaturas con el signo positivo o negativo según corresponda.
   a) 12° C por encima de los 0° C
   b) 5° C por debajo de los 0° C
   c) 28.5° C por encima de los 0° C
   d) 3° C por debajo de los 0° C
   e) 9° C por debajo de los 0° C
   f) 27.7° C por encima de los 0° C

2. Escribe la temperatura que marca cada termómetro.

a) b) c) d)



En un termómetro se toma 0° C como el punto de referencia. Valores más altos que 0° C se expresan como +☐° C; valores más bajos como –☐° C.

3. Coloca en el grupo correspondiente los siguientes números positivos y negativos.
   $+6, -5, +\frac{2}{11}, -1.5, -\frac{5}{9}, +7, +8, -6, -8, -0.3$

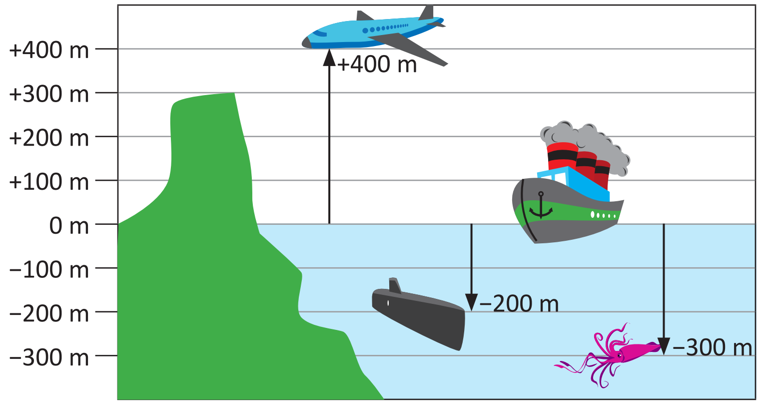
Números

Números negativos		*Números positivos*
	0	*Naturales*

1.2 Ubicación respecto a un punto de referencia

En la imagen, se muestran las alturas y profundidades de distintos objetos con respecto al nivel del mar.

Por ejemplo, la altura de la avioneta es de 400 m sobre el nivel del mar y se escribe como +400 m. El submarino se encuentra a 200 m bajo el nivel del mar y se escribe como −200 m.



1. Con referencia al nivel del mar, cómo se representa la altura de
   a) El cerro
   b) El calamar

2. Si un buzo se encuentra 30 m bajo el nivel del mar, ¿cómo se expresa esa altura?

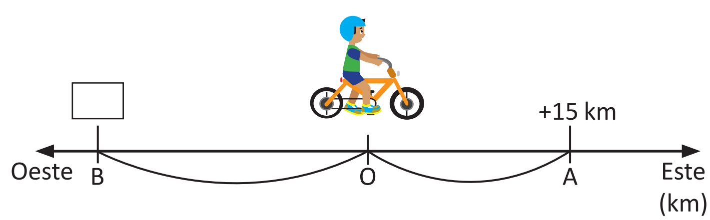
Las cantidades positivas se interpretan como “sobre el nivel del mar” y las negativas “bajo el nivel del mar”. Así: +300 m se interpreta como 300 m sobre el nivel del mar y −300 m se interpreta como 300 m bajo el nivel del mar.

1. Con referencia al nivel del mar, se tiene que
   a) La altura del cerro es de +300 m y se lee **más 300 metros**.
   b) La altura del calamar es −300 m y se lee **menos 300 metros**.
2. Si un buzo se encuentra 30 metros por debajo del nivel del mar, se expresa como −30 m.

Cuando se define un punto de referencia y hay objetos cuya posición varía respecto a ese punto; se puede asignar un número positivo (+) o un número negativo (−) a sus posiciones.

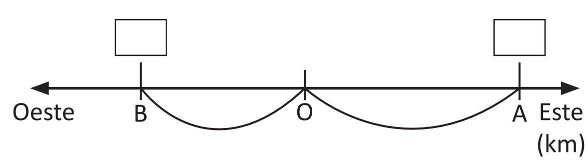
Mario se encuentra ubicado en el punto O de una carretera. Si se expresa con +15 km la posición del punto A que se ubica 15 km hacia el este del punto O, ¿cómo se expresa la posición del punto B que queda 22 km hacia el oeste del punto O?

Solución.
Como el punto B está en dirección contraria del punto A en referencia al punto O, la respuesta es: −22 km.



Si en una carretera se establece que el punto de referencia es O, y la dirección hacia el oeste es negativa (−), la dirección hacia el este es positiva (+).

a) ¿Cómo se expresa la posición del punto A que está a 7 km al este de O?
b) ¿Cómo se expresa la posición del punto B que está a 5 km al oeste?
c) Si otro punto C se encuentra a −8 km, ¿en qué dirección está ubicado C respecto de O y a qué distancia?



1.3 Diferencia de una cantidad respecto a otra cantidad de referencia

P

El centro turístico Los Chorros tiene como meta recibir 200 personas por día. La siguiente tabla muestra el número de asistencias al centro turístico durante una semana. Tomando como positivo cuando el número de asistentes sobrepasa la meta. Completa los datos faltantes en la tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Asistencia	191	193	204	180	225	200
Diferencia con la meta		−7			+25	

S

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Asistencia	191	193	204	180	225	200
Diferencia con la meta	−9	−7	+4	−20	+25	0

C

Para representar la diferencia de cantidades mayores o menores respecto a una cantidad de referencia, se utilizan números positivos o negativos.

Por ejemplo: 10 más que la cantidad de referencia, se expresa **+10**
3 menos que la cantidad de referencia, se expresa **−3**

E

Expresa con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia:

a) 2 lb más del "peso ideal"
b) 6 cm menos de la "medida solicitada" a la costurera
c) 15 personas más " de las esperadas"
d) $5 menos de la "cantidad que se tenía**"**

Solución.

a) +2
b) −6
c) +15
d) −5

En ocasiones se utilizan números negativos para representar situaciones como la disminución, pérdida o deuda.

1. Expresa con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia:

a) 4 lb menos del "peso ideal"
b) 2 kg más del "peso permitido"
c) 10 cm menos de la "altura permitida"
d) 5 km/h menos de la "velocidad establecida"

2. Una empresa que fabrica focos, tiene como meta producir 500 focos cada día. Tomando como positivo el dato que sobrepasa la meta, completa la siguiente tabla.

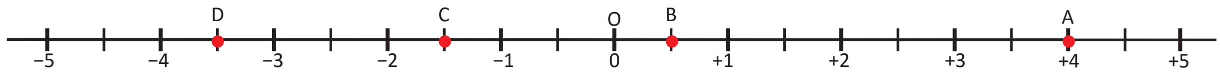
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Producción	525	450	498	530	300
Diferencia con la meta					

¿Sabes cómo llamaban antes a los números negativos?
Números ficticios, absurdos, o números deudos.

1.4 Recta numérica

P

Observa la siguiente recta numérica:



1. ¿Qué características tiene?
2. ¿Qué números corresponden a los puntos A, B, C y D?

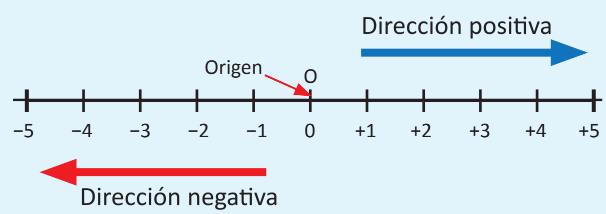
S

1. Características:
   - El punto de referencia se corresponde con el número “0”.
   - Las marcas están a la misma distancia tanto a la derecha como a la izquierda del punto “O”.
   - Los números positivos están a la derecha del punto “O” y los números negativos están a la izquierda del punto “O”.

2. A ➞ +4, B ➞ +0.5 o $+\frac{1}{2}$, C ➞ −1.5 o $-\frac{3}{2}$ y D ➞ −3.5 o $-\frac{7}{2}$

C

- En la recta numérica, los números negativos se ubican a la izquierda de cero y los positivos a la derecha de cero.
- El punto que corresponde a cero se llama punto de origen y se representa con la letra O.
- La dirección hacia la derecha se llama dirección positiva.
- La dirección hacia la izquierda se llama dirección negativa.

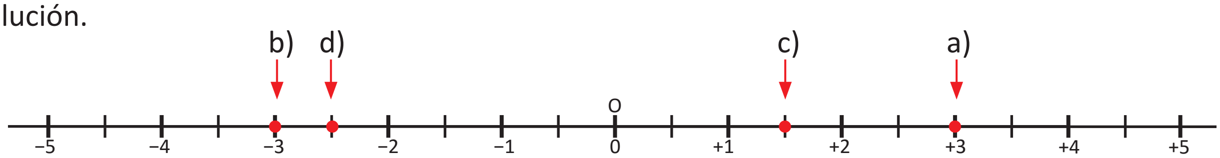


E

Ubica los siguientes números en la recta numérica.

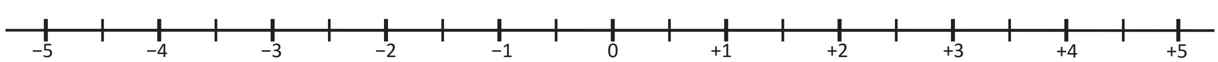
a) +3 b) −3 c) +1.5 d) −2.5

Solución.

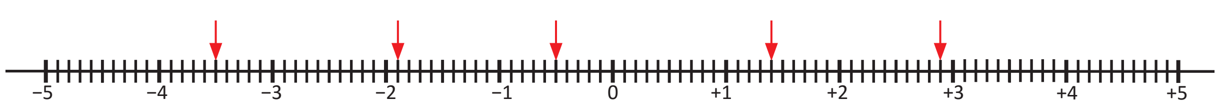


1. Ubica los siguientes números en la recta numérica y señala el lugar que le corresponde.

   a) +0.5 b) −1.5 c) −0.5 d) $+\frac{3}{2}$



2. Identifica y escribe los números señalados por cada flecha.

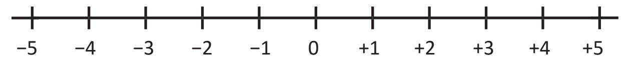


2.1 Comparación de números positivos y negativos

P

Responde las siguientes preguntas:

a) En la recta numérica, ¿cuál de los números está más a la derecha +2 o +4?
b) ¿Cuál de ellos es mayor?
c) ¿Cuál de los números −3 o −5 está más a la derecha en la recta numérica?



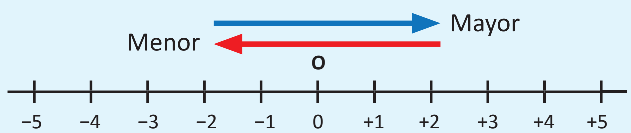
S

a) El número +4 está más a la derecha que +2.
b) El mayor de ellos es +4.
c) −3 está ubicado más a la derecha que −5 en la recta numérica.

Los símbolos > (mayor que) y < (menor que) son utilizados para expresar una relación de orden entre dos números, y se les llama **signos de desigualdad**.

C

Conforme se avanza a la derecha en la recta, los números son mayores y conforme se avanza hacia la izquierda los números son menores.



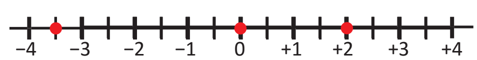
Según lo anterior, −3 se encuentra más a la derecha que −5 en la recta, por tanto la relación de orden entre −3 y −5 se expresa: −5 < −3 o −3 > −5.

E

Expresa la relación de orden entre los números 0, −3.5, +2.

Solución.
En la recta numérica 0 está a la derecha de −3.5 y +2 está a la derecha de 0.

- Por lo tanto, −3.5 < 0 y 0 < +2.
- Esto puede expresarse como −3.5 < 0 < +2 o bien +2 > 0 > −3.5.



Los números positivos son mayores que 0.
Los números negativos son menores que 0.

1. Compara los siguientes números con los signos > y <, apóyate en la recta numérica.
   a) −2, −3 b) +4, 0 c) +1, −2 d) 0, +1, −2

2. La relación de orden –3 < +4 < –2 está incorrecta. Escríbela correctamente.

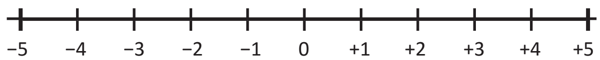
3. Completa la oración escribiendo la palabra “mayor” o “menor”, según corresponda.
   a) Cualquier número positivo es _________ que cualquier número negativo.
   b) El cero es __________ que cualquier número negativo y _________ que cualquier número positivo.

4. En cada literal, ¿qué número es el mayor?
   a) –0.1, –0.01 b) $-\frac{1}{7}, -\frac{1}{5}$ c) $-\frac{1}{2}$, –0.5

2.2 Valor absoluto

P

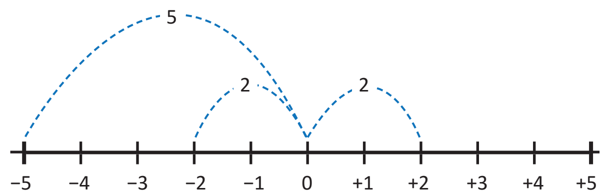
En la recta numérica:



a) ¿Cuál es la distancia que hay entre –5 y 0?
b) ¿Cuál es la distancia que hay entre +2 y 0?
c) ¿Cuál es la distancia que hay entre –2 y 0?

S

a) La distancia entre –5 y 0 es 5.
b) La distancia entre +2 y 0 es 2.
c) La distancia entre –2 y 0 es 2.



C

Tomando como punto de referencia a “0”, a la distancia que hay entre 0 y otro número se le llama valor absoluto. Y se expresa mediante el símbolo | |. Por ejemplo:

|−5| = 5 significa que el valor absoluto de –5 es 5 (la distancia entre 0 y –5 es 5).
|+2| = 2 significa que el valor absoluto de +2 es 2 (la distancia entre 0 y +2 es 2).
|−2| = 2 significa que el valor absoluto de –2 es 2 (la distancia entre 0 y –2 es 2).

Se observa que |−2| = |+2| = 2. La distancia entre +2 y 0 es la misma que la distancia entre −2 y 0.
Expresiones como |−2| = 2 se leen “el valor absoluto de menos dos es igual a dos”.

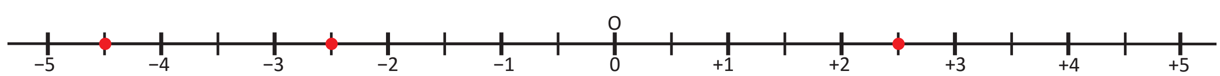
A los pares de números que tienen signos distintos e igual valor absoluto se les conoce como **números opuestos**.

E

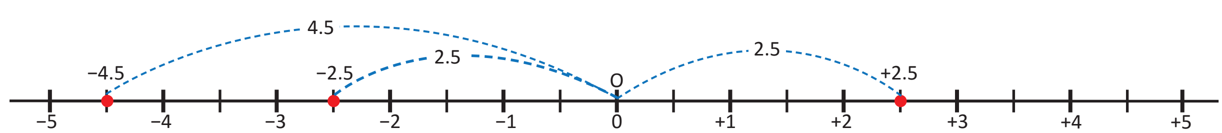
Utilizando la recta numérica, encuentra el valor absoluto de los siguientes números, y responde cuáles de ellos son números opuestos.

a) |−2.5| b) |−4.5| c) |+2.5|

Solución.
Primero, se ubican en la recta numérica los números indicados en cada literal.



Luego, se encuentran las distancias correspondientes.



Por tanto:

a) |−2.5|=2.5 b) |−4.5|=4.5 c) |+2.5|=2.5

Se observa que –2.5 y +2.5 son números opuestos, pues tienen igual distancia respecto de cero.

Encuentra el valor absoluto de los números en cada literal, y determina si son números opuestos.

a) +6, –6 b) –4, +3 c) +3.5,–4.5 d) –1.5, +1.5
e) +5, –2.5 f) –6.3, +8 g) $-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$ h) –0.5, $+\frac{1}{2}$

2.3 Orden de los números negativos y su valor absoluto

P

Al comparar números positivos: un número es mayor cuando el valor absoluto del número es mayor que el valor absoluto de otro número. Por ejemplo, al comparar $+4$ y $+7$. Los dos números son positivos y $|+4| = 4$, $|+7| = 7$, por lo tanto $+4 < +7$.

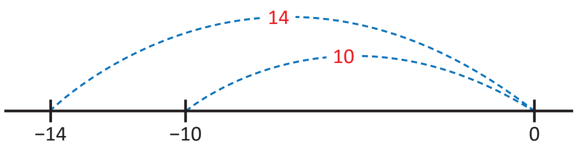
Analiza ahora lo que sucede al comparar números negativos y su valor absoluto. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor absoluto de -14?
b) ¿Cuál es el valor absoluto de -10?
c) ¿Qué número es mayor entre -14 y -10?
d) Escribe una regla para la comparación de dos números negativos utilizando el valor absoluto.

Recuerda que el valor absoluto de un número significa la distancia de cero a ese número.

S

a) $|-14|=14$
b) $|-10|=10$
c) $-14 < -10$



Puedes comprobar la respuesta, ya que -14 está a la izquierda de -10; por tanto, $-14 < -10$.

d) El número que tiene mayor valor absoluto es el número menor.

C

Al comparar números negativos: el número que tiene mayor valor absoluto es el menor de los dos números.

E

Utilizando valor absoluto, compara los números: -15 y -2.5, y escribe la relación de orden.

Solución.
Los dos números son negativos, además:
$|-15| = 15$
$|-2.5| = 2.5$

$15 > 2.5$ El valor absoluto de -15 es mayor que el valor absoluto de -2.5.

Por lo tanto, $-15 < -2.5$.

1. Aplicando valor absoluto determina el menor y mayor de los siguientes números, y escribe la relación de orden.
   a) $-4, -3$ b) $-23, -39$ c) $-0.8, -0.12$ d) $-\frac{7}{6}, -1$

2. Completa las siguientes oraciones con las palabras *mayor* o *menor*.
   a) Los números positivos son _________ que el cero, los números negativos son __________ que cero. Por tanto, un número positivo es siempre ___________ que un número negativo.
   b) Entre dos números positivos es __________ el que tiene mayor valor absoluto.
   c) Entre dos números negativos es __________ el que tiene menor valor absoluto.

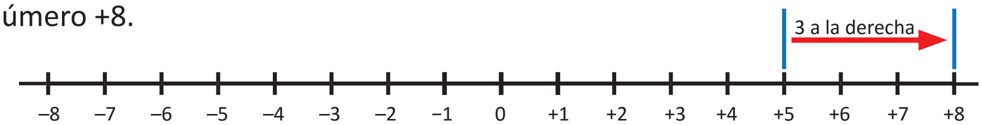
3. Aplicando valor absoluto determina el menor y mayor de los siguientes números, y escribe la relación de orden.
   a) $-15, -2, -36$ b) $-5, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ c) $-0.1, -0.01, -0.001$

2.4 Desplazamientos en la recta

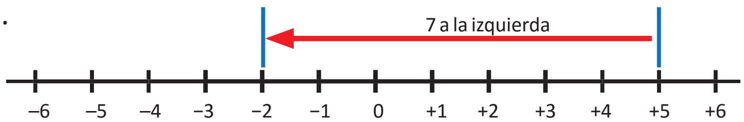
Utilizando de la recta numérica, responde lo siguiente:

a) ¿Qué número es 3 unidades mayor que +5?
b) ¿Qué número es 7 unidades menor que +5?

a) El número que es 3 unidades mayor que +5, es el que se ubica 3 unidades a la derecha de +5. Este es el número +8.



b) El número que es 7 unidades menor que +5, es el que se ubica 7 unidades a la izquierda de +5. Este es el número −2.



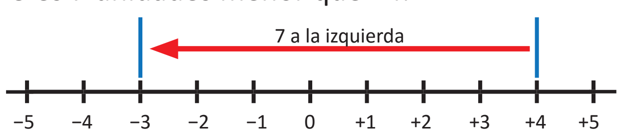
Utilizando las posiciones de los números y desplazamientos a la derecha o a la izquierda en la recta numérica, se pueden encontrar números mayores o menores que un número dado.

Responde:

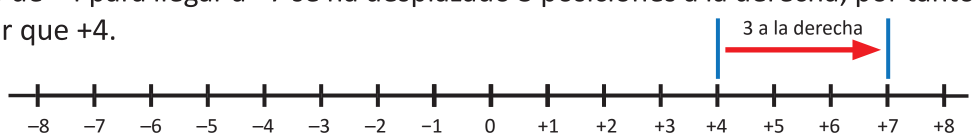
1. ¿Cuántas unidades es menor –3 con respecto a +4?
2. ¿Cuántas unidades es mayor +7 con respecto a +4?

Solución.

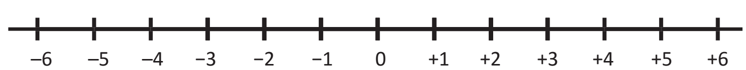
1. Partiendo de +4 para llegar a −3, se ha desplazado 7 posiciones a la izquierda como se muestra en la figura; por lo tanto, −3 es 7 unidades menor que +4.



2. Partiendo de +4 para llegar a +7 se ha desplazado 3 posiciones a la derecha; por tanto, +7 es 3 unidades mayor que +4.



1. Utilizando la recta numérica:



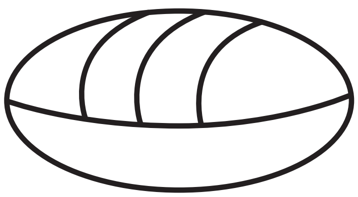
a) Encuentra el número que es 7 unidades menor que +3.
b) Encuentra el número que es 4 unidades mayor que −2.
c) ¿Cuántas unidades es mayor +4 con respecto a −3?
d) ¿Cuántas unidades es menor −5 con respecto a −3?
e) ¿Cuántas unidades es mayor +3.5 con respecto a +1?
f) ¿Cuántas unidades es menor –5.5 con respecto a +1?

2. Sin utilizar la recta numérica responde:

a) ¿Cuántas unidades es mayor +12 con respecto a +1?
b) ¿Cuántas unidades es menor −12 con respecto a −1?

Unidad 2

Suma y resta de números positivos, negativos y el cero



La figura es una concha que para los mayas simbolizaba el número cero.

El primer matemático que estableció las propiedades y las reglas para sumar y restar números negativos fue el matemático hindú Brahmagupta; otro de sus aportes fue la inclusión del cero como número y la fundamentación de su existencia y uso; sin embargo, otras culturas como la maya habían descubierto y usado con anterioridad el cero en su sistema numérico, esto aproximadamente en el año 36 a.C.

Las reglas para sumar y restar números negativos estaban fundamentadas en las actividades de comercio referidas a deudas y créditos, y eran bastante acertadas respecto a las que conocemos hoy en día, dos deudas que se suman dan una deuda más grande, una deuda que tiene un aporte se vuelve más pequeña. Este tipo de operaciones son una parte básica para el trabajo con ecuaciones, expresiones algebraicas, entre otros, este conocimiento se puede aplicar para sumar cargas eléctricas, determinar el sentido de un giro, calcular temperaturas, etc.

Se estudiará cómo realizar operaciones de suma de números con igual signo, números con diferente signo, propiedades de la suma, se introducirá la resta como una suma y se resolverán operaciones combinadas.

1.1 Suma de números con igual signo

P

1. Para las situaciones que se presentan en cada literal, escribe el número que corresponde a cada una.

a) Ahorro \$5 | Ahorro \$3

En total hay \$ ______ de ahorro.

b) Deuda \$5 | Deuda \$3

En total hay \$ ______ de deuda.

Se le llama deuda económica a la cantidad de dinero que se le debe a otra persona o institución.

2. Si se expresa el ahorro con un número positivo y la deuda con un número negativo, las situaciones anteriores quedarían de la siguiente manera:

a) (+5) + (+3) = ______

b) (–5) + (–3) = ______

S

1.

a) Ahorro \$5 | Ahorro \$3

En total hay \$ $\boxed{8}$ de ahorro.

b) Deuda \$5 | Deuda \$3

En total hay \$ $\boxed{8}$ de deuda.

2.

a) (+5) + (+3) = $\boxed{+8}$

b) (–5) + (–3) = $\boxed{-8}$

C

Para sumar dos números que tienen el mismo signo, se escribe ese signo y se suman los valores absolutos.

Por ejemplo, las sumas (+5) + (+3) y (–5) + (–3) se calculan de la siguiente manera:

(+5) + (+3)
(+5) + (+3) = +(5 + 3)
= + 8

(–5) + (–3)
(–5) + (–3) = –(5 + 3)
= –8

E

Calcula las siguientes sumas:

a) (+5) + (+2)

b) (–4) + (–2)

Solución.

a) (+5) + (+2) = +(5 + 2)
= +7

b) (–4) + (–2) = –(4 + 2)
= –6

Calcula las siguientes sumas:

a) (+4) + (+3)

b) (–3) + (–2)

c) (+1) + (+3)

d) (–3) + (–6)

e) (+4) + (+8)

f) (–5) + (–8)

g) (–25) + (–50)

h) (–30) + (–60)

1.2 Suma de números con diferente signo

P

1. Para las situaciones que se presentan en cada literal, escribe el número que corresponde a cada una.

a)

Ahorro $5	Deuda $3

Como hay más ☐ que ☐

En total hay $☐ de ☐

b)

Ahorro $3	Deuda $5

Como hay más ☐ que ☐

En total hay $☐ de ☐

c)

Ahorro $5	Deuda $5

Como se tiene la misma cantidad de ahorro y deuda, en total no hay ni ahorro ni deuda.

2. Si se expresa el ahorro con un número positivo y la deuda con un número negativo, las situaciones anteriores se expresan de la siguiente manera:

a) (+5) + (–3) = ☐ b) (+3) + (–5) = ☐ c) (+5) + (–5) = ☐

S

1.

a)

Ahorro $5	Deuda $3

Como hay más ahorro que deuda

En total hay $ 2 de ahorro

b)

Ahorro $3	Deuda $5

Como hay más deuda que ahorro

En total hay $ 2 de deuda

c)

Ahorro $5	Deuda $5

Como se tiene la misma cantidad de ahorro y deuda, en total no hay ni ahorro ni deuda.

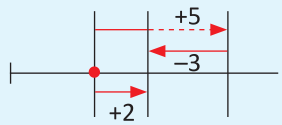
2.

a) (+5) + (–3) = $\boxed{+2}$ b) (+3) + (–5) = $\boxed{-2}$ c) (+5) + (–5) = $\boxed{0}$

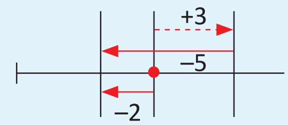
Para sumar dos números que tienen diferente signo y valor absoluto:
1. Se escribe el signo del número con mayor valor absoluto.
2. Se restan los valores absolutos, restando el menor del mayor.

Por ejemplo:

a) $(+5) + (-3) = +(5 - 3)$
$= +2$



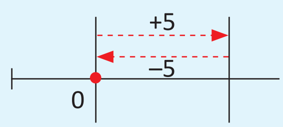
b) $(+3) + (-5) = -(5 - 3)$
$= -2$



La suma de dos números opuestos es 0.

Por ejemplo:

$(+5) + (-5) = 0$



Calcula las siguientes sumas:

a) $(-3) + (+5)$ b) $(-5) + (+3)$ c) $(-6) + (+6)$

Solución.

a) $(-3) + (+5) = +(5 - 3)$
$= +2$

b) $(-5) + (+3) = -(5 - 3)$
$= -2$

c) $(-6) + (+6) = 0$

Calcula las siguientes sumas:

a) $(-5) + (+2)$ b) $(-9) + (+6)$ c) $(+4) + (-4)$ d) $(+2) + (-8)$

e) $(+7) + (-4)$ f) $(-5) + (+9)$ g) $(+4) + (-7)$ h) $(-23) + (+10)$

i) $(+17) + (-12)$ j) $(-13) + (+33)$ k) $(+7) + (-7)$ l) $(-13) + (+13)$

1.3 Sumas que incluyen cero

P

1. Para las situaciones que se presentan en cada literal, escribe el número que corresponde a cada una.

a) | Deuda $3 | $0 |

En total hay $ ☐ de ☐

b) | $0 | Deuda $3 |

En total hay $ ☐ de ☐

2. Si se expresa la deuda con un número negativo, las situaciones anteriores se expresan de la siguiente manera:

a) (–3) + 0 = ☐

b) 0 + (–3) = ☐

S

1.

a) En total hay $ 3 de deuda

b) En total hay $ 3 de deuda

2.

a) (–3) + 0 = –3

b) 0 + (–3) = –3

C

En las sumas, en las que interviene el cero, se presentan 2 casos:

1. Si se suma cero a un número, el resultado es el mismo número.
   Por ejemplo: (–3) + 0 = –3

2. Si se suma un número al cero el resultado es el número.
   Por ejemplo: 0 + (–4) = –4

Realiza las siguientes sumas:

a) (+5) + 0	b) (–8) + 0	c) 0 + (+2)	d) 0 + (–7)
e) (+7) + 0	f) (–9) + 0	g) 0 + (+4)	h) 0 + (–6)
i) (+20) + 0	j) (–15) + 0	k) 0 + (+37)	l) 0 + (–23)
m) (+77) + 0	n) (–43) + 0	o) 0 + (+100)	p) 0 + (–105)

1.4 Suma con números decimales o fracciones positivas y negativas

P

Calcula las siguientes sumas:

a) $(-2.5) + (-3.4)$

b) $\left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$

S

a) $(-2.5) + (-3.4) = -(2.5 + 3.4)$
$= -5.9$

b) $\left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = +\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)$
$= +\frac{1}{5}$

C

Las reglas para realizar la suma de dos números positivos o negativos que son decimales o fracciones son las mismas que se establecieron en las tres clases anteriores.

1. Para sumar dos números que tienen el mismo signo, se escribe ese signo y se suman los valores absolutos.

2. Para sumar dos números que tienen diferente signo y valor absoluto, se escribe el signo del número con mayor valor absoluto y se restan los valores absolutos, restando el menor del mayor. En caso de que los números sean opuestos la suma es cero.

3. Si se suma cero a un número el resultado es el número o si se suma un número al cero el resultado es el número.

   Por ejemplo:

   a) $(-2.5) + (-3.4) = -(2.5 + 3.4)$
   $= -5.9$

   b) $\left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = +\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)$
   $= +\frac{1}{5}$

E

Calcula las siguientes sumas:

a) $(-2.5) + (+2.5)$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$ c) $(-4.6) + 0$ d) $0 + \left(-\frac{3}{5}\right)$

Solución.

a) $(-2.5) + (+2.5) = 0$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) = 0$ c) $(-4.6) + 0 = -4.6$ d) $0 + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

Calcula las siguientes sumas:

a) $(+2.4) + (+1.3)$ b) $(-3.5) + (-2.2)$ c) $\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$ d) $\left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right)$

e) $(+3.9) + (-1.5)$ f) $(+4.2) + (-5.3)$ g) $\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$

i) $(+7.3) + (-9.5)$ j) $(-2.4) + (+6.7)$ k) $\left(+\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$ l) $\left(+\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right)$

m) $(-3.8) + 0$ n) $0 + (+5.9)$ o) $\left(+\frac{3}{5}\right) + 0$ p) $0 + \left(-\frac{3}{5}\right)$

1.5 Propiedad conmutativa y asociativa de la suma

P

Para cada literal, ¿son iguales los resultados obtenidos en la **Operación 1** y **Operación 2**?

a) **Operación 1** $(-3) + (+4)$ **Operación 2** $(+4) + (-3)$

b) **Operación 1** $[(-5) + (-7)] + (+15)$ **Operación 2** $(-5) + [(-7) + (+15)]$

S

Operación 1

a) $(-3) + (+4) = +(4 - 3)$
$= +1$

b) $[(-5) + (-7)] + (+15) = [-(7 + 5)] + (+15)$
$= (-12) + (+15)$
$= +(15 - 12)$
$= +3$

Operación 2

a) $(+4) + (-3) = +(4 - 3)$
$= +1$

b) $(-5) + [(-7) + (+15)] = (-5) + [+(15 - 7)]$
$= (-5) + (+8)$
$= +(8 - 5)$
$= +3$

R. Los resultados de la Operación 1 y Operación 2 son iguales en ambos literales.

C

La suma de dos números positivos o negativos no depende del orden de los sumandos. A esto se le llama **Propiedad conmutativa**.

$$a + b = b + a$$

La suma de varios números positivos o negativos no depende de la forma en que se asocian. A esto se le llama **Propiedad asociativa**.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Cuando en una operación ya se ha utilizado paréntesis, y se requiere utilizar otro signo de agrupación se utilizan los corchetes.

E

Realiza las siguientes sumas:

$(-5) + (+8) + (+4) + (-2)$

Solución.

$$\begin{aligned}(-5) + (+8) + (+4) + (-2) &= (+8) + (-5) + (+4) + (-2)\\ &= (+8) + (+4) + (-5) + (-2)\\ &= [(+8) + (+4)] + [(-5) + (-2)]\\ &= (+12) + (-7)\\ &= +5\end{aligned}$$

Los sumandos se ordenan según el signo para facilitar el cálculo (aplicando la propiedad conmutativa). En caso de tener fracciones, el ordenamiento también se puede hacer con base a los denominadores, de manera que sea más fácil la realización del cálculo.

Calcula las siguientes sumas:

a) $(+2) + (-3) + (+5) + (-2)$

b) $(+4) + (-2) + (+8) + (-5)$

c) $(-6) + (+4) + (+1) + (-4)$

d) $(-2) + (+5) + (+3) + (-5)$

e) $(+1) + (-3) + (-1) + (+4)$

f) $(+5) + (-4) + (-2) + (+8)$

g) $(-8) + (+1) + (-4) + (+1)$

h) $(-6) + (-4) + (+9) + (-8)$

i) $(+11) + (-10) + (+4) + (+5)$

j) $(-2.3) + (+1.2) + (-1.5) + (+6.3)$

k) $\left(-\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right)$

l) $\left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)$

1.6 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes sumas:

a) $(+3) + (+2)$ b) $(-7) + (-3)$ c) $(+2) + (+7)$ d) $(-1) + (-4)$

e) $(+11) + (+4)$ f) $(-16) + (-9)$ g) $(+7) + (+13)$ h) $(-8) + (-12)$

i) $(+15.1) + (+10.1)$ j) $(-8.7) + (-0.3)$ k) $\left(+\frac{2}{11}\right) + \left(+\frac{7}{11}\right)$ l) $\left(-\frac{8}{13}\right) + \left(-\frac{2}{13}\right)$

2. Realiza las siguientes sumas:

a) $(+8) + (-5)$ b) $(-9) + (+3)$ c) $(-5) + (+5)$

d) $(+18) + (-8)$ e) $(-14) + (+9)$ f) $(+13) + (-23)$

g) $(-21) + (+28)$ h) $(-35) + (+35)$ i) $(0.2) + (-1.8)$

j) $(+5.9) + (-2.9)$ k) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right)$ l) $\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right)$

m) $(-33) + 0$ n) $0 + (-0.95)$ o) $\left(-\frac{2}{3}\right) + 0$

3. Cambia el orden de los números en las siguientes sumas aplicando la propiedad conmutativa y asociativa, luego realiza el cálculo.

a) $(+2) + (-18) + (+3) + (-7)$ b) $(-25) + (+5) + (+40) + (-10)$ c) $(-12) + (+14) + (-18) + (+2)$

d) $(+15) + (-6) + (+5) + (-4)$ e) $(-12) + (-14) + (+18) + (-2)$ f) $(-20) + (-10) + (-6) + (+9)$

g) $(+1.3) + (-8.1) + (+7.7) + (-1.9)$ h) $(-2.5) + (+1.4) + (+0.4) + (-0.3)$ i) $(-5.6) + (+4.2) + (-2.3) + (+3.3)$

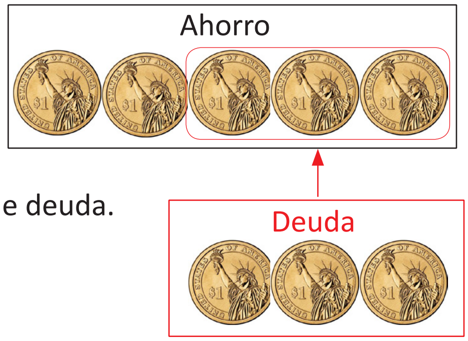
j) $\left(+\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(+\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right)$ k) $\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{1}{10}\right) + \left(+\frac{9}{10}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$ l) $\left(+\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)$

2.1 Resta de un número positivo o negativo

P

Llena el recuadro $\boxed{}$ en cada literal:

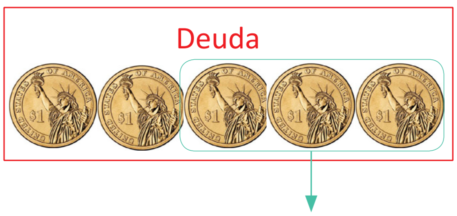
a) Hay \$5 de ahorro

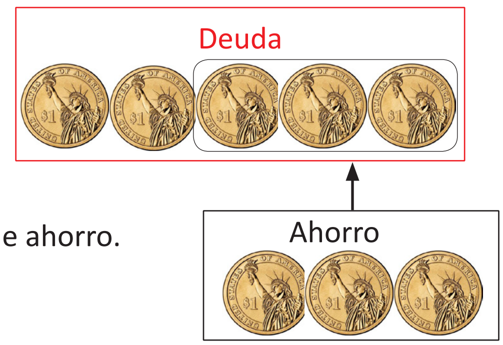


Al quitar \$3 de ahorro resulta lo mismo que agregar \$3 de deuda.

$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = \boxed{}$

b) Hay \$5 de deuda





Al quitar \$3 de deuda resulta lo mismo que agregar \$3 de ahorro.

$(-5) - (-3) = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

S

a) $(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = \boxed{+2}$

b) $(-5) - (-3) = \boxed{(-5)} + \boxed{(+3)} = \boxed{-2}$

C

Restar un número es igual a sumar el opuesto del mismo número.

E

Realiza las siguientes restas:

a) $(-5) - (+3)$

b) $(+5) - (-3)$

Solución.

a) $(-5) - (+3) = (-5) + (-3)$
$= -8$

b) $(+5) - (-3) = (+5) + (+3)$
$= +8$

Realiza las siguientes restas:

a) $(-4) - (+2)$

b) $(+3) - (+7)$

c) $(+4) - (-2)$

d) $(-8) - (-5)$

e) $(+2.5) - (+5.1)$

f) $(-7.8) - (-11.3)$

g) $\left(+\frac{4}{5}\right) - \left(+\frac{1}{5}\right)$

h) $\left(+\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right)$

2.2 Restas que incluyen el cero

Realiza lo que se pide en cada literal:

a) Calcula la siguiente operación convirtiéndola en suma: $0-(+4)$.

b) Analiza para llenar el recuadro $\boxed{}$

$$\begin{array}{l} (-4)-(+3)=-7 \\ (-4)-(+2)=-6 \\ (-4)-(+1)=-5 \\ (-4)-0=\boxed{} \end{array}$$

a) $0-(+4)=0+(-4)$
$\qquad\quad=-4$

b)
$$\begin{array}{l} (-4)-(+3)=-7 \\ \qquad\qquad\downarrow +1 \\ (-4)-(+2)=-6 \\ \qquad\qquad\downarrow +1 \\ (-4)-(+1)=-5 \\ \qquad\qquad\downarrow +1 \\ (-4)-\ 0\ =\boxed{-4} \end{array}$$

En las restas que interviene el cero, se presentan 2 casos:

1. Si se resta un número del cero, la diferencia es el opuesto del sustraendo.
   Por ejemplo: $0-(+4)=-4$

2. Si se resta cero de un número, la diferencia es el minuendo.
   Por ejemplo: $(-4)-0=-4$

Realiza las siguientes restas:

a) $0-(-6)$ b) $(-6)-0$

Solución.

a) $0-(-6)=+6$ b) $(-6)-0=-6$

Realiza las siguientes restas:

a) $(+5)-0$ b) $0-(+11)$ c) $(+8)-0$ d) $0-(+8)$ e) $(-2)-0$ f) $0-(-6)$

g) $(-9)-0$ h) $0-(-9)$ i) $0-0$ j) $(+5.4)-0$ k) $(+3.45)-0$ l) $0-(+8.36)$

m) $(-9.12)-0$ n) $0-(-15.75)$ o) $\left(+\frac{1}{2}\right)-0$ p) $0-\left(+\frac{5}{6}\right)$ q) $\left(-\frac{7}{11}\right)-0$ r) $0-\left(-\frac{5}{8}\right)$

3.1 Sumas y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 1

P

Observa que la operación 4 – 8 se puede escribir como (+4) – (+8) y luego expresarse como una suma de números positivos y negativos (+4) + (–8).

Igualmente – 3 – 7 se puede escribir como (–3) – (+7) y luego expresarse como una suma de números positivos y negativos (–3) + (–7).

Ahora expresa como suma de números positivos y negativos la siguiente operación que combina sumas y restas de números positivos: 5 – 6 + 8 – 4.

La resta de un número positivo o negativo se puede convertir en la suma del número con el signo opuesto.

S

$$\begin{aligned} 5 - 6 + 8 - 4 &= (+5) - (+6) + (+8) - (+4) \\ &= (+5) + (-6) + (+8) + (-4) \end{aligned}$$

De modo que
5 – 6 + 8 – 4 = (+5) + (–6) + (+8) + (–4).

C

En general, las operaciones que combinan suma y resta de números positivos y negativos, omitiendo los paréntesis de los números que intervienen en la operación, se pueden expresar como una suma de números positivos y negativos.

Así la expresión: 5 – 6 + 8 – 4 ... 1
se puede expresar como: (+5) + (–6) + (+8) + (–4) ... 2

En la operación 5 – 6 + 8 – 4 los números +5, –6, +8 y – 4 se les llama **términos**.

Se debe observar que en 1 se omiten los paréntesis y los signos + que denotan la adición en 2, y también que en el primer término cuando es positivo no se escribe el signo. A la acción de omitir la escritura de los paréntesis comúnmente se le llama **suprimir los paréntesis,** y se puede hacer siempre y cuando sea un signo + el que antecede a los paréntesis, en caso contrario debe cambiarse la resta a suma, según la regla trabajada en las 2 clases anteriores.

E

Representa las siguientes operaciones en la forma 1 e identifica los términos.

a) (–2) + (+8) + (–1) b) (–4) – (+10) + (–2) c) (–3) – (–2) + 8

Solución.

a) (–2) + (+8) + (–1) = – 2 + 8 – 1
Términos: –2, +8, –1

b) $\begin{aligned}(-4) - (+10) + (-2) &= (-4) + (-10) + (-2) \\ &= -4 - 10 - 2\end{aligned}$
Términos: –4, –10, –2

c) $\begin{aligned}(-3) - (-2) + 8 &= (-3) + (+2) + 8 \\ &= -3 + 2 + 8\end{aligned}$
Términos: –3, +2, +8

Representa las siguientes operaciones en la forma 1 e identifica los términos.

a) (+1) + (–2) + (+3)
b) (–1) + (–2) + (–3)
c) (+2) – (+5) + (–4)
d) (–1) – (+5) + (–2) – (–2)
e) (–2.1) – (+3.4) + (–2) – (–1.5)
f) $\left(+\frac{1}{11}\right) + \left(-\frac{4}{11}\right) - \left(+\frac{6}{11}\right) - \left(-\frac{2}{11}\right)$

3.2 Sumas y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 2

P

Realiza la siguiente operación sin utilizar la forma ② de la clase anterior.

$9 - 6 + 7 - 8$

Recuerda la propiedad que aplicabas para realizar las sumas de números positivos y negativos. Solo como orientación ten en cuenta que: $9 - 6 + 7 - 8 = (+9) + (-6) + (+7) + (-8)$.

S

$$\begin{aligned} 9 - 6 + 7 - 8 &= 9 + 7 - 6 - 8 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Cuando se realiza una operación combinada expresada en la forma ① se omite el signo + del resultado cuando sea positivo.

C

Para realizar una operación que combina suma y resta de números positivos y negativos sin paréntesis en los términos, se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de la suma; se asocian los números que se están sumando ◯, y los que se están restando ◯; luego, se realizan los cálculos.

$$\begin{aligned} 9 - 6 + 7 - 8 &= 9 + 7 - 6 - 8 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

E

Realiza la siguiente operación:

$11 - 12 - 10 + 13$

Procura que los signos (=) queden en columna.

$$\begin{aligned} 11 - 12 - 10 + 13 &= 11 + 13 - 12 - 10 \\ &= 24 - 22 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{aligned} 11 - 12 - 10 + 13 &= 11 + 13 - 12 - 10 \\ &= 24 - 22 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $-2 + 8 + 6 - 3$

b) $-3 + 16 - 7 + 4$

c) $-5 + 2 - 5 - 6$

d) $4 + 5 - 8 + 3$

e) $-7 - 1 + 6 - 2$

f) $-1 + 9 - 2 - 6$

g) $6 - 5 + 3 - 1 + 10$

h) $2.8 - 1.2 + 3.1 - 2.6$

i) $-\frac{1}{11} - \frac{4}{11} + \frac{6}{11} + \frac{2}{11}$

3.3 Sumas y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 3

P

Realiza la siguiente operación:

$5 - 8 + (-4) - (-3)$

S

$$\begin{aligned} 5 - 8 + (-4) - (-3) &= 5 - 8 + (-4) + (+3) \\ &= 5 - 8 - 4 + 3 \\ &= 5 - 8 + 3 - 4 \\ &= 5 + 3 - 8 - 4 \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

C

Cuando hay paréntesis en la operación, primero se deben suprimir los paréntesis y luego realizar los cálculos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 - 8 + (-4) - (-3) &= 5 - 8 + (-4) + (+3) && \text{convirtiendo la resta en la suma del número opuesto de } -3, \\ &= 5 - 8 - 4 + 3 && \text{suprimiendo los paréntesis,} \\ &= 5 - 8 + 3 - 4 && \text{propiedad conmutativa y luego asociativa,} \\ &= 5 + 3 - 8 - 4 \\ &= 8 - 12 \\ &= -4. \end{aligned}$$

E

Realiza las siguientes sumas y restas combinadas.

$$-8 - (-6) + (-5) - 10$$

Solución.

$$\begin{aligned} -8 - (-6) + (-5) - 10 &= -8 + (+6) + (-5) - 10 \\ &= -8 + 6 - 5 - 10 \\ &= 6 - 8 - 5 - 10 \\ &= 6 - 23 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Efectúa las siguientes sumas y restas combinadas, suprimiendo los paréntesis.

a) $8 + (-2) - (-4)$ b) $3 + (-4) - (-2)$ c) $-2 - 4 - (-3)$ d) $-5 - (-6) - (-4)$

e) $-2 - (-4) + (-5) + 1$ f) $5 - 2 - (-3) - 6$ g) $4 - 5 + (-5) - (-1)$ h) $-8 - (-6) - (-4) - 1$

i) $-12 + (-4) - 9 + 0$ j) $2.4 - 2.8 + 0.3 - 1.1$ k) $2.3 + (-0.7) - (-0.5)$ l) $\frac{5}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{12}$

3.4 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes restas:

a) $(+8) - (+4)$ b) $(+7) - (+10)$ c) $(-8) - (+7)$ d) $(+1.4) - (+2.5)$ e) $\left(-\frac{7}{9}\right) - \left(+\frac{2}{9}\right)$

f) $(+3) - (-2)$ g) $(-1) - (-11)$ h) $(-12) - (-4)$ i) $(-13.2) - (-3.1)$ j) $\left(-\frac{2}{11}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$

2. Realiza las siguientes restas:

a) $(+20) - 0$ b) $0 - (+22)$ c) $(-16) - 0$ d) $0 - (-17)$ e) $(7.8) - 0$ f) $0 - \left(-\frac{3}{25}\right)$

3. Plantea solo como suma las siguientes sumas y restas combinadas y escribe cuáles son los términos.

a) $(+20) + (-8) + (+1)$ b) $(+17) + (-9) - (+11)$

c) $(+3.2) - (+0.4) - (-3.6)$ d) $\left(+\frac{8}{7}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{10}{13}\right)$

4. Plantea las siguientes sumas y restas combinadas solo como suma y calcula.

a) $(-2) - (-6) - (-4) - (+5)$ b) $(-6) + (+3) - (+6) + (-7)$

c) $(+3.4) + (-0.2) - (-5.2) - (+1.4)$ d) $\left(+\frac{2}{13}\right) - \left(+\frac{3}{13}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{1}{13}\right)$

5. Efectúa las siguientes sumas y restas combinadas.

a) $-6 + 5 - 10$ b) $3.7 - 3.4 + 0.3 - 4.6$ c) $\frac{1}{6} - \frac{8}{15} + \frac{7}{6} - \frac{2}{15}$

6. Efectúa las siguientes sumas y restas combinadas suprimiendo los paréntesis.

a) $5 + (-8) - (-7)$ b) $-27 - (-18) - 4 + 0$

c) $2.3 + (-0.7) - (-0.5) - (+0.1)$ d) $\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$

Unidad 3

Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero

El planteamiento formal de las reglas de multiplicación y división fue establecido por primera vez por el matemático Suizo Leonhard Euler, y la justificación de las reglas para la multiplicación fueron replanteadas por diferentes matemáticos como MacLaurin, Laplace, D'Alembert, Lacroix, Klein, y en el año 1985 la justificación se hizo a partir de patrones numéricos por Crowley y Dunn.

A partir de las reglas de la multiplicación de números negativos, se ha podido facilitar el trabajo algebraico y la modelación de situaciones del entorno, para solucionar problemas de la vida cotidiana.

Los contenidos que conocerás son la multiplicación de números con diferente signo, la multiplicación de un número negativo por otro negativo, las propiedades de la multiplicación, el concepto de potencia, y las operaciones con potencias; además de abordar las operaciones combinadas de las cuatro operaciones básicas con números positivos, negativos y el cero.

$(-4) \times (+3) = -12$

$(-4) \times (+2) = -8$

$(-4) \times (+1) = -4$

$(-4) \times 0 = 0$

$(-4) \times (-1) = \boxed{}$

$(-4) \times (-2) = \boxed{}$

$(-4) \times (-3) = \boxed{}$

Modelo de patrones numéricos de Crowley y Dunn.

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

El menor número que se puede expresar como suma de dos cubos de maneras diferentes es el 1 729. (Ramanujan, matemático hindú del siglo XX).

1.1 Multiplicación de números con diferente signo

P

Escribe el número que corresponde a los recuadros en cada literal.

a) $(+2)\times(+3)=+6$
$(+2)\times(+2)=+4$
$(+2)\times(+1)=+2$
$(+2)\times 0=0$
$(+2)\times(-1)=\boxed{}$
$(+2)\times(-2)=\boxed{}$
$(+2)\times(-3)=\boxed{}$

b) $(+3)\times(+3)=+9$
$(+2)\times(+3)=+6$
$(+1)\times(+3)=+3$
$0\times(+3)=0$
$(-1)\times(+3)=\boxed{}$
$(-2)\times(+3)=\boxed{}$
$(-3)\times(+3)=\boxed{}$

S

a) $(+2)\times(+3)=+6$
-2
$(+2)\times(+2)=+4$
-2
$(+2)\times(+1)=+2$
-2
$(+2)\times 0=0$
-2
$(+2)\times(-1)=\boxed{-2}$
-2
$(+2)\times(-2)=\boxed{-4}$
-2
$(+2)\times(-3)=\boxed{-6}$

b) $(+3)\times(+3)=+9$
-3
$(+2)\times(+3)=+6$
-3
$(+1)\times(+3)=+3$
-3
$0\times(+3)=0$
-3
$(-1)\times(+3)=\boxed{-3}$
-3
$(-2)\times(+3)=\boxed{-6}$
-3
$(-3)\times(+3)=\boxed{-9}$

C

Para multiplicar dos números con diferentes signos se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (–).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Por ejemplo:

a) $(+2)\times(-3)=-(2\times 3)$
$=-6$

b) $(-2)\times(+3)=-(2\times 3)$
$=-6$

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-6)\times(+3)$
b) $(-5)\times(+2)$
c) $(+7)\times(-4)$
d) $(+10)\times(-6)$
e) $(+25)\times(-2)$
f) $(-2.1)\times(+2)$
g) $(+4.2)\times(-4)$
h) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(+\frac{1}{5}\right)$
i) $\left(+\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)$

1.2 Multiplicación de números con igual signo

P

Escribe el número que corresponde a los recuadros en cada literal.

a)
$(-4) \times (+3) = -12$
$(-4) \times (+2) = -8$
$(-4) \times (+1) = -4$
$(-4) \times 0 = 0$
$(-4) \times (-1) = \boxed{}$
$(-4) \times (-2) = \boxed{}$
$(-4) \times (-3) = \boxed{}$

b)
$(+3) \times (-5) = -15$
$(+2) \times (-5) = -10$
$(+1) \times (-5) = -5$
$0 \times (-5) = 0$
$(-1) \times (-5) = \boxed{}$
$(-2) \times (-5) = \boxed{}$
$(-3) \times (-5) = \boxed{}$

S

a)
$(-4) \times (+3) = -12$
+4
$(-4) \times (+2) = -8$
+4
$(-4) \times (+1) = -4$
+4
$(-4) \times 0 = 0$
+4
$(-4) \times (-1) = \boxed{+4}$
+4
$(-4) \times (-2) = \boxed{+8}$
+4
$(-4) \times (-3) = \boxed{+12}$

b)
$(+3) \times (-5) = -15$
+5
$(+2) \times (-5) = -10$
+5
$(+1) \times (-5) = -5$
+5
$0 \times (-5) = 0$
+5
$(-1) \times (-5) = \boxed{+5}$
+5
$(-2) \times (-5) = \boxed{+10}$
+5
$(-3) \times (-5) = \boxed{+15}$

C

Para multiplicar dos números con igual signo se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (+).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Al multiplicar un número negativo por cero el producto es cero.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-6) \times (-4)$

b) $(-8) \times (-2)$

c) $(+5) \times (+4)$

d) $(-9) \times (-3)$

e) $(-8) \times (-9)$

f) $(-3.2) \times (-2)$

g) $(+4.1) \times (+3)$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

i) $\left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{7}{11}\right)$

1.3 Multiplicaciones que incluyen –1, 0 y 1

P

1. Escribe el número que corresponde en el recuadro.

$(+3) \times (-2) = -6$

$(+2) \times (-2) = -4$

$(+1) \times (-2) = -2$

$0 \times (-2) = \boxed{}$

2. Escribe el número que corresponde en cada recuadro.

$(+1) \times (-3) = \boxed{}$ $(-1) \times (+3) = \boxed{}$ $(+2) \times (-1) = \boxed{}$

$(-2) \times (+1) = \boxed{}$ $(-1) \times (-3) = \boxed{}$ $(-2) \times (-1) = \boxed{}$

S

1. $(+3) \times (-2) = -6$

+2

$(+2) \times (-2) = -4$

+2

$(+1) \times (-2) = -2$

+2

$0 \times (-2) = \boxed{0}$

2. $(+1) \times (-3) = -(1 \times 3) = \boxed{-3}$ $(-1) \times (+3) = -(1 \times 3) = \boxed{-3}$ $(+2) \times (-1) = -(2 \times 1) = \boxed{-2}$

$(-2) \times (+1) = -(2 \times 1) = \boxed{-2}$ $(-1) \times (-3) = +(1 \times 3) = \boxed{+3}$ $(-2) \times (-1) = +(2 \times 1) = \boxed{+2}$

C

Al multiplicar un número por –1, 0 y 1 se tendrá:

- $0 \times a = 0$
- $a \times 0 = 0$
- $1 \times a = a$
- $a \times 1 = a$
- $(-1) \times a = -a$
- $a \times (-1) = -a$

Donde a es cualquier número.

En la multiplicación, como en la suma y la resta, se puede omitir el signo + de los números positivos. También se puede omitir el paréntesis del primer número de la operación, aún cuando sea negativo.

E

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) -1×5 b) $0 \times (-5)$ c) $1 \times (-7)$

Solución.

a) $-1 \times 5 = -5$ b) $0 \times (-5) = 0$ c) $1 \times (-7) = -7$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) -1×8 b) $8 \times (-1)$ c) $-1 \times (-3)$ d) $-1 \times (-1)$ e) -1×7

f) $10 \times (-1)$ g) $0 \times (-4)$ h) 9×0 i) $1 \times (-11)$ j) -3×1

1.4 Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

P

Compara el resultado de la multiplicación 1 y 2 en cada uno de los siguientes literales:

Multiplicación 1	Multiplicación 2
a) -5×4	$4 \times (-5)$

Multiplicación 1	Multiplicación 2
b) $(-3 \times 2) \times 4$	$-3 \times (2 \times 4)$

S

Multiplicación 1	Multiplicación 2	
a) $-5 \times 4 = -20$	$4 \times (-5) = -20$	Los resultados son iguales.

Multiplicación 1	Multiplicación 2	
b) $(-3 \times 2) \times 4 = -6 \times 4$ $= -24$	$-3 \times (2 \times 4) = -3 \times 8$ $= -24$	Los resultados son iguales.

C

Al igual que la suma, la multiplicación también cumple con la "propiedad conmutativa" y la "propiedad asociativa".

De forma general:

- $a \times b = b \times a$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Las propiedades permiten calcular el producto de varios números en cualquier orden, aunque hayan números negativos incluidos en la multiplicación.

E

Realiza la siguiente multiplicación:

$-5 \times 17 \times (-2)$

Solución.

$$\begin{aligned} -5 \times 17 \times (-2) &= -5 \times (-2) \times 17 && \text{Propiedad conmutativa} \\ &= [-5 \times (-2)] \times 17 && \text{Propiedad asociativa} \\ &= 10 \times 17 \\ &= 170 \end{aligned}$$

La propiedad conmutativa es válida para la multiplicación de -1, 0 y 1 por un número positivo o negativo. Es decir:

$0 \times a = a \times 0$

$1 \times a = a \times 1$

$-1 \times a = a \times (-1)$

Utilizando la propiedad conmutativa y asociativa se puede cambiar el orden de los factores para facilitar el cálculo.

Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $8 \times 13 \times 5$

b) $-5 \times 27 \times 4$

c) $0.25 \times 0.35 \times (-4)$

d) $0.5 \times (-0.6) \times 4$

e) $-24 \times 10 \times \left(-\frac{1}{8}\right)$

f) $-14 \times \left(-\frac{7}{11}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

Unidad 3

1.5 Signo del producto según el número de factores de la multiplicación

P

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2 \times 3 \times 4 \times 10$ b) $-2 \times 3 \times 4 \times 10$ c) $-2 \times (-3) \times 4 \times 10$

d) $-2 \times (-3) \times (-4) \times 10$ e) $-2 \times (-3) \times (-4) \times (-10)$

¿Qué relación existe entre la cantidad de números negativos y el signo del producto de la multiplicación?

S

a) $2 \times 3 \times 4 \times 10 = 6 \times 4 \times 10 = 24 \times 10 = 240$
b) $-2 \times 3 \times 4 \times 10 = -6 \times 4 \times 10 = -24 \times 10 = -240$
c) $-2 \times (-3) \times 4 \times 10 = 6 \times 4 \times 10 = 24 \times 10 = 240$
d) $-2 \times (-3) \times (-4) \times 10 = 6 \times (-4) \times 10 = (-24) \times 10 = -240$
e) $-2 \times (-3) \times (-4) \times (-10) = 6 \times (-4) \times (-10) = (-24) \times (-10) = 240$

Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el producto es negativo.

C

Es importante destacar que

- Cuando hay una cantidad par de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (+).
- Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (–).

E

Calcula el producto de la siguiente multiplicación:

$-2 \times 3 \times (-5) \times 10$

Solución.

$$-2 \times 3 \times (-5) \times 10 = +(2 \times 3 \times 5 \times 10)$$
$$= 300$$

Como hay una cantidad par de números negativos inmediatamente se colocó el signo + y luego se realizó la multiplicación.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times (-2) \times 15$ b) $-2 \times 3 \times (-5)$ c) $-2 \times (-6) \times (-3)$

d) $2 \times 5 \times 6 \times 10$ e) $-1 \times 2 \times (-3) \times (-4)$ f) $-11 \times 2 \times 3 \times (-5)$

g) $-1 \times (-5) \times (-3) \times (-6)$ h) $-2 \times 4 \times (-3) \times 10 \times (-5)$ i) $\frac{5}{4} \times (-8) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

1.6 Potencia de un número

P

El producto de multiplicar un número por sí mismo 2 o 3 veces se representa de la siguiente forma:
$4 \times 4 = 4^2$; $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

¿Cómo se representan las siguientes multiplicaciones?

a) $(-4) \times (-4)$

b) $(-4) \times (-4) \times (-4)$

S

a) $(-4) \times (-4) = (-4)^2$

$(-4)^2$ representa -4 multiplicado 2 veces.

b) $(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$

$(-4)^3$ representa -4 multiplicado 3 veces.

C

Cuando un número se multiplica por sí mismo 2 veces, se obtiene la potencia 2 del número, y cuando se multiplica 3 veces se obtiene la potencia 3 del número.

En las expresiones $(-4)^2$ y $(-4)^3$, el 2 y 3 se llaman exponentes y representan la cantidad de veces que aparece como factor el -4 en la multiplicación. Por ejemplo:

$$(-4)^{3} = \overbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}^{\text{3 veces el factor } (-4)}$$

A la potencia 2 de un número se le llama potencia **cuadrada**, y a la potencia 3 se le llama potencia **cúbica**. Así, por ejemplo: $(-4)^2$ se lee "el cuadrado de menos cuatro" y $(-4)^3$ se lee "el cubo de menos cuatro".

E

Calcula las siguientes potencias:

a) $(-4)^2$

b) -4^2

c) $(3 \times 4)^2$

Solución.

a) $(-4)^2 = (-4) \times (-4)$
$= 16$

b) $-4^2 = -(4 \times 4)$
$= -16$

c) $(3 \times 4)^2 = (3 \times 4) \times (3 \times 4)$
$= 12 \times 12$
$= 144$

- $(-4)^2$ y -4^2 pueden ser parecidos, pero representan un producto diferente.
- Cuando se representa la potencia de un número negativo o fraccionario, el número debe escribirse entre paréntesis.

1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) 5×5

b) $5 \times 5 \times 5$

c) $(-3) \times (-3) \times (-3)$

d) $-(3 \times 3)$

e) $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

f) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

g) $(-1.5) \times (-1.5)$

h) $-(0.5 \times 0.5)$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-6)^2$

b) -6^2

c) $(-4)^3$

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^2$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

f) $(-3.1)^2$

g) -3.1^2

h) $(2 \times 3)^2$

i) $(2 \times 4)^3$

j) $(5 \times 2)^2$

Unidad 3

1.7 Multiplicaciones que incluyen potencias

P

Efectúa la siguiente multiplicación:

$$(-3)^2 \times (-4)$$

S

$(-3)^2 \times (-4) = [(-3) \times (-3)] \times (-4)$ Desarrollo de la potencia
$= 9 \times (-4)$
$= -36$

No es necesario desarrollar el paso en color rojo, se puede usar el hecho de que $(-3)^2 = 9$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(-3)^2 \times (-4) &= 9 \times (-4)\\ &= -36\end{aligned}$$

C

Para multiplicaciones que tienen al menos un número con potencia se tiene que hacer lo siguiente:

1. Calcular las potencias
2. Realizar la multiplicación

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(-3)^2 \times (-4) &= 9 \times (-4)\\ &= -36\end{aligned}$$

E

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) 2×3^2 b) $(2 \times 3)^2$

Solución.

a) $2 \times 3^2 = 2 \times 9$
$= 18$

b) $(2 \times 3)^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= 6 \times 6$
$= 36$

Se debe tener cuidado para no confundir expresiones tales como $(2 \times 3)^2$ y 2×3^2, ya que $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$ y $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$, pueden ser multiplicaciones muy parecidas pero su producto es diferente.

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times 3$ b) $4 \times (-3)^2$ c) -2×3^3 d) $(-1)^3 \times 2$

e) $2^2 \times 3^2$ f) $3^3 \times (-4)^2$ g) $(-2)^3 \times 3^3$ h) $(-3)^3 \times (-5)^2$

1.8 División de números enteros positivos, negativos y el cero

P

Escribe el número que corresponde en cada recuadro:

$(+6) \div (+2) = +3$ porque $(+2) \times (+3) = +6$

$(-6) \div (-2) = \square$ porque $(-2) \times \square = -6$

$(-6) \div (+2) = \square$ porque $(+2) \times \square = -6$

$(+6) \div (-2) = \square$ porque $(-2) \times \square = +6$

S

$(-6) \div (-2) = \boxed{+3}$ porque $(-2) \times \boxed{+3} = -6$

$(-6) \div (+2) = \boxed{-3}$ porque $(+2) \times \boxed{-3} = -6$

$(+6) \div (-2) = \boxed{-3}$ porque $(-2) \times \boxed{-3} = +6$

C

En la siguiente tabla se presenta el signo y el valor absoluto del cociente, dependiendo de los signos del dividendo y del divisor se tienen los siguientes casos:

Signo del dividendo y divisor	Signo del cociente	Valor absoluto del cociente
Igual	+	Cociente de los valores absolutos de los números
Diferente	–	

En la división se aplica la misma convención acerca del uso del signo + y los paréntesis como en la multiplicación.

Ejemplo:

a) $(+6) \div (+2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

b) $(-6) \div (-2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

c) $(-6) \div (+2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

d) $(+6) \div (-2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

E

Realiza la siguiente división: $0 \div (-2)$

Solución.
Si el recuadro $\square$ representa el cociente de $0 \div (-2)$ se tiene que $\square \times (-2) = 0$, por lo que $\square = 0$; de modo que $0 \div (-2) = 0$.

Si el recuadro $\square$ representa el cociente de $5 \div 0$, se tiene que $\square \times 0 = 5$, pero no existe ningún valor que multiplicado por 0 sea 5.

Al dividir 0 entre cualquier número diferente de 0, el cociente es 0. En caso de dividir cualquier número entre 0, la operación es indefinida, es decir, no se puede hacer.

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $6 \div (-3)$ b) $10 \div (-2)$ c) $18 \div 2$ d) $12 \div (-4)$ e) $-24 \div 3$

f) $-20 \div (-4)$ g) $-60 \div (-5)$ h) $0 \div 10$ i) $0 \div (-7)$ j) $-1 \div 2$

1.9 Fracciones negativas

P

Si una división se puede expresar en forma de fracción $5 \div 7 = \frac{5}{7}$, entonces $-(5 \div 7) = -\frac{5}{7}$.

Explica por qué es cierto que $\frac{-5}{7} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$.

S

Como

$-\frac{5}{7} = -(5 \div 7)$ $\quad$ $\frac{-5}{7} = -5 \div 7$ $\quad$ $\frac{5}{-7} = 5 \div (-7)$

se tiene que

$$\frac{-5}{7} = -5 \div 7 = -(5 \div 7) = -\frac{5}{7}.$$

De igual forma:

$$\frac{5}{-7} = 5 \div (-7) = -(5 \div 7) = -\frac{5}{7}.$$

Por tanto:

$$-5 \div 7 = 5 \div (-7) = -(5 \div 7) \text{ o } \frac{-5}{7} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}.$$

C

Para cualquier fracción que tenga el signo (–) en el numerador o denominador, se puede escribir el signo (–) antes de la fracción. Es decir:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Siempre que se tenga una fracción negativa se representa en la forma $-\frac{a}{b}$, donde a y b representan números positivos.

1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-5 \div 11$ $\quad$ b) $3 \div (-7)$ $\quad$ c) $-(11 \div 13)$

> Observa que
> $$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$
> Porque
> $-a \div (-b) = +(a \div b)$
> $= a \div b$

2. Representa la siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$.

a) $\frac{-2}{11}$ $\quad$ b) $\frac{7}{-13}$

3. Completa el recuadro $\square$ en los siguientes literales:

a) $-\frac{2}{5} = \square \div 5 = 2 \div \square = -(2 \div 5)$ $\quad$ b) $-\frac{3}{7} = \square \div 7 = 3 \div \square = -(3 \div 7)$

c) $-\frac{7}{9} = \square \div 9 = 7 \div \square = -(7 \div 9)$ $\quad$ d) $-\frac{5}{11} = \square \div 11 = 5 \div \square = -(5 \div 11)$

1.10 Recíproco de un número

P

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $3 \times \frac{1}{3}$

b) $-\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

El 3 se puede interpretar como $\frac{3}{1}$.

1. ¿Cuál fue el producto en los literales anteriores?

2. ¿Qué característica tienen los multiplicadores en cada multiplicación?

S

a) $3 \times \frac{1}{3} = \cancel{3}^{1} \times \frac{1}{\cancel{3}_{1}}$
$= 1$

b) $-\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right)$
$= 1$

1. En ambos literales el producto es 1.
2. El multiplicador es una fracción en la que se ha intercambiado la posición del numerador y denominador del multiplicando.

C

Un número es el **recíproco** de otro número, cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

Si a representa un número diferente de 0, el recíproco del número es $\frac{1}{a}$, porque $a \times \frac{1}{a} = 1$.

De igual manera, el recíproco de $\frac{1}{a}$ es a. En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

E

Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) -1 d) $-\frac{1}{3}$ e) 0 f) 0.4

Solución.

a) El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.
b) El recíproco de $-\frac{4}{5}$ es $-\frac{5}{4}$.
c) El recíproco de -1 es -1.
d) El recíproco de $-\frac{1}{3}$ es -3.
e) El número cero no tiene recíproco, porque no existe un número $\boxed{}$ tal que $0 \times \boxed{} = 1$.
f) El recíproco de $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) 2 b) -5 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $-\frac{1}{8}$

f) $\frac{3}{5}$ g) $-\frac{7}{11}$ h) 0.25 i) -0.2 j) -0.6

Unidad 3

1.11 Cálculo de una división como multiplicación

P

Efectúa las siguientes operaciones y compara los resultados.

a) $12 \div (-3)$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

S

a) $12 \div (-3) = -(12 \div 3)$
$= -4$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(\overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$
$= -4$

C

Hacer la división de un número por otro, es equivalente a hacer la multiplicación del número por el recíproco del divisor en la división. Por tanto, para realizar una división se puede convertir en una multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Por ejemplo:

a) $12 \div (-3) = -(12 \div 3)$
$= -4$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(\overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$
$= -4$

E

Realiza la siguiente división convirtiéndola en multiplicación.

a) $-\frac{4}{7} \div 2$

b) $\frac{12}{15} \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

Solución.

a) $-\frac{4}{7} \div 2 = -\frac{4}{7} \times \frac{1}{2}$

$= -\left(\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)$

$= -\frac{2 \times 1}{7 \times 1}$

$= -\frac{2}{7}$

b) $\frac{12}{15} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{15} \times \left(-\frac{5}{3}\right)$

$= -\left(\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$

$= -\frac{4 \times 1}{3 \times 1}$

$= -\frac{4}{3}$

Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones.

a) $-16 \div 4$

b) $18 \div (-9)$

c) $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right)$

d) $\frac{13}{14} \div \left(-\frac{39}{7}\right)$

e) $-\frac{2}{3} \div (-10)$

f) $-\frac{3}{5} \div (-6)$

g) $-10 \div \frac{2}{5}$

h) $15 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

1.12 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(-5) \times (-2)$ b) $(-7) \times (+4)$ c) $(+6) \times (-8)$ d) $(-6) \times (+7)$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-3.5) \times (-3)$ b) $\left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{9}{13}\right)$ c) $\left(-\frac{10}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{5}\right)$ d) $\left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) 8×1 b) -1.1×1 c) $1 \times \frac{7}{13}$ d) $1 \times (-11)$

e) -1×9 f) $-1 \times (-17)$ g) $\frac{7}{9} \times (-1)$ h) $-\frac{11}{12} \times (-1)$

i) 21×0 j) -3.6×0 k) $\frac{8}{15} \times 0$ l) $0 \times \left(-\frac{2}{29}\right)$

4. Aplica la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $0.5 \times (-0.16) \times 2$ b) $-36 \times 25 \times \left(-\frac{1}{12}\right)$ c) $-55 \times \left(-\frac{7}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

5. Efectúa las siguientes multiplicaciones determinando el signo del producto según el número de factores en la multiplicación:

a) $-3 \times (-4) \times (-5) \times (-2)$ b) $-6 \times 5 \times (-3) \times 10 \times (-1)$ c) $\frac{7}{3} \times (-6) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

6. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-5)^2$ b) -5^2 c) $(-2)^3$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ f) $(1.2)^2$

g) -0.6^2 h) 10×2^2 i) $(5 \times 2)^3$

7. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $2^2 \times (-3)^2$ b) $(-5)^3 \times 2^2$ c) $(-10)^3 \times (-5)^2$

8. Efectúa la siguientes divisiones:

a) $-36 \div 12$ b) $-60 \div (-15)$ c) $0 \div (-25)$

9. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $(-7) \div 9$ b) $5 \div (-11)$ c) $-(15 \div 17)$

10. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) -6 b) $\frac{1}{19}$ c) 0.6

11. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $-12 \div \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{7} \div \left(-\frac{5}{21}\right)$ c) $-\frac{6}{5} \div (-18)$

2.1 Operaciones con multiplicación y división

P

Realiza la siguiente operación que combina multiplicación y división:

$$6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5)$$

S

$$\begin{aligned} 6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\ &= \left(\overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{7}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) \\ &= 2 \times 7 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

C

Para realizar el cálculo de una operación que combina multiplicación y división, se debe plantear la operación solo con multiplicaciones, convirtiendo el divisor en su recíproco, luego se recomienda simplificar las fracciones que sean posibles antes de hacer la multiplicación, para facilitar el cálculo. Básicamente la operación se calcula de izquierda a derecha.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\ &= \left(\overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{7}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) \\ &= 2 \times 7 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

E

Realiza la siguiente operación:

$(-3)^2 \times (-10) \div (-24)$

Solución.

$$\begin{aligned} (-3)^2 \times (-10) \div (-24) &= 9 \times (-10) \times \left(-\frac{1}{24}\right) \\ &= +\left(\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{5}{\cancel{10}} \times \frac{1}{\underset{\underset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{24}}}\right) \\ &= 3 \times 5 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $-10 \div 6 \times (-21)$

b) $-\frac{15}{4} \times \frac{7}{10} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

c) $(-3)^2 \times (-2) \div 6$

d) $(-2)^3 \times (-15) \div (-18)$

e) $-2^2 \times (-9) \div 6$

f) $-\frac{7}{3} \times \frac{5}{21} \div \frac{7}{9}$

2.2 Operaciones combinadas

P

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $10 + 5 \times (-3)$

b) $40 \div (-10 + 5)$

S

a) $10 + 5 \times (-3) = 10 + (-15)$
$= 10 - 15$
$= -5$

b) $40 \div (-10 + 5) = 40 \div (-5)$
$= -8$

C

Para realizar operaciones con números positivos y negativos que combinan suma, resta, multiplicación, división o que incluye otra operación al interior de paréntesis (operaciones anidadas), se trabaja de igual forma como se hace con los números positivos. El orden del cálculo es:

1. Operaciones al interior de los paréntesis (si los hay)
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

Ejemplos:

a) $10 + 5 \times (-3) = 10 + (-15)$
$= 10 - 15$
$= -5$

b) $40 \div (-10 + 5) = 40 \div (-5)$
$= -8$

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $5 + 2 \times 3$

b) $-12 - 18 \div 3$

c) $4 \times (-5) - 7$

d) $-20 \div (-4) - 8$

e) $5 \times (-2) + 4 \times 3$

f) $-9 \div 3 + 8 \div 4$

g) $-12 \div 2 + 2 \times 3$

h) $5 \times (-12) - 16 \div 8$

i) $-8 \times (-5 + 17)$

j) $-24 \div (-6 - 2)$

k) $(-3 + 8) \div (-5)$

l) $(2 - 13) \div 22$

2.3 Operaciones combinadas que incluyen potencias

P

Realiza la siguiente operación:

$$32 \div (-2)^2 - 6$$

S

$$\begin{aligned} 32 \div (-2)^2 - 6 &= 32 \div 4 - 6 \\ &= 8 - 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

C

Cuando en la operación se incluyan potencias, operaciones anidadas, multiplicaciones o divisiones y sumas o restas, el orden para hacer los cálculos es:

1. Operaciones al interior de paréntesis (si los hay)
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

E

Realiza las siguientes operaciones:

$-4 \times (-7 + 4)^2 + 4^2$

Solución.

$$\begin{aligned} -4 \times (-7 + 4)^2 + 4^2 &= -4 \times (-3)^2 + 4^2 \\ &= -4 \times 9 + 16 \\ &= -36 + 16 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $5 - 4 \times (-3)^2$

b) $-4 - 5 \times (-2)^3$

c) $27 - 3^2 \times 4$

d) $-8 \times (1 - 3)^3 + 4^2$

e) $2 - 7 \times (-2^2)$

f) $(-2)^3 + 3^2 \div (-3)$

g) $-4^2 + (-2)^3 \div (-9 + 5)$

h) $(-5)^2 + 20^2 \div (7 - 17)$

2.4 Propiedad distributiva de la multiplicación

Compara los resultados de las operaciones 1 y 2 de cada literal.

Operación 1	Operación 2		Operación 1	Operación 2
a) $(-6-4)\times 3$;	$-6\times 3+(-4)\times 3$		b) $-4\times(-15+10)$;	$-4\times(-15)+(-4)\times 10$

Operación 1

a) $(-6-4)\times 3 = (-10)\times 3$
$= -30$

Operación 2

$-6\times 3+(-4)\times 3 = -18+(-12)$
$= -18-12$
$= -30$

Los resultados son iguales, entonces $(-6-4)\times 3 = -6\times 3+(-4)\times 3$.

Operación 1

b) $-4\times(-15+10) = (-4)\times(-5)$
$= 20$

Operación 2

$-4\times(-15)+(-4)\times 10 = 60+(-40)$
$= 60-40$
$= 20$

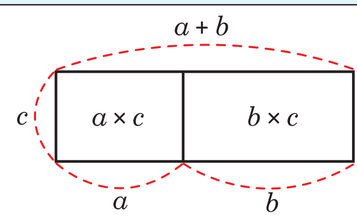
Los resultados son iguales, entonces $-4\times(-15+10) = -4\times(-15)+(-4)\times 10$.

Para cualquier número a, b y c, se cumple que

$$(a+b)\times c = a\times c+b\times c$$
$$c\times(a+b) = c\times a+c\times b$$

Al hecho anterior se le conoce como **propiedad distributiva**.

La propiedad distributiva se puede representar de manera gráfica a través de áreas:



Cuando se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación $(a+b)\times c$ los paréntesis desaparecen obteniéndose $a\times c+b\times c$. A la acción de quitar los paréntesis a través de la aplicación de la propiedad distributiva también se le llama **suprimir paréntesis**.

Efectúa las siguientes operaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}\right)\times 18$

b) $47\times(-9)+13\times(-9)$

Solución.

a) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}\right)\times 18 = \left[\frac{7}{9}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]\times 18$
$= \frac{7}{9}\times 18+\left(-\frac{5}{6}\right)\times 18$
$= 14+(-15)$
$= 14-15$
$= -1$

b) $47\times(-9)+13\times(-9) = (47+13)\times(-9)$
$= 60\times(-9)$
$= -540$

Realiza las siguientes operaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $5\times(-7-3)$

b) $(-23+3)\times(-2)$

c) $60\times\left(\frac{5}{12}-\frac{13}{30}\right)$

d) $12\times 13+88\times 13$

e) $-21\times 2-4\times 2$

f) $99\times(-15)$

En f) observa que $99 = 100-1$.

2.5 Conjuntos numéricos

Si a y b representan 2 números naturales cualesquiera, ¿en cuáles de las siguientes operaciones el resultado siempre es un número natural?

a) $a + b$ b) $a - b$ c) $a \times b$ d) $a \div b$

La suma y la multiplicación de 2 números naturales siempre tiene como resultado un número natural. Al contrario, la resta y división de 2 números naturales no necesariamente tiene como resultado un número natural. Por ejemplo: $2 - 7$ y $3 \div 7$ no tienen como resultado un número natural.

A un grupo de elementos, números u objetos se le llama **conjunto**, por ejemplo, al grupo de los números naturales se le llama **conjunto de los números naturales**. En general, a un conjunto de números se le llama conjunto numérico. En el conjunto de los números naturales no siempre se pueden hacer las operaciones resta y división, porque el resultado de ellas no necesariamente es un número natural. Por tanto, se hace necesario ampliar el conjunto de los números naturales.

Resuelve:

a) ¿Qué conjunto de números debe agregarse a los naturales para que la resta se pueda realizar siempre?

b) ¿El conjunto de números agregados en a) será suficiente para que también la división se pueda hacer siempre?

Solución.

a) Debe agregarse el 0 y el conjunto de los números negativos para tener un conjunto numérico más amplio y poder hacer siempre la resta. A este nuevo conjunto se le llama **números enteros**, de aquí en adelante al referirse al conjunto de los números enteros se entenderá que es el conjunto de números: …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …

b) No es suficiente, es necesario agregar los **números que se pueden expresar como fracción**.
Los números enteros como por ejemplo 5, también se pueden escribir en forma de fracción, $\frac{5}{1}$, por lo que el conjunto de números enteros es parte del conjunto de números que se pueden expresar como fracción.
Considera que los números decimales también se pueden expresar como fracción, por ejemplo: $0.8 = \frac{8}{10}$.

Números que se pueden expresar como fracción
$\frac{1}{5}$, $\frac{3}{2}$, 0.222, $0.\overline{33}$, 0.1, −0.15

Enteros
…, −3, −2, −1, 0,

Naturales
1, 2, 3,...

1. ¿Cuáles son las operaciones que se pueden realizar en los diferentes conjuntos de números?
Escribe una X si la operación se puede realizar siempre en cada uno de los conjuntos de números. No consideres la división por 0.

	Suma	Resta	Multiplicación	División
Natural				
Entero				
Números que se pueden expresar como fracción				

2. Escribe los conjuntos de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) 8 + 2 b) −5 × 4 c) 9 − 10 d) 5 ÷ 6

2.6 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

1. Efectúa las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

   a) $-\frac{21}{2} \times \frac{6}{7} \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ b) $-1 \times (-6)^2 \div 8$ c) $-3^2 \times (-6) \div 2$

2. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación, división, suma o resta:

   a) $7 + 5 \times 2$ b) $-2 + (-32) \div 4$ c) $3 \times (-4) - 3$

   d) $6 \times (-4) + 7 \times 3$ e) $-12 \div 6 + 35 \div 7$ f) $13 \times (-2) - 30 \div 5$

3. Desarrolla las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división con operaciones anidadas:

   a) $(19 - 10) \times (-3)$ b) $-4 \times (8 - 5)$ c) $-5 \div (-5 - 20)$

4. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación, división, suma o resta e incluyen potencias.

   a) $2 - 3 \times (-5)^2$ b) $-3 - 7 \times (-3^2)$ c) $-2 \times (2 - 7)^3 + 3^2$

5. Efectúa las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

   a) $(-25 - 11) \times 4$ b) $42 \times \left(\frac{3}{14} - \frac{5}{6}\right)$ c) $12 \times 13 + 88 \times 13$

6. Escribe el conjunto de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

   a) $10 + 3$ b) -6×3 c) $12 - 15$

3.1 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

P

1. Escribe los primeros 12 múltiplos para cada uno de los siguientes números:
   2:
   5:

   Responde:
   a) ¿Cuáles son los múltiplos comunes de 2 y 5?
   b) ¿Cuál es el menor de los múltiplos en **a**?

2. Escribe los divisores para cada uno de los siguientes números:
   18:
   24:

   Responde:
   a) ¿Cuáles son los divisores comunes de 18 y 24?
   b) ¿Cuál es el mayor de los divisores en **a**?

S

1. 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24
   5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 y 60

   a) 10 y 20 b) 10

2. 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
   24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24

   a) 1, 2, 3 y 6 b) 6

C

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números se llama **mínimo común múltiplo** y su abreviatura es **mcm.**

Los pasos para calcularlo son:
1. Escribir los múltiplos de cada número.
2. Encontrar los múltiplos comunes.
3. Encontrar el menor de los múltiplos comunes.

El mayor de los divisores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** y su abreviatura es **MCD.**

Los pasos para calcularlo son:
1. Escribir todos los divisores de cada número.
2. Encontrar los divisores comunes.
3. Encontrar el mayor de los divisores comunes.

1. Encuentra el mcm para los siguientes números.
   a) 6 y 9 b) 5 y 10 c) 3 y 5 d) 3, 6 y 9

2. Encuentra el MCD para los siguientes números:
   a) 6 y 9 b) 12 y 8 c) 18 y 3 d) 14, 21 y 28

3.2 Relación entre los múltiplos y divisores de un número

P

Realiza lo que se pide en los siguientes numerales:

1. Copia y llena en tu cuaderno los espacios ___ con los divisores y múltiplos de 24 y 36.

Divisores de 24 | Múltiplos de 24

1, 2, 3, ___, ___, ___, ___, ___ **:24:** 24, 48, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ...

Divisores de 36 | Múltiplos de 36

1, 2, 3, ___, ___, ___, ___, ___, ___ **:36:** 36, 72, ___, ___, ___, ___, ___, ...

2. Según lo realizado en el numeral anterior, responde las siguientes preguntas:
   a) ¿Es 24 múltiplo de 4? ¿Es 4 divisor de 24?
   b) ¿Es 24 múltiplo de 1? ¿Es 1 divisor de 24?
   c) ¿Es 24 múltiplo de 24? ¿Es 24 divisor de 24?

3. Calcula el mcm y el MCD de 24 y 36.

4. ¿Es el mcm un múltiplo del MCD?

S

1.

Divisores de 24 | Múltiplos de 24

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **: 24 :** 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, ...

Divisores de 36 | Múltiplos de 36

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 **: 36 :** 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, ...

2. a) 24 es múltiplo de 4, 4 es divisor de 24.
   b) 24 es múltiplo de 1, 1 es divisor de 24.
   c) 24 es múltiplo de 24, 24 es divisor de 24.

3. mcm = 72, MCD = 12.

4. Se puede expresar el mcm como múltiplo del MCD, mcm = MCD × 6 porque 72 = 12 × 6, el mcm es múltiplo del MCD.

C

Con respecto a los múltiplos y divisores de un número, y el mcm y MCD de dos o más números, se cumple que

- Si un número es múltiplo de otro número, ese es divisor del primero.
- Cualquier número es múltiplo de 1 y 1 es divisor de cualquier número.
- Un número es tanto divisor como múltiplo de sí mismo.
- El mcm es múltiplo del MCD.

Copia en tu cuaderno y completa.

1. 4 es divisor de 20. Entonces, 20 es ___________ de 4.
2. 8 es múltiplo de 2. Entonces, 2 es __________ de 8.
3. Cualquier número es múltiplo de _______.
4. _______ es divisor de cualquier número.
5. ¿6 es múltiplo de 6? Explica por qué.
6. ¿6 es divisor de 6? Explica por qué.
7. Para cada literal del ejercicio 2 de la clase anterior expresa el mcm de los números como un múltiplo de su MCD.

3.3 Números primos y compuestos

P

Copia la tabla en tu cuaderno y escribe todos los divisores de los números dados, después clasifica los números según la cantidad de divisores.

Número	Divisores	Número	Divisores
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

a) ¿Qué números tienen solo dos divisores?
b) ¿Qué números tienen más de dos divisores?

S

Número	Divisores	Número	Divisores
1	1	11	1, 11
2	1, 2	12	1, 2, 3, 4, 6, 12
3	1, 3	13	1, 13
4	1, 2, 4	14	1, 2, 7, 14
5	1, 5	15	1, 3, 5, 15
6	1, 2, 3, 6	16	1, 2, 4, 8, 16
7	1, 7	17	1, 17
8	1, 2, 4, 8	18	1, 2, 3, 6, 9, 18
9	1, 3, 9	19	1, 19
10	1, 2, 5, 10	20	1, 2, 4, 5, 10, 20

a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
b) 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 y 20.

C

A los números que tienen solo dos divisores (el 1 y el mismo número) se les llama **números primos**. Ejemplo de estos números son los del literal **a**.

Los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**. Ejemplos de estos números son los del literal **b**.

El 1 solo tiene 1 como divisor. El 1 no es número primo ni compuesto.

E

Eratóstenes ideó un método para encontrar números primos conocido como la Criba de Eratóstenes. Esta permite encontrar todos los números primos desde un valor inicial hasta un valor final. Se basa en eliminar de la lista los múltiplos de los números primos entre el valor inicial y final. Una vez acabado el proceso, los números que queden sin descartar serán primos. El proceso termina hasta llegar al primer número cuya potencia cuadrada es igual o mayor que el valor final.

a) Determina todos los números primos hasta el 100 utilizando la Criba de Eratóstones, auxiliándote de la tabla numerada del 1 al 100.

b) Clasifica los números 11, 23, 29, 42, 54, 75, 88, 91 en primos y compuestos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Solución.

a)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1. 1 no es un número primo. Se tacha.
2. 2 es primo.
3. Tachar todos los múltiplos de 2.
4. El siguiente número sin tachar es 3 y es primo.
5. Tachar todos los múltiplos de 3.
6. El siguiente número sin tachar es 5 y es primo.
6. Tachar todos los múltiplos de 5.
7. El siguiente número sin tachar es 7 y es primo.
8. Tachar todos los múltiplos de 7.
9. Los números que quedan sin tachar, son todos los números primos entre 1 y 100. Se termina el proceso porque el próximo primo será 11 el cuál supera a 10 y $10^2 = 100$.

b) Números primos: 11, 23 y 29.
Números compuestos: 42, 54, 75,88 y 91.

Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:
5, 9, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 41, 47, 49 y 53.

3.4 Descomposición en factores primos

Representa el número 24 como producto de números primos. Se pueden repetir números primos si se considera necesario.

El producto es el resultado de una multiplicación.

Para obtener los números primos de la multiplicación, se puede hacer el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Significa } 24 \div 2 = 12 \\ 12 \div 2 = 6 \\ 6 \div 2 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

Y así se sigue consecutivamente.

Por tanto, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$; de forma equivalente puedes representarlo como $24 = 2^3 \times 3$.

A los números en un producto se les llama **factores**.

Cualquier número compuesto puede ser expresado como producto de números primos. A este procedimiento se le llama **descomposición en factores primos**.

Llena el recuadro $\square$ con el número correspondiente en la descomposición en factores primos de 36 y luego escribe el número como producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 36 & \square \\ 18 & \square \\ 9 & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 24 & \square \\ 12 & \square \\ 6 & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

Solución.

$$\begin{array}{r|l} 36 & \boxed{2} \\ 18 & \boxed{2} \\ 9 & \boxed{3} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 24 & \boxed{2} \\ 12 & \boxed{2} \\ 6 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2^2 \times 3^2$ $\qquad$ $24 = 2^3 \times 3$

Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 12	b) 16	c) 20	d) 30	e) 35
f) 56	g) 50	h) 54	i) 64	j) 100

3.5 Máximo común divisor por descomposición en factores primos

P

El cálculo del MCD de 8 y 12 se hace de la siguiente manera:

Número	Divisores
8:	1, 2, 4, 8
12:	1, 2, 3, 4, 6, 12

Por tanto, el MCD de 8 y 12 es 4.

El proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12 es:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

¿Cómo se calcula el MCD de 8 y 12 a partir de la descomposición de estos números?

S

$$8 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = \boxed{2} \times \boxed{2} \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

El MCD de 8 y 12 se puede calcular multiplicando los primos comunes con el menor exponente de ambas descomposiciones. Es decir, $2 \times 2 = 2^2 = 4$.

C

El MCD de dos números se determina realizando los siguientes pasos:

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos comunes en ambas descomposiciones que tengan el menor exponente.

E

Encuentra el MCD para 12 y 18 a través de la descomposición en factores primos.

Solución.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \quad = 2^2 \times 3$$
$$18 = \boxed{2} \quad \times \boxed{3} \times 3 = 2 \times 3^2$$
$$\text{MCD} = 2 \times 3 = 6$$

Calcula el MCD por descomposición en factores primos.

a) 12 y 15 b) 9 y 27 c) 8 y 20 d) 12 y 16 e) 15 y 25

f) 6 y 14 g) 7 y 14 h) 6 y 8 i) 5 y 15 j) 9 y 12

3.6 Mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos

P

El cálculo del mcm de 8 y 12 se hace de la siguiente manera:

Número	Múltiplos
8:	8, 16, 24, 32, 40, ...
12:	12, 24, 36, 48, ...

Por tanto, el mcm de 8 y 12 es 24.

Ahora observa el proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12, luego escribe cómo calcular su mcm a partir de la descomposición:

8	2		12	2
4	2		6	2
2	2		3	3
1			1	

Por lo que la descomposición en factores primos es:

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

S

$$8 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times \boxed{3} = 2^2 \times 3$$

El mcm de 8 y 12 se puede calcular multiplicando los números primos diferentes en cada descomposición, en caso de haber primos comunes se toman solamente los de mayor exponente para la multiplicación. Es decir, $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3 = 24$.

C

El mcm de dos números se determina por
1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos no comunes en la descomposición, en caso de haber primos comunes, solo se toman las potencias de primos con mayor exponente (si los comunes tienen el mismo exponente se toman solo una vez).

E

Encuentra el mcm de los números 20 y 24 a través de la descomposición en factores primos.

Solución.

20	2		24	2
10	2		12	2
5	5		6	2
1			3	3
			1	

$$20 = 2 \text{ x } 2 \qquad \times \boxed{5} = 2^2 \times 5$$
$$24 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \text{ x } \boxed{3} \quad = 2^3 \times 3$$
$$\text{mcm} = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$= 120$$

Calcula el mcm por descomposición en factores primos:

a) 12 y 18 b) 9 y 27 c) 8 y 20 d) 12 y 16 e) 15 y 20

f) 6 y 21 g) 7 y 14 h) 6 y 8 i) 5 y 15 j) 9 y 12

3.7 Aplicación del mcm y MCD

P

Hay 126 niños y 12 maestros. Si se quiere formar la mayor cantidad de grupos y de manera equitativa (respecto a niños y maestros), ¿cuántos grupos se formarían?, ¿cuántos niños hay en cada grupo?

S

Como cada grupo debería de tener la misma cantidad de niños, entonces el número de grupos debe ser un divisor de la cantidad de niños, es decir, de 126. De la misma manera, el número de grupos debe ser divisor de la cantidad total de maestros, es decir, de 12. Por lo tanto, el número de grupos es un divisor común de 126 y 12, pero como se quiere la mayor cantidad de grupos, este divisor debe ser el máximo común divisor de 126 y 12.

La descomposición en factores primos es:

$$\begin{array}{rcccccccl} 126 & = & 2 & & \times & 3 & \times 3 \times 7 & = & 2 \times 3^2 \times 7 \\ 12 & = & 2 & \times 2 & \times & 3 & & = & 2^2 \times 3 \end{array}$$

Entonces, MCD = 2 × 3 = 6.

Por lo tanto, se formarán 6 grupos y en cada grupo deben haber 126 ÷ 6 = 21 niños.

C

Se puede utilizar el MCD y el mcm para resolver problemas del entorno.

E

Ana escribe a su abuela cada 15 días y a su tío cada 18 días. Si hoy le tocó escribirle a ambos, ¿dentro de cuántos días volverá a coincidir por primera vez en escribirles a su tío y su abuela?

Solución.
Si Ana escribe a su abuela cada 15 días, el número de días que deben pasar para que vuelva a escribirle debe ser un múltiplo de 15, de la misma forma si a su tío le escribe cada 18 días, el número de días que deben pasar para coincidir nuevamente, debe ser múltiplo de 18. Por lo tanto, el número de días que deben pasar es múltiplo de 15 y de 18; y como se quiere que sea la primera vez que coincida nuevamente, debe ser el mínimo común múltiplo.
Por lo que la descomposición en factores es:

$$\begin{array}{rcccccl} 15 & = & & 3 & \times \boxed{5} & = & 3 \times 5 \\ 18 & = & \boxed{2} & \times \boxed{3 \times 3} & & = & 2 \times 3^2 \end{array}$$

Entonces, el mcm = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

De tal forma que le tocará volver a escribirles el mismo día dentro de 90 días.

1. Se repartirán equitativamente 90 cuadernos y 72 lápices entre la mayor cantidad de niños que se pueda. ¿Entre cuántos niños se pueden repartir? ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices recibirá cada niño?
2. Carlos hornea galletas y las empaqueta para venderlas; si ha hecho 90 galletas de vainilla y 60 de chocolate, y cada paquete debe ser idéntico, ¿cuál es el máximo número de paquetes que se pueden hacer?, ¿cuántas galletas de cada sabor debe tener un paquete cualquiera?
3. José va a jugar fútbol cada 6 días y Carlos cada 21 días. Si hoy coincidieron en ir a jugar, ¿cuántos días pasarán para que vuelvan a coincidir?
4. Para la fiesta de cumpleaños de Julia se quieren comprar vasos y platos. Los vasos vienen en paquete de 6 unidades, mientras que los platos en paquetes de 8 unidades; considerando que el número de platos y vasos debe ser el mismo y el mínimo posible, ¿cuál es la cantidad de platos y vasos que se tendrán?

3.8 Practica lo aprendido

1. Para los siguiente literales:
   a) 2, 3 y 4 b) 3, 5 y 15

   1. Escribe los primeros 10 múltiplos de cada número.
   2. Escribe los múltiplos comunes.
   3. Encuentra el mcm.

2. Para los siguientes literales:
   a) 18, 24 y 36 b) 16, 24 y 32

   1. Escribe todos los divisores de cada número.
   2. Escribe los divisores comunes.
   3. Encuentra el MCD.

3. Completa el espacio en blanco y responde a la pregunta:
   6 es divisor de 12. Entonces, 12 es ___________ de 6.
   24 es múltiplo de 8. Entonces, 8 es ___________ de 24.
   ¿7 es múltiplo de 7? Explica por qué.

4. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:
   4, 7, 9, 13, 21, 27, 32, 37, 39 y 41.

5. Descompone en factores primos los siguientes números:
   a) 18 b) 40 c) 42 d) 60

6. Encuentra el MCD por descomposición en factores primos:
   a) 12 y 18 b) 9 y 15 c) 16 y 20 d) 24 y 36

7. Encuentra el mcm por descomposición en factores primos:
   a) 6 y 8 b) 5 y 10 c) 6 y 15 d) 12 y 15

8. Resuelve los siguientes problemas:
   a) Se tienen 20 dulces de fresa y 24 de piña y se reparten de tal manera que el número de dulces de cada sabor sea el mismo en cada bolsita, ¿cuál es el mayor número de bolsitas que se pueden hacer?, ¿cuántos dulces de cada sabor tiene cada bolsa?

   b) Hay una cinta que tiene una graduación en cada 8 cm y otra en cada 12 cm, ¿en cuántos cm coinciden las graduaciones por primera vez en ambas cintas?

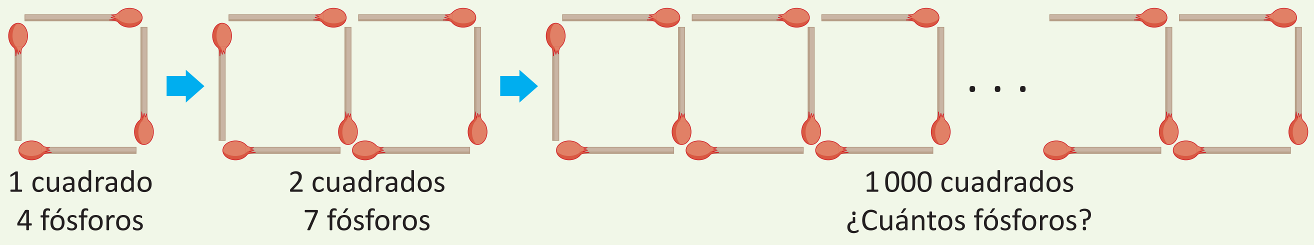
4 Unidad

Comunicación con símbolos

Los primeros aportes al álgebra surgieron por parte de matemáticos hindúes como Aryabhata, sin embargo, el matemático árabe que logró rescatar estos aportes de las matemáticas hindú y griega hacia el mundo arábigo fue Abu Abdallah Muḥammad ibn Musa (Al-juarismi), y logró sistematizar de manera didáctica lo que conocemos en la actualidad como álgebra en su libro *Álgebra, guarismo y algoritmo*.

El álgebra surge y se mantiene como una herramienta muy útil para la modelación de situaciones de la realidad, con el fin de determinar situaciones relacionadas con el comercio, repartición de objetos, herencias, créditos, obras de ingeniería, etc.

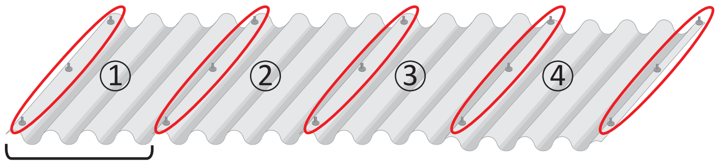
El desarrollo de las temáticas de la unidad comienzan con reconocer patrones, y expresarlos a partir de un lenguaje matemático, modelando diferentes situaciones de la vida cotidiana, de donde surge la necesidad de la introducción de un lenguaje formal (algebraico); luego se introducirán las operaciones de expresiones en este lenguaje y la traducción de lenguaje algebraico al lenguaje coloquial (o común). La profundidad estará enfocada al trabajo con una variable, de modo que en esta unidad se garantice el manejo algebraico básico para la resolución de ecuaciones de primer grado.



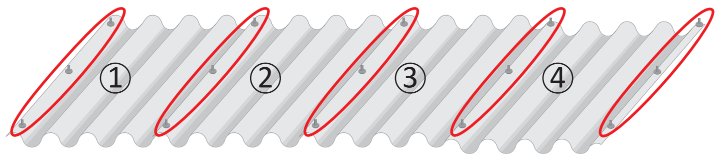
La figura representa las condiciones para determinar un patrón, para ello hay que calcular el número de fósforos que se requieren para formar 1 000 cuadrados.

1.1 Patrones numéricos

Observa la ilustración, ¿cuántos pines se necesitan para poner cuatro láminas?



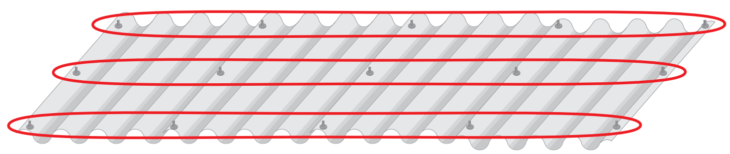
1 lámina



Contando los pines que están en el lado izquierdo de cada lámina por el número de láminas, y sumando los tres últimos que aparecen en la derecha de la última lámina entonces, $3 \times 4 + 3 = 15$,

R. 15 pines

o también puede ser:



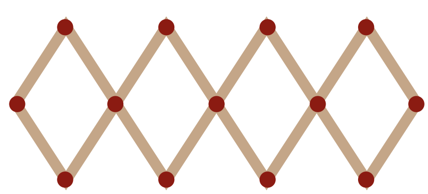
Observando los pines por fila, en cada fila hay igual número de pines que número de láminas más uno y si hay tres filas entonces, $3 \times (4 + 1) = 15$ **R.** 15 pines.

Se puede obtener el número de pines con la expresión:
3 × (*número de láminas*) + 3 o **3 × (*número de láminas* + 1)**

El descubrimiento de un patrón numérico puede facilitar el conteo de un elemento en una situación determinada o un cálculo.

1. En la situación del Problema inicial, cuántos pines se necesitan, si se quiere poner:
   a) 5 láminas b) 6 láminas c) 7 láminas

2. Se tiene un acordeón para colgar sombreros. Escribe una expresión numérica que represente el número de perchas según el número de romboides.



1.2 Generalización de un patrón numérico

P

Para calcular el número de pines necesarios para colocar 1, 2, 3 y 4 láminas en el problema de la clase anterior, se hace de la siguiente manera:

1 lámina $3 \times 1 + 3$ (pines)
2 láminas $3 \times 2 + 3$ (pines)
3 láminas $3 \times 3 + 3$ (pines)
4 láminas $3 \times 4 + 3$ (pines)

a) Expresa el número de pines que se necesitan para poner 5, 6 y 7 láminas.
b) Si el número de láminas que se ponen es $\square$, ¿cuántos pines se necesitan?

S

Número de láminas	Número de pines
1	$3 \times 1 + 3$
2	$3 \times 2 + 3$
3	$3 \times 3 + 3$
4	$3 \times 4 + 3$
5	$3 \times 5 + 3$
6	$3 \times 6 + 3$
7	$3 \times 7 + 3$

a) Para 5 láminas, $3 \times 5 + 3 = 18$ (pines)
Para 6 láminas, $3 \times 6 + 3 = 21$ (pines)
Para 7 láminas, $3 \times 7 + 3 = 24$ (pines)
R. 18 pines, 21 pines y 24 pines.

b) Son 3 pines al lado izquierdo de cada lámina más tres que están a la derecha de la última lámina, si hay $\square$ láminas, se tendrán $3 \times \square + 3$ (pines).

Así por ejemplo, si se quieren poner 22 láminas hay:
$3 \times 22 + 3 = 69$ (pines).
R. $3 \times \square + 3$ (pines)

C

Cuando se hacen operaciones con cantidades variantes se puede utilizar $\square$ para representar a estas cantidades en las operaciones.

E

Si la cantidad de camisetas blancas que se compran se representan con $\square$ y cada una vale 2 dólares.
a) ¿Cuál es el costo de la compra?
b) ¿Cuál es el vuelto al comprar con un billete de 20 dólares?

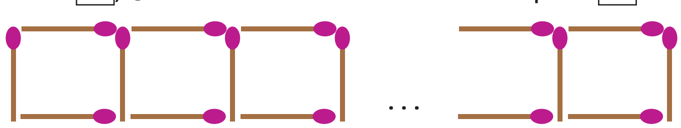
Solución.

Número de camisetas	Cantidad de dinero
1	$2 \times 1 = \$2$
2	$2 \times 2 = \$4$
$\vdots$	$\vdots$
$\square$	$2 \times \square$

a) **R.** $2 \times \square$ (dólares)

b) **R.** $20 - 2 \times \square$ (dólares)

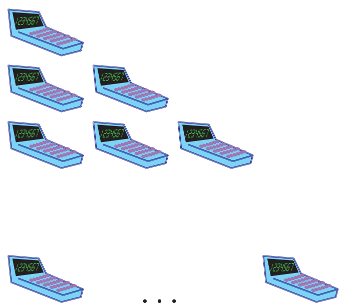
1. Se forman varios cuadrados con fósforos, uno después de otro. Si el número de cuadrados que se forman se representa con $\square$, ¿cuántos fósforos se necesitan para $\square$?



2. Si un estuche de geometría vale 3 dólares:
a) ¿Cuál es el costo al comprar $\square$ estuches?
b) ¿Cuál es vuelto al comprar con un billete de 20 dólares?

1.3 Expresiones algebraicas de una variable

Una calculadora tiene un precio de 10 dólares, ¿cuál es el costo al comprar $\square$ calculadoras?



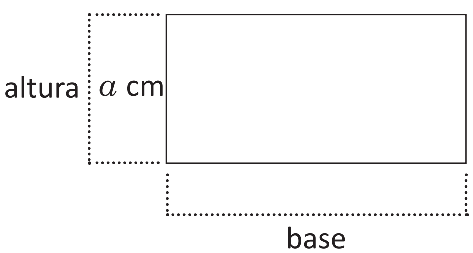
Cantidad	Costo
1	$10 \times 1 = 10$ (dólares)
2	$10 \times 2 = 20$ (dólares)
3	$10 \times 3 = 30$ (dólares)
⋮	⋮
$\square$	$10 \times \square$ (dólares)

R. $10 \times \square$ (dólares)

Se ha utilizado el recuadro $\square$ para representar cantidades variantes, pero regularmente para referirse a este tipo de cantidades se utilizan letras, por ejemplo la expresión $10 \times \square$ se puede escribir como $10 \times a$. Se utilizó la letra a pero puede usarse cualquier otra letra.

A las expresiones como $10 \times a$ se les llama **expresiones algebraicas**. A las letras que representan cantidades variantes se les llaman **variables**. En la expresión algebraica $10 \times a$ la letra a es la variable. Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones.

En el rectángulo de la ilustración la base es 2 cm más larga que la altura. Representa con una expresión algebraica la base del rectángulo.



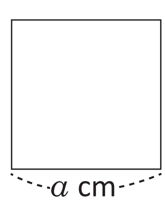
Las letras que representan variables se escriben con un formato distinto al de una letra utilizada en un texto normal o para las unidades de medida. Por ejemplo:
"x" representa una variable
"x" texto normal
"×" Signo de multiplicación

Solución.
La base es $a + 2$ cm.

1. Escribe una expresión algebraica que responda a cada una de las siguientes preguntas:
   a) Si la edad de Mario se representa con a, ¿cuál es la edad de su hermano que es 5 años mayor que él?
   b) Si se compra un pantalón que vale b dólares, ¿cuál es el vuelto si se compra con un billete de 20 dólares?

2. Si n representa un número entero, ¿cómo se representa el doble de ese número?

3. ¿Cuál es el perímetro del siguiente cuadrado?



1.4 Expresiones algebraicas con más de una variable

P

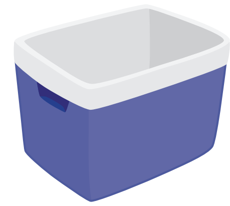
Si una lata con bebida pesa x libras, y una hielera y libras. ¿Cuál es el peso total de la hielera con 6 latas de bebida en ella?

S

Peso de las 6 latas: $6 \times x$ (lb)

Peso de la hielera: y (lb)

Peso total: $6 \times x + y$ (lb)

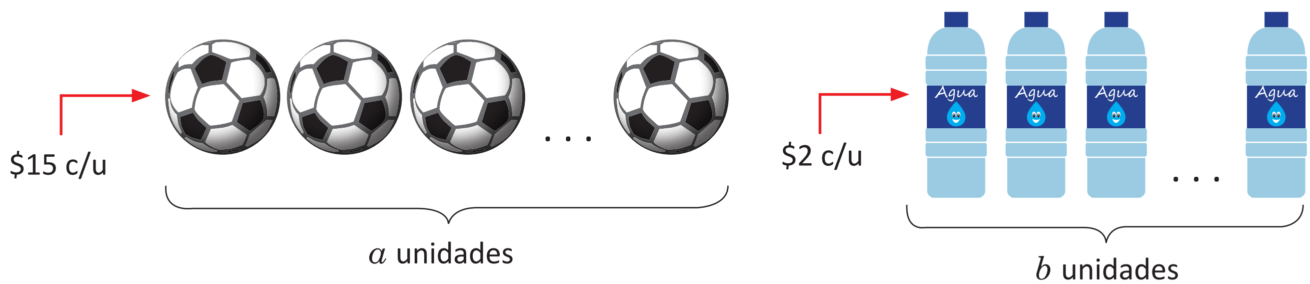


C

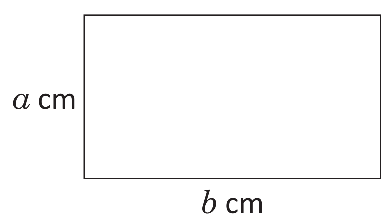
Las expresiones algebraicas pueden combinar más de una variable y más de una operación.

Escribe una expresión algebraica que responda la pregunta de cada numeral.

1. Un entrenador de fútbol comprará a balones que cuestan 15 dólares cada uno y b botellas de bebida rehidratante que cuestan 2 dólares cada una. Escribe una expresión que represente el costo total de la compra:



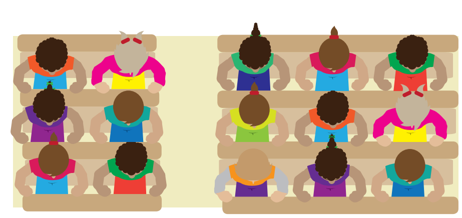
2. ¿Cuál es el área del siguiente rectángulo?



3. Si un cuaderno pesa a gramos, y una mochila b gramos, ¿cuál es el peso total de la mochila con 5 cuadernos en ella?

4. Si un lapicero cuesta m dólares y un cuaderno n dólares, ¿cuál es el vuelto al comprar 4 lapiceros y 3 cuadernos con un billete de 10 dólares?

5. Un autobús tiene una distribución de asientos en 2 secciones, la primera tiene 2 asientos y la segunda tiene 3 asientos, y hay a filas de asientos en la primera sección y b en la segunda. Escribe una expresión algebraica que represente la capacidad del autobús según el número de asientos.

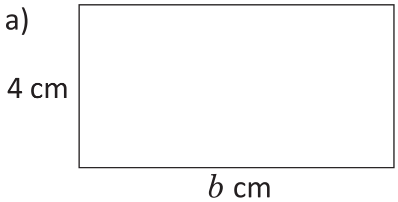


1.5 Representación de expresiones algebraicas sin el signo "×"

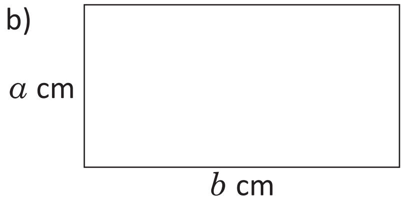
P

Representa el área y perímetro para cada uno de los siguientes rectángulos utilizando expresiones algebraicas:

a)



b)



El área de un rectángulo es igual al producto de su base por la altura.

El perímetro de un rectángulo es dos veces la suma de su base por la altura.

S

a) Área = $b \times 4$ cm^2
Perímetro = $2 \times (b + 4)$ cm

b) Área = $b \times a$ cm^2
Perímetro = $2 \times (b + a)$ cm

En una expresión algebraica se omite el signo "×" entre los factores si uno de ellos es variable u otra expresión algebraica entre paréntesis.

- $b \times 4$ cm^2 = $4b$ cm^2
- $2 \times (b + 4)$ cm = $2(b + 4)$ cm
- $b \times a$ cm^2 = ab cm^2
- $2 \times (a + b)$ cm = $2(a + b)$ cm

C

Al representar una multiplicación que incluya una o más variables o una expresión algebraica se tiene que

1. Omitir el signo de multiplicación "×".
2. Escribir primero el número cuando se multiplique por una variable o expresión algebraica entre paréntesis.
3. Ordenar las variables según el alfabeto, cuando el producto es de dos o más variables.

Cuando la multiplicación es de dos números el signo "×" no se puede omitir, salvo que se utilice otra forma de representar la multiplicación.

E

Representa sin el signo "×" y ordena las variables en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $b \times (-4) \times a$

b) $b \times \frac{5}{7} \times a$

Solución.

a) $b \times (-4) \times a = -4 \times b \times a$
$= -4 \times a \times b$
$= -4ab$

b) $b \times \frac{5}{7} \times a = \frac{5}{7} \times b \times a$
$= \frac{5}{7} \times a \times b$
$= \frac{5}{7}ab$

La expresión:
$\frac{5}{7}ab = \frac{5ab}{7}$
es igualmente válida.

1. Representa sin el signo "×" y ordena las variables en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $15 \times a$	b) $a \times 10$	c) $b \times (-4)$	d) $b \times \frac{1}{2}$
e) $-\frac{3}{5} \times a$	f) $y \times \left(-\frac{4}{7}\right)$	g) $4 \times a \times b$	h) $x \times 3 \times y$
i) $a \times b \times 3$	j) $c \times b \times 2$	k) $-3 \times a \times b$	l) $x \times y \times (-2)$
m) $c \times b \times (-10)$	n) $f \times (-13) \times e$	o) $5 \times (3 + x)$	p) $(4 - y) \times 2$
q) $-2 \times (1 - x)$	r) $(a + 35) \times (-6)$	s) $(4 - \mathrm{m}) \times (-10)$	t) $(-b + 3) \times (-4)$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo "×":

a) $2a$	b) $-4m$	c) $\frac{3}{5}xy$
d) $-3ab$	e) $\frac{2}{7}(x + y)$	f) $-3(y + 2)$

1.6 Expresiones algebraicas multiplicadas por 1 o –1

P

Representa sin el signo (×) las siguientes expresiones algebraicas:

a) $1 \times a$ b) $-1 \times a$

S

a) $1 \times a = 1a$ b) $-1 \times a = -1a$

C

En la multiplicación de una variable o expresión algebraica por 1, se omite el signo de multiplicación y el 1.

Por ejemplo:

$$1 \times a = 1a = a \qquad 1 \times (a + 3) = 1(a + 3) = a + 3$$

Se escribe a en lugar de $1a$ porque el producto de 1 multiplicado por un número es ese mismo número.

En el producto de una variable o expresión algebraica por (–1), se escribe el signo (–), se omite el signo de multiplicación y el 1.

Por ejemplo:

$$-1 \times a = -1a = -a \qquad -1 \times (a + 3) = -1\,(a + 3) = -(a + 3)$$

E

Representa sin el signo (×) las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a \times (-1) \times b$ b) $y \times x \times 1$ c) $-1 \times (3 + x)$ d) $(m + n) \times (-1)$

Solución.

a) $a \times (-1) \times b = -1ab = -ab$ b) $y \times x \times 1 = 1xy = xy$

c) $-1 \times (3 + x) = -1(3 + x) = -(3 + x)$ d) $(m + n) \times (-1) = -\,1(m + n) = -(m + n)$

1. Representa sin el signo (×) las siguientes expresiones algebraicas:

a) $1 \times r$ b) $x \times 1$ c) $-1 \times y$ d) $r \times (-1)$

e) $1 \times c \times d$ f) $m \times 1 \times n$ g) $m \times n \times 1$ h) $-1 \times j \times k$

i) $r \times (-1) \times t$ j) $x \times y \times (-1)$ k) $f \times e \times (-1)$ l) $n \times (-1) \times m$

m) $1 \times (p + 1)$ n) $(x + y) \times 1$ o) $-1 \times (s + 3)$ p) $(a + b) \times (-1)$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (×). Utiliza multiplicaciones por 1 o –1.

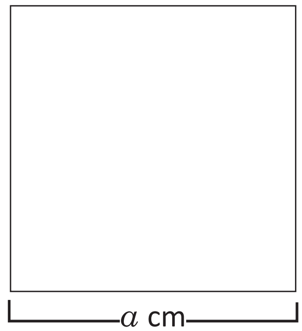
a) r b) $-m$ c) $x + y$ d) $-(y + 5)$

Unidad 4

1.7 Potencia de una expresión algebraica

P

Representa el área del siguiente cuadrado de lado a, mediante una expresión algebraica.



Recuerda que el área de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado.

S

El área del cuadrado es $a \times a$ cm^2.

C

El producto de la misma variable o la misma expresión algebraica se representa con el uso de exponentes. Por ejemplo: $a \times a$ cm^2 es a^2 cm^2.

E

Representa de forma abreviada las siguientes expresiones:

a) $b \times b \times b$

b) $-2 \times b \times b \times a$

Solución.

a) $b \times b \times b = b^3$

b) $-2 \times b \times b \times a = -2 \times a \times b \times b$
$= -2ab^2$

1. Representa sin el signo (×) las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x \times x$ b) $y \times y \times y$ c) $x \times x \times y$

d) $x \times x \times y \times y$ e) $x \times x \times x \times y \times y \times y$ f) $1 \times a \times a$

g) $b \times b \times 7$ h) $-8 \times b \times b$ i) $c \times (-1) \times c$

j) $m \times m \times n \times (-2)$ k) $-3 \times p \times m \times p \times m$ l) $r \times n \times (-1) \times n \times r$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (×) y sin potencias:

a) $5a^2$ b) $-7b^3$ c) $2a^2b$ d) $-3x^2y^2$

e) $4x^3y$ f) $-5x^3y^2$ g) x^3y^3 h) $-x^2y^3$

1.8 Expresión algebraica con división

P

Si hay x litros de jugo, y se quiere repartir entre 3 personas equitativamente, ¿cuántos litros de jugo le corresponden a cada persona?

Una fracción es un cociente indicado. Por ejemplo:
$2 \div 3 = \frac{2}{3}$

S

Como hay x litros y se reparten equitativamente entre 3, a cada persona le corresponde:

$x \div 3 = \frac{x}{3}$ **R.** $\frac{x}{3}\, l$

C

La división de una variable o expresión algebraica se escribe en forma de fracción omitiendo el signo (÷). El dividendo se convierte en el numerador de la fracción y el divisor en el denominador.

A diferencia con (×) y (÷), los signos (+) y (–) no se pueden omitir dentro de las expresiones algebraicas.

E

Escribe las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a) $(x + y) \div (-5)$ b) $n \div (-7)$

Solución.

a) $(x + y) \div (-5) = \frac{x + y}{-5}$
$= -\frac{x + y}{5}$

b) $n \div (-7) = \frac{n}{-7}$
$= -\frac{n}{7}$

Como dividir entre un número es equivalente a multiplicar por el recíproco del número, se puede escribir:

a) $(x + y) \div (-5) = -\frac{x + y}{5} = -\frac{1}{5}(x + y)$ b) $n \div (-7) = -\frac{n}{7} = -\frac{1}{7}n$

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a) $x \div 2$ b) $y \div (-2)$ c) $(r - s) \div 4$ d) $(m + n) \div (-5)$

e) $r \div t$ f) $2 \div m$ g) $-3 \div p$ h) $-10 \div x$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (÷).

a) $\frac{1}{4}a = \frac{a}{4} = a \div 4$ b) $-\frac{1}{5}b = -\frac{b}{5} = \frac{b}{-5} = b \div \square$ c) $-\frac{m}{5} = \square \div (-5)$

d) $\frac{x}{5} = \square \div \square$ e) $-\frac{y}{2}$ f) $\frac{a + b}{5}$

g) $-\frac{1}{7}(x - y)$ h) $\frac{p}{q}$ i) $\frac{3}{b}$

Unidad 4

1.9 Expresiones algebraicas con multiplicación y división

P

Escribe en una forma equivalente las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2 \times a + 3 \times b$

b) $a \div 3 + 4 \times b$

c) $4 \div a \times b \div 5$

d) $(a + b) \div 2 + 3 \times (c + d)$

e) $3 \times a \times a + b \div 4$

f) $4 \times a \times a \times a - 2 \times b \times b$

S

a) $2 \times a + 3 \times b = 2a + 3b$

b) $a \div 3 + 4 \times b = \frac{a}{3} + 4b$
también se puede escribir como $\frac{1}{3}a + 4b$.

c) $4 \div a \times b \div 5 = \frac{4}{a} \times b \div 5 = \frac{4b}{a} \div 5 = \frac{4b}{5a}$

d) $(a + b) \div 2 + 3 \times (c + d) = \frac{a + b}{2} + 3(c + d)$

e) $3 \times a \times a + b \div 4 = 3a^2 + \frac{b}{4}$

f) $4 \times a \times a \times a - 2 \times b \times b = 4a^3 - 2b^2$

C

En las operaciones de multiplicación y división se puede omitir los signos (×) y (÷), cuando ambas operaciones aparecen combinadas en una expresión algebraica.

E

Escribe las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (×) y (÷) y sin emplear potencias.

a) $\frac{a}{4} + \frac{1}{5}b$

b) $3a^2 + 4b^3$

Solución.

a) $\frac{a}{4} + \frac{1}{5}b = a \div 4 + \frac{1}{5} \times b$

b) $3a^2 + 4b^3 = 3 \times a \times a + 4 \times b \times b \times b$

Otra forma de escribir la expresión es:

$$\frac{a}{4} + \frac{1}{5}b = \frac{a}{4} + \frac{b}{5}$$
$$= a \div 4 + b \div 5$$

Recuerda que
$\frac{1}{7}x = \frac{x}{7} = x \div 7$

1. Escribe la siguiente expresión algebraica omitiendo los signos (×) y (÷).

a) $3 \times x + 7 \times y$

b) $-5 \times a + c \div d$

c) $(c - d) \div 3 - (r + f) \div 5$

d) $\frac{1}{5} \times a - (x + y) \div 3$

e) $-3 \div (c + d) - a \times a \times a$

f) $a \times a \times 3 - b \times b \times (-1)$

g) $a \times a \times 2 - (s + e) \div (-1)$

h) $b \times (-3) \times b - (x - y) \div (-1)$

2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (×) y (÷) y sin emplear potencias.

a) $100 - 4a$

b) $\frac{1}{2}(x + y) - 4a$

c) $a^2 - b^2$

d) $\frac{r + s}{3} + \frac{b}{7}$

e) $-8(3 + b) + a^2 b^3$

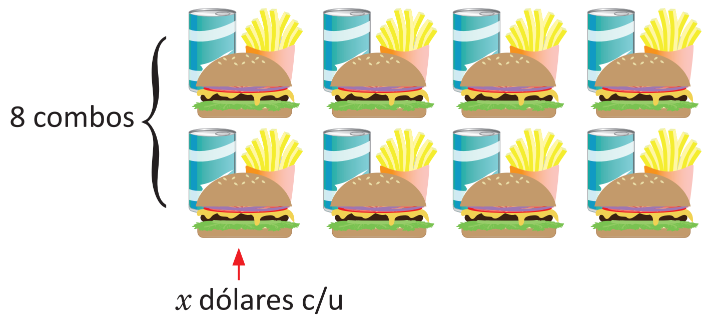
f) $-\frac{(a - 3)}{2} + (x - y)$

1.10 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 1

P

Se compran 8 combos de hamburguesas y se paga con un billete de 50 dólares. Sabiendo que un combo cuesta x dólares representa con una expresión algebraica:

a) El costo total de la compra.
b) El vuelto que se recibe al hacer la compra.



S

a) El costo de la compra es el precio de la unidad por el número de combos, es decir:

$$x \times 8 = 8x \text{ (dólares).}$$

b) El vuelto es lo que se obtiene de restar el costo de la compra del total de dólares pagados:

$$50 - 8x \text{ (dólares).}$$

C

El lenguaje algebraico es la traducción del lenguaje coloquial a variables y números relacionados, mediante operaciones.

E

Una caja que pesa 30 lb contiene artículos de porcelana, un plato pesa a lb y una taza b lb. Representa con una expresión algebraica:

a) El peso total de tres platos y dos tazas.
b) El peso total de la caja cuando se sacan tres platos y dos tazas.

Solución.

a) El peso total de tres platos y dos tazas es:

$$a \times 3 + b \times 2 = 3a + 2b \text{ (lb).}$$

b) El peso total de la caja cuando se sacan tres platos y dos tazas es:

$$30 - 3a - 2b \text{ (lb).}$$

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes situaciones descritas en lenguaje coloquial:

1. En una canasta hay 15 frutas, entre peras y manzanas. Expresa el número de peras cuando hay a manzanas.
2. El costo total de comprar dos sandías si cada una vale b dólares.
3. Un hombre repartirá equitativamente 180 dólares entre a niños. ¿Cómo se expresa la cantidad de dinero que recibe cada niño?
4. El vuelto de comprar con un billete de 10 dólares, cuando se compran b pares de calcetines si cada par cuesta 2 dólares.
5. El costo total, al comprar cuatro cuadernos y seis lapiceros, si cada cuaderno vale x dólares y cada lapicero cuesta y dólares.
6. El vuelto de comprar con un billete de 50 dólares, m camisas y n pantalones si cada camisa vale 8 dólares y cada pantalón vale 12 dólares.

Unidad 4

1.11 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 2

P

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones en lenguaje común.

a) La velocidad de Ana si caminó x km en 4 horas.

b) Las horas que se necesitan para viajar 42 km en bicicleta con una velocidad de x km/h.

Recuerda:
Distancia = Velocidad × Tiempo
Tiempo = Distancia ÷ Velocidad
Velocidad = Distancia ÷ Tiempo

c) La distancia que se puede recorrer en t horas, en un autobús que tiene una velocidad de 30 km/h.

S

a) Ana caminó x kilómetros en 4 horas. La velocidad es la distancia que ha recorrido entre el tiempo en que la recorrió: $x \div 4 = \frac{x}{4}$ km/h.

b) El tiempo es igual a la distancia entre la velocidad de la bicicleta, por tanto: $42 \div x = \frac{42}{x}$ h.

c) La distancia es igual a la velocidad del autobús por el tiempo, es decir: $30 \times t = 30t$ km.

C

Las situaciones de distancia, velocidad y tiempo expresadas en lenguaje coloquial también se pueden traducir al lenguaje algebraico.

Responde las preguntas de las siguientes situaciones:

1. Si se camina a metros en ocho minutos, ¿cuál es la velocidad por minuto?

2. María recorre x metros con una velocidad de 60 m/min, ¿cuánto tiempo caminó María?

3. Si Juan toma un autobús de su casa a un parque ecológico, y su viaje dura x horas a una velocidad de 60 km/h, ¿qué distancia hay de su casa al parque?

4. Si José anda en su silla de ruedas y recorre b km en dos horas, ¿cuál es su velocidad?

5. Para trasladarse de la casa a la universidad, Beatriz camina por x minutos con una velocidad de 30 m/min y luego corre por y minutos, con una velocidad de 90 m/min.

   a) ¿Cuál es el tiempo total del recorrido?

   b) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

1.12 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 3

P

Traduce al lenguaje algebraico lo que se te pide en las siguientes situaciones:

1. El área de un bosque del país que tiene p km^2 de territorio, y el 35% de ello es bosque.
2. La rebaja de un pantalón que vale x dólares y tiene un 25% de descuento.
3. El costo de una camisa cuyo precio es y dólares y con un 20% de descuento.

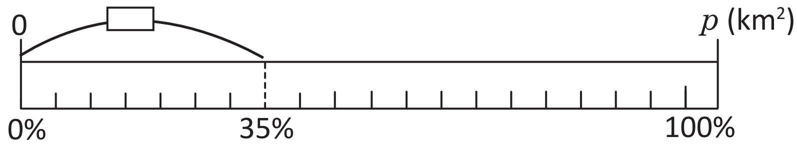
S

1. Si p es la cantidad total y c es la cantidad de bosque, la razón de c entre p en % es $r = \frac{c}{p} \times 100$. Por lo tanto:

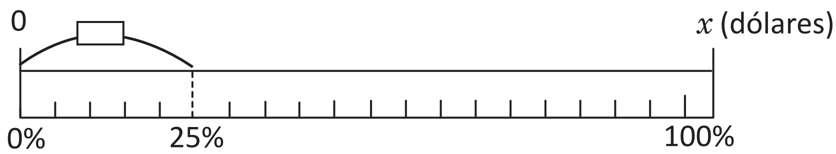
$c = p \times \frac{r}{100} = \frac{r}{100}p$

Por lo que el área de bosque del país es:

$\frac{35}{100}p = \frac{7}{20}p$ (km^2)

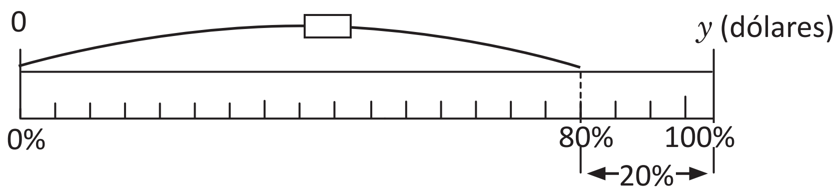


2. $\frac{25}{100}x = \frac{x}{4}$ (dólares)



3. $\left(\frac{100}{100} - \frac{20}{100}\right)y = \frac{80}{100}y$

$= \frac{4}{5}y$ (dólares)



C

El x% de una Cantidad se representa como: $\frac{x}{100} \times$ Cantidad así:

a) El x% de un Territorio es $\frac{x}{100} \times$ Territorio.

b) El y% de descuento del Precio original de un objeto es $\frac{y}{100} \times$ Precio original.

c) El precio de un objeto después de hacer un z% de descuento es $\frac{(100 - z)}{100} \times$ Precio original.

Responde la pregunta de cada una de las siguientes situaciones:

1. El Salvador tiene una extensión territorial de a km^2 y el 74% de ello es superficie agrícola, ¿cuántos km^2 de superficie agrícola hay en el país?

2. Una camisa que vale b dólares tiene un descuento del 15%, ¿cuál es el valor de la camisa con el descuento?

3. Una persona compró un vehículo en x dólares, después de un año el vehículo perdió el 10% de su valor, ¿cuánto cuesta el vehículo actualmente?

1.13 Traducción del lenguaje algebraico al coloquial

P

1. El precio de la entrada a un museo para un adulto es a dólares y para un menor de edad es b. ¿Qué representan las siguientes expresiones algebraicas?

   a) $a + b$ b) $4a + 2b$ c) $10 - 2a$ d) $a - b$

2. Para poder trasladarse de la casa a la universidad, Ana camina por m minutos con una velocidad de 70 m/min y luego corre por n minutos, con una velocidad de 120 m/min.

   a) ¿Qué representa la expresión algebraica $m + n$?

   b) ¿Qué representa la expresión algebraica $70m + 120n$?

S

1. a) El costo de la entrada de un adulto y un menor de edad.

   b) El costo de la entrada de 4 adultos y 2 menores de edad.

   c) El vuelto de pagar con un billete de 10 dólares la entrada de 2 adultos.

   d) La diferencia entre el precio de la entrada de un adulto con el de un menor de edad.

2. a) El tiempo que se tarda Ana en trasladarse desde su casa a la universidad.

   b) La distancia en metros entre la casa de Ana y la universidad.

C

Traducir una expresión del lenguaje algebraico al coloquial es darle una interpretación a una expresión algebraica, según un contexto.

1. El precio de la entrada para un adulto a un parque ecológico que es refugio de vida salvaje es x dólares y para un menor de edad es y dólares.

   ¿Qué representan las siguientes expresiones algebraicas?

   a) $x + y$ b) $4x + 5y$ c) $20 - 2x$ d) $x - y$

2. Miguel y Mario participaron en una carrera de relevos. Si Miguel corrió a minutos a una velocidad de 200 m/min y Mario corrió b minutos a una velocidad de 215 m/min.

   ¿Qué representan las siguientes expresiones algebraicas?

   a) $a + b$ b) $200a$ c) $200a + 215b$

1.14 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 1

P

Para determinar el número de pines que se utilizan para colocar x láminas, se usa la expresión algebraica $3x + 3$.

Número de pines $3x + 3$

Cuántos pines se necesitan para poner:

a) 6 láminas   b) 15 láminas   c) 20 láminas

S

a) Número de pines

$3x + 3$ ← Sustituye x por 6

↓

$3 \times 6 + 3 = 18 + 3 = 21$

Valor sustituido   Valor numérico de la expresión algebraica

Número de láminas	Número de pines
6	$3 \times 6 + 3 = 21$
15	$3 \times 15 + 3 = 48$
20	$3 \times 20 + 3 = 63$

R. a) 21 pines, b) 48 pines y c) 63 pines

C

Al sustituir un número en una variable, el resultado obtenido después de realizar las operaciones indicadas en la expresión se conoce como **valor numérico de la expresión**. Por ejemplo, para calcular el valor numérico de la expresión $3x + 3$ cuando $x = 6$ se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 3 \times x + 3 \\ &= 3 \times 6 + 3 \\ &= 18 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

1. En la situación de la compra de las calculadoras (clase 3 de esta unidad), cuál es el costo de la compra cuando:
   a) $a = 5$ b) $a = 8$ c) $a = 13$ d) $a = 20$

2. Si se tiene la expresión algebraica $x - 18$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a) $x = 20$ b) $x = 8$ c) $x = 4$ d) $x = 0$

3. Con la expresión algebraica $9 - 4t$, encuentra el valor numérico de la expresión cuando:
   a) $t = 1$ b) $t = 2$ c) $t = 3$ d) $t = 4$

4. Si se tiene la expresión algebraica $-8 - 5n$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:
   a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$ d) $n = 4$

1.15 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 2

P

Calcula el valor numérico de $5 - 9y$, cuando $y = -4$, $y = 0$ y $y = \frac{2}{3}$.

S

Cuando $y = -4$

$$5 - 9 \times (-4) = 5 - (-36)$$
$$= 5 + 36$$
$$= 41$$

Cuando $x = 0$

$$5 - 9 \times 0 = 5 - 0$$
$$= 5$$

Cuando $y = \frac{2}{3}$

$$5 - 9 \times \frac{2}{3} = 5 - \cancel{9}^{3} \times \frac{2}{\cancel{3}_{1}}$$
$$= 5 - 3 \times \frac{2}{1}$$
$$= 5 - 3 \times 2$$
$$= 5 - 6$$
$$= -1$$

C

En las expresiones algebraicas también se pueden sustituir valores negativos y fracciones.

Al sustituir un número, en una expresión algebraica, se debe escribir entre paréntesis cuando por ejemplo:

- El número sea negativo.
- El número sea una fracción y la expresión algebraica que está en forma de fracción.

Para evitar errores de cálculo se debe poner atención en los signos que anteceden a las variables y simplificar las fracciones antes de realizar las operaciones indicadas.

E

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $-y$, cuando $y = -9$

b) $\frac{x}{12}$, cuando $x = 3$ y $x = \frac{1}{2}$

La expresión $-a$ se puede escribir como $-1 \times a$

$-a = -1 \times a$

Solución.

a) Si $y = -9$

$-y = -(-9) = 9$

b) Si $x = 3$

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{12}$$
$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}}$$
$$= \frac{1}{4}$$

Si $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{x}{12} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{12} = \frac{1}{2} \div 12$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}$$
$$= \frac{1}{24}$$

Una fracción cuyo numerador o denominador es otra fracción se le llama fracción compleja y se puede representar de cualquiera de la siguientes formas:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{12} \text{ o } \frac{\frac{1}{2}}{12}$$

1. En la expresión algebraica $5 - 6x$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $x = -3$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = -\frac{1}{12}$ d) $x = \frac{1}{5}$

2. Para la expresión algebraica $-a$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $a = -5$ b) $a = 0$ c) $a = \frac{7}{8}$ d) $x = \frac{1}{2}$

3. Si se tiene la expresión algebraica $\frac{x}{10}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $x = -2$ b) $x = 0$ c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{2}{3}$

1.16 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 3

P

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\frac{12}{x}$ cuando $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$

b) y^2, cuando $y = 4$ y $y = -\frac{1}{2}$

S

a) Para $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{12}{x} = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 12 \div \frac{1}{2}$$
$$= 12 \times \frac{2}{1}$$
$$= 24$$

Para $x = -3$

$$\frac{12}{x} = \frac{12}{(-3)} = 12 \div (-3)$$
$$= -4$$

b) Para $y = 4$

$$y^2 = 4^2 = 4 \times 4$$
$$= 16$$

Para $y = -\frac{1}{2}$

$$y^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}$$

C

Se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica que tiene a la variable en el denominador de una fracción, sabiendo que una fracción es un cociente indicado.
Por ejemplo:

$$\frac{2}{x} = 2 \div x$$

Se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica con potencia, sabiendo que el exponente determina el número de veces que aparece como factor la base en la multiplicación.
Por ejemplo:

$$x^3 = x \times x \times x.$$

E

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:
a) $-a^2$ cuando $a = -2$ b) $(-a)^2$, cuando $a = -2$

Solución.

a) Si $a = -2$

$$-a^2 = -(-2)^2 = -\,[(-2) \times (-2)]$$
$$= -4$$

b) Si $a = -2$

$$(-a)^2 = [-(-2)]^2 = [-(-2)] \times [-(-2)]$$
$$= 2 \times 2$$
$$= 4$$

Se observa que al sustituir un mismo número en las expresiones algebraicas $-a^2$ y $(-a)^2$ se obtienen números opuestos. El único caso en el que se cumple que $-a^2$ y $(-a)^2$ generan el mismo número es cuando $a = 0$.

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\frac{10}{x}$, cuando $x = \frac{1}{2}$ y $x = -5$

b) a^2, cuando $a = 3$ y $a = -3$

c) m^2, cuando $m = \frac{1}{2}$ y $m = -\frac{2}{3}$

d) $-\frac{5}{y}$, cuando $y = 10$ y $y = -7$

e) $-r^2$, cuando $r = -5$

f) $(-t)^2$, cuando $t = -5$

1.17 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 4

P

Un entrenador de fútbol comprará a balones y b botellas de bebida rehidratante. Si la expresión algebraica $15a + 2b$ representa el costo total de la compra, ¿cuál sería el costo si comprara 5 balones y 11 botellas?

S

Sustituyendo $a = 5$ y $b = 11$ se tiene que

$$\begin{aligned} 15 \times 5 + 2 \times 11 &= 75 + 22 \\ &= 97 \end{aligned}$$

R. 97 (dólares)

C

Para calcular el valor de una expresión, en ocasiones es necesario sustituir más de un valor. El número de valores que se sustituyen depende del número de variables en la expresión algebraica.

E

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $-m - n$, cuando $m = -4$ y $n = \frac{2}{3}$

b) $-3x - 4y$, cuando $x = \frac{5}{6}$ y $y = -2$

Solución.

a) $$\begin{aligned} -m - n &= -(-4) - \frac{2}{3} \\ &= 4 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{12}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -3x - 4y &= -3 \times \frac{5}{6} - 4 \times (-2) \\ &= -\frac{5}{2} - (-8) \\ &= -\frac{5}{2} + 8 \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{16}{2} \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

1. Se tiene la expresión algebraica $x + y$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $x = 2$ y $y = 3$ b) $x = -4$ y $y = -5$ c) $x = 7$ y $y = -2$

d) $x = -3$ y $y = 9$ e) $x = \frac{5}{7}$ y $y = -\frac{3}{7}$ f) $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{4}$

2. Se tiene la expresión algebraica $-x - y$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $x = 2$ y $y = 3$ b) $x = -4$ y $y = -5$ c) $x = 7$ y $y = -2$

d) $x = -3$ y $y = 9$ e) $x = \frac{5}{7}$ y $y = -\frac{3}{7}$ f) $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{4}$

3. Se tiene la expresión algebraica $5a - 10b$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $a = 3$ y $b = 2$ b) $a = -3$ y $b = -2$ c) $a = -3$ y $b = 2$ d) $a = \frac{3}{20}$ y $b = -\frac{7}{20}$

1.18 Practica lo aprendido

1. Escribe la siguiente expresión algebraica omitiendo los signos (×) y (÷).
   a) $-4 \div (x - y) - y \times y \times y$
   b) $m \times m \times 4 - n \times (-1) \times n$
   c) $y \times y \times 3 - (r + t) \div (-1)$
   d) $p \times p \times \mathrm{p} - p \times (1) \times p$

2. Traduce al lenguaje algebraico la siguiente expresión en lenguaje coloquial:
   El vuelto de comprar con un billete de 20 dólares, a lápices y b borradores si cada lápiz vale un dólar y cada borrador vale dos dólares.

3. Para trasladarse de la casa a la escuela, Mario camina por x minutos con una velocidad de 60 m/min y luego corre por y minutos, con una velocidad de 130 m/min.
   a) ¿Cuál es el tiempo total del recorrido?
   b) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

4. Ana compró una cartera cuyo precio original es x dólares con el 10% de descuento y un perfume con precio original de y dólares con un descuento del 15%, ¿cuánto gastó en total Ana?

5. Si un atleta de olimpiadas especiales corrió por x minutos a una velocidad de 150 m/min en una calle cuesta arriba y luego de subirla corrió hacia abajo durante y minutos a una velocidad de 175 m/min.
   a) ¿Qué representa la expresión algebraica $x + y$?
   b) ¿Qué representa la expresión algebraica $150x$?
   c) ¿Qué representa la expresión algebraica $150x + 175y$?

6. Si se tiene la expresión algebraica $-5 + a$, encuentra el valor de la expresión en los siguientes casos:
   a) $a = 1$
   b) $a = 7$
   c) $a = -3$
   d) $a = -4$

7. Si se tiene la expresión algebraica $12 - 2x$, encuentra el valor de la expresión en los siguientes casos:
   a) $x = 1$
   b) $x = 8$
   c) $x = -4$
   d) $x = -6$

8. Determina el valor de las siguientes expresiones algebraicas cuando el valor numérico es $y = -48$.
   a) $\frac{y}{6}$
   b) $-\frac{y}{6}$
   c) $-\frac{y}{12}$
   d) $\frac{y}{12}$

9. Si se tiene la expresión algebraica $-x^2$, encuentra el valor de la expresión cuando:
   a) $x = 3$
   b) $x = -3$
   c) $x = \frac{3}{5}$
   d) $x = -\frac{2}{3}$

10. Si se tiene la expresión algebraica $-4x + 5y$, encuentra el valor numérico, cuando:
    a) $x = 3$ y $y = 2$
    b) $x = -3$ y $y = -2$
    c) $x = -3$ y $y = 2$
    d) $x = \frac{3}{16}$ y $y = -\frac{3}{20}$

2.1 Términos y coeficientes de una expresión algebraica

P

La expresión $3a - 7$ se puede escribir como una suma:

$$3a - 7 = 3a + (-7)$$

Escribe las siguientes expresiones como una suma:

a) $a - 5$

b) $a - 5b - 2$

S

a) $a + (-5)$

b) $a + (-5b) + (-2)$

C

La expresión algebraica $3a + (-7)$ representa la suma de $3a$ y -7. A cada parte de esta expresión algebraica que se conecta con el signo (+), se le llama **término** de la expresión algebraica, $3a$ se representa en forma de producto como $3 \times a$. En este caso, al 3 se le llama **coeficiente** de a.

Para $a + (-5)$ y $a + (-5b) + (-2)$ se tiene que

a) $\underbrace{\overset{\text{Coeficiente}}{1}\,a}_{\text{Término}} + \underbrace{(-5)}_{\text{Término}}$

b) $a - 5b - 2 = \underbrace{\overset{\text{Coeficiente}}{1}\,a}_{\text{Término}} + \underbrace{(\overset{\text{Coeficiente}}{-5}\,b)}_{\text{Término}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Término}}$

E

En las siguientes expresiones algebraicas, escribe todos los términos y los coeficientes de los términos que incluyen variable.

a) $2y - 3$

b) $m - 3n - 9$

c) $-\frac{x}{5} - m$

Solución.

Términos:

a) $2y - 3 = 2y + (-3)$
Términos: $2y$, -3.

b) $m - 3n - 9 = m + (-3n) + (-9)$
Términos: m, $-3n$, -9.

c) $-\frac{x}{5} - m = -\frac{x}{5} + (-m)$
Términos son: $-\frac{x}{5}$, $-m$.

Coeficientes:

a) Como $2y = 2 \times y$
El coeficiente de y es 2.

b) $m = 1 \times m$
El coeficiente de m es 1.

$-3n = -3 \times n$
El coeficiente de n es -3.

c) $-\frac{x}{5} = -\frac{1}{5} \times x$
El coeficiente de x es $-\frac{1}{5}$.

$-m = -1 \times m$
El coeficiente de m es -1.

Escribe todos los términos de cada expresión algebraica y coeficientes de los términos que incluyen variables:

a) $4x + 5$

b) $2x + 3y$

c) $5x - 7$

d) $-a + 3b - 5$

e) $-4x - 5$

f) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y - 1$

g) $\frac{x}{6} - \frac{y}{7}$

h) $-m - n - 7$

2.2 Multiplicación de una expresión algebraica de un término por un número

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $2x \times 3$ b) $3y \times (-4)$ c) $\frac{3}{5}m \times (-2)$

a) $2x \times 3 = 2 \times x \times 3$
$= 2 \times 3 \times x$
$= 6 \times x$
$= 6x$

b) $3y \times (-4) = 3 \times y \times (-4)$
$= 3 \times (-4) \times y$
$= -12 \times y$
$= -12y$

c) $\frac{3}{5}m \times (-2) = \frac{3}{5} \times m \times (-2)$
$= \frac{3}{5} \times (-2) \times m$
$= -\frac{6}{5} \times m$
$= -\frac{6}{5}m$

Otra forma de escribir $-\frac{6}{5}m$ es $-\frac{6m}{5}$.

Para multiplicar una expresión algebraica por un número se aplica la propiedad conmutativa, y se multiplica el número por el coeficiente de la expresión algebraica.

Por ejemplo:

a) $2\ x \times 3 = 6\ x$ b) $3\ y \times (-4) = -12\ y$ c) $\frac{3}{5}m \times (-2) = -\frac{6}{5}m$

Efectúa la siguiente multiplicación: $-\frac{3}{5}y \times \left(-\frac{2}{21}\right)$

Solución.

$$-\frac{3}{5}y \times \left(-\frac{2}{21}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{21}\right)y$$
$$= \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{5}}\right) \times \left(-\frac{2}{\underset{7}{\cancel{21}}}\right)y$$
$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right)y$$
$$= \frac{2}{35}y$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones de una expresión algebraica por un número.

a) $2x \times 7$ b) $5x \times (-4)$ c) $2x \times (-3)$ d) $-y \times (-5)$

e) $-2x \times (-11)$ f) $3x \times 5$ g) $7x \times \left(-\frac{3}{7}\right)$ h) $-\frac{2}{5}x \times \frac{3}{8}$

2.3 División de una expresión algebraica de un término por un número

P

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $27x \div 3$ b) $-35x \div 5$ c) $8x \div (-4)$ d) $-5x \div \frac{10}{13}$

S

a) $27x \div 3 = 27x \times \frac{1}{3}$

$= \overset{9}{\cancel{27}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times x$

$= 9 \times 1 \times x$

$= 9x$

b) $-35x \div 5 = -35x \times \frac{1}{5}$

$= -35 \times x \times \frac{1}{5}$

$= -\overset{7}{\cancel{35}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times x$

$= -7 \times 1 \times x$

$= -7x$

c) $8x \div (-4) = 8x \times \frac{1}{-4}$

$= 8x \times \left(-\frac{1}{4}\right)$

$= \overset{2}{\cancel{8}} \times \left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}\right) \times x$

$= 2 \times (-1) \times x$

$= -2x$

d) $-5x \div \frac{10}{13} = -5x \times \frac{13}{10}$

$= (-\overset{1}{\cancel{5}}) \times \frac{13}{\underset{2}{\cancel{10}}} \times x$

$= (-1) \times \frac{13}{2} \times x$

$= -\frac{13}{2}x$

C

Para dividir una expresión algebraica entre un número se convierte la división en multiplicación, tal como se aprendió anteriormente; luego se aplica la propiedad conmutativa para multiplicar el coeficiente de la expresión algebraica por el multiplicador.

Por ejemplo:

$$27x \div 3 = 27x \times \frac{1}{3}$$
$$= \overset{9}{\cancel{27}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times x$$
$$= 9 \times 1 \times x$$
$$= 9x$$

Opcionalmente se puede hacer el siguiente proceso:

$$27x \div 3 = \frac{27x}{3}$$
$$= \frac{\overset{9}{\cancel{27}}x}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$
$$= 9x$$

Efectúa las siguientes divisiones de una expresión algebraica por un número.

a) $18x \div 3$ b) $-21x \div 7$ c) $-16x \div (-4)$ d) $5x \div (-5)$

e) $4x \div \frac{4}{5}$ f) $-5x \div \frac{5}{11}$ g) $-2a \div \left(-\frac{8}{3}\right)$ h) $3x \div \left(-\frac{12}{7}\right)$

2.4 Multiplicación de una expresión algebraica con dos términos por un número

P

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $4(2x + 5)$ b) $3(2x - 5)$ c) $(4x - 3) \times (-2)$ d) $-(6x - 2)$

S

a) $4(2x + 5) = 4 \times (2x + 5)$
$= 4 \times 2x + 4 \times 5$
$= 8x + 20$

b) $3(2x - 5) = 3[2x + (-5)]$
$= 3 \times [2x + (-5)]$
$= 3 \times 2x + 3 \times (-5)$
$= 6x - 15$

c) $(4x - 3) \times (-2) = [4x + (-3)] \times (-2)$
$= 4x \times (-2) + (-3) \times (-2)$
$= 4 \times (-2) \times x + (-3) \times (-2)$
$= -8x + 6$

d) $-(6x - 2) = (-1) \times (6x - 2)$
$= (-1) \times [6x + (-2)]$
$= (-1) \times 6x + (-1) \times (-2)$
$= -6x + 2$

Para b) se puede realizar un proceso opcional, como el siguiente:

$$3(2x - 5) = 3 \times (2x - 5)$$
$$= 3 \times 2x - 3 \times 5$$
$$= 6x - 15$$

De la misma manera se pueden realizar las operaciones con los productos de los otros literales.

C

Para multiplicar una expresión algebraica de más de dos términos por un número, se aplica la propiedad distributiva.

$$a(x + y) = ax + ay \quad \text{o} \quad (x + y) \times a = ax + ay$$

E

Efectúa la siguiente multiplicación: $\frac{2}{3}(6y - 9)$

Solución.

$$\frac{2}{3}(6y - 9) = \frac{2}{\cancel{3}_1} \times \cancel{6}_2 y + \frac{2}{\cancel{3}_1} \times (-\cancel{9}_3)$$
$$= 2 \times 2y + 2 \times (-3)$$
$$= 4y - 6$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $5(3x + 2)$ b) $4(3x - 2)$ c) $(2x + 6) \times (-2)$

d) $-(2x + 3)$ e) $\frac{3}{4}(16x - 12)$ f) $-\frac{3}{4}(8x - 16)$

2.5 División de una expresión algebraica con dos términos entre un número

P

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(8x + 12) \div 4$

b) $(4x - 6) \div (-2)$

> Recuerda que el recíproco de $\frac{a}{b}$ es así $\frac{b}{a}$, el recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$.
> También el recíproco de c es $\frac{1}{c}$ y de $\frac{1}{c}$ es c.

S

a)
$$\begin{aligned}(8x + 12) \div 4 &= (8x + 12) \times \frac{1}{4}\\ &= 8x \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{4}\\ &= \overset{2}{\cancel{8}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times x + \overset{3}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}\\ &= 2 \times 1 \times x + 3 \times 1\\ &= 2x + 3\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(4x - 6) \div (-2) &= (4x - 6) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x + (-6) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \overset{2}{\cancel{4}} \times \left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \times x + (-\overset{3}{\cancel{6}}) \times \left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)\\ &= 2 \times (-1) \times x + (-3) \times (-1)\\ &= -2x + 3\end{aligned}$$

C

Para dividir una expresión algebraica de dos o más términos por un número, se convierte en la multiplicación de la expresión algebraica por el recíproco del divisor, como en el ejemplo 1 u opcionalmente se puede realizar de la forma que se presenta en 2.

1.
$$\begin{aligned}(8x + 12) \div 4 &= (8x + 12) \times \frac{1}{4}\\ &= 8x \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{4}\\ &= \overset{2}{\cancel{8}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times x + \overset{3}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}\\ &= 2 \times 1 \times x + 3 \times 1\\ &= 2x + 3\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(8x + 12) \div 4 &= \frac{8x + 12}{4}\\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}x}{\underset{1}{\cancel{4}}} + \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\\ &= \frac{2x}{1} + \frac{3}{1}\\ &= 2x + 3\end{aligned}$$

E

Efectúa la siguiente división: $(-9x - 6) \div \left(-\frac{3}{7}\right)$

Solución.

$$\begin{aligned}(-9x - 6) \div \left(-\frac{3}{7}\right) &= (-9x - 6) \times \left(-\frac{7}{3}\right)\\ &= 3x \times 7 + 2 \times 7\\ &= 21x + 14\end{aligned}$$

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(2x + 4) \div 2$

b) $(6x - 9) \div 3$

c) $(-15x + 10) \div 5$

d) $(-28x - 14) \div 7$

e) $(2x + 4) \div (-2)$

f) $(6x - 9) \div (-3)$

g) $(-15x + 10) \div (-5)$

h) $(-28x - 14) \div (-7)$

i) $(3y + 18) \div \frac{3}{4}$

j) $(4y - 8) \div \frac{4}{7}$

k) $(-15x + 10) \div \left(-\frac{5}{6}\right)$

l) $(3y + 18) \div \left(-\frac{6}{7}\right)$

2.6 Multiplicación de una expresión de dos términos por un número

P

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{4x+2}{3} \times 6$

b) $\frac{x+2}{3} \times (-18)$

S

a) $\frac{4x+2}{3} \times 6 = \frac{4x+2}{\cancel{3}_1} \times \cancel{6}^{2}$

$= \frac{4x+2}{1} \times 2$

$= (4x+2) \times 2$

$= 8x+4$

b) $\frac{x+2}{3} \times (-18) = \frac{x+2}{\cancel{3}_1} \times (-\cancel{18}^{6})$

$= \frac{x+2}{1} \times (-6)$

$= (x+2) \times (-6)$

$= -6x - 12$

C

Cuando se opera con expresiones algebraicas en fracciones, se simplifica el denominador siempre que sea posible y luego se realiza la multiplicación.

Por ejemplo:

$$\frac{4x+2}{3} \times 6 = \frac{4x+2}{\cancel{3}_1} \times \cancel{6}^{2}$$

$$= \frac{4x+2}{1} \times 2$$

$$= (4x+2) \times 2$$

$$= 8x+4$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{3x+1}{4} \times 8$

b) $\frac{2x+2}{3} \times 15$

c) $\frac{2x-4}{3} \times 9$

d) $\frac{3x-5}{2} \times 10$

e) $8 \times \frac{5x+3}{4}$

f) $16 \times \frac{2x+3}{4}$

g) $15 \times \frac{3x-2}{5}$

h) $\frac{2x-1}{4} \times (-12)$

i) $\frac{2x+1}{2} \times (-4)$

j) $\frac{4x-2}{3} \times (-9)$

k) $-25 \times \frac{2x-3}{5}$

l) $-18 \times \frac{2x+4}{9}$

Unidad 4

2.7 Reducción de expresiones algebraicas

P

En una venta de frutas, una sandía cuesta x dólares. María compra 5 y Carlos compra 3. Escribe la expresión algebraica que representa las siguientes cantidades:

a) El gasto total de María y Carlos.
b) La diferencia del gasto de María y Carlos.

S

a) El gasto total de María y Carlos se puede representar con la expresión algebraica $5x + 3x$, pero una expresión algebraica reducida para la representación es $8x$, es decir entre los dos compraron 8 sandías. También se puede aplicar la propiedad distributiva a la expresión $5x + 3x$ para determinar su forma reducida de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
5x + 3x &= (5 + 3) \times x \\
&= 8 \times x \\
&= 8x
\end{aligned}
$$

b) La diferencia entre el gasto de María y Carlos se puede representar con la expresión algebraica $5x - 3x$; pero una expresión algebraica reducida para la representación de la diferencia entre las compras de ambos es $2x$, porque Ana compró 2 sandías más que Antonio. Al igual que en el literal a) también se puede aplicar la propiedad distributiva, para determinar la forma reducida de la expresión $5x - 3x$ en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
5x - 3x &= 5 \times x + (-3) \times x \\
&= [5 + (-3)] \times x \\
&= (5 - 3) \times x \\
&= 2 \times x \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

C

Para determinar la expresión algebraica reducida de una expresión algebraica dada, se aplica la propiedad distributiva.

a) $5x + 3x = (5 + 3)\,x$
$= 8x$

b) $5x - 3x = (5 - 3)\,x$
$= 2x$

Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4a + 2a$
b) $y + y$
c) $3x - 8x$
d) $-5x + 2x$
e) $-3x + 7x$
f) $-2x - x$
g) $-x - x$
h) $x - x$
i) $-2.6y - 1.3y$
j) $-0.2y + 0.1y$
k) $-\frac{1}{5}y + \frac{2}{5}y$
l) $\frac{3}{7}y - \frac{1}{7}y$

2.8 Reducción de términos semejantes

P

Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $6x - 5 - 4x + 1$

b) $-x + 7 - x - 6$

S

a) $6x - 5 - 4x + 1 = 6x - 4x - 5 + 1$
$= (6 - 4)x - 5 + 1$
$= 2x - 4$

b) $-x + 7 - x - 6 = -x - x + 7 - 6$
$= (-1 - 1)x + 7 - 6$
$= -2x + 1$

C

Las expresiones algebraicas se pueden reducir, según el tipo de términos:

- Entre los términos que tienen la misma variable.
- Entre los términos numéricos (que no tienen variable).

Por ejemplo:

a) $6x - 5 - 4x + 1 = 6x - 4x - 5 + 1$
$= (6 - 4)x - 5 + 1$
$= 2x - 4$

b) $-x + 7 - x - 6 = -x - x + 7 - 6$
$= (-1 - 1)x + 7 - 6$
$= -2x + 1$

A los términos que tienen la parte de las variables igual se les llama **términos semejantes**. Por ejemplo en la expresión $6x + 5 - 4x + 1$, los términos $6x$ y $-4x$ son semejantes.

Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x + 3 + 3x + 2$

b) $6x - 4 - 4x - 1$

c) $2y + 5 - y - 1$

d) $-y + 1 - y - 4$

e) $-4x + 3 + 3x - 3$

f) $2x + 3 - x - 3$

g) $-m + 6 - m - 6$

h) $2y - 4 - 2y - 1$

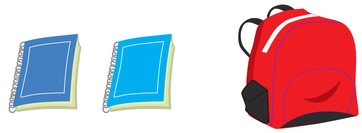
i) $x + 4 - x + 2$

Unidad 4

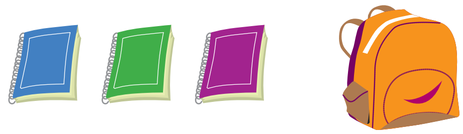
2.9 Suma de expresiones algebraicas

José y Julia van a comprar cuadernos y mochila, considerando que

José compra:
2 cuadernos de a dólares,
1 mochila de 10 dólares.



Julia compra:
3 cuadernos de a dólares,
1 mochila de 15 dólares.



Escribe una expresión algebraica que represente el gasto de

a) José b) Julia c) Ambos

a) $2a + 10$ b) $3a + 15$

c) $2a + 3a + 10 + 15$, también se puede obtener una expresión algebraica reducida, considerando el gasto en los 5 cuadernos y las 2 mochilas de la siguiente forma $5a + 25$. Para sumar dos expresiones algebraicas se puede utilizar la propiedad conmutativa de la suma y luego la reducción de términos semejantes.

Para sumar dos expresiones algebraicas por ejemplo $2a + 10$ y $3a + 15$ se tiene que

1. Escribir la primera expresión. $2a + 10$
2. Escribir el signo (+) de la suma. $2a + 10 +$
3. Escribir la segunda expresión, si esta tiene signo negativo o más de un término, escribirla entre paréntesis. $2a + 10 + (3a + 15)$
4. Suprimir los paréntesis. $2a + 10 + 3a + 15$
5. Reducir términos semejantes. $5a + 25$

Suma las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x$ con $6x - 1$ b) $-3x + 7$ con $4x + 5$

Solución.

a) $4x + (6x - 1) = 4x + 6x - 1$
$= 10x - 1$

b) $-3x + 7 + (4x + 5) = -3x + 7 + 4x + 5$
$= -3x + 4x + 7 + 5$
$= x + 12$

Suma las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x$ con $3x - 4$ b) $-5x$ con $4x + 2$ c) $3x - 4$ con $5x + 2$ d) $2x + 5$ con $5x - 4$

e) $4x - 5$ con $4x - 7$ f) $-7y + 8$ con $4y + 5$ g) $-2x + 6$ con $x - 3$ h) $2y - 4$ con $-4y + 6$

2.10 Resta de dos expresiones algebraicas

P

Realiza las siguientes restas:

a) De $3x + 1$ restar $2x - 3$

b) De $7x - 3$ restar $-6x + 1$

S

a) $3x + 1 - (2x - 3) = 3x + 1 + (-2x + 3)$
$= 3x + 1 - 2x + 3$
$= 3x - 2x + 1 + 3$
$= x + 4$

b) $7x + 3 - (-6x + 1) = 7x + 3 + (+ 6x - 1)$
$= 7x + 3 + 6x - 1$
$= 7x + 6x + 3 - 1$
$= 13x + 2$

Restar un número positivo o negativo es equivalente a sumar el opuesto del número.

En una resta después de la palabra "De" está el minuendo y después de la palabra "restar" aparece el sustraendo.

C

Los pasos para realizar una resta de dos expresiones algebraicas son:

1. Escribir el minuendo. $3x + 1$
2. Escribir el signo (–) de la resta. $3x + 1 -$
3. Escribir el sustraendo, si este tiene signo negativo o más de un término, escribirlo entre paréntesis.
$3x + 1 - (2x - 3)$
4. Convertir la resta en suma cambiando los signos de los términos del minuendo.
5. Suprimir los paréntesis. $3x + 1 + (-2x + 3)$
6. Reducir términos semejantes. $3x + 1 - 2x + 3$
$3x - 2x + 1 + 3 = x + 4$

Resta las siguientes expresiones algebraicas:

a) De $3x + 7$ restar $9x + 2$

b) De $5x - 4$ restar $3x + 4$

c) De $5m - 7$ restar $3m - 2$

d) De $-y - 5$ restar $2y + 5$

e) De $6p - 2$ restar $-4p + 4$

f) De $-7q + 5$ restar $- 9q - 8$

2.11 Operaciones combinadas

P

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $-2(-x + 4) + 5(-2x + 3)$

b) $3(4x + 2) - 4(2x - 7)$

S

a) $-2(-x + 4) + 5(-2x + 3) = 2x - 8 + (-10x + 15)$
$= 2x - 8 - 10x + 15$
$= 2x - 10x + 15 - 8$
$= -8x + 7$

Propiedad distributiva
$-2(-x + 4) = -2 \times (-x) + (-2) \times 4$
$= 2x - 8$

b) $3(4x + 2) - 4(2x - 7) = 12x + 6 - (8x - 28)$
$= 12x + 6 + (-8x + 28)$
$= 12x + 6 - 8x + 28$
$= 12x - 8x + 6 + 28$
$= 4x + 34$

Propiedad distributiva
$4(2x - 7) = 4 \times 2x + 4 \times (-7)$
$= 8x - 28$

C

Pasos para realizar el cálculo de operaciones combinadas:

1. Suprimir los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
2. Ordenar los términos según la variable (aplicando la propiedad conmutativa).
3. Reducir términos semejantes.

En la realización de operaciones combinadas como la anterior, se debe tener un especial cuidado con los signos, cuando se aplique la propiedad distributiva.

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $6(x - 3) + 3(2x + 7)$

b) $9(x + 2) + 6(x - 3)$

c) $(y - 2) - 4(y - 1)$

d) $-6(-x + 1) - 8(-x - 3)$

e) $-5(3a - 2) + 5(-a - 2)$

f) $2(-8x - 5) + 5(-3x + 4)$

g) $2(3x - 1) - 3(2x - 3)$

h) $2(-2x - 3) - (-4x - 5)$

i) $-(-4x - 2) + (-4x - 2)$

j) $\frac{1}{3}(3y - 6) - 4(y + 1)$

k) $-\frac{1}{4}(4a - 12) + \frac{5}{6}(-3a + 2)$

l) $-\frac{1}{4}(4a - 12) + \frac{5}{12}(2a - 6)$

2.12 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   a) $2(3y + 1)$
   b) $7(-2y + 8)$
   c) $2(12x - 18)$
   d) $5(-2y - 4)$
   e) $-\frac{2}{7}(14x - 21)$
   f) $\frac{7}{2}\left(\frac{6}{49}y - \frac{1}{7}\right)$

2. Efectúa las siguientes divisiones:
   a) $(-16x + 8) \div 4$
   b) $(-6x - 2) \div (-2)$
   c) $(9y - 6) \div 3$
   d) $(15y - 10) \div \frac{5}{7}$
   e) $(-6x + 9) \div \left(-\frac{3}{7}\right)$
   f) $(-11x - 22) \div \left(-\frac{11}{13}\right)$

3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   a) $4 \times \frac{x+2}{2}$
   b) $12 \times \frac{-2x+3}{4}$
   c) $\frac{3x-4}{5} \times 20$
   d) $-6 \times \frac{x-2}{3}$
   e) $\frac{-4x-5}{2} \times 10$
   f) $\frac{3x-2}{2} \times (-10)$

4. Reduce las siguientes expresiones algebraicas que tienen términos semejantes:
   a) $-5a - 3a$
   b) $-4x - 2x$
   c) $\frac{5}{7}y - \frac{3}{7}y$
   d) $-3.5y - 2.5y$
   e) $-0.6y + 0.2y$
   f) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x$

5. Reduce las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $-4y + 2 - y - 10$
   b) $-10x + 8 + 4x - 8$
   c) $7y - 8 - 7y - 4$
   d) $-10x + 7 + 11x - 7$
   e) $-x + 3 + x - 3$

6. Suma las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $4x + 11$ con $-3x - 6$
   b) $-10y + 3$ con $5y - 3$
   c) $6x - 10$ con $-6x + 13$

7. Resta las dos expresiones algebraicas:
   a) De $-4x + 9$ restar $-5x - 9$
   b) De $-m + 2$ restar $-m + 7$
   c) De $3x + 4$ restar $-x + 4$

8. Realiza las siguientes operaciones combinadas:
   a) $2(x - 1) - (-2x + 1)$
   b) $3(2y - 4) - 2(y + 1)$
   c) $3(4y - 5) - 2(3y - 5)$
   d) $4(2y - 3) - 2(4y - 3)$
   e) $-\frac{1}{3}(3x - 12) + \frac{7}{5}(-5x + 10)$
   f) $-\frac{1}{3}(3n - 12) - \frac{7}{10}(5n - 2)$

3.1 Representación de la relación de igualdad

P

De una caja de y lapiceros se reparten 4 a cada uno de x estudiantes, sin que sobre algún lapicero de la caja. Representa con el símbolo de igualdad el número de lapiceros repartidos con el número de lapiceros de la caja.

El símbolo (=) se utiliza para representar la relación de las cantidades iguales.

S

Cantidad de lapiceros por persona: 4 (lapiceros)
Cantidad de personas: x
Total de lapiceros repartidos: $4x$ (lapiceros)

Total de lapiceros repartidos = cantidad de lapiceros de la caja

$$4x = y$$

R. $4x = y$

C

Dos expresiones algebraicas que representan al mismo valor se conectan con el símbolo (=). A la relación de dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor se le llama **igualdad**.

En la igualdad $4x = y$:

$$\underbrace{4x}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{y}_{\text{miembro derecho}}$$

Ejemplos de igualdades:

Igualdad	**Lectura**
a) 10 = 10	10 **es igual a** 10
b) 5 + 2 = 7	5 + 2 **es igual a** 7
c) 3 + 4 = 6 + 1	3 + 4 **es igual a** 6 + 1

E

En la situación anterior, considera que sobran 3 lapiceros luego de repartir. Representa con el símbolo de igualdad el número de lapiceros repartidos y sobrantes con el número de lapiceros de la caja.

Solución.

Total de lapiceros repartidos y sobrantes: $4x + 3$ (lapiceros).
Total de lapiceros repartidos y sobrantes = cantidad de lapiceros de la caja

$$4x + 3 = y$$

R. $4x + 3 = y$

1. Escribe por cada literal una igualdad en la situación presentada.
   a) La estatura de Carmen es a cm y Ana es 4 centímetros más alta que Carmen cuya altura es b. Expresa en una relación de igualdad las estaturas de Carmen y Ana.
   b) El costo de comprar 4 libros de matemática que cuestan a dólares cada uno es de b dólares.
   c) Una planta cuesta x dólares, se paga con un billete de 20 dólares y el vuelto es y dólares.
   d) La diferencia entre el precio de una camisa de n dólares y un pantalón de m dólares es de 12 dólares (considera que la camisa es más cara que el pantalón).
   e) Al comprar cinco libras de frijol de x dólares c/u y una de café que cuesta y dólares, el costo total fue de 5 dólares.
   f) La cantidad de dinero para comprar un pantalón de a dólares más 4 dólares es la misma que la de comprar un pantalón de b dólares más 7 dólares.

2. En las siguientes igualdades escribe en tu cuaderno cuál es el miembro izquierdo y el miembro derecho.
   a) $2 \times 5 = 10$ b) $2n - 1 = 0$ c) $3 - 2x = y + 4$

3.2 Representación de la relación de desigualdad

P

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

a) Una aerolínea sugiere a sus clientes que, para evitar cargos adicionales por su equipaje, el peso de una maleta de carga debe ser 23 kg o menos. Si Marta viajará con esa aerolínea y su maleta de carga pesa y kg, representa con un símbolo de desigualdad la condición que el peso debe cumplir.

b) Julia ahorra 5 dólares semanales durante x semanas, con el dinero que logra reunir no le alcanza para comprar los lentes que necesita que valen 65 dólares. Representa con un símbolo de desigualdad la relación que hay entre la cantidad de dinero ahorrado con el precio de los lentes.

S

a) Peso de la maleta de carga: y (kg)

Peso de la maleta de carga ≤ condición de la aerolínea.

$$y \le 23$$

R. $y \le 23$

b) Cantidad de dinero por semana: 5 (dólares)

Cantidad de semanas: x
Total de dinero ahorrado: $5x$ (dólares)
Total de dinero ahorrado < precio de los lentes

$$5x < 65$$

R. $5x < 65$

C

Los símbolos < o > se utilizan para representar la relación de cantidades distintas. El símbolo < se lee **menor que** y > se lee **mayor que**.

Los símbolos ≤ o ≥ se utilizan para representar la relación de dos cantidades iguales o distintas. El símbolo ≤ se lee **menor o igual que** y ≥ se lee **mayor o igual que**. A las relaciones de dos expresiones matemáticas que utilizan los símbolos anteriores se les llama **desigualdades**.

En la desigualdad $5x \le 65$:

$$\underbrace{5x}_{\text{miembro izquierdo}} \le \underbrace{65}_{\text{miembro derecho}}$$

Ejemplos de desigualdades:

Desigualdad	**Lectura**
a) $x < 8$	x **es menor que** 8
b) $10 \le x$	10 **es menor o igual que** x
c) $x > 4$	x **es mayor que** 4
d) $x \ge 7$	x **es mayor o igual que** 7

En ocasiones no se utilizan expresiones como "menor que", "mayor que", para referirse a una desigualdad, pueden utilizarse expresiones alternativas como "menos de", "más de" entre otras.

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

a) Un supermercado da a los clientes un regalo sorpresa por una compra mayor o igual a 25 dólares. Si una persona tiene pensado gastar m dólares, representa con una desigualdad la condición que debe cumplir la cantidad de dinero que piensa gastar, para tener un regalo sorpresa.

b) En la misma situación del literal **b** del Problema inicial de esta clase, supón que el papá de Julia le regala 12 dólares, con lo que al comprar los lentes aún le sobra dinero. Representa con una desigualdad el total de dinero que tiene Julia con respecto al precio de los lentes.

Solución.

a) Cantidad de dinero: m (dólares)

Cantidad de dinero ≥ cantidad mínima de gasto

$$m \geq 25$$

b) Total de dinero: $5x + 12$ (dólares)

Total de dinero > precio de los lentes

$$5x + 12 > 65$$

1. Expresa con una desigualdad las siguientes situaciones:

a) Si cinco estudiantes tienen x chibolas cada uno, y cuando las reúnen la cantidad que tienen es **menor que** 45.

b) Dentro de una maleta de 10 kg, se echan n artículos que pesan 2 kg cada uno, luego de introducir todos los artículos el peso total de la maleta es **mayor que** 22 kg.

c) En un supermercado una bandeja de tomates de ensalada vale 2 dólares y una bandeja de papas vale 3 dólares. Si se compran a bandejas de tomates y b bandejas de papas, el costo total es menos de 40 dólares.

d) La cantidad x kwh de una persona que perdió el subsidio, porque el consumo de energía fue mayor de 200 kwh.

2. El precio de la entrada a la reserva natural del Parque El Imposible para un adulto es x dólares y para estudiante es y dólares. En la situación, ¿qué representan las siguientes desigualdades?

a) $4x + 3y \leq 25$

b) $9x + 7y \geq 43$

5 Unidad

Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones de primer grado han sido históricamente una herramienta muy útil para la resolución de problemas del entorno en que el ser humano se desenvuelve, por ejemplo, los egipcios utilizaban un método llamado "falsa posición" y consistía en que para resolver una ecuación como $3x + 5x = 16$, sustituían por un valor $x = 4$ (como ejemplo) y esto da como resultado $3 \times 4 + 5 \times 4 = 32$ y luego se utilizaba la regla de 3 para calcular el valor verdadero de $x = \frac{4 \times 16}{32} = 2$.

Las aplicaciones de ecuaciones en el área de matemática financiera son muy importantes.

La solución general de una ecuación de primer grado fue planteada en la antigüedad en regiones como la India, y su utilización y aplicación en áreas científicas ha sido muy importante hasta la fecha en contextos como cálculo de velocidades y distancias para la ingeniería automotriz, porcentajes y descuentos, cálculo de herencias, cálculo de honorarios o salarios, ingeniería de sistemas, entre otros, por eso se vuelve un tema fundamental, ya que se utiliza en muchos ámbitos profesionales.

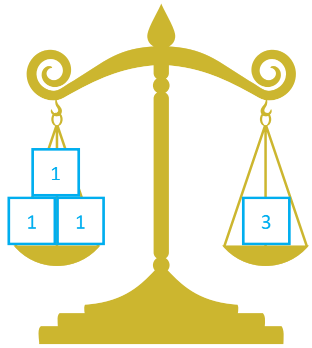
Durante la unidad se desarrollará el contenido sobre las propiedades y conceptos de las igualdades, métodos para la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita, y sus respectivas aplicaciones en la solución de problemas del entorno, y que involucran proporciones y otros presaberes.

1.1 Igualdad de dos expresiones numéricas

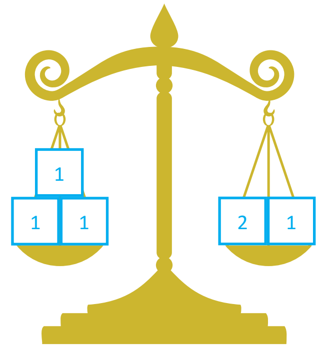
P

Observa las siguientes balanzas y escribe las igualdades representadas en cada una de ellas:

Balanza 1



Balanza 2



Balanza 3

S

3 = 3 1 + 1 + 1 = 3 1 + 1 + 1 = 2 + 1

C

El signo (=) es un símbolo matemático utilizado para representar la igualdad de dos expresiones numéricas.

E

Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad.

a) 6 + 1 = 5 + ___ b) 8 − ___ = 5 c) 2 + ___ = 3 + ___ d) 8 − ___ = 4 + ___

Solución.

a) 6 + 1 = 5 + 2 b) 8 − 3 = 5 c) 2 + 3 = 3 + 2 d) 8 − 3 = 4 + 1

En los literales c) y d) puede haber más de una solución, por lo que la presentada es solo una opción.

1. Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad.

a) 7 + ___ = 10 b) ___ + ___ = 9 c) 8 + ___ = 4 + ___

d) 12 − ___ = 5 e) 20 − ___ = 15 f) 3 − ___ = 5 − ___

2. Llena los recuadros con un número para que se cumpla la igualdad.

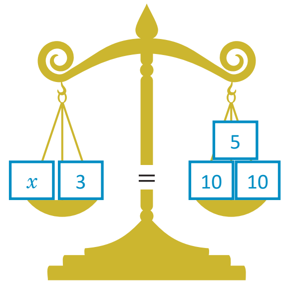
a) ☐ = 5 b) ☐ − 13 = 15 c) ☐ − ☐ = 17 d) ☐ − ☐ = 3 + 8

e) ☐ − ☐ = 7 + 5 f) ☐ − ☐ = 8 + 6 g) ☐ − ☐ = 9 + 7 h) ☐ − ☐ = 9 + 9

1.2 Igualdad de dos expresiones algebraicas

P

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de la siguiente balanza.



S

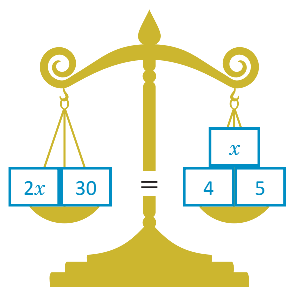
$x + 3 = 10 + 10 + 5$

C

Para escribir simbólicamente que dos expresiones algebraicas representan el mismo valor también se usa el signo (=).

E

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de la siguiente balanza.



Solución.

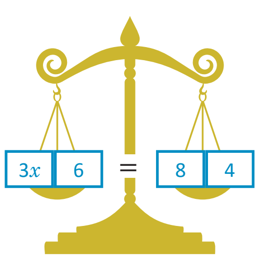
$$2x + 30 = x + 4 + 5$$

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en las siguientes balanzas:

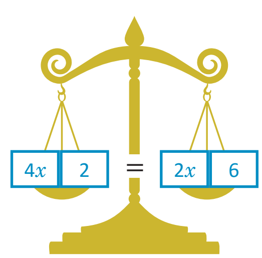
a)

b)

c)



d)



2.1 Solución de una ecuación

P

Una persona llega a la ventanilla de un banco para cobrar un cheque de 470 dólares. Después de recibir 300 dólares en billetes de 100, la cajera le informa que solo tiene billetes de 5 dólares. ¿Cuántos billetes de 5 dólares recibirá?

Representa el total de dinero con billetes de $5.

Si se usa x para representar el número total de billetes de \$5, se puede formar una igualdad usando números y una variable. Como hay que igualar el total de billetes de 100 y 5 dólares con 470 dólares, se puede formar la siguiente igualdad: $5x + 300 = 470$.

Para encontrar la cantidad de billetes de 5 dólares, se necesita conocer el valor de x en la igualdad: $5x + 300 = 470$.

S

Para encontrar el valor de x se puede sustituir algunos valores aproximados y al efectuar la operación se debe verificar si cumple con el valor que se encuentra en el miembro derecho (470).

Valor de x	Miembro izquierdo $5x + 300$	Resultado del miembro izquierdo
si $x = 31$	$5 \times 31 + 300$	455
si $x = 32$	$5 \times 32 + 300$	460
si $x = 33$	$5 \times 33 + 300$	465
si $x = 34$	$5 \times 34 + 300$	470
si $x = 35$	$5 \times 35 + 300$	475
si $x = 36$	$5 \times 36 + 300$	480

Cuando el valor de x es 34, el valor que se tiene en el miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho, por tanto, se cumple la igualdad matemática establecida en la ecuación. Con lo que se concluye que se recibirán 34 billetes de 5 dólares.

C

La igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye una variable se llama **ecuación.** En una ecuación al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita.** El valor numérico de la incógnita que cumple con la igualdad se llama solución de la ecuación y al proceso para encontrarla se le llama **resolver la ecuación.**

¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de 5? (Sustituye el valor)

a) $2x + 3 = 11$

$2 \times 5 + 3 = 11$

$10 + 3 = 11$

$13 \neq 11$

b) $3x - 8 = 7$

c) $8x + 9 = 17$

d) $4x - 8 = 4$

Por tanto, 5 no es solución de la ecuación del literal **a**.

2.2 Propiedades de la igualdad

P

Dada la ecuación $2x + 1 = 7$, determina el valor de x, imaginando la ecuación como el equilibrio de una balanza. Una x se representa con una bolita y una unidad con un cubo.

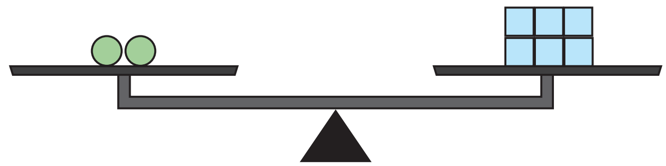
$2x + 1 = 7$

Puedes quitar objetos en cada lado de la balanza procurando mantener el equilibrio.

S

Quitando un cubo en ambos lados de la balanza.

$2x = 6$



Quitando una bolita a un lado y los tres cubos que le corresponden en el otro.

$x = 3$

C

Una igualdad matemática se mantiene cuando:

1. En ambos miembros se suma el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A + C = B + C.
2. En ambos miembros se resta el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A − C = B − C.
3. En ambos miembros se multiplica el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A × C = B × C.
4. En ambos miembros se divide por el mismo número (diferente de cero) o expresión. Si A = B, y C diferente de cero, entonces A ÷ C = B ÷ C.
5. Se intercambia el miembro izquierdo y derecho. Si A = B entonces B = A.

A las afirmaciones anteriores se les llama **propiedades de una igualdad**.

E

Escribe la propiedad utilizada en la solución de la siguiente ecuación en el paso de color rojo:

$3x + 2 = 41$

$3x + 2 - 2 = 41 - 2$ … Propiedad 2

$3x = 39$

$3x \div 3 = 39 \div 3$ … Propiedad 4

$x = 13$

Escribe la propiedad utilizada en la solución de las siguientes ecuaciones en el paso de color rojo:

a) $5x + 4 = 49$

$5x + 4 - 4 = 49 - 4$ … ________

$5x = 45$

$5x \div 5 = 45 \div 5$ … ________

$x = 9$

b) $\frac{1}{2}x - 1 = 5$

$\frac{1}{2}x - 1 + 1 = 5 + 1$ … ________

$\frac{1}{2}x = 6$

$\frac{1}{2}x \times 2 = 6 \times 2$ … ________

$x = 12$

2.3 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 1 de las igualdades

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 3 = 2$ b) $-6 + x = 1$ c) $x - 7 = -4$ d) $x - 4 = -8$

S

a) $x - 3 = 2$
$x - 3 + 3 = 2 + 3$
$x = 5$

Se suma 3 en ambos miembros.

b) $-6 + x = 1$
$-6 + x + 6 = 1 + 6$
$x = 7$

Se suma 6 en ambos miembros.

c) $x - 7 = -4$
$x - 7 + 7 = -4 + 7$
$x = 3$

Se suma 7 en ambos miembros.

d) $x - 4 = -8$
$x - 4 + 4 = -8 + 4$
$x = -4$

Se suma 4 en ambos miembros.

C

Para resolver ecuaciones como las anteriores se aplica la **Propiedad 1** de una igualdad, se suma en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en un miembro de la ecuación.

Por ejemplo:

$$x - 3 = 2$$
$$x - 3 + 3 = 2 + 3$$

En la clase 2.2 se aprendió a transformar la ecuación de tal forma que x se encuentre en un miembro y un número en el otro miembro, por ejemplo: $x = 5$, $x = 7$, $x = 3$ y $x = -4$ a este proceso se le llama resolver la ecuación, y también recibe el nombre de "despejar x".

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 3$
$x - 4 + \square = 3 + \square$
$x = 7$

b) $-2 + x = 4$
$-2 + x \square 2 = 4 \square 2$
$x = 6$

c) $x - 7 = -2$
$x - 7 + 7 = -2 + 7$
$x = \square$

d) $x - 3 = -8$
$x - 3 + \square = -8 + \square$
$x = -5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 5$ b) $-7 + x = 3$ c) $x - 9 = -5$ d) $x - 6 = -10$

2.4 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 2 de las igualdades

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 2 = 3$ b) $4 + x = 9$ c) $x + 7 = 4$ d) $x + 4 = -8$

Despejar la incógnita consiste en llegar a una expresión de la forma $x = \square$, es decir que x tenga coeficiente 1.

¿Qué número se debe restar para despejar x ?

a) $x + 2 = 3$

$x + 2 - 2 = 3 - 2$

$x = 1$

Se resta 2 en ambos miembros.

b) $4 + x = 9$

$4 + x - 4 = 9 - 4$

$x = 5$

Se resta 4 en ambos miembros.

c) $x + 7 = 4$

$x + 7 - 7 = 4 - 7$

$x = -3$

Se resta 7 en ambos miembros.

d) $x + 4 = -8$

$x + 4 - 4 = -8 - 4$

$x = -12$

Se resta 4 en ambos miembros.

Para resolver ecuaciones como las anteriores se aplica la **Propiedad 2** de una igualdad, es decir se resta en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en un miembro de la ecuación.

Por ejemplo:

$$x + 2 = 3$$
$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x + 4 = 5$

$x + 4 - \square = 5 - \square$

$x = 1$

b) $2 + x = 4$

$2 + x \;\square\; 2 = 4 \;\square\; 2$

$x = 2$

c) $x + 7 = 2$

$x + 7 - 7 = 2 - 7$

$x = \square$

d) $x + 3 = -8$

$x + 3 - \square = -8 - \square$

$x = \square$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 8 = 13$ b) $7 + x = 10$ c) $x + 9 = 5$ d) $x + 6 = -10$

2.5 Método de transposición de términos

P

Resuelve la ecuación: $x - 3 = 4$.

S

Paso 1

A x se le resta 3 y esto es igual a 4.

$$x \boxed{-\ 3} = 4$$

Paso 2

Se suma 3 en ambos miembros para preservar la igualdad matemática.

$$x - 3 + 3 = 4 + 3$$

Paso 3

−3 y 3 se eliminan en el miembro izquierdo y solo queda la incógnita; en el miembro derecho solo quedan cantidades conocidas.

$$x = 4 \boxed{+\ 3}$$
$$x = 7$$

Observa que en el paso 3, el 3 está sumando en el miembro derecho.

C

Para la ecuación anterior el número 3 restaba en el miembro izquierdo y pasó al miembro derecho a sumar:

$$x \boxed{-\ 3} = 4$$
$$x = 4 \boxed{+\ 3}$$

Se puede resolver una ecuación realizando directamente del paso 1 al 3. Cuando un término pasa de un miembro al otro con el signo cambiado se le llama **transposición de término.**

E

Resuelve por transposición la ecuación:

Al resolver la ecuación se tiene: $x + 5 = 12$

$$x \boxed{+\ 5} = 12$$
$$x = 12 \boxed{-\ 5}$$
$$x = 7$$

El 5 estaba sumando en el miembro izquierdo y pasa al miembro derecho restando.

Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones:

a) $x - 5 = 2$
$x = 2 + \square$
$x = \square$

b) $x - 1 = 3$

c) $-1 + x = 3$

d) $-2 + x = 4$

e) $x + 3 = 5$
$x = 5 - \square$
$x = \square$

f) $x + 6 = 8$

g) $4 + x = 5$

h) $2 + x = 4$

2.6 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 3 de las igualdades

P

Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\frac{1}{5}x = 10$ b) $\frac{2}{3}x = 6$ c) $-\frac{x}{2} = 6$

¿Qué operación se debe aplicar en ambos miembros para despejar x? (Despejar x implica que tenga coeficiente 1).

S

a) $\frac{1}{5}x = 10$

$\frac{1}{5}x \times 5 = 10 \times 5$

$x = 50$

Se multiplica por 5 en ambos miembros.

b) $\frac{2}{3}x = 6$

$\frac{2}{3}x \times \frac{3}{2} = 6 \times \frac{3}{2}$

$x = \frac{18}{2}$

$x = 9$

Se multiplica por $\frac{3}{2}$ en ambos miembros.

c) $-\frac{x}{2} = 6$

$-\frac{1}{2}x = 6$

$-\frac{1}{2}x \times (-2) = 6 \times (-2)$

$x = -12$

Se multiplica por -2 en ambos miembros.

C

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 3** de las igualdades, se multiplica ambos miembros por el recíproco del coeficiente de la incógnita. En el caso de que el coeficiente que acompaña a la incógnita sea una fracción, primero se representa como la multiplicación de un número fraccionario por la incógnita y luego, se realiza la multiplicación del recíproco del número fraccionario en ambos miembros.

Una regla práctica para despejar la incógnita en los casos presentados anteriormente es escribir a la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco del coeficiente que tenía la incógnita originalmente.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{5}x = 10$$
$$x = 10 \times 5$$
$$x = 50$$

1. Completa el recuadro en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{9}x = 2$

$\frac{1}{9}x \times \square = 2 \times \square$

$x = 18$

b) $\frac{x}{3} = -7$

$\frac{1}{3}x = -7$

$\frac{1}{3}x \times \square = -7 \times \square$

$x = -21$

c) $-\frac{1}{6}x = 3$

$-\frac{x}{6} \times \square = 3 \times \square$

$x = \square$

d) $-\frac{2x}{3} = -8$

$-\frac{2}{3}x = -8$

$-\frac{2}{3}x \times \square = -8 \times \square$

$x = 12$

e) $\frac{1}{4}x = 2$

$x = 2 \times \square$

$x = 8$

f) $\frac{x}{3} = -5$

$x = -5 \times \square$

$x = -15$

g) $-\frac{1}{5}x = 4$

$x = 4 \times \square$

$x = -20$

h) $-\frac{3x}{5} = -6$

$x = -6 \times \square$

$x = 10$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{4}x = 3$ b) $\frac{x}{4} = 9$ c) $-\frac{2}{7}x = 4$ d) $-\frac{5x}{4} = -10$

2.7 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 4 de las igualdades

P

Resuelve la siguiente ecuación: $7x = -21$.

Un número multiplicado por su "recíproco" es 1.

S

Para resolver la ecuación se divide ambos miembros por el coeficiente de la incógnita. De manera alternativa se puede aplicar la propiedad 3 utilizando el proceso visto en la clase anterior.

Aplicando la propiedad 4

$$7x = -21$$
$$7x \div 7 = -21 \div 7$$
$$x = -3$$

Aplicando la propiedad 3

$$7x = -21$$
$$7x \times \frac{1}{7} = -21 \times \frac{1}{7}$$
$$x = -\frac{21}{7}$$
$$x = -3$$

C

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 4** de las igualdades, se divide ambos miembros por el coeficiente de la incógnita. En forma opcional se pueden resolver ecuaciones como la clase anterior, aplicando la **Propiedad 3** multiplicando ambos miembros de la ecuación por el recíproco del coeficiente de la incógnita.

Una regla práctica para despejar la incógnita en ecuaciones como la anterior, es escribir la incógnita con coeficiente 1 y dividir directamente el otro miembro por el coeficiente de la incógnita.

Por ejemplo:

$$7x = -21$$
$$x = -21 \div 7$$
$$x = -3$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 27$
$3x \div \square = 27 \div \square$
$x = 9$

b) $2x = 6$
$2x \div 2 = 6 \div \square$
$x = 3$

c) $4x = 16$
$4x \div 4 = 16 \div 4$
$x = \square$

d) $6x = -18$
$6x \div 6 = -18 \div \square$
$x = \square$

e) $-5x = 25$
$x = 25 \div (-5)$
$x = \square$

f) $-3x = 27$
$x = 27 \div \square$
$x = \square$

g) $-x = 5$
$x = 5 \div \square$
$x = \square$

h) $-2x = -4$
$x = -4 \div \square$
$x = \square$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7x = 14$ b) $5x = -20$ c) $-6x = 24$ d) $-x = 9$

2.8 Solución de ecuaciones aplicando más de una propiedad

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 7 = -8$

b) $-2x - 6 = 10$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$

Para poder aplicar la **propiedad 3** o **4** solo tiene que haber un término en el miembro izquierdo.

S

a) $5x + 7 = -8$

$$5x = -8 - 7$$
$$5x = -15$$
$$x = -15 \div 5$$
$$x = -3$$

b) $-2x - 6 = 10$

$$-2x = 10 + 6$$
$$-2x = 16$$
$$x = 16 \div (-2)$$
$$x = -8$$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$

$$\frac{x}{5} = 3 + 7$$
$$\frac{x}{5} = 10$$
$$x = 10 \times 5$$
$$x = 50$$

C

Para resolver ecuaciones como las anteriores se tiene que

1. Transponer las cantidades conocidas al miembro derecho.
2. Realizar las operaciones indicadas.
3. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

1. Completa el recuadro en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $4x + 3 = 15$

$$4x = 15 - \square$$
$$4x = 12$$
$$x = 12 \div \square$$
$$x = 3$$

b) $-2x - 6 = 10$

$$-2x = 10 + \square$$
$$-2x = 16$$
$$x = 16 \div \square$$
$$x = \square$$

c) $\frac{x}{10} - 8 = 4$

$$\frac{1}{10}x = 4 + \square$$
$$\frac{1}{10}x = \square$$
$$x = 12 \times \square$$
$$x = \square$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 1 = 5$

b) $-x - 8 = 6$

c) $\frac{2x}{15} - 4 = -8$

d) $\frac{x}{2} - 3 = 4$

2.9 Solución de ecuaciones con incógnitas en ambos miembros

P

Resuelve la ecuación: $3x = 4 + 2x$

La transposición de términos es igualmente válida para términos que incluyen la incógnita.

S

$$3x = 4 + 2x$$

$3x - 2x = 4$ transponiendo $2x$ al miembro izquierdo.

$$x = 4$$

C

Para resolver una ecuación con la incógnita en ambos miembros se tiene que

1. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo.
2. Transponer todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

E

Llena los espacios en blanco, en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $5x = 24 + x$

$5x \square x = 24$

$4x = 24$

$x = \square$

b) $6x + 3 = 3x + 24$

$6x - \square = 24 - 3$

$3x = \square$

$x = \square$

Solución.

a) $5x = 24 + x$

$5x \boxed{-} x = 24$

$4x = 24$

$x = \boxed{6}$

b) $6x + 3 = 3x + 24$

$6x - \boxed{3x} = 24 - 3$

$3x = \boxed{21}$

$x = \boxed{7}$

1. Completa los recuadros en blanco, en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 7x + 12$

$3x - \square = 12$

$\square = 12$

$x = \square$

b) $9x + 3 = 2x - 11$

$9x \square 2x = -11 - 3$

$\square = \square$

$x = \square$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x = -3 + x$

b) $x = -2x - 9$

c) $-x - 2 = -20 + 5x$

d) $8x + 2 = 3x + 7$

2.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 3$

b) $x - 2 = -5$

c) $x + 5 = 8$

d) $x + 6 = -2$

e) $4x = 16$

f) $-2x = 8$

g) $\frac{1}{3}x = 5$

h) $-\frac{1}{2}x = 6$

i) $\frac{1}{4}x = 6$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 8 = -4$

b) $2 - 3x = 14$

c) $5x + 7 = 32$

d) $-4x - 2 = -18$

e) $-2x - 7 = 1$

f) $5x - 3 = 12$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3 = -x - 9$

b) $3 = 5x - 12$

c) $-3x - 11 = x + 5$

d) $8x - 30 = 2x - 6$

e) $11x - 15 = 12 + 2x$

f) $x + 13 = 43 - 14x$

2.11 Solución de ecuaciones con signos de agrupación

P

Resuelve la ecuación: $2(x + 3) + 4 = 20$

La propiedad distributiva establece que
$a(b + c) = a \times b + a \times c$
$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

S

$$
\begin{aligned}
2(x + 3) + 4 &= 20 \\
2x + 2 \times 3 + 4 &= 20 \\
2x + 6 + 4 &= 20 \\
2x + 10 &= 20 \\
2x &= 20 - 10 \\
2x &= 10 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

C

Para resolver una ecuación que incluye signos de agrupación como la anterior, se debe hacer lo siguiente:

1. Aplicar la propiedad distributiva para suprimir los paréntesis.
2. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo y todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

E

Algunos ejemplos de solución de ecuaciones con signos de agrupación son:

a) $3 + (x - 5) = 6$

$$
\begin{aligned}
3 + x - 5 &= 6 \\
x - 2 &= 6 \\
x &= 6 + 2 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

b) $4 - (x - 3) = 9$

$$
\begin{aligned}
4 - x + 3 &= 9 \\
-x + 7 &= 9 \\
-x &= 9 - 7 \\
-x &= 2 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

1. Llena los espacios en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3(x - 2) + 12 = 30$

$$
\begin{aligned}
3x - \boxed{} + 12 &= 30 \\
3x + \boxed{} &= 30 \\
3x &= 30 - \boxed{} \\
3x &= \boxed{} \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

b) $-2(x - 6) + 5 = 47$

$$
\begin{aligned}
-2x + \boxed{} + 5 &= 47 \\
-2x + \boxed{} &= 47 \\
-2x &= 47 - \boxed{} \\
-2x &= \boxed{} \\
x &= -15
\end{aligned}
$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = 7$ b) $5 - (x - 4) = 12$ c) $2(x + 4) + 2 = 14$ d) $-3(x - 1) - 2 = 10$

2.12 Ecuaciones con solución fraccionaria o decimal

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x = 2$

b) $5x + 1 = -6$

El cociente de dos números puede ser expresado como una fracción.

S

a) $4x = 2$

$x = 2 \div 4$

$x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$

b) $5x + 1 = -6$

$5x = -6 - 1$

$5x = -7$

$x = -7 \div 5$

$x = -\frac{7}{5}$ o $x = -1.4$

Cuando las respuestas son números fraccionarios también se pueden representar en forma de números decimales.

C

La solución de una ecuación de primer grado puede ser fraccionaria positiva o negativa, decimal positiva o negativa.

E

Resuelve la siguiente ecuación: $8x + 10 = 3 - 6x$.

Solución.

$$8x + 10 = 3 - 6x$$

$$14x = -7$$

$$x = -7 \div 14$$

$$x = -\frac{7}{14}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = -0.5$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x = 2$

b) $2x + 2 = 5$

c) $-25x - 8 = 4 - x$

d) $-2 + 7(x + 1) = 9$

e) $-9 = 3 + 5(x - 2)$

f) $8(4x - 1) - 4 = 3(1 - x)$

Unidad 5

2.13 Ecuaciones con términos y coeficientes decimales

P

Resuelve la ecuación: $0.5x - 2.5 = 1.5$.

Si los números fueran enteros sería más fácil despejar x.

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o por 1 000, se mueve el punto decimal a la derecha en función del número de ceros.

Ejemplos:

- $0.5 \times 10 = 5$
- $1.45 \times 100 = 145$
- $0.642 \times 1\,000 = 642$

S

$$
\begin{aligned}
0.5x - 2.5 &= 1.5\\
10(0.5x - 2.5) &= 10 \times 1.5\\
10 \times 0.5x - 10 \times 2.5 &= 15\\
5x &= 40\\
x &= 40 \div 5\\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Se puede resolver sin cambiar los decimales en enteros.

$$
\begin{aligned}
0.5x - 2.5 &= 1.5\\
0.5x &= 1.5 + 2.5\\
0.5x &= 4\\
x &= 4 \div 0.5\\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Todos los coeficientes y términos decimales se transforman a números enteros al multiplicar por 10 ambos miembros de la ecuación. Se debe multiplicar todos los términos porque se aplica la **Propiedad 3** de una igualdad.

Para convertir en entero los números decimales en la ecuación, se eligió la potencia de 10 con igual cantidad de ceros que el término con mayor cantidad de cifras a la derecha del punto decimal.

C

Para resolver ecuaciones que tienen coeficientes y términos decimales es conveniente transformar a ecuaciones con coeficientes enteros, multiplicando cada uno de los términos por 10, 100, 1 000 o según el número máximo de decimales que presenten los términos, luego se despeja la x.

E

Resuelve la ecuación: $0.25 - 0.02x = 0.03x + 0.2$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
0.25 - 0.02x &= 0.03x + 0.2\\
25 - 2x &= 3x + 20\\
-2x - 3x &= 20 - 25\\
-5x &= -5\\
x &= \frac{-5}{-5}\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.3x - 0.2 = 3.4$ b) $0.05x - 0.15 = 0.5$ c) $1.1x + 1.7 = 0.6x + 0.2$ d) $0.02x + 0.04 = 0.18 - 0.05x$

2.14 Ecuaciones con términos y coeficientes fraccionarios

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$

b) $\frac{x-2}{2} = \frac{1}{4}x$

Si los números fueran enteros sería más fácil despejar x.

S

El mcm de 3 y 6 es 6.

a) $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$

$$6\left(\frac{1}{3}x - 5\right) = 6 \times \frac{1}{6}x$$
$$6 \times \frac{1}{3}x - 6 \times 5 = 6 \times \frac{1}{6}x$$
$$\frac{6}{3}x - 30 = \frac{6}{6}x$$
$$2x - 30 = x$$
$$2x - x = 30$$
$$x = 30$$

El mcm de 2 y 4 es 4.

b) $\frac{x-2}{2} = \frac{1}{4}x$

$$4 \times \frac{x-2}{2} = 4 \times \frac{1}{4}x$$
$$\frac{4}{2}(x-2) = \frac{4}{4}x$$
$$2(x-2) = x$$
$$2x - 4 = x$$
$$2x - x = 4$$
$$x = 4$$

Para transformar dos o más fracciones en enteros, se multiplican por el mcm de los denominadores. En una ecuación al multiplicar ambos miembros por el mcm, se coloca el signo de agrupación.

C

Para resolver ecuaciones con coeficientes y términos fraccionarios se convierten tanto los términos como los coeficientes en enteros, multiplicándolos por el mcm de los denominadores y luego se despeja x.

E

Resuelve la ecuación: $-\frac{x+2}{12} = \frac{1}{24}x$

Solución.

$$-\frac{x+2}{12} = \frac{1}{24}x$$
$$24 \times \left(-\frac{x+2}{12}\right) = 24 \times \frac{1}{24}x$$
$$-\frac{24}{12}(x+2) = \frac{24}{24}x$$
$$-2(x+2) = x$$
$$-2x - 4 = x$$
$$-2x - x = 4$$
$$-3x = 4$$
$$x = -\frac{4}{3}$$

No cometas el siguiente error:

$-2(x+2) = -2x + 2$ ¡Es incorrecto!

$-2(x+2) = -2x - 4$ ¡Es correcto!

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$

b) $\frac{3}{4}x + 5 = \frac{1}{8}x$

c) $\frac{x-3}{3} = \frac{1}{6}x$

d) $\frac{4-x}{3} = \frac{x}{9}$

e) $\frac{3}{5}x - 1 = -\frac{3}{10}x$

f) $-\frac{x+5}{2} = \frac{3}{4}$

Unidad 5

2.15 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada numeral:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

b) $3x + 5(x + 2) = 4(x + 3) + 6$

c) $5 - 4(3x + 1) = 1 + 4(2x + 20)$

d) $9(x - 3) = 2(x - 5) - 3$

e) $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$

f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$

2. Resuelve:

a) $0.5x + 3 = 0.4x + 3.3$

b) $3 + 0.8x = 2.4 + 0.9x$

c) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

d) $1.31x + 0.04 = 1.35x - 0.04$

e) $0.05x - 0.034 = 0.015x + 0.0001$

f) $2.25x + 1.97 = 3.75x - 4.03$

3. Resuelve:

a) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

b) $-\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}$

c) $-\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$

d) $\frac{7}{24} + \frac{5}{12} = 2x$

e) $\frac{x + 1}{2} = \frac{x}{4}$

f) $\frac{5x - 4}{3} = -\frac{1}{6}$

g) $-\frac{x + 3}{2} - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

h) $\frac{x + 5}{12} = \frac{x + 7}{24}$

3.1 Aplicación de ecuaciones utilizando una propiedad de las igualdades

P

Resuelve las siguientes situaciones:

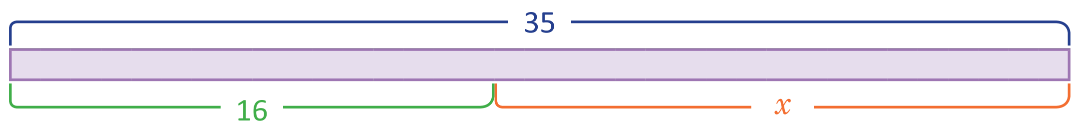
1. Para jugar en un campo de fútbol privado se paga una membresía de 16 dólares y por cada vez que se use se paga un dólar más, ¿cuántas veces se ha usado si se ha pagado 35 dólares?

> Antes de escribir la ecuación te puedes auxiliar de un gráfico.

2. Al restarle 8 al número x, resulta –3. Encuentra x.

S

1.

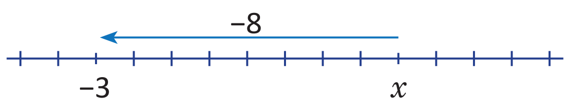


Sea x: El número de veces que ha usado la cancha.

$$16 + x = 35$$
$$x = 35 - 16$$
$$x = 19$$

R: Se ha usado 19 veces.

2.



Sea x: El número buscado.

$$x - 8 = -3$$
$$x = -3 + 8$$
$$x = 5$$

R. El número es 5.

C

Para resolver problemas mediante la aplicación de ecuaciones de primer grado se tiene que

1: Definir qué cantidad se representa con la incógnita.
2: Escribir la ecuación.
3: Resolver la ecuación.
4: Dar la respuesta.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un comerciante hace un balance de pérdidas y ganancias cada trimestre. Si en el primer mes tuvo una ganancia de 1,800 dólares, en el segundo mes una pérdida de 600 dólares, y en el total del trimestre tuvo una ganancia de 7,000 dólares, ¿cuánto había ganado o perdido en el tercer mes?

2. Al restarle 5 al número x, resultó –12. Determina el valor de x.

3.2 Aplicación de ecuaciones utilizando más de una propiedad de las igualdades

P

Responde la pregunta en la siguiente situación:

Miguel tiene una plantación de papaya, él ha cortado 3 árboles debido a que estaban produciendo frutos de mala calidad. Cada uno de los árboles restantes tiene 5 papayas cada uno, produciendo una cosecha total de 355. ¿Cuántos árboles tenía Miguel al principio?

S

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad. En este caso, la cantidad de árboles por la cantidad de papayas que produce un solo árbol es igual a la cantidad total de papayas producidas, de manera que el proceso de solución de la situación es:

Sea x : El número de árboles que tenía Miguel inicialmente.

Cantidad de árboles de papaya	x
Cantidad de árboles restantes	$x - 3$
Cantidad de papayas	$5(x - 3)$

$$5(x - 3) = 355$$
$$5x - 15 = 355$$
$$5x = 355 + 15$$
$$5x = 370$$
$$x = 74$$

R. 74 árboles

Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de primer grado:

1. En una microempresa se alcanzó la meta de venta y el dueño decidió pagar 50 dólares más de la base salarial a cada trabajador. Para pagar a 3 trabajadores se necesitó 1,425 dólares, ¿cuál es la base salarial de cada trabajador?

2. Antonio es ejecutivo de ventas de teléfonos, como no vendía; decidió hacer un descuento de 20 dólares, vendiendo así 12 unidades y la venta total alcanzó 2,400 dólares. ¿Cuánto costaba el teléfono antes del descuento?

3. Ana tiene una librería, ella obtiene $5 de ganancia por cada libro que vende y sus gastos mensuales de funcionamiento son de $200, ¿cuál es el mínimo número de libros que se debe vender?

3.3 Aplicación de ecuaciones que incluye una incógnita en términos de otra

Responde la pregunta en la siguiente situación:

José trabaja a medio tiempo en una ferretería donde le pagan 4 dólares por día, si trabaja día de semana (de lunes a viernes); 6 dólares por día, si es fin de semana (sábado y domingo). Si en el mes trabajó 20 días y le pagaron 84 dólares, ¿cuántos días de semana y fines de semana trabajó?

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad; en este caso, la cantidad de dinero que gana José. Los días de trabajo en la semana, más lo que gana trabajando los días de fin de semana, es su pago mensual. De manera que el proceso de solución de la situación es:

Sea x : El número de días de semana que José trabajó.

	Días de semana	Día de fin de semana
Número de días	x	$20 - x$
Pago	$4x$	$6(20 - x)$
Pago Total	$4x + 6(20 - x)$	

$$
\begin{aligned}
4x + 6(20 - x) &= 84\\
4x + 120 - 6x &= 84\\
120 - 2x &= 84\\
-2x &= 84 - 120\\
-2x &= -36\\
x &= 18
\end{aligned}
$$

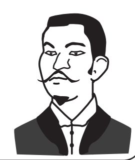
R. 18 días semana y 2 días de fines de semana.

Se dice que Diofantos resolvía ecuaciones seleccionando incógnitas de manera muy efectiva.

Por ejemplo: “Hay dos números. Uno es 20 unidades mayor que el otro y la suma de ambos es 80. Encuentralos.” Para resolver esta ecuación, Diofantos consideró al número mayor “$x + 10$”, y al número menor “$x - 10$”.

Otro ejemplo: “Hay tres números. La suma de dos de estos tres números es 20, 30 y 40 respectivamente. Encuentra cada uno de los tres números”. Para resolver esto, él consideró la suma de tres números “x”, y representó los tres números como “$x - 40$”, “$x - 30$” y “$x - 20$”.

Keirinkan. (2015). *Guía para el maestro*.



Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de primer grado:

1. Una empresa que se dedica al transporte de mercadería cobra por peso en libras. Ellos trasportan 5 reproductores de DVD y 8 televisores LCD, que pesan en total 106 libras, y se sabe que un televisor pesa 10 libras más que un DVD. Al momento de facturar los trabajadores notan que olvidaron tomar el peso por unidad de cada tipo de electrodoméstico. ¿Cuál es el peso de un reproductor y un televisor?

2. La suma de dos números naturales consecutivos es 13, ¿cuáles son los números?

3. La suma de tres números consecutivos es 18, ¿cuáles son los números?

3.4 Aplicación de ecuaciones con variables en ambos miembros

P

Responde la pregunta de la siguiente situación:

Carlos irá al gimnasio por 5 meses; le cobrarán 20 dólares por mes sin membresía, pero si la adquiere, pagará una cuota única de 30 dólares y 10 dólares por mes, ¿después de cuántos meses habrá gastado la misma cantidad de dinero con o sin membresía?, ¿le conviene pagar la membresía según el tiempo que ha planificado entrenar?

S

Como se busca el número de meses que pasan hasta haber gastado la misma cantidad de dinero indiferentemente de la modalidad, se establece que la incógnita representa el número de meses que han pasado. Luego, el gasto mensual que se tendría, según la modalidad sería de \$20 o \$10 por la cantidad de meses, según sea sin o con membresía respectivamente. La igualdad se establece entre el gasto total sin haber adquirido la membresía y si se adquiriera la membresía.

Sea x: Cantidad de meses que han pasado hasta haber pagado la misma cantidad de dinero.

	Sin membresía	Con membresía
Cuota única	0	30
Cuota mensual	20	10
Gasto Total	$20x$	$30 + 10x$

$$
\begin{aligned}
20x &= 30 + 10x \\
20x - 10x &= 30 \\
10x &= 30 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

R. En el mes 3 el gasto es el mismo con o sin membresía. Para que le salga más barato le conviene adquirir la membresía dado que irá por 5 meses.

Responde la pregunta de cada una de las siguientes situaciones:

1. El parqueo privado A cobra una cuota de un dólar por hora y el parqueo B cobra 2 dólares por el derecho de estacionamiento y 0.50 de dólar por cada hora que se utilice, ¿cuántas horas deben transcurrir para que el costo en ambos parqueos sea el mismo?

2. Marta renta un equipo multimedia a 20 dólares por día de uso, más una cuota única de 10 dólares cuando se retira el equipo del local. José tiene un negocio del mismo tipo en el que cobra 18 dólares por día de uso del equipo, más una cuota única de 26 dólares al retirarlo, ¿a los cuántos días el costo del alquiler es el mismo en los dos negocios?, si una persona desea alquilar el equipo por 5 días, ¿en qué negocio debe alquilarlo?

3. En una escuela hay dos cisternas, la primera tiene 200 galones, la segunda 328 y tienen una fuga de 2 y 4 galones, respectivamente por cada semana. Si las cisternas no tienen uso, ¿cuántas semanas tendrán que pasar para tener la misma cantidad de agua?

3.5 Aplicaciones en situaciones de distancia, velocidad y tiempo

P

Responde las preguntas de la siguiente situación:

Marta salió de su casa para la escuela. Julia, su hermana, salió 4 minutos más tarde. La velocidad de Marta fue de 30 m/min y la de Julia fue de 50 m/min. ¿En cuántos minutos alcanzó Julia a Marta? Si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, ¿Julia puede alcanzar a Marta en el camino?

Distancia = Velocidad × Tiempo
Tiempo = Distancia ÷ Velocidad
Velocidad = Distancia ÷ Tiempo

Cuando Julia alcanza a Marta es cuando las dos han caminado la misma distancia desde su casa.

Si el número de minutos que han transcurrido mientras camina Julia es x entonces el tiempo para Marta será $x + 4$ minutos.

S

Se define x como el número de minutos que camina Julia, luego se hace una tabla que resume los datos y por último se plantea y resuelve la ecuación.

Sea x : El número de minutos transcurridos mientras camina Julia.

	Marta	Julia
Velocidad	30 m/min	50 m/min
Tiempo	$x + 4$	x
Distancia	$30(x + 4)$	$50x$

$$30\ (x + 4) = 50x$$
$$30x + 120 = 50x$$
$$30x - 50x = -120$$
$$-20x = -120$$
$$x = 6$$

R. 6 minutos

Sabiendo que Julia alcanza a Marta en 6 minutos se debe comprobar si en efecto Julia alcanzaría a Marta ajustándose a las condiciones de la situación. De manera que, si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, Julia no podría alcanzar a Marta porque, 6 × 50 = 300 m que es mayor que 280 m.

Responde la pregunta de cada una de las siguientes situaciones:

1. a) Un vehículo sale de la ciudad "A" con una velocidad de 60 km/h; 2 horas más tarde sale de la misma ciudad otro vehículo, siguiendo al primero, con una velocidad de 90 km/h, ¿en cuántas horas alcanza el otro vehículo al primero?
   b) Si la distancia entre la ciudad A y una ciudad B fuera 350 km, ¿logrará el segundo auto alcanzar al primero?

2. Entre dos cantones A y B hay un solo camino de 900 m. Antonio sale del cantón A hacia el B con una velocidad de 60 m/min y Carlos sale del cantón B hacia A con una velocidad de 40 m/min. Si han salido al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se encontrarán?

3. Una laguna tiene 1 600 m de perímetro, Ana corre con una velocidad de 150 m/min en dirección horaria, mientras que José corre con una velocidad de 175 m/min en sentido antihorario. Si ambos salen del mismo punto, pero José lo hace 2 minutos después que Ana, ¿en cuántos minutos después de la salida de José se vuelven a encontrar?

3.6 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 1

Si se tiene la proporción:

$$3:b = 6:d$$
$$\frac{3}{b} = \frac{6}{d}$$
$$\frac{3}{b} \times bd = \frac{6}{d} \times bd$$
$$3d = 6b$$

En la proporción $3:b = 6:d$ tienes que

$$\overbrace{3:\underbrace{b = 6}_{\text{Medios}}:d}^{\text{Extremos}}$$

$$3d = 6b$$

De tal forma que la proporción $3:b = 6:d$ representa la igualdad $3d = 6b$; es decir, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. A esta propiedad se le llama **Propiedad Fundamental de las proporciones**.

Aplicando lo anterior, responde a la pregunta de la siguiente situación:

Al comer 3 pupusas de frijol con queso se consumen 990 calorías, ¿cuántas calorías se consumen si se comen 5?, escribe la proporción.

Sea x : El número de calorías.

$$3:5 = 990:x$$
$$3x = 5 \times 990$$
$$3x = 4\,950$$
$$x = 1\,650$$

R. 1 650 calorías

Si se aplica la propiedad fundamental en proporciones que tienen una incógnita se puede formular una ecuación de primer grado.

Marta utiliza 42 cm de cinta adhesiva para forrar 2 cajas con papel lustre. Si tiene 231 cm de cinta, ¿cuántas cajas podrá forrar si son exactamente iguales? Utiliza la propiedad fundamental de proporciones para escribir la ecuación.

Solución.

Sea x : el número de cajas que se puede envolver.

$$42 : 231 = 2 : x$$
$$42x = 2 \times 231$$
$$42x = 462$$
$$x = 11$$

R: 11 cajas

Responde las preguntas de las siguientes situaciones:

1. Para una celebración del día del niño en la escuela se decide comprar pastel, teniendo en cuenta que 3 pasteles alcanzan para 18 niños. ¿Cuántos pasteles se necesitan si hay 48 niños?

2. Una máquina de envasado de líquidos llena 85 envases en 5 minutos, ¿cuántos envases se tendrán después de 13 minutos?

3.7 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 2

P

Responde la pregunta de la siguiente situación:

Una máquina empaquetadora prepara 42 cajas de camisas en 7 días, ¿cuántas cajas se han empaquetado en 10 días?

S

Sea x: el número de cajas empaquetadas.

$$42:7 = x:10$$
$$42 \times 10 = 7x$$
$$420 = 7x$$
$$7x = 420$$
$$x = 60$$

R. 60 cajas

E

Despeja x en las siguientes proporciones:

a) $5:x = 10:14$

b) $4:3x = 2:15$

Solución.

a) $5:x = 10:14$

$$5 \times 14 = 10x$$
$$70 = 10x$$
$$10x = 70$$
$$x = 7$$

b) $4:3x = 2:15$

$$4 \times 15 = 3x \times 2$$
$$60 = 6x$$
$$6x = 60$$
$$x = 10$$

Responde las preguntas de cada una de las siguientes situaciones:

1. En sus horas sociales, José pintará los salones de clase de su escuela, se sabe que 5 galones son los que se usan para pintar 2 aulas. Si en la escuela hay 45 galones de pintura, ¿cuántas aulas se podrán pintar? (Considera que todas las aulas son de las mismas medidas).

2. En un mapa, 10 cm representa 12.5 km de la realidad. Si entre los puntos A y B del mapa, hay 24 cm, ¿cuántos kilómetros hay en realidad?

3. Despeja x en las siguientes proporciones:

   a) $4:x = 48:24$

   b) $2x:36 = 2:12$

Unidad 5

3.8 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 3

P

Mezclando café y leche a una razón de 5:2 se preparó 840 ml de una bebida, ¿cuántos mililitros de leche se usó?

S

Se puede responder la pregunta a través de dos formas.

Forma 1

Sea x : cantidad de leche en mililitros

$$\begin{aligned} 5:2 &= (840 - x):x \\ 5x &= 2 \times (840 - x) \\ 5x &= 1\,680 - 2x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

R. 240 ml

Forma 2

Sea x : cantidad de leche en mililitros

$$\begin{aligned} 2:7 &= x:840 \\ 2 \times 840 &= 7x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

La diferencia en la interpretación de las proporciones planteadas en cada una de las dos formas es que en la forma 1, la razón es de la cantidad de la leche respecto a la de café; y en la forma 2, la razón es de la cantidad de la leche respecto al total de la bebida.

E

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3:(2x + 3) = 6.14$

b) $4:3 = 8:(3x - 3)$

Solución.

a) $3:(2x + 3) = 6:14$

$$\begin{aligned} 3 \times 14 &= 6 \times (2x + 3) \\ 42 &= 6(2x + 3) \\ 6(2x + 3) &= 42 \\ 12x &= 24 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) $4:3 = 8:(3x - 3)$

$$\begin{aligned} 4 \times (3x - 3) &= 3 \times 8 \\ 4 \times (3x - 3) &= 24 \\ 12x - 12 &= 24 \\ 12x &= 24 + 12 \\ 12x &= 36 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Responde las preguntas de las siguientes situaciones:

1. Hay un terreno de 63 manzanas y se ha dividido en regiones para cultivar caña y piña a una razón de 4:3, ¿cuánto mide la región para cultivar caña y la región para el cultivo de piña?

2. A un trabajador le pagarán 1 400 dólares por 12 semanas de trabajo. Si después de 9 semanas es despedido y le pagarán 900 dólares más una tarjeta de regalo para cambiarla en un supermercado, siendo que esa paga cubre el equivalente a las 9 semanas de trabajo, ¿cuánto es el valor de la tarjeta de regalo?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

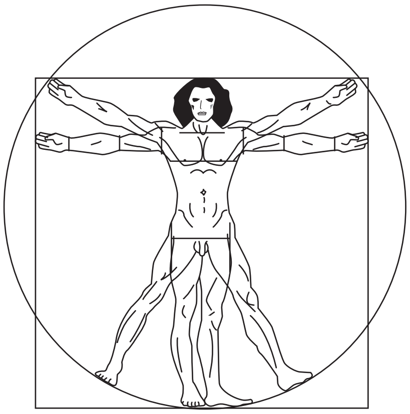
   a) $(x - 1):2 = 12:8$

   b) $2:5 = (x + 1):15$

Unidad 6

Proporcionalidad directa e inversa

Los primeros aportes sobre matemática tienen en común que surgieron por la necesidad de resolver problemas; fue desde la época de los egipcios que se comenzaron a resolver algunos como “determinar la grasa que se necesita para un día, si para un año es necesaria cierta cantidad” esto con el fin de calcular las necesidades de un día en particular. Durante los primeros siglos, es en el escrito de *Los elementos* del matemático griego Euclides donde se formaliza en cierta medida el cálculo de proporciones; dicho concepto se ha ido estudiando y formalizando cada vez más a lo largo de la historia gracias a los aportes de diferentes matemáticos como los franceses Legendre o Lacroix.



Hombre de Vitruvio, pintura de Leonardo Da Vinci que representa proporciones en el cuerpo del ser humano.

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, es así que surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte, como es el caso del número de oro (proporción aurea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Ampliar los conocimientos en los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, partiendo de la motivación histórica de la resolución de un problema es uno de los objetivos, se profundizará en la representación gráfica en el plano cartesiano de la proporcionalidad directa e inversa, como una introducción al concepto de función. Además se estudiarán las aplicaciones de la proporcionalidad en diferentes contextos, hasta llegar a justificar la forma de aplicación en la regla de tres.

1.1 Conceptos de función

P

En cada situación donde hay dos variables x y y, identifica en las que se puede encontrar el valor de y cuando x toma un valor determinado.

Para identificarlo, se puede elaborar tablas, sustituyendo el valor de x por un número cualquiera.

a) Cuando la estatura de una persona es x cm, su peso es y kg.
b) Cuando la edad de una persona es x años, su estatura es y cm.
c) Cuando un vehículo recorre una velocidad a 40 km/h durante x horas, la distancia recorrida es y km.
d) Cuando se vierten x litros de agua en una cubeta de 0.75 kg, el peso total es y kg.
e) Cuando un rectángulo tiene 24 cm^2 de área, la base mide x cm y la altura mide y cm.

S

a) No. Aunque x sea 150 cm, no se sabe su peso y kg.
b) No. Aunque x es 13 años, no se sabe su estatura y cm.
c) Sí. $x = 2$ h, $y = 40 \times 2 = 80$, 80 km.

x (h)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (km)	40	80	120	160	200	240	280	320

d) Sí. $x = 3$ l, $y = 3 + 0.75 = 3.75$, 3.75 kg.

x (l)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (kg)	1.75	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75

e) Sí. $x = 4$ cm, $y = 24 \div 4 = 6$, 6 cm.

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (altura, cm)	24	12	8	6	4.8	4	3.428...	3

C

Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es **función** de x.

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) x horas de estudio y el puntaje en el examen es y puntos.
   b) Cuando un diccionario pesa 2 libras, si hay x cantidad del mismo diccionario, el peso total es y libras.
   c) El recorrido entre dos municipios A y B cuya distancia es 50 km, la distancia recorrida es x km y la distancia faltante es y km.
   d) x años de experiencia en el trabajo y el sueldo es y dólares.
   e) Cuando se viaja 240 km con una velocidad de x km/h, y el tiempo es y horas.

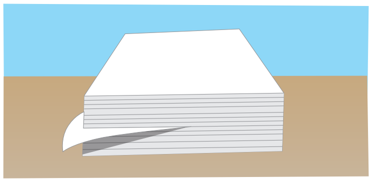
2. Redacta tres situaciones que involucren las variables x y y, donde y sea función de x.

El peso, cantidad de objetos, tiempo, velocidad, distancia, cantidad de agua en un recipiente, etc., son situaciones comunes para relacionar variables.

1.2 Concepto de proporcionalidad directa

P

Una resma de papel bond pesa 2 libras. Representa el peso y libras de x resmas de papel bond.



x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

a) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, 4,... ¿cómo cambia el valor de y?

b) ¿Cuál es el valor de $\frac{y}{x}$? ¿Es constante?

c) Representa y en términos de x.

Representar y en término de x es escribir $y = ax$, usando la variable x.

S

a) Tal como se muestra en la tabla, cuando el valor de x cambia multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente, también va cambiando al ser multiplicado por 2, 3, 4...

b) Tal como se muestra en la tabla, siempre resulta 2 y es constante.

c) Con el resultado de b), se sabe que el valor de y es x por 2, es decir $\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$.

x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

× 2 × 3 × 4

C

En el Problema inicial, x y y se llaman **variables**, mientras la cantidad que no varía se llama **constante**, tal como es 2 en $y = 2x$. Cuando y es función de x y se expresa de la forma de $y = ax$, (a es constante) se dice que y es **directamente proporcional** a x. Al número a se le llama **constante de proporcionalidad**.

$$y = ax$$

constante

variables

Determina si y es directamente proporcional a x, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad.

a) Cuando un atleta camina por la playa 80 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.

x (minutos)	1	2	3
y (metros)	80		

b) Cuando una carnicería vende carne molida a \$2.50 por libra, el peso es x libras y el precio es y dólares.

x (libras)	1	2	3
y (dólares)	2.50		

c) Cuando se vierte agua a un ritmo de $\frac{3}{4}$ galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua es y galones.

x (minutos)	1	2	3
y (galones)			

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, y surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte como el caso del número de oro (proporción aúrea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Carrión, V., Llopis, L. y Queralt, T. *Música y matemática, La armonía de los números.*

Unidad 6

1.3 Valores que toman las variables

P

Piensa en los valores que pueden tomar las variables de la siguiente situación:

Para llenar una piscina rectangular a una altura (profundidad) de 120 cm, se vierte agua a un ritmo de 6 cm de altura (profundidad) por hora.

a) ¿Cuántas horas se necesitan para llenar 120 cm de altura?

b) Si el tiempo transcurrido del llenado de agua se expresa con x, ¿desde qué y hasta qué valor puede tomar la variable x?

c) Dado que la variable y representa la altura (profundidad) de agua, ¿desde qué y hasta qué valor tomaría la variable y?

x (horas)	0	1	2	3	4	...
y (cm)	0	6	12	18	24	...

S

a) Como cada hora se llena 6 cm; 120 ÷ 6 = 20, entonces, se necesitan 20 horas.

b) Desde 0 hasta 20 horas y esto se representa como $0 \leq x \leq 20$ y se lee "x es mayor o igual que 0 y menor o igual que 20".

c) Desde 0 hasta 120 esto se escribe $0 \leq y \leq 120$ y se lee "y es mayor o igual que 0 y menor o igual que 120".

x (horas)	0	1	2	3	4	...	20
y (cm)	0	6	12	18	24	...	120

C

En la proporcionalidad directa hay casos en que se limita el valor que pueden tomar las variables x y y, para representar ese límite se usan los signos de desigualdad (<, >, ≤, ≥).

Los valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** y los de y se llama **rango**. Estos término se retomarán en grados posteriores.

En las siguientes situaciones, representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.

a) Una carnicería que tiene 20 libras de carne molida y el precio es \$2 por libra, el peso vendido es x libras y la venta es y dólares.

x (libras)	0	1	2	3	4	...	20
y (dólares)	0	2	4	6	8	...	

b) En una pila cuya capacidad máxima es de 20 galones se vierte agua a un ritmo de 0.5 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	
y (galones)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	...	

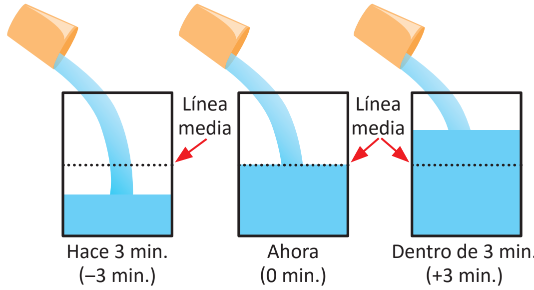
c) Cuando en una alcancía caben 200 monedas de \$0.25 como máximo, la cantidad de monedas de \$0.25 es x monedas y el monto de monedas es y dólares.

x (monedas)	0	1	2	3	4	...	
y (dólares)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	...	

1.4 La proporcionalidad directa con valores negativos en las variables

P

Tal como se muestra en el dibujo, se vierte agua a un ritmo de 2 cm de altura (profundidad) por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos, y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, encuentra la relación entre x minutos después y la altura y cm arriba de la línea media, y realiza lo siguiente:



a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)				−2	0	2			

Cuando x es −4, significa 4 minutos antes, si y es negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente.

b) ¿Puede representarse la altura y cm de la forma $y = ax$?

c) ¿Se puede decir que y es directamente proporcional a x?

S

a)

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8

b) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

c) Sí, porque se pudo representar de la forma de $y = ax$, además, cumple que cuando el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia multiplicándose por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de −1 a −3 (−1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de −2 a −6 (−2 multiplicado por 3).

C

Aunque las variables tomen valores negativos, las características de proporcionalidad siempre se cumplen, es decir, en la proporcionalidad directa, las variables pueden tomar valores negativos.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se vierten 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)					0	4			

b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables x y y.

c) Determina si y es directamente proporcional a x.

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	3			

b)

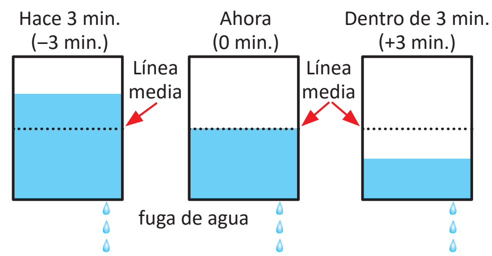
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	2.5			

Unidad 6

1.5 La proporcionalidad directa con constante negativa

P

Tal como se muestra en el dibujo, hay fuga de agua a un ritmo de 2 cm de altura por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, determina la relación entre x minutos después y la altura y cm, con respecto a la línea media. Además:



a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)			4	2	0	−2	−4		

b) Escribe la relación entre las variables de la forma de $y = ax$.

c) Determina si y es directamente proporcional a x.

Cuando x toma el valor −4, significa 4 minutos antes, si y toma un valor negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente. Recuerda que puedes encontrar la constante calculando $\frac{y}{x}$, ¿puede ser negativa?

S

a)

× 4 × 3 × 2 × 2 × 3 × 4

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

× (−2)

× 4 × 3 × 2 × 2 × 3 × 4

b) Como la constante es −2, entonces, $y = -2x$.

c) Como se pudo representar la relación en la forma $y = ax$, se concluye que y es directamente proporcional a x, además, cumple que si el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia siendo multiplicado por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de 1 a 3 (1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de −2 a −6 (−2 multiplicado por 3).

C

En la proporcionalidad directa, hay casos en que su constante es negativa. Es decir, en el valor de $y = ax$, a puede tomar valor negativo ($a < 0$).

Es por eso que en la proporcionalidad directa no se dice que si una cantidad aumenta la otra también aumenta, sino que se dice que **cambia**. Ya que, en este caso, una cantidad aumenta y la otra disminuye; sin embargo, siempre tienen una relación de proporcionalidad directa.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se pierden 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

   a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)					0	−4			

   b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables.

   c) Escribe si y es directamente proporcional a x.

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

   a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	−3			

   b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	−1.5			

1.6 Representación en la forma $y = ax$ a partir de un par de valores para x y y

P

Si y es directamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 12$, representa en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente se necesita encontrar el valor de a.

S

Se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Se tiene que $x = 4$, $y = 12$, se sustituyen en $y = ax$.

$$12 = 4a$$
$$4a = 12$$
$$a = 3$$

Entonces, $y = 3x$.

C

Para representar la relación de la proporcionalidad directa en la forma de $y = ax$, a partir de un par de valores de variables, se realizan los siguientes pasos:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

a) $x = 2$, $y = 14$ b) $x = 2$, $y = 5$ c) $x = 3$, $y = 12$

d) $x = -3$, $y = -9$ e) $x = 2$, $y = -20$ f) $x = 6$, $y = -9$

2. Redacta para cada literal una situación de proporcionalidad directa que se represente con la siguiente expresión:

a) $y = 5x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -2x$

1.7 Practica lo aprendido

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) La edad de una persona es x años y el peso de la misma persona es y libras.
   b) El número de años que tiene un árbol de mango es x años y la cantidad de la cosecha de mango es y quintales.
   c) Para una persona que camina 40 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.
   d) Cuando un metro de varilla de hierro pesa 0.5 libras, la longitud es x metros y el peso y libras.
   e) Cuando en la alcancía hay $50.00, el dinero gastado es x dólares y el restante es y dólares.
   f) Un prisma rectangular cuya área de su base es de 6 cm^2, la altura es x cm y el volumen es y cm^3.

2. En cada tabla y es directamente proporcional a x. Realiza lo siguiente:
   a) Completa la tabla. b) Encuentra la constante. c) Representa la relación entre las variables como $y = ax$.

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	4	8			...	

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0			12		...	

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y						0	−2	−4			

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y					−5	0	5				

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	$\frac{3}{4}$				...	

3. En la siguiente situación, escribe los valores que toman las variables x y y:
   En una pila cuya capacidad máxima es de 30 galones, se vierte a un ritmo de 2 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.

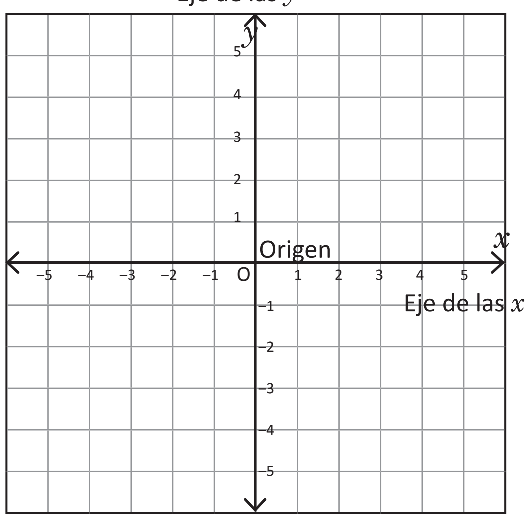
4. Si y es directamente proporcional a x, representa en la forma de $y = ax$, la información de cada literal.
   a) Cuando $x = 4$, $y = 12$
   b) Cuando $x = 4$, $y = -16$
   c) Cuando $x = -2$, $y = 12$
   d) Cuando $x = -12$, $y = -24$

5. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes oraciones sobre proporcionalidad directa. En caso que sea falso, corrígela para que sea verdadero.
   a) Cuando y es directamente proporcional a x, si la variable x aumenta, la otra variable y siempre aumenta.
   b) Cuando una función se representa por $y = -3x$, y no es directamente proporcional a x ya que la constante no puede ser negativa.
   c) Si y es directamente proporcional a x, y su relación se representa por $y = 3x$, entonces, cuando $x = 7$, $y = 10$.

1.8 El plano cartesiano

P

Al trazar dos rectas numéricas que se intersectan perpendicularmente en el punto O, y llamar a la recta horizontal **eje de las x** (o abscisas), a la recta vertical **eje de las y** (o de las ordenadas), y al punto de intersección de ambas rectas **origen**, representado por la letra O correspondiente al valor 0 en x y en y, se obtiene el siguiente plano:

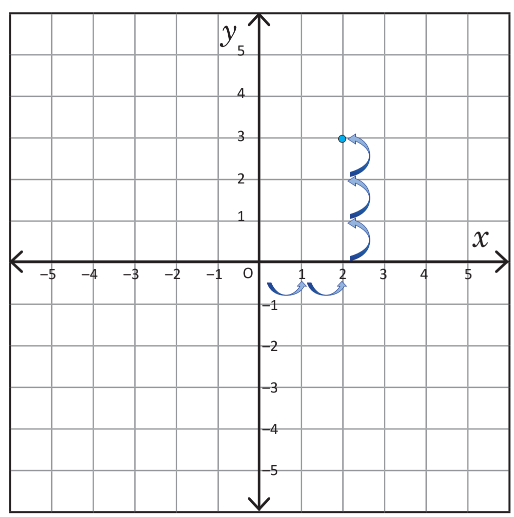


A este plano se le llama plano cartesiano.

¿Cómo se puede representar en el plano cartesiano el punto A, cuya posición está representada por $x = 2$ y $y = 3$?

S

Para ubicar el punto A, $x = 2$ y $y = 3$, partiendo del punto de origen O, primero se desplaza 2 posiciones hacia la derecha para ubicar el valor $x = 2$, y luego 3 posiciones hacia arriba para ubicar $y = 3$.



C

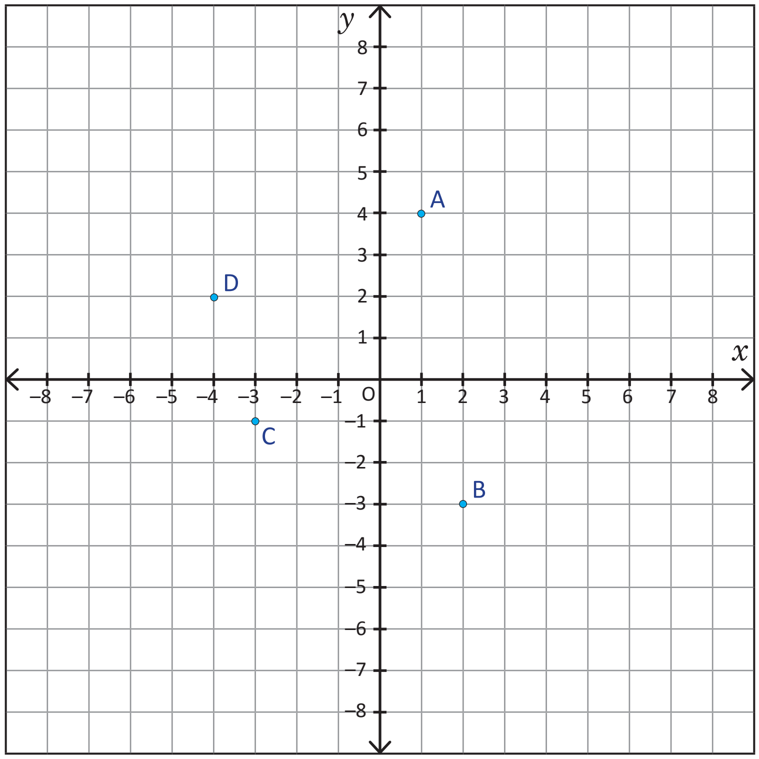
Este par de números del punto A, se escriben como A(2, 3) y se llama **par ordenado** del punto A. El punto de origen O siempre representa (0, 0).

En general, los valores que representan a un punto P en el plano cartesiano, se llaman **coordenadas** del punto P. En el problema anterior las coordenadas del punto A son $x = 2$ y $y = 3$.

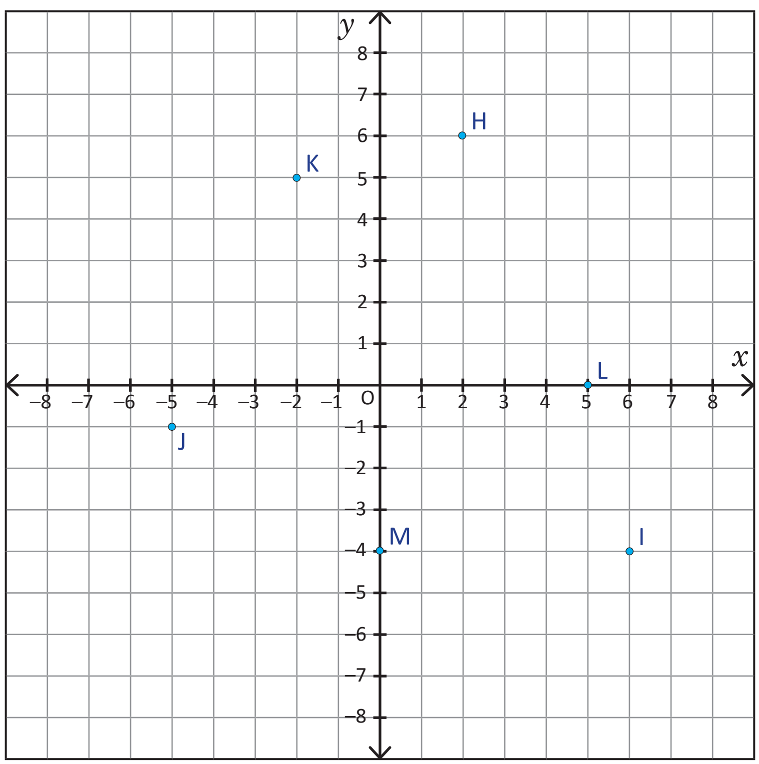
Para representar un punto en el plano cartesiano, se debe realizar el procedimiento presentado.

Unidad 6

1. En el plano cartesiano, lee y escribe los puntos A, B, C y D, y ubica los puntos E(3, 6), F(−4, 5) y G(−3, 5). Ejemplo: A(1, 4).



2. Escribe las coordenadas de los siguientes puntos: H, I, J, K, L y M.



3. En el plano cartesiano, ubica los siguientes puntos:

a) N(3, 4) b) P(3, −4) c) Q(−4, −5)

d) R(−2, 2) e) S(2, 0) f) T(0, 4)

1.9 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 1

P

En sexto grado aprendiste a graficar la proporcionalidad directa cuando el valor de x es mayor o igual que cero ($x \geq 0$). Ahora piensa cómo se grafica cuando x toma valores negativos.

En la siguiente tabla se muestran pares ordenados de x y y, que están en proporcionalidad directa: $y = 2x$.

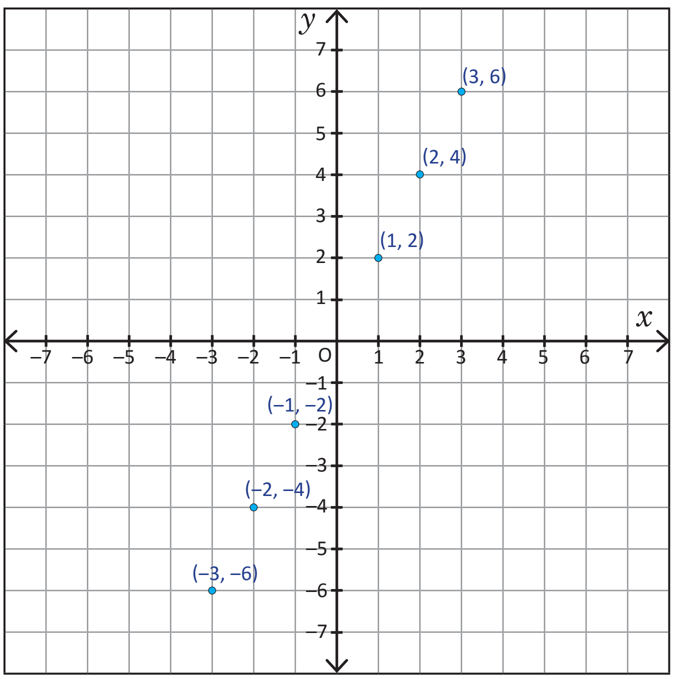
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

a) Ubica los pares ordenados de la tabla anterior en el plano cartesiano.
b) Ubica los siguientes pares ordenados en otro plano cartesiano.

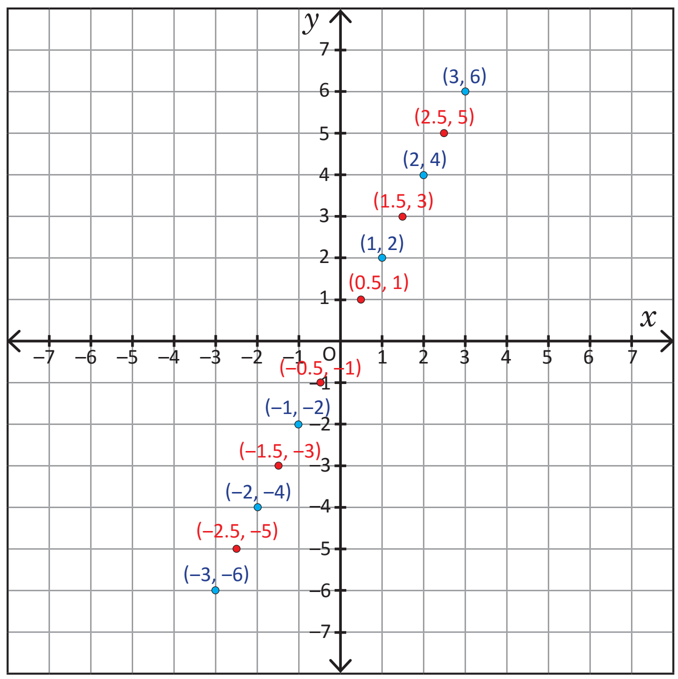
x	...	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	...
y	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...

S

a)



b)



C

Tal como se muestra en la Solución, al colocar los pares ordenados que corresponden a $y = 2x$, estos puntos se ubican en una línea recta y al colocar más puntos, se forma una línea recta. A esta recta se le llama gráfica de $y = 2x$.

Elabora la gráfica de $y = 3x$, a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...										...

Unidad 6

1.10 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 2

P

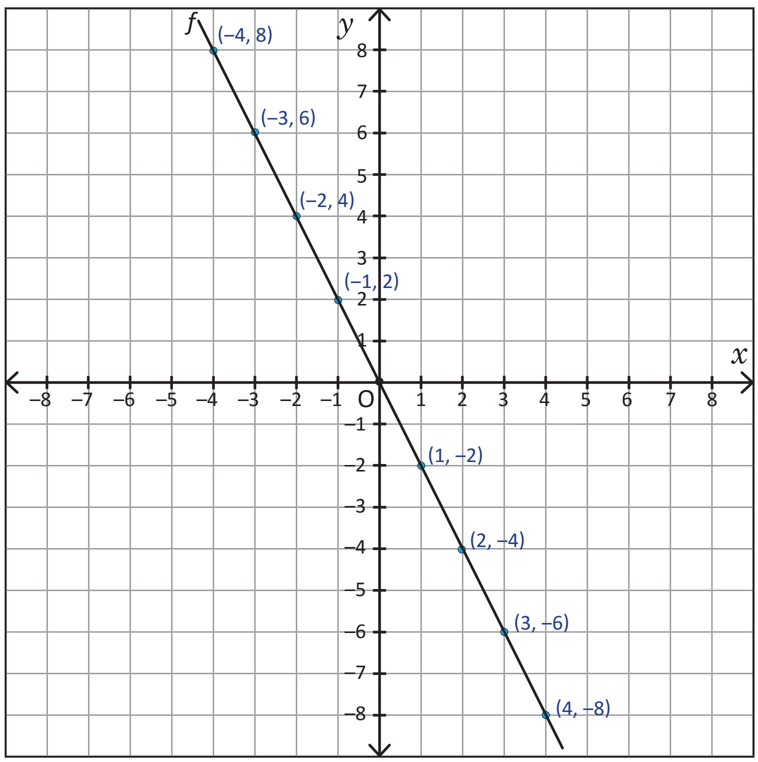
Elabora la gráfica de $y = -2x$ y luego responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto común por el que pasan las gráficas de proporcionalidad directa, comparado con las gráficas elaboradas en la clase anterior?

b) ¿Cuántos puntos se necesitan saber para elaborar la gráfica de una proporcionalidad directa? ¿Cuáles son?

S

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	...



Para encontrar un punto, se puede sustituir un valor entero de x en $y = ax$, y luego calcular y.

a) Los puntos se ubican en una línea recta y siempre pasan por el punto de origen O(0, 0).

b) Se necesitan 2 puntos, el punto de origen y otro punto.

C

Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen O(0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por estos puntos.

Elabora una gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = -4x$

b) $y = 4x$

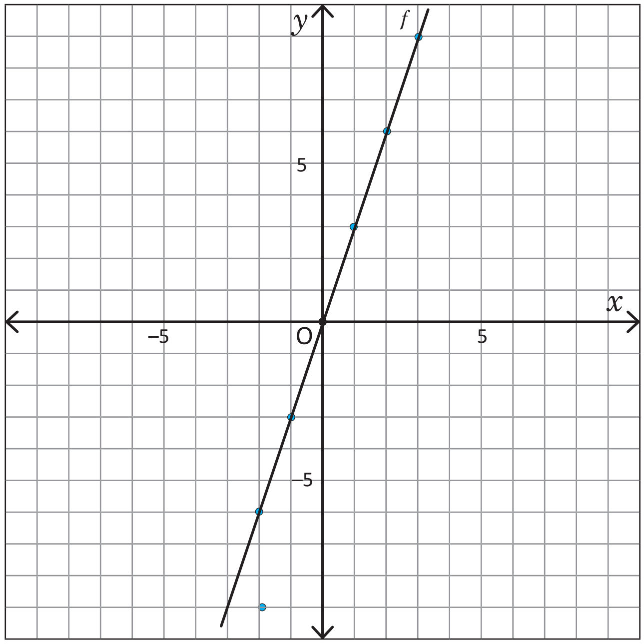
c) $y = -1.5x$

d) $y = -\frac{2}{3}x$

1.11 Representación $y = ax$ de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica

P

A continuación, se presenta la gráfica de la proporcionalidad directa. Escribe esta relación en forma de $y = ax$.



En la clase 6 de esta unidad aprendiste cómo expresar en la forma $y = ax$, la relación de dos variables a partir de un par ordenado.

Sustituyendo un par ordenado en $y = ax$, se puede encontrar la constante a.

S

Solución 1:

Como la gráfica pasa por el punto (1, 3), sustituye en x y y.

$$y = ax$$
$$3 = 1a$$
$$3 = a$$

Entonces, $y = 3x$.

Solución 2:

Como la gráfica pasa por el punto (−2, −6), sustituye por x y y.

$$y = ax$$
$$-6 = -2a$$
$$3 = a$$

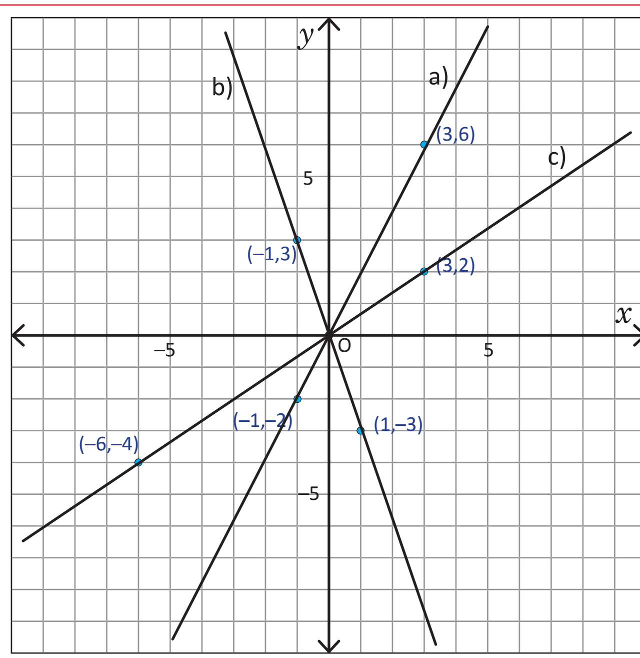
Entonces, $y = 3x$.

C

Para escribir $y = ax$ a partir de la gráfica:

1. Eligir un punto diferente del origen (par ordenado) por el que pasa la gráfica, cuyos valores sean números enteros.
2. Sustituir el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y encontrar el valor de la constante a.
3. Escribir $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado en 2.

Determina $y = ax$, para cada literal a partir de las siguientes 3 gráficas de proporcionalidad directa.



Unidad 6

1.12 Gráfica de proporcionalidad directa cuando las variables toman ciertos valores

P

En una pila cuya capacidad máxima es de 12 galones, se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto. Si se expresa el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila como y galones:

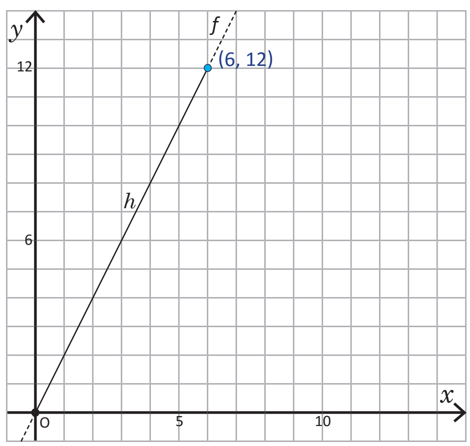
a) Escribe $y = ax$.
b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

S

a) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

b) Para verter los 12 galones, se tarda 6 minutos, por lo que el tiempo x toma los valores $0 \leq x \leq 6$; mientras que la cantidad de agua y, tiene los valores $0 \leq y \leq 12$.

c)



C

Para los valores de las variables que están limitados, se toma la parte correspondiente de la gráfica. Para los valores que están fuera del límite se pueden representar con una línea punteada.

Grafica las siguientes situaciones de proporcionalidad directa:

1. Para viajar 8 km se camina 2 km por hora. Dado que la hora se expresa como x horas y la distancia recorrida con y km:

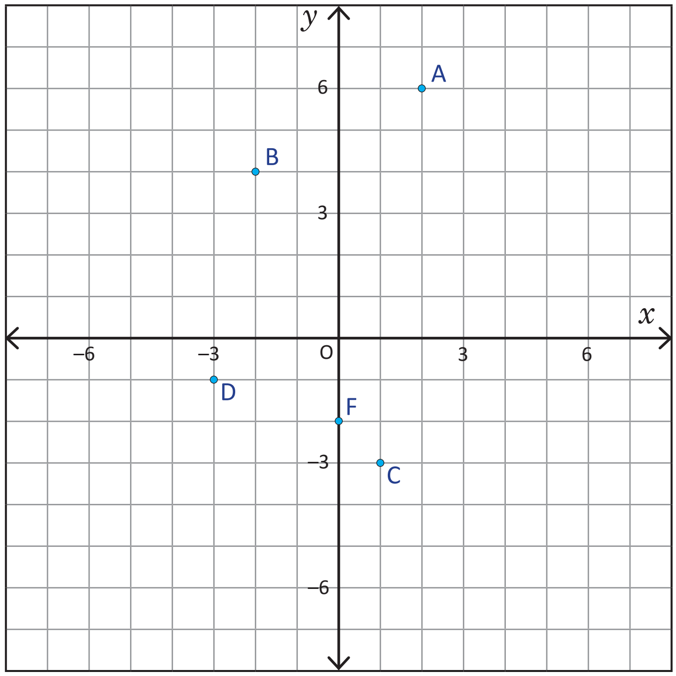
   a) Escribe $y = ax$.
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

2. Un recipiente en el cual caben 8 litros está lleno de agua, pero hay una fuga en la que se pierden 0.5 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como x minutos y la cantidad de agua que se ha fugado del recipiente como y litros, realiza lo siguiente:

   a) Escribe $y = ax$.
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

1.13 Practica lo aprendido

1. Escribe los siguientes puntos en pares ordenados.

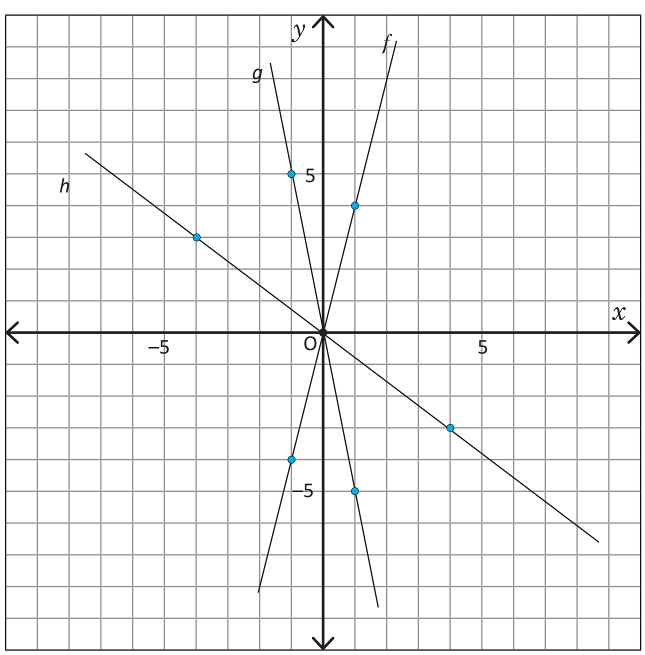


2. Elabora la gráfica a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	...

3. Si y es directamente proporcional a x, elabora la gráfica para los siguientes casos:
   a) $y = 3x$ b) $y = -3x$

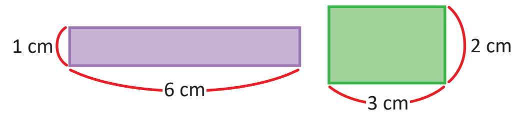
4. Para cada una de las gráficas de proporcionalidad directa, escribe en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.



Unidad 6

2.1 Concepto de la proporcionalidad inversa

Se tienen varios cuadriláteros cuya área es de 6 cm², considerando que la medida de la base es x cm y la altura es y cm, haz lo siguiente:



a) Completa la tabla:

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6			1.5	1.2		...

b) Cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

c) ¿Cómo se llama esta relación?

d) Expresa el área con x y y.

e) Despeja y en la expresión del inciso d).

a)

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6	3	2	1.5	1.2	1	...

b) Tal como se muestra, cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., y cambia por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... respectivamente.

c) A esta relación se le conoce como proporcionalidad inversa.

d) $6 = xy$.

e) Al despejar y, se obtiene $y = \frac{6}{x}$.

Cuando y es función de x y se expresa en forma de $y = \frac{a}{x}$ o ($xy = a$) (a es constante y x no se considera 0), se dice que y es inversamente proporcional a x. Al número a se le llama constante de la proporcionalidad. En la proporcionalidad inversa, cuando una variable x se multiplica por 2, 3, 4..., la otra variable y se multiplica por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... Y para encontrar la constante a, se multiplica xy.

Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.

a) En un recorrido de 12 km, la velocidad es x km/h y el tiempo es y horas.

b) Si se dispone de $20, el dinero que se gasta es x dólares y el que sobra es y dólares.

c) Cuando una cinta de 8 cm de longitud se reparte equitativamente entre x personas. El número de personas x y la longitud de la tira de cada persona es y cm.

2.2 Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables

P

Encuentra los valores de las variables que están en proporcionalidad inversa y realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla cuyos valores tienen la siguiente relación $y = \frac{12}{x}$ $(xy = 12)$, considera algunos valores negativos para x. Luego responde las preguntas.

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...					−6			12				2.4		...

b) Cuando $0 < x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

c) Cuando $0 > x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

d) Cuando x toma valores negativos, ¿se observan las mismas características de la proporcionalidad inversa descubiertas en la clase anterior?

S

a)

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	−2	−2.4	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	2.4	2	...

b) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

c) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

d) Aunque la variable x tome valores negativos, el valor de la variable y correspondiente va cambiando por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

C

Cuando y es inversamente proporcional a x, aunque x tome valores negativos, las características se mantienen.

E

Si $y = -\frac{6}{x}$, ¿es y inversamente proporcional a x?

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	2	3	6		−6	−3	−2	...

$y = -\frac{6}{x}$ significa $y = \frac{-6}{x}$, es decir, la constante es negativa (−6).

En la proporcionalidad inversa la constante puede ser negativa.

Completa las tablas e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.

1.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...		−2.6...		−8		8		2.6...		...

2.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...						− 12				...

2.3 Representación en la forma $y = \frac{a}{x}$ a partir de un par ordenado

P

Si y es inversamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 6$, representa en la forma $y = \frac{a}{x}$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente basta encontrar el valor de a.

S

Como se sabe se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Utilizando $y = \frac{a}{x}$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $6 = \frac{a}{4}$
$a = 6 \times 4$
$a = 24$.

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Utilizando $xy = a$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $4 \times 6 = a$
$a = 24$.

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

C

Para representar la relación de proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{a}{x}$, a partir de algunos valores determinados de las variables:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = \frac{a}{x}$.

1. Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

   a) Cuando $x = 3$, $y = 5$ b) Cuando $x = 4$, $y = 2$ c) Cuando $x = -2$, $y = 7$ d) Cuando $x = 6$, $y = -3$

   e) Cuando $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$ f) Cuando $x = -3$, $y = -\frac{2}{3}$ g) Cuando $x = -12$, $y = \frac{2}{3}$

2. Redacta una situación de proporcionalidad inversa, la cual se represente con

$$y = \frac{16}{x}.$$

2.4 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es positiva

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$ ($xy = 12$) haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

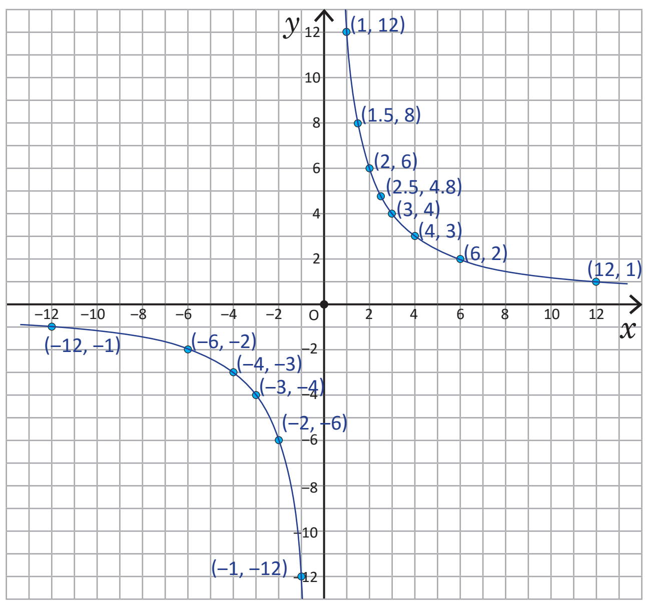
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			−6			12				...		...		...

S

a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	−1	...	−2	...	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	...	2	...	1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, 8), (2.5, 4.8), (−1.5, −8), (−1.25, −9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



C

La gráfica de proporcionalidad inversa consta de dos líneas curvas.

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = \frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...		...		−3			6			...		...

b) $y = \frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...		...		...			−9		9			...		...		...

2.5 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es negativa

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = -\frac{12}{x}$ ($xy = -12$) haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

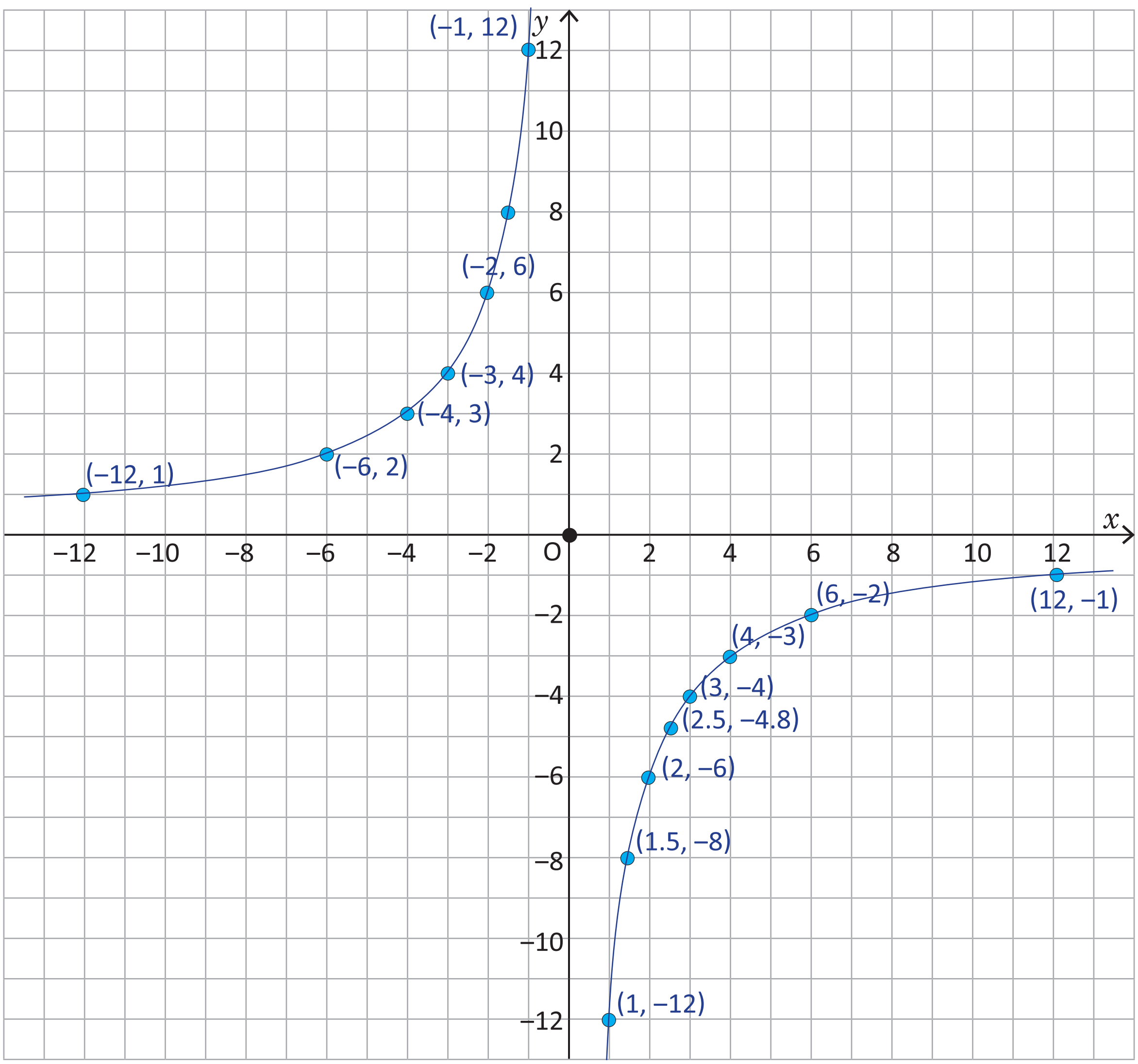
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			6			−12				...		...		...

S

a)

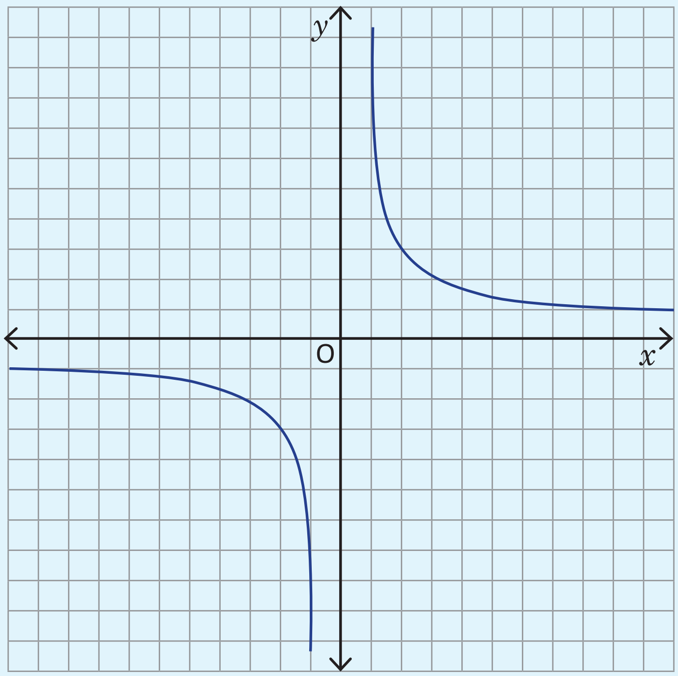
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	1	...	2	...	3	4	6	12		−12	−6	−4	−3	...	−2	...	−1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, −8), (2.5, −4.8), (−1.5, 8), (−1.25, 9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:

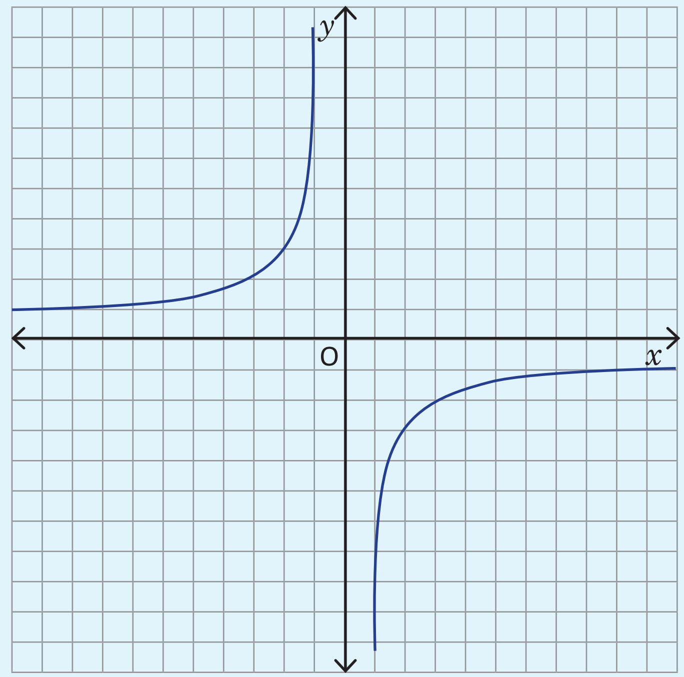


C

La gráfica de proporcionalidad inversa depende del valor de la constante a, tal como se muestra a continuación:



$(a > 0)$



$(a < 0)$

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = -\frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...		...		3			−6			...		...

b) $y = -\frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...		...		...					−9			...		...		...

3.1 Regla de tres simple directa

P

La siguiente tabla representa dos variables directamente proporcionales, pero se han manchado ciertas partes con tinta negra. Encuentra el valor de y que corresponde a x = 6.

x			3			6				...
y			12						36	...

Puedes usar la idea de la propiedad fundamental de las proporciones:

si $\boldsymbol{a : b = c : d}$, entonces $\boldsymbol{ad = bc}$.

O también puedes usar la constante de proporcionalidad.

S

Usando la propiedad fundamental de proporcionalidad.

$$3 : 12 = 6 : d$$

$$3d = 12 \times 6$$

$$d = 24$$

Usando la constante de la proporcionalidad. Como x y y son directamente proporcionales, $\frac{y}{x} = a$ y a es constante, entonces:

$$\frac{12}{3} = \frac{d}{6}$$

$$d = \frac{12}{3} \times 6$$

$$d = 24$$

C

Cuando hay dos cantidades directamente proporcionales, y un dato desconocido, se puede encontrar el valor del dato desconocido usando las soluciones presentadas. A este proceso se le llama **regla de tres simple directa**. Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se puede hacer lo siguiente:
1. Formar una proporción $\boldsymbol{a : b = c : d}$.
2. Aplicar $\boldsymbol{ad = bc}$.
3. Despejar el dato desconocido.

E

En la tabla del Problema inicial, encuentra el valor de x que corresponde a y = 36, usando regla de tres simple directa.

Solución.

x	3	c
y	12	36

Forma 1

$$3 : 12 = c : 36$$
$$12c = 3 \times 36$$
$$c = 9$$

Forma 2

$$\frac{12}{3} = \frac{36}{c}$$
$$c = \frac{3 \times 36}{12}$$
$$c = 9$$

Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores a, b, c y d aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	a	...	8	9	...	12	...	c	...	25
y	...	28	...	56	b	...	84	...	147	...	d

3.2 Regla de tres simple directa con porcentaje

P

La tabla muestra el número de estudiantes y que corresponde al x%. Analiza si y es directamente proporcional a x, y en caso afirmativo, aplica la regla de tres simple directa para encontrar el número de estudiantes que corresponde al 90%.

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

S

× 5

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

× 5

Si son directamente proporcionales, entonces se aplica la regla de tres simple directa para encontrar la incógnita d.

$$10 : 5 = 90 : d$$
$$10d = 5 \times 90$$
$$d = 45$$

$$\frac{5}{10} = \frac{d}{90}$$
$$d = \frac{5 \times 90}{10}$$
$$d = 45$$

C

En situaciones que involucren porcentajes, se puede aplicar la regla de tres simple directa.

E

Encuentra el valor de la incógnita de cada caso, aplicando la regla de tres simple:

a) A una reunión donde se convocó a 125 personas, asistieron solamente el 80% de personas convocadas, ¿cuántas personas asistieron?

Porcentaje	80	100
Personas	b	125

$$80 : b = 100 : 125$$
$$100b = 80 \times 125$$
$$b = 100$$

$$\frac{b}{80} = \frac{125}{100}$$
$$b = \frac{80 \times 125}{100}$$
$$b = 100$$

b) En una escuela hay 750 estudiantes, ¿cuál es el porcentaje de niñas, si en total son 450?

Porcentaje	a	100
Personas	450	750

$$a : 450 = 100 : 750$$
$$750a = 450 \times 100$$
$$a = 60$$

$$\frac{450}{a} = \frac{750}{100}$$
$$a = \frac{450 \times 100}{750}$$
$$a = 60$$

Encuentra la cantidad desconocida en cada problema, aplicando la regla de tres simple directa.

a) En un estudio de preferencia entre mango verde y maduro, se encuestaron a 150 personas y el 60% prefiere mango verde. ¿Cuántas personas respondieron que prefieren mango verde?

b) Un recipiente de forma cilíndrica está lleno de agua hasta 16 cm de profundidad y corresponde al 40% de la profundidad del recipiente, ¿de cuántos centímetros es la profundidad de este recipiente?

3.3 Regla de tres simple directa en conversión de unidades

P

Existe relación de proporcionalidad directa en conversión de medidas. Aplica la regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada caso.

a) Peso (aproximado)

Libras	1	4
Gramos	454	d

b) Capacidad (aproximada)

Galones	1	2
Litros	b	7.58

c) Volumen

Litros	a	2
cm^3	1 000	2 000

S

En todos los casos existe una relación directamente proporcional entre las variables. Entonces, aplicando la regla de tres simple directa se tiene:

a) Peso (aproximado)

$$1 : 454 = 4 : d$$
$$d = 4 \times 454$$
$$d = 1\,816$$

Opcionalmente

$$\frac{454}{1} = \frac{d}{4}$$
$$d = \frac{4 \times 454}{1}$$
$$d = 1\,816$$

b) Capacidad (aproximada)

$$1 : b = 2 : 7.58$$
$$2b = 7.58$$
$$b = 3.79$$

Opcionalmente

$$\frac{b}{1} = \frac{7.58}{2}$$
$$b = \frac{7.58}{2}$$
$$b = 3.79$$

c) Volumen

$$a : 1\,000 = 2 : 2\,000$$
$$2\,000a = 2 \times 1\,000$$
$$a = 1$$

Opcionalmente

$$\frac{1\,000}{a} = \frac{2\,000}{2}$$
$$a = \frac{2 \times 1\,000}{2\,000}$$
$$a = 1$$

C

En situaciones de conversión de unidades se puede aplicar regla de tres simple directa, tanto en el mismo sistema métrico como entre diferentes sistemas de medidas.

1. Aplica regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada conversión.

a) Área (aproximada)

m^2	1	5
v^2	0.7	d

b) Longitud

m	1	c
cm	100	600

c) Tiempo

Horas	1	c
Minutos	60	150

d) Volumen

m^3	1	3
cm^3	a	3 000 000

2. Responde lo siguiente:

a) ¿A cuántos metros por minuto equivale la velocidad 36 km por hora?

b) ¿A cuántos kilómetros por hora corresponde la velocidad de un atleta que corre 100 m en 10 segundos?

3.4 Practica lo aprendido

1. En una tienda hay un rótulo que dice “Hoy nosotros pagamos el IVA”. Si se compra un artículo que cuesta \$90.40, incluyendo el IVA que es 13%, ¿cuánto se debe pagar?

Porcentaje	100	113
Precio	b	90.40

IVA significa Impuesto al Valor Agregado. En El Salvador es del 13% y como es agregado, el precio incluyendo el IVA se expresa 113%. Como es una situación de porcentaje, se puede aplicar regla de tres simple directa.

2. En una tienda hay un rótulo que dice “El segundo artículo a mitad de precio”. Si una persona desea comprar un artículo con precio de \$18 y otro con precio de \$14, considerando que el descuento se hace al artículo de menor precio, ¿cuánto debe pagar la persona?

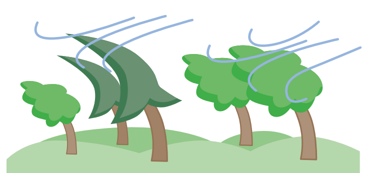
Por lo general, al artículo más barato se le dice segundo artículo. “A mitad de precio” significa que se descuenta el 50% o le toca pagar el 50% del precio.

3. Otra tienda tiene un rótulo que dice “El segundo artículo con el 20% de descuento y el tercer artículo con el 40% de descuento”. Si una persona compra el primer artículo, cuyo precio es \$50, el precio del segundo es \$40 y del tercero es \$30, ¿cuánto debe pagar?

4. En un centro escolar se reparte un boletín informativo (una hoja por estudiante). Al profesor Carlos le toca separar las hojas por grado, según el número de estudiantes, pero quiere evitar el conteo de todas ya que es bastante. ¿Cómo puede separarlas, si el peso de 12 hojas es 5 gramos?

		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Boletín (hojas)	12	120	144	156	156	180	192	228	240	204
Peso (g)	5									

5. Si un frente frío provoca vientos con velocidad de 100 kilómetros por hora, ¿a cuántos metros por segundo equivale?



Recuerda que una hora es 60 minutos, 1 minuto es 60 segundos, 1 kilómetro es 1 000 metros.

6. La dueña de una pupusería, para asegurar la ganancia, quiere dejar el costo de los ingredientes en el 20% del precio de venta de una pupusa. Si para preparar 50 pupusas de quesillo se necesita \$1.50 de harina de maíz, \$1.50 de quesillo y \$1.00 de aceite, ¿cuánto debe ser el precio de una pupusa con quesillo?

Se considera el precio de una pupusa con quesillo como el 100%.

3.5 Aplicación de la regla de tres simple inversa

P

Una cooperativa de café piensa comprar una maquinaria pequeña para lavar el café, asumiendo cada productor la misma cantidad de dinero. Si solo son 2 productores, a cada uno le toca pagar $600. Para que el costo por productor sea $75, ¿cuántos productores deben aportar?

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

S

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

El costo total es xy, que es constante, por lo tanto, es una relación de proporcionalidad inversa. Entonces:

$$2 \times 600 = 75c$$
$$75c = 1200$$
$$c = 16$$

C

Cuando hay dos cantidades inversamente proporcionales, y hay dos pares de ellas (4 cantidades) con tres conocidas y una desconocida, se puede encontrar el valor de este dato usando la solución presentada. A este proceso se le llama r**egla de tres simple inversa**.

Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se debe hacer lo siguiente:

1. Establecer una igualdad basándose en la idea de constante: $\boldsymbol{ab = cd}$.
2. Despejar el dato desconocido.

Aplica la regla de tres simple inversa para responder las siguientes preguntas, usando la misma situación del Problema inicial.

a) Para que el costo por productor sea $50, ¿cuántos productores se deben reunir?

b) Para que el costo por productor sea $30, ¿cuántos productores se deben reunir?

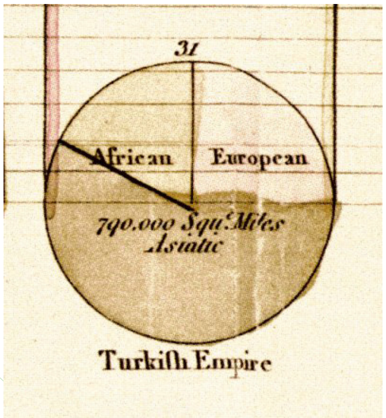
c) Cuando se reunen 60 productores, ¿cuánto dinero le toca a cada productor?

Productor (x)	2	...	a	...	b	...	60
Costo por productor (y)	600	...	50	...	30	...	c

7 Unidad

Gráfica de faja y circular

Las representaciones gráficas de los datos varían dependiendo del objetivo que se persiga en dichas representaciones, en este sentido, si se requiere ver frecuencias, es muy común utilizar la gráfica de barras, sin embargo, si lo que se desea es comparar la proporción de los datos respecto del total se puede utilizar la gráfica de faja o la gráfica circular, cuya interpretación y análisis es muy importante.



Esquema de la gráfica circular elaborada por William Playfair.

Se tiene conocimiento de que la primera gráfica circular fue elaborada y utilizada por el ingeniero y economista escocés William Playfair que mostraba las proporciones del imperio turco localizado en Asia, Europa y África hacia el año 1786.

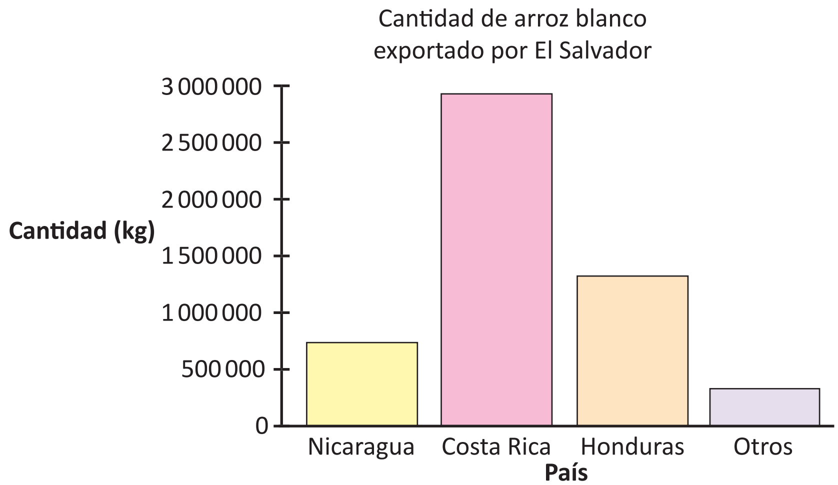
Los contenidos que estudiarás serán: el gráfico de faja a partir del uso de la proporcionalidad, la construcción de la gráfica de faja, interpretación y análisis para comparar dos gráficas de faja diferentes; luego se utilizará la forma de construcción de la gráfica de faja para la construcción de la gráfica circular, y por último, la lectura de este tipo de gráficas.

1.1 Lectura de una gráfica de faja

P

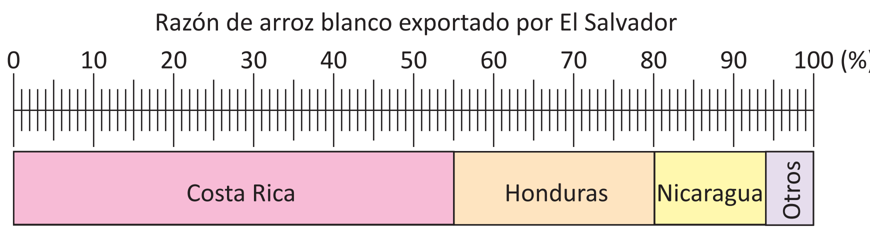
La siguiente gráfica de barras muestra la cantidad de arroz blanco exportado por El Salvador, según el país de destino.

País	Arroz (kg)
Nicaragua	744 902.2
Costa Rica	2 926 402.0
Honduras	1 330 183.0
Otros	319 243.8



Con la gráfica de barras no se puede observar la razón de la cantidad de arroz exportado a cada país de destino en relación al total.

Observa la siguiente gráfica que muestra la razón (en porcentaje) de la cantidad de arroz blanco exportado por El Salvador según el país de destino y responde lo que se te pide en cada literal.



La gráfica está dividida en 100 partes iguales, representando el por ciento de cada parte.

a) ¿Cuál es el porcentaje de exportación a cada país de destino?
b) Si la cantidad total fuera 6 000 000 kg, ¿cuántos kg se exportarían a cada país?

S

a) Costa Rica: 55%, Honduras: 25%, Nicaragua: 14% y Otros: 6%.

b) Costa Rica: $6\,000\,000 \times \frac{55}{100} = 3\,300\,000$; Honduras: $6\,000\,000 \times \frac{25}{100} = 1\,500\,000$;
Nicaragua: $6\,000\,000 \times \frac{14}{100} = 840\,000$ y Otros: $6\,000\,000 \times \frac{6}{100} = 360\,000$.

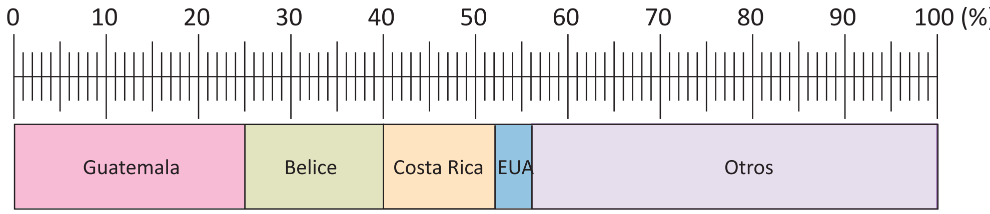
C

Generalmente cada parte que compone la gráfica se llama categoría. En el ejemplo anterior, cada parte correspondiente a “Costa Rica”, “Honduras”, “Nicaragua” y “Otros” son las categorías. A la gráfica se le llama **gráfica de faja**, en ella se observa fácilmente la razón de cada categoría en relación al total, esta presenta las siguientes características:

1. Tiene un título.
2. Las categorías se ubican de mayor a menor, según su porcentaje (de izquierda a derecha).
3. En caso de que aparezca la categoría “Otros”, se ubica por último sin importar su porcentaje.

1. La gráfica de faja muestra la exportación de arroz precocido de El Salvador en enero del año 2014.

Razón de la cantidad de arroz precocido exportado por El Salvador

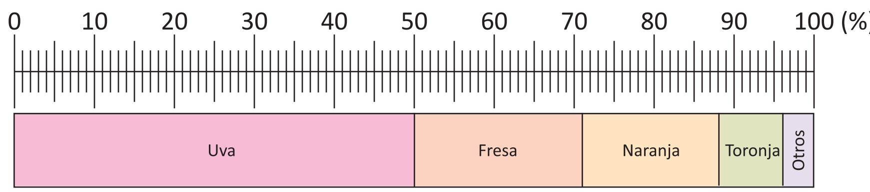


a) ¿Cuál es el porcentaje de exportación a cada país?

b) Si la cantidad total es 2 356 191 kg, ¿cuántos kg se exportan a cada país?

2. Se pregunta a varias personas sobre su sabor de refresco favorito, obteniéndose los siguientes resultados:

Sabor de refresco favorito

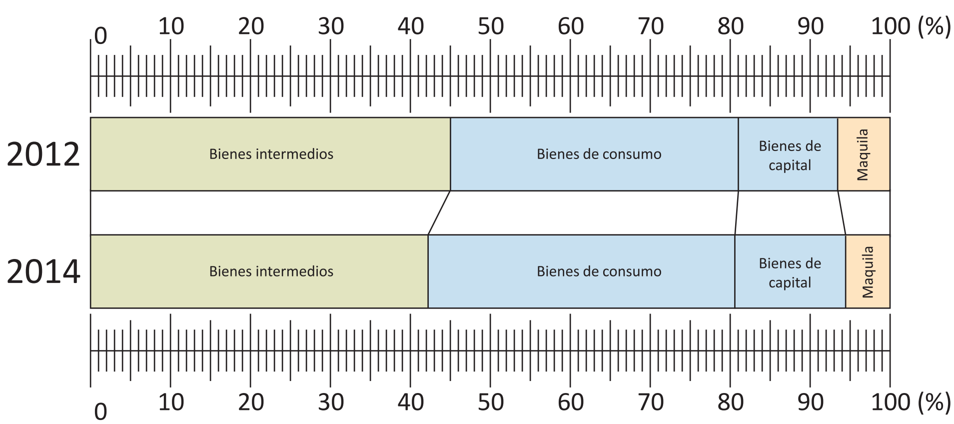


a) ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada sabor de refresco?

b) Si la cantidad de personas es de 200, ¿cuántas personas han preferido cada sabor de refresco?

3. Las siguientes gráficas de faja muestran las importaciones realizadas por El Salvador, según la clasificación económica, en los años 2012 y 2014:

Razón de las importaciones por El Salvador según la clasificación económica



Los bienes de consumo son los que satisfacen directamente las necesidades de los individuos, como el alimento y la ropa.

Los bienes intermedios se utilizan para realizar la producción en las empresas y el gobierno. Son los insumos o materias primas que serán objeto de posteriores transformaciones en el proceso de producción.

Los bienes de capital son los que se usan para transformar los bienes intermedios, pero que no sufren transformación en el proceso productivo; por ejemplo, la maquinaria, las herramientas e instrumentos de alta tecnología.

a) ¿Cuál es el porcentaje de los **Bienes de consumo** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de importación de este tipo de bienes?

b) ¿Cuál es el porcentaje de los **Bienes de capital** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de importación de este tipo de bienes?

c) ¿En qué año hubo un menor porcentaje de importación de **Bienes intermedios**?

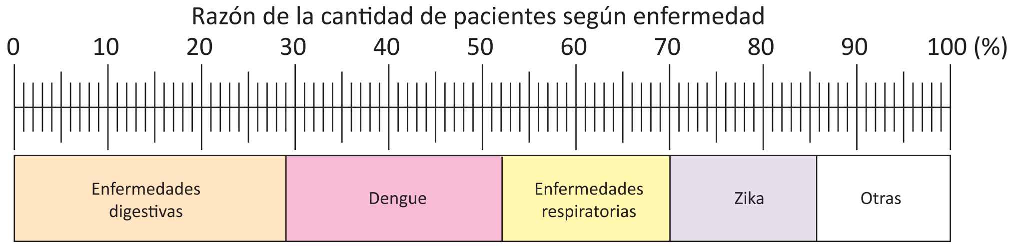
1.2 Construcción de una gráfica de faja

P

La tabla muestra el número de pacientes según la enfermedad. Construye una gráfica de faja, redondeando el porcentaje de cada categoría a la unidad.

Enfermedad	Número de pacientes	%
Dengue	420	23.3
Zika	280	15.6
Enfermedades digestivas	530	29.4
Enfermedades respiratorias	330	18.3
Otras	240	13.3
Total	1 800	100

S



C

El procedimiento para la elaboración de una gráfica de faja es:

1. Encontrar el porcentaje de cada categoría.
2. Separar según el porcentaje obtenido, partiendo de la categoría con mayor porcentaje desde la izquierda.
3. Colocar la categoría "Otros" en último lugar (en caso de que aparezca).

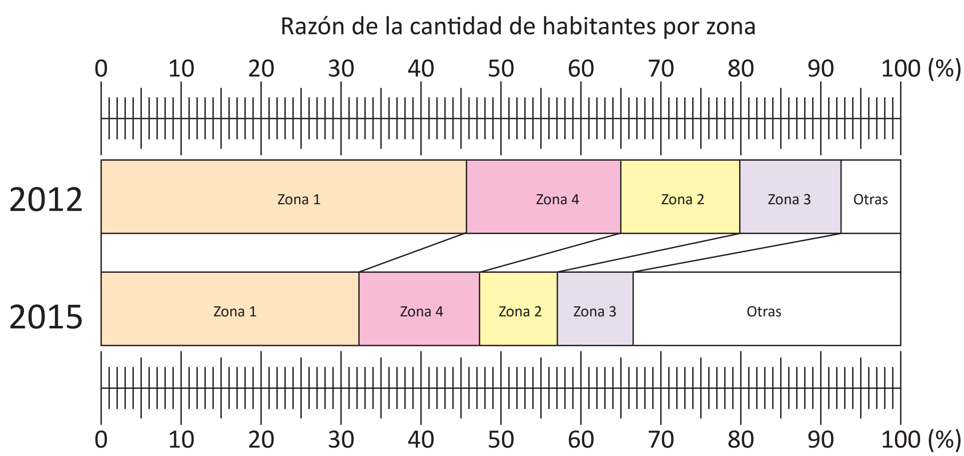
E

La siguiente tabla muestra la cantidad de habitantes de distintas zonas de una población en el año 2012 y 2015. Construye una gráfica de faja redondeando el porcentaje de cada categoría hasta la unidad.

	2012		2015	
Zona	Número de habitantes	%	Número de habitantes	%
Zona 1	1 567 156	45.6	1 725 520	31.6
Zona 2	523 655	15.2	524 130	9.5
Zona 3	434 003	12.6	512 000	9.3
Zona 4	660 652	19.2	800 713	14.6
Otras	250 001	7.2	1 900 335	34.7
Total	3 435 467		5 462 698	100

Si el total de los porcentajes no es 100, por causa del redondeo, entonces se arregla cambiando el por ciento de la categoría "Otros" o la categoría que tiene mayor cantidad, de modo que el total sea 100.

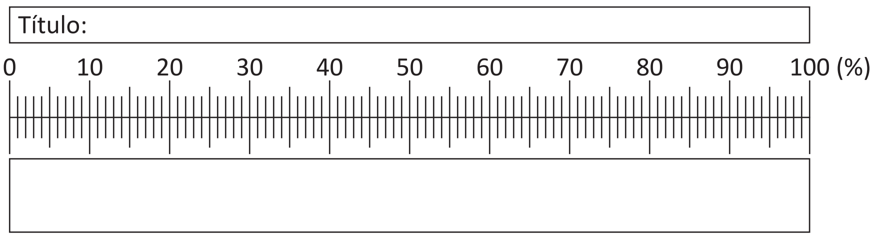
Solución.



1. Por motivos de la celebración del día del niño, en un centro escolar, se les preguntó a los estudiantes qué comida preferían. En la tabla aparecen los resultados.

Categoría	Cantidad	%
Pollo	83	
Carne	10	
Pescado	37	
Pavo	257	
Otras	8	
Total	395	

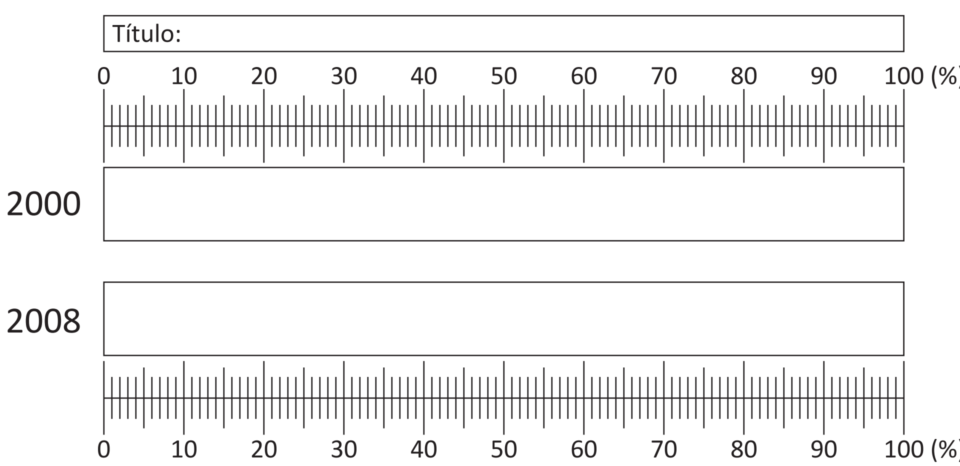
a) ¿Qué porcentaje representa el número de niños que prefieren cada uno de los tipos de comida? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad).
b) Construye una gráfica de faja para representar la información.



2. Se preguntó a estudiantes de 7° grado de una escuela en el año 2000 y 2008 sobre el deporte de su preferencia. Las respuestas se registraron en la siguiente tabla:

Deportes	2000		2008	
	Niños (Datos)	%	Niños (Datos)	%
Fútbol	47		42	
Básquetbol	38		28	
Softbol	31		53	
Voleibol	22		33	
Otros	35		24	
Total	173		180	

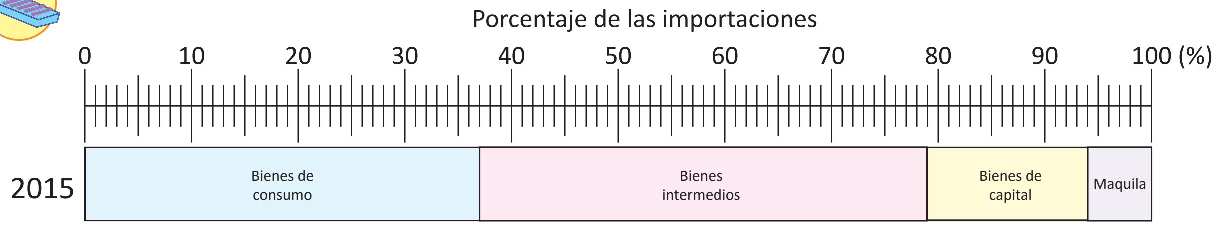
a) ¿Qué porcentaje representa el número de estudiantes que prefieren cada deporte en los años que se les preguntó? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad).
b) Construye una gráfica de faja para cada año y compara la información presentada en ellas. ¿Es menor, igual o mayor cada uno de los porcentajes del año 2000 con respecto al 2008?



1.3 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

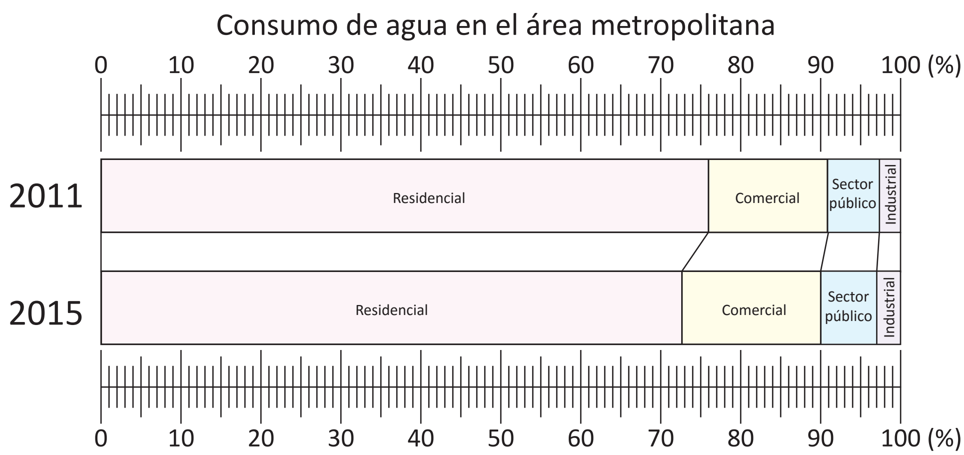
1. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de las importaciones, según clasificación económica realizadas por El Salvador, en el año 2015.



a) ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada tipo de importación?

b) Si la cantidad total de dólares de las importaciones fué 10 415.4 millones, ¿cuál es la cantidad por cada tipo de importación?

2. La siguiente gráfica presenta el porcentaje de consumo de agua por categorías en la región metropolitana de San Salvador en sistemas administrados por ANDA, en los años 2011 y 2015.



a) ¿Cuál es el porcentaje de consumo del sector **Residencial** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de consumo?

b) ¿Cuál es el porcentaje de consumo del sector **Industrial** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de consumo?

c) ¿En qué año hubo un menor porcentaje de consumo del sector **Comercial**?

d) ¿Se puede decir que el consumo total de agua por categoría **Residencial** de la región metropolitana de San Salvador en 2015 ha disminuido comparado con el 2011?

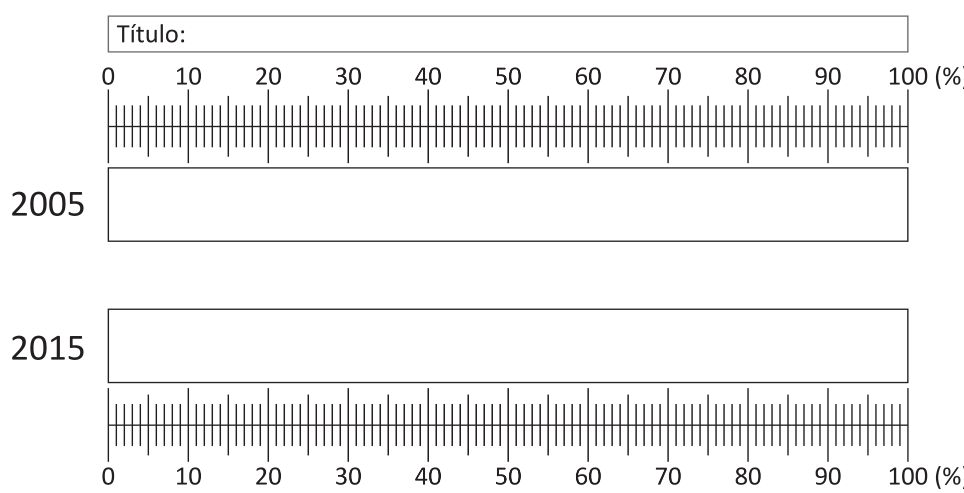
3. Las siguiente tabla presenta el número de personas en el departamento de Santa Ana, según su rango de edad, en los años 2005 y 2015.

Edades	2005	2015
0 – 19	259 278	220 443
20 – 39	202 899	182 631
40 – 59	94 723	113 041
60 – 79	44 174	54 557
Totales	601 074	570 672

a) ¿Qué porcentaje representa el número de personas en cada uno de los rangos de edad? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad)

Edades	2005(%)	2015(%)
0 – 19		
20 – 39		
40 – 59		
60 – 79		
Totales		

b) Construye una gráfica de faja para representar la información.



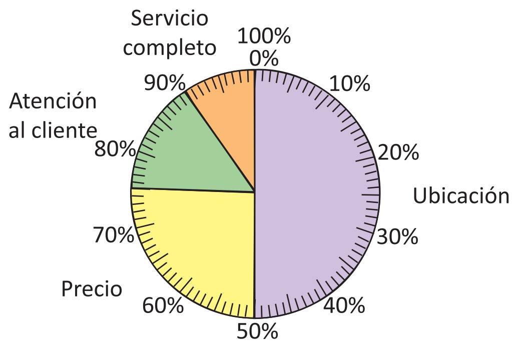
c) ¿Qué interpretación obtienes de la gráfica? Explica.

2.1 Lectura de una gráfica circular

P

En una gasolinera se pregunta a los clientes el motivo de su preferencia y se obtuvo la información representada en la siguiente gráfica:

Motivos de preferencia



El número de personas que eligieron un motivo por el que prefieren la gasolinera es proporcional al área del sector circular correspondiente a ese motivo.

a) ¿Cuál es el motivo por el que la mayoría de los clientes entrevistados prefieren esta gasolinera? ¿De cuánto es el porcentaje?

b) ¿Cuál es el motivo por el que menos prefieren los clientes esta gasolinera? ¿De cuánto es el porcentaje?

S

a) Por la ubicación, 50%

b) Por el servicio completo, 10%

Al igual que en la gráfica de faja, una categoría es cada una de las partes del gráfico (sectores circulares), en este ejemplo particular, cada categoría es un motivo que el cliente podía elegir cuando se le hizo la pregunta.

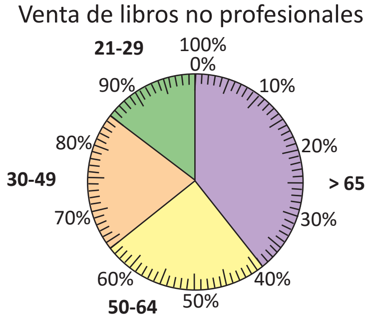
C

A la gráfica que representa el total con un círculo y que está dividida por radios, según la razón de cada categoría al total (porcentaje) se le llama **Gráfica circular**.

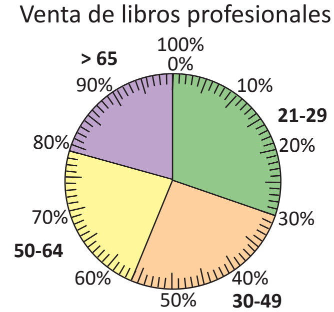
E

En una venta de libros, un día se preguntó a personas de distintas edades, ¿qué tipo de libro habían comprado? Estos se clasificaron como “libros profesionales” o “no profesionales”. La información obtenida se presenta en las siguientes gráficas circulares (las categorías son los rangos de edades de los entrevistados).

Venta de libros no profesionales



Venta de libros profesionales



a) ¿Qué rango de edad tienen las personas que más compraron libros no profesionales? ¿De cuánto es el porcentaje?

b) ¿Qué rango de edad tienen las personas que más compraron libros profesionales? ¿De cuánto es el porcentaje?

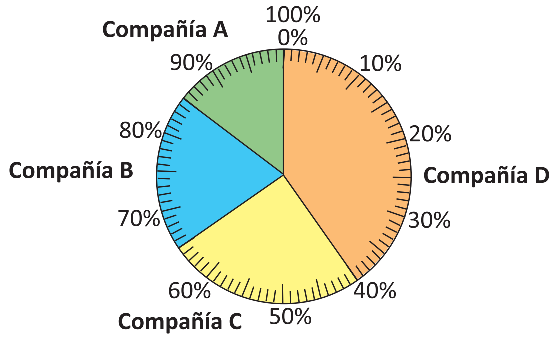
Solución.

a) mayor de 65 años, 39%

b) 21 - 29 años, 30%

1. En un centro comercial se pregunta a los usuarios de telefonía celular qué compañía utilizan. La información se presenta en la siguiente gráfica:

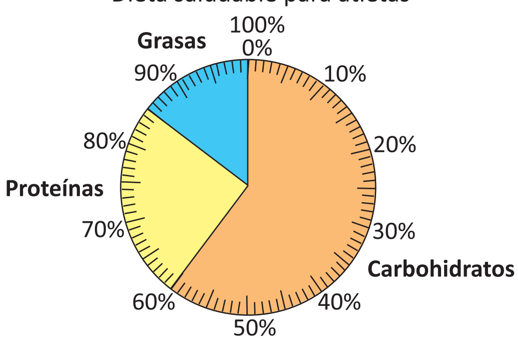
Compañías telefónicas



a) ¿Cuál es el porcentaje de las personas que utilizan la compañía B?
b) ¿Qué compañía es la menos utilizada? ¿Qué porcentaje tiene?
c) ¿Cuál es la compañía que tiene mayor demanda? ¿Qué porcentaje tiene?
d) Si el total de personas encuestadas fue 200, ¿qué cantidad de personas prefieren cada una de las compañías?

2. El porcentaje del consumo de carbohidratos, proteínas y grasas, depende del tipo de dieta que se hace, tal como se presenta en la siguiente gráfica:

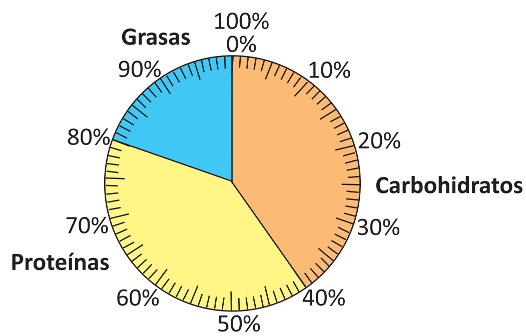
Dieta saludable para atletas



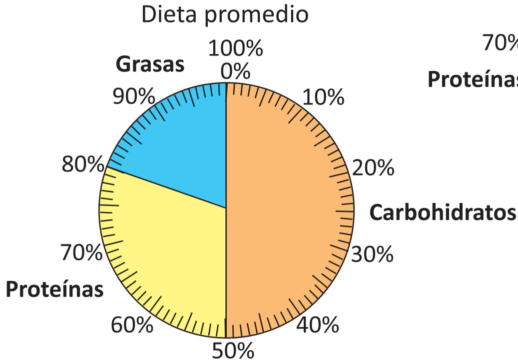
Se tiene conocimiento que el primer gráfico circular fue elaborado y utilizado por el ingeniero y economista escocés William Playfair que mostraba las proporciones del imperio turco localizado en Asia, Europa y África hacia el año 1786.

Playfair, W. (1801). *The statistical Breviary.*

Dieta saludable



Dieta promedio



a) ¿Cuál es el porcentaje de proteínas que debe consumir un atleta?
b) ¿Cuál es el porcentaje de grasa que consume una persona que tiene una dieta promedio?
c) Según tu alimentación, ¿cuál es el porcentaje de carbohidratos que consumes según tu tipo de dieta?

2.2 Construcción de una gráfica circular

P

La siguiente tabla muestra la cantidad de verduras disponibles en una tienda. Piensa cómo representar los datos.

Verdura	Cantidad	%	Grados
Tomate	90	45	
Cebolla	30	15	
Pepino	60	30	
Otras	20	10	
Total	200	100	

a) Dado que el ángulo central del círculo entero (100%) es 360°, ¿cuál es la medida del ángulo para 1%?

b) ¿Cuánto debe medir el ángulo para 45%, 15%, 30% y 10%?

S

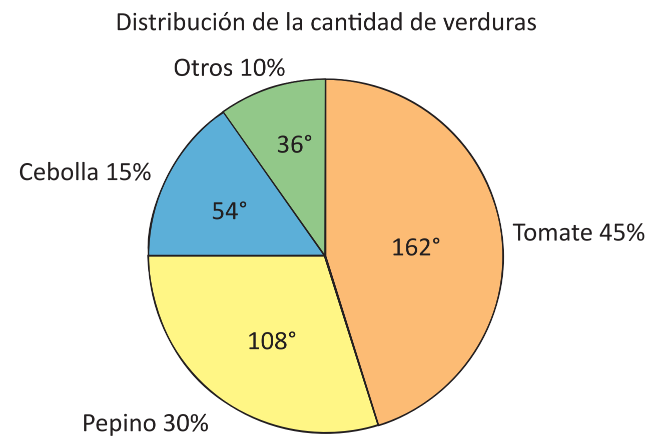
a) $360 \div 100 = 3.6$

b) Multiplica 3.6 por el porcentaje:

$3.6 \times 45 = 162$ $3.6 \times 15 = 54$ $3.6 \times 30 = 108$ $3.6 \times 10 = 36$

Por lo que los grados según categoría quedan distribuidos de la siguiente manera:
Tomates: 162°, cebolla: 54°, pepino: 108°, otras: 36°.

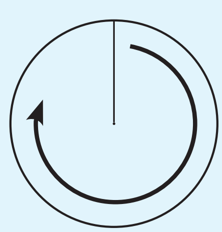
Verdura	Cantidad	%	Grados
Tomate	90	45	162°
Cebolla	30	15	54°
Pepino	60	30	108°
Otras	20	10	36°
Total	200	100	360°



C

El procedimiento para representar la información en una gráfica circular es el siguiente:

1. Encontrar el porcentaje de cada categoría.
2. Encontrar el ángulo central de cada categoría (3.6 × porcentaje).
3. Colocar las categorías, desde la mayor a la menor, en sentido horario y teniendo en cuenta que cuando aparezca la categoría "Otros" siempre estará al final.

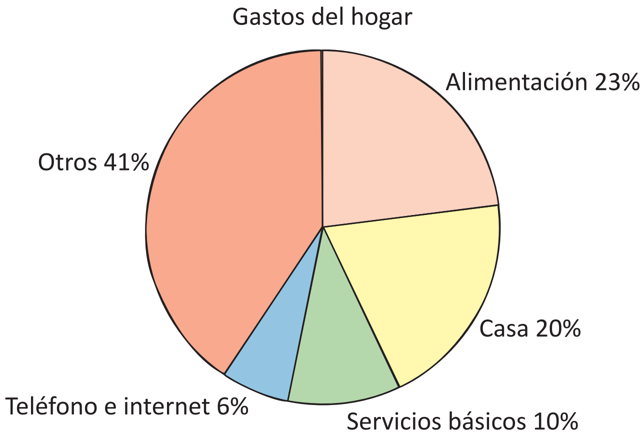


De mayor a menor

E

Suponiendo que la distribución del ingreso mensual de una familia es constante (no cambia de mes a mes), en la gráfica circular se muestra la distribución de los gastos del hogar:

a) Si el ingreso mensual de dinero de una familia es de $450 y se distribuye como se presenta en la gráfica, ¿cuánto dinero se destina para cada tipo de gasto?
b) Si se destinaran $100 para el pago de la casa, ¿de cuánto sería el ingreso mensual de dinero?
c) ¿Cuántos grados corresponden al gasto de alimentación?



Solución.

a) Teléfono e internet:
$(450 \div 100) \times 6 = 27$
R. $27

Con igual procedimiento se calcula que
Servicios básicos: $45
Casa: $90
Alimentación: $103.5
Otros: $184.5

b) El ingreso mensual de dinero sería:

$(100 \div 20) \times 100 = 500$
R. $500

c) $(3.6 \times 23) = 82.8$

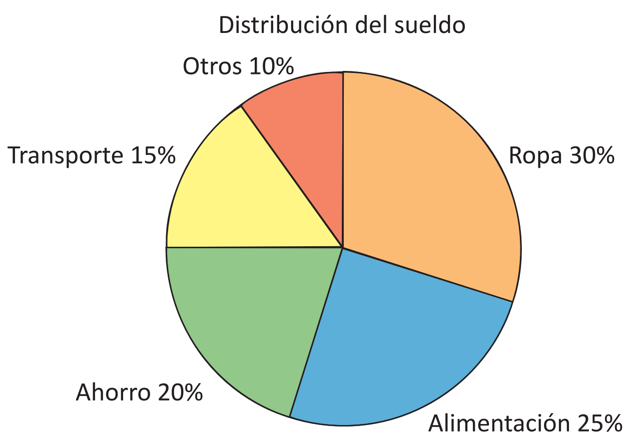
Se aproxima hasta las cifras de las unidades por lo que son 83°.
R. 83°

1. Retomando el problema de la clase anterior, en tu cuaderno, haz la tabla y dibuja la gráfica:

Motivos de preferencia	Cantidad de personas	%	Grados
Servicio completo	50		
Atención al cliente	75		
Precio	125		
Ubicación	250		
Total	500		

2. Si una persona distribuye su sueldo en el mes como se presenta en la siguiente gráfica, responde:

a) Su sueldo mensual es de $250, ¿cuánto dinero se destina para cada área?
b) Si se quiere destinar $50 para transporte manteniendo los porcentajes, ¿de cuánto debería ser el sueldo mensual?
c) ¿Cuántos grados corresponden al sector circular que representa al gasto de ropa?

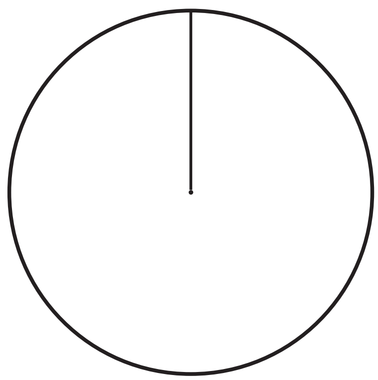


2.3 Practica lo aprendido

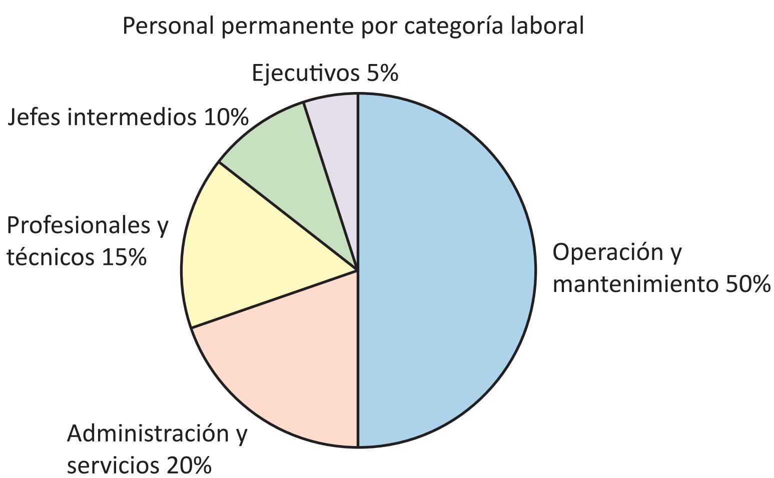
1. La siguiente tabla presenta el número de empleados del personal permanente según tiempo de servicio (en años) de una institución:

Tiempo de servicio (años)	Número de empleados	%	Grados
< 5	1281		
5 – 10	1108		
10 – 15	296		
15 – 20	273		
≥ 20	1254		
Total	4212		

a) Calcula el porcentaje y grados correspondientes a cada categoría (aproxima hasta las cifras de las unidades).
b) Con la información de la tabla, construye una gráfica circular.



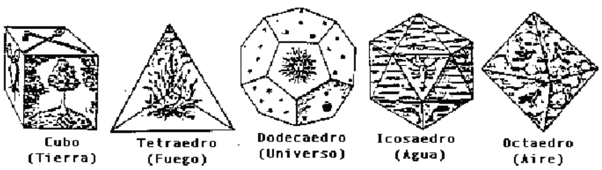
2. En una institución, el personal permanente por categoría laboral, se distribuye tal como se presenta en la siguiente gráfica circular:



a) Si el número de empleados es de 4 200, ¿cuántos empleados hay en cada categoría laboral?
b) Si se quieren 30 ejecutivos manteniendo los porcentajes, ¿de cuánto debería ser el número de empleados de la institución?
c) ¿Cuántos grados corresponden al sector circular que representa a los **profesionales y técnicos**?

Unidad 8

Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos



Concepción platónica de los poliedros como regidores del Universo.

El conocimiento y uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos, algunos registros suponen el trabajo con los poliedros regulares desde el periodo neolítico (aproximadamente 1500 a. C.) en el cual se identificaron poliedros regulares labrados en piedra, estos cinco poliedros fueron considerados por los pitagóricos como perfectos y aunque no demostraron que eran los únicos, sí sabían que solo existían esos; con el aporte de Platón y la justificación de este resultado en el libro *Los elementos* de Euclides es que logra quedar establecido.

Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran las pirámides, cilindros, cubos, prismas, entre otros.


Gran Pirámide de Giza, construida por los antiguos egipcios.

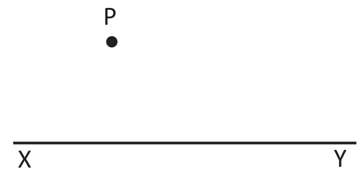
En esta unidad aprenderás sobre figuras planas, el estudio de los triángulos y la construcción de algunas rectas notables con regla y compás; el estudio de la circunferencia, además de lo correspondiente a los poliedros regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos. Se hará un análisis de las rectas y planos en el espacio para establecer los patrones y las proyecciones de los cuerpos geométricos.

1.1 Puntos y rectas

P

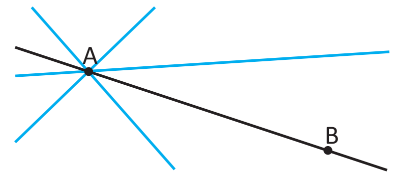
1. En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
   a) Traza líneas rectas que pasen solo por A.
   b) Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.

2. En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
   a) Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

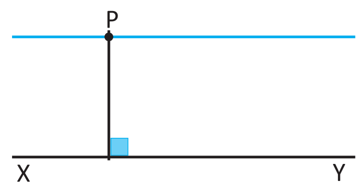


S

1. a) Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.

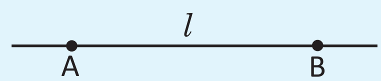


2. a) De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.

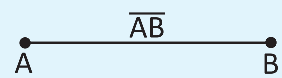


C

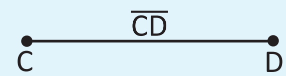
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.



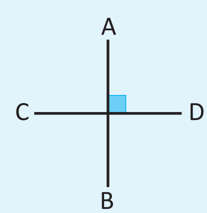
b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".



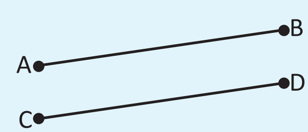
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo ($\overline{\quad}$) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.



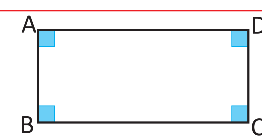
d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".



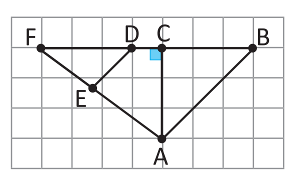
e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".



1. Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.

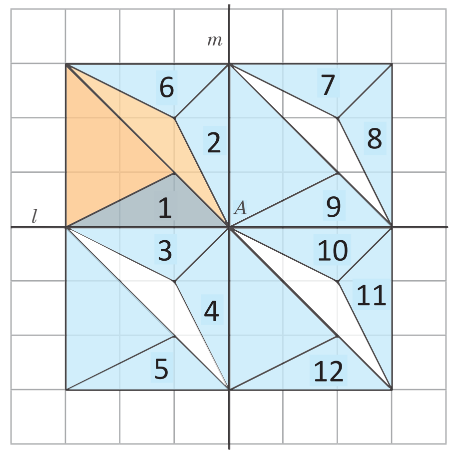


1.2 Patrones de figuras

P

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

a) ¿Con cuál de las figuras se sobrepondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por la recta l, ¿sobre cuál figura se sobrepondrá la figura 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?



S

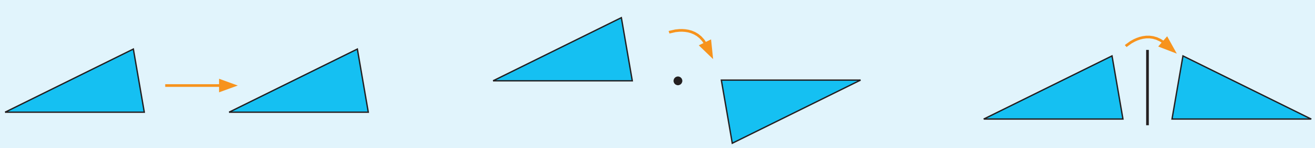
a) Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede sobreponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
b) Si se dobla la imagen por la recta l, la figura 1 se sobrepondrá sobre la figura 3.
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90°, y el giro es en sentido antihorario, se sobrepondrá sobre la figura 4.

C

El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

Traslación **Rotación** **Simetría**



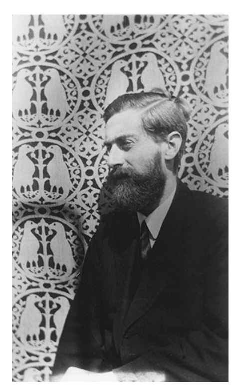
E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

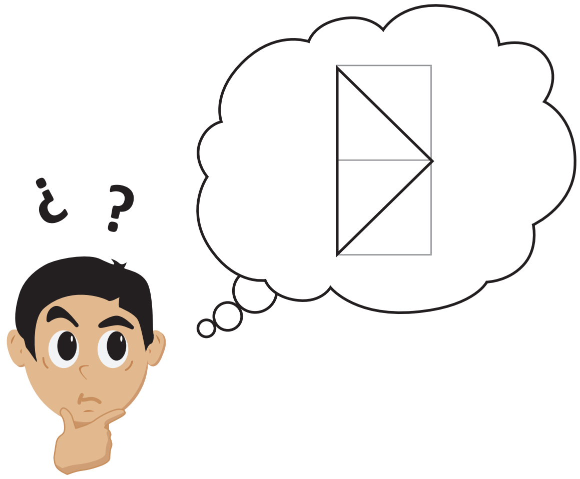
Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.

Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com

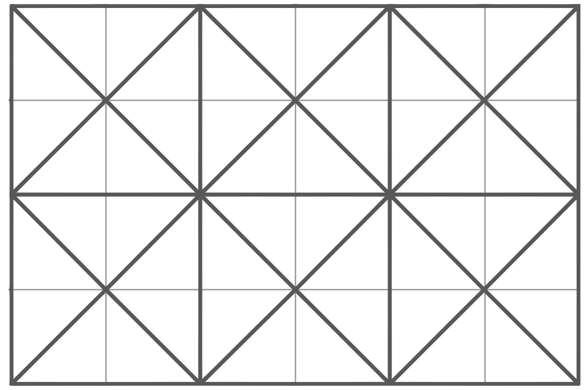


Retrato de Esher en Roma. De M. C. Escher.

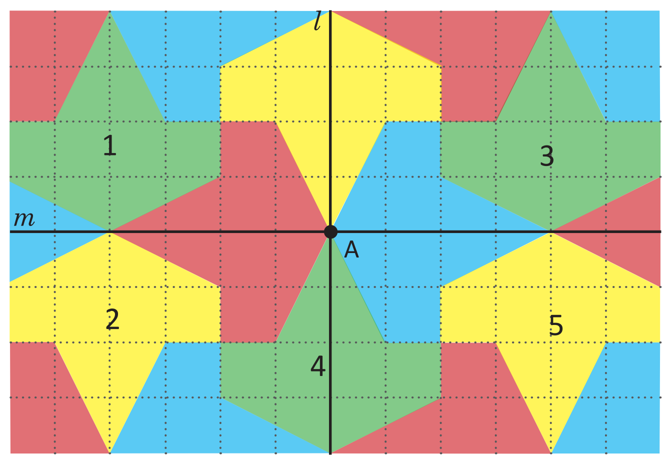
Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.



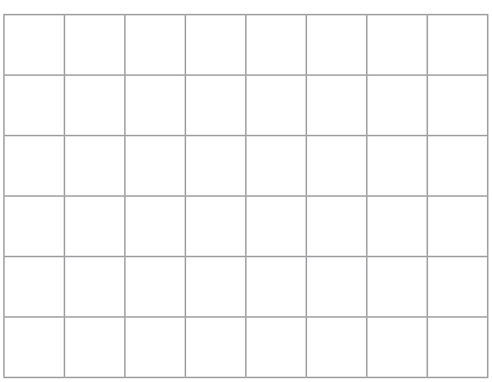
Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.

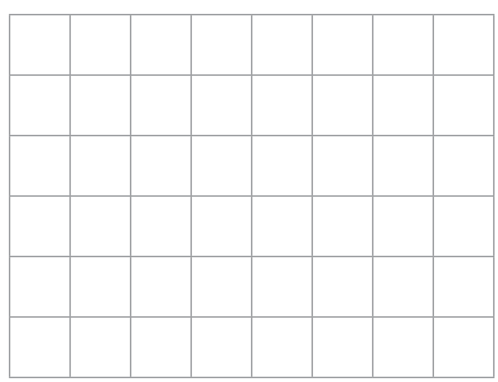


1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.
   Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A.
   a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5?
   b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación?
   c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l?



2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.

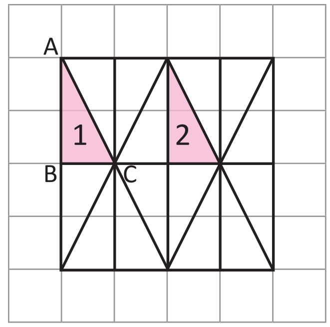




¡Compara con tus compañeros!

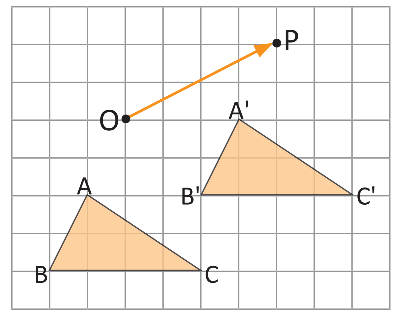
1.3 Traslación

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C.
   b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?

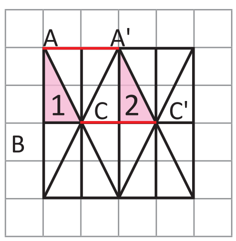


Para denotar un triángulo con vértices A, B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC, y se lee "el triángulo ABC".

2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP. Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
   a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
   b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



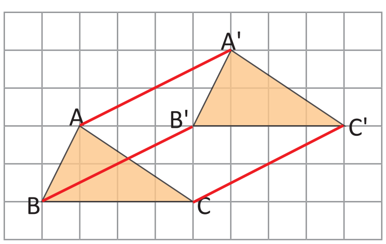
1. a) y b)



c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además AA'= CC'.

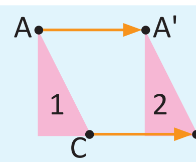
d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

2. a)

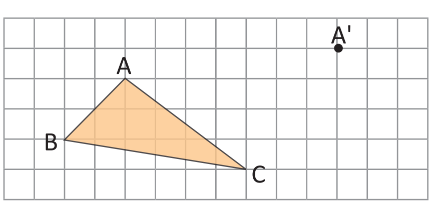


b) La relación entre los segmentos se expresa así:
$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y AA' = BB' = CC'.

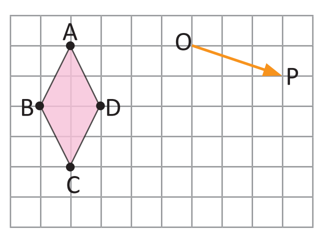
En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.



1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC.



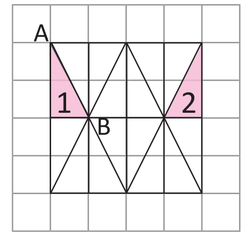
2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP.



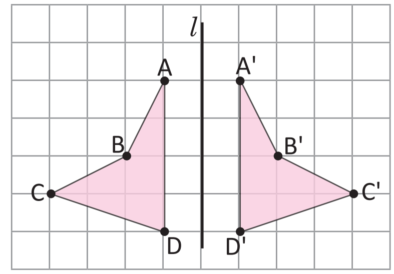
1.4 Simetría

P

1. Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
   b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

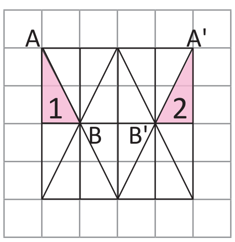


2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
   a) Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
   b) Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l.
   c) Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l.
   d) Expresa simbólicamente la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.



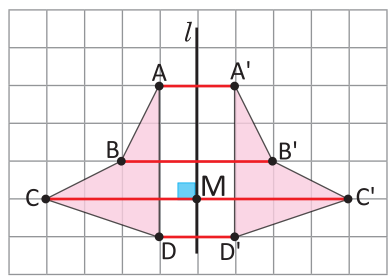
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



b) La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo (⊥). Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.

d) La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como: CM = C'M.

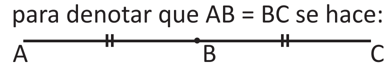
C

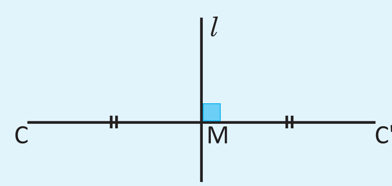
El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.

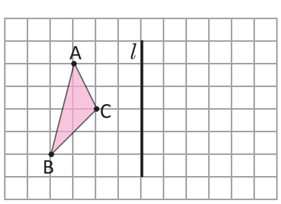
En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

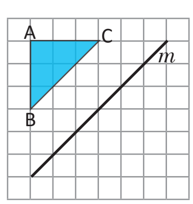
En geometría se utilizan símbolos como ıı para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:





Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.





Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

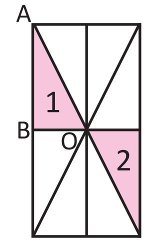
1.5 Rotación

P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.

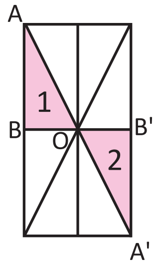
a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?



S

a)

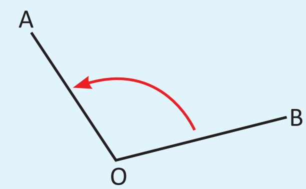


b) El triángulo 1 se puede sobreponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180°.

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

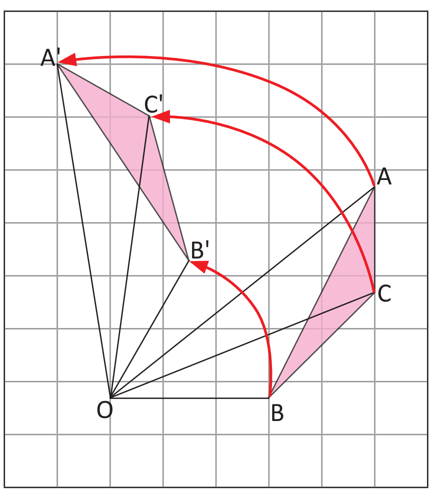


E

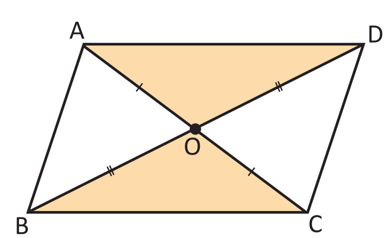
Tomando como centro de rotación el punto O, se ha rotado el ΔABC por un ángulo de 60° para llegar a ser el ΔA'B'C'.

a) ¿Qué relación hay entre $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$?

b) ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A'?



Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180°, se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el ΔAOD, respecto del punto O, este se puede sobreponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.



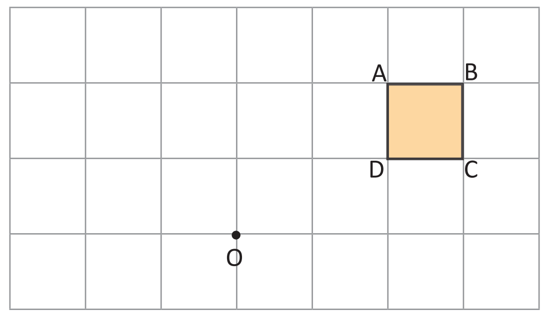
Solución.

a) OA = OA'

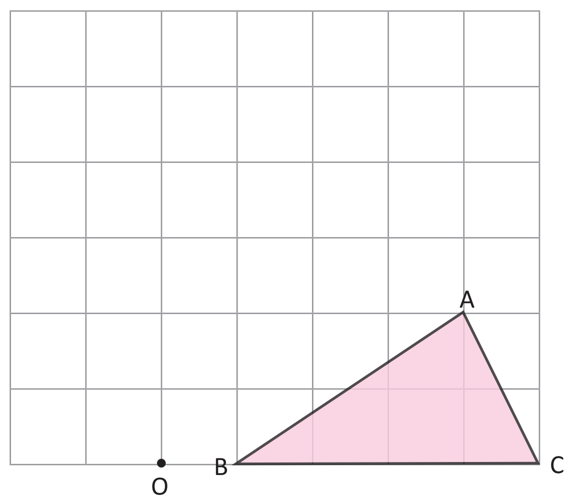
b) Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O.

Unidad 8

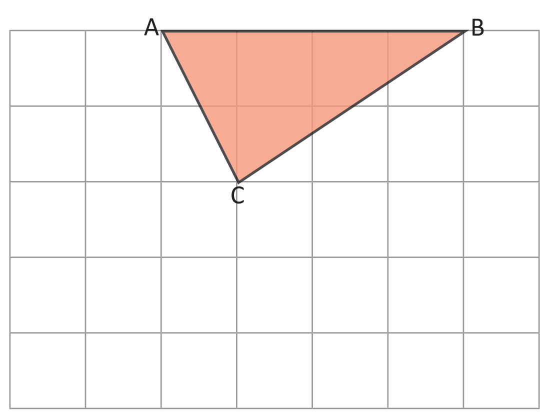
1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°.



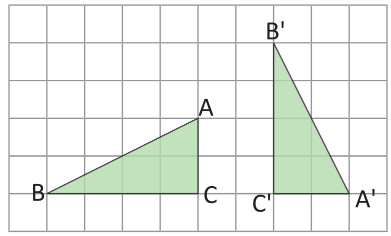
3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C:



1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

P

¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?



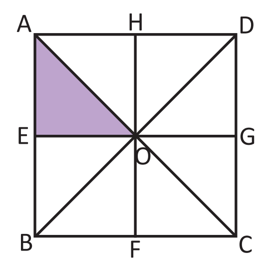
S

Un ejemplo de solución es, primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

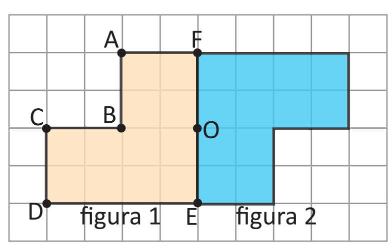
C

Como en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

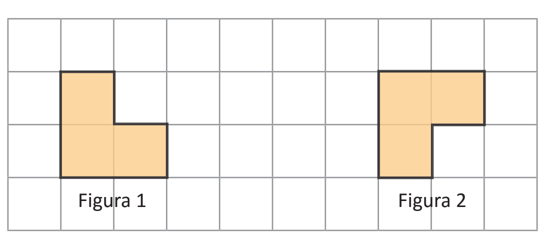
1. En la siguiente figura:
   a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?
   b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?
   c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?



2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.
   a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1.
   b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?

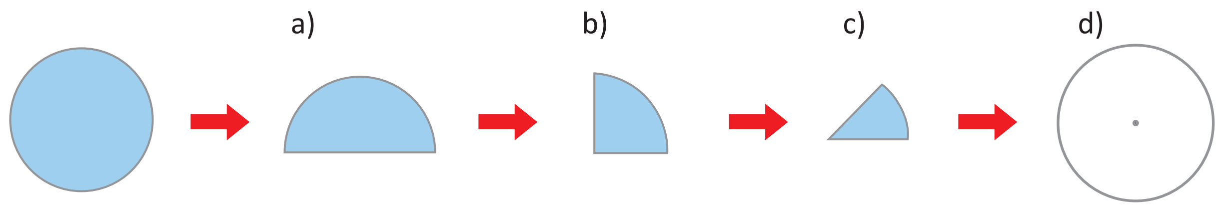


2.1 Características y elementos del círculo

P

Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.

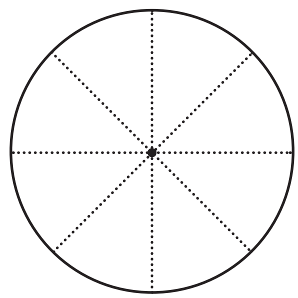
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S

1.



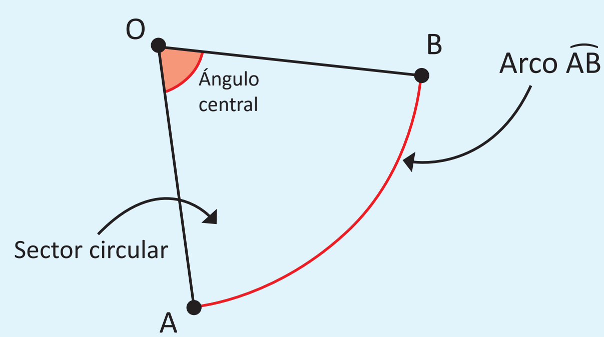
2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

C

Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\widehat{AB}$.

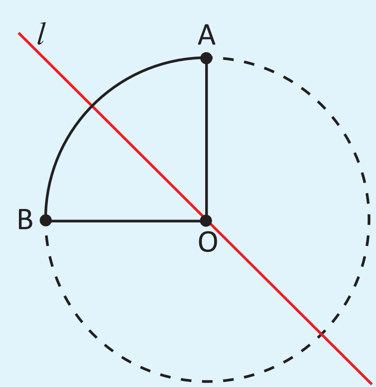
La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular.**

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**

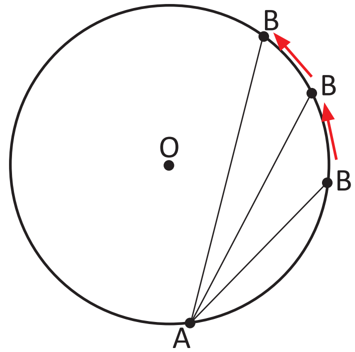


Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\widehat{AB}$.



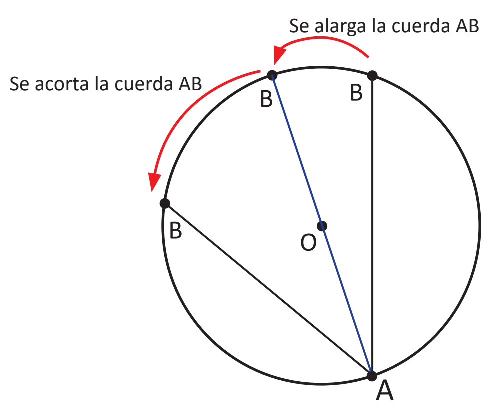
En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda AB, si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará $\overline{AB}$ su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



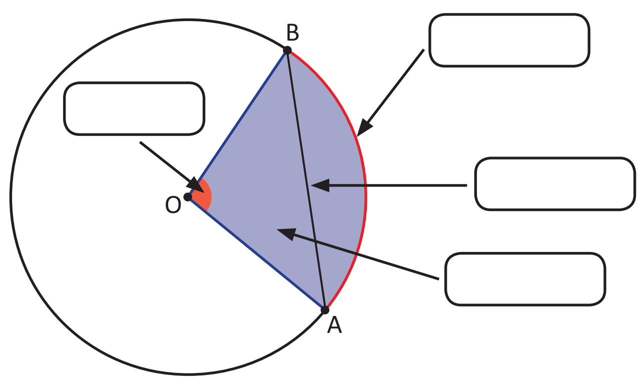
Elementos de un círculo
Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.
Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

$\overline{AB}$ alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O, es decir, cuando $\overline{AB}$ sea el diámetro de la circunferencia.



1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.



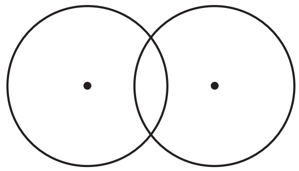
2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de
   a) 45°   b) 180°   c) 240°

2.2 Características de círculos que se intersectan

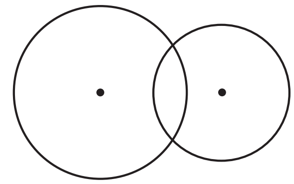
P

Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

a) Cuando los radios son iguales

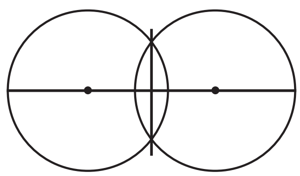


b) Cuando los radios son diferentes

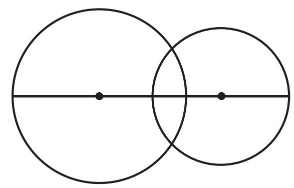


S

a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.



b) La recta que pasa por los centros.

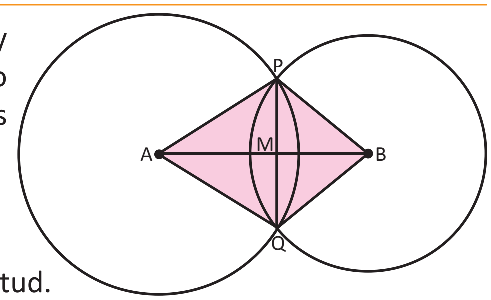


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

E

En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



Con respecto al cuadrilátero AQBP:

a) Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.

b) ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el $\sphericalangle PAB$?

c) ¿Qué relación hay entre $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$?

Solución.

Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:

a) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, $\overline{PM}$ y $\overline{QM}$

b) $\sphericalangle QAB$

c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.

1. En el problema anterior:

a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB?

b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP?

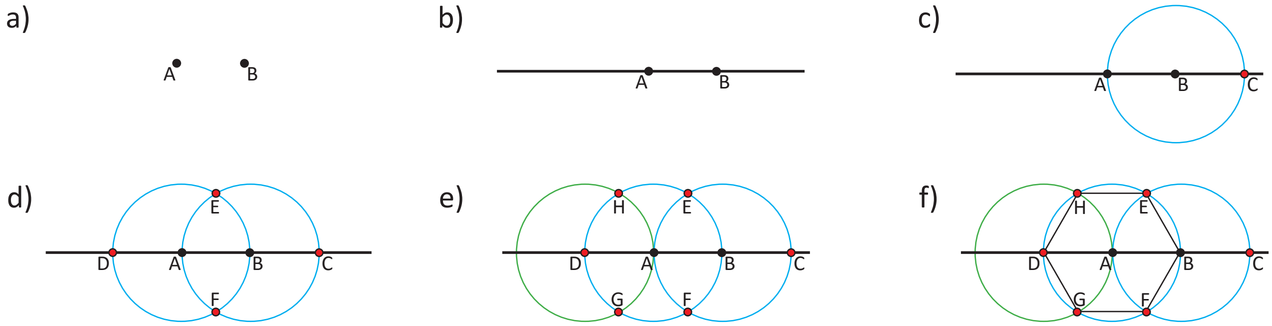
2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.

Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

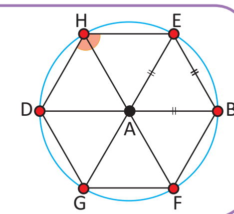
P

Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.



S

Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono.



C

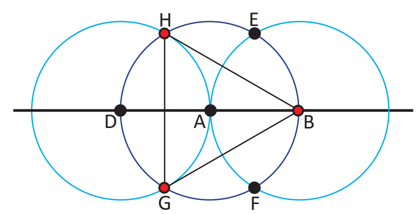
Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

E

Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

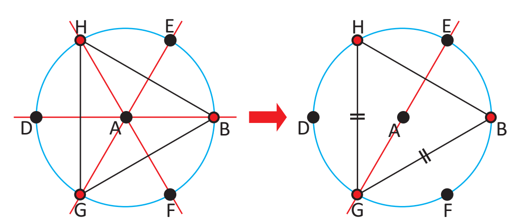
a) Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.

b) A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



Solución.

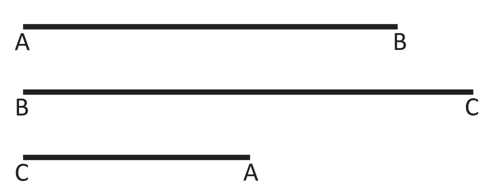
Como ∢GAH = 120° = ∢GAB (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el ΔGBH 120° respecto al punto A.



Cumpliéndose entonces, GH = GB = HB. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además ∢HGB = ∢GBH = ∢BHG = 60°.

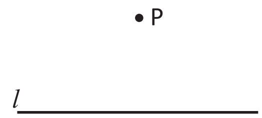
Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:



2.4 Rectas perpendiculares

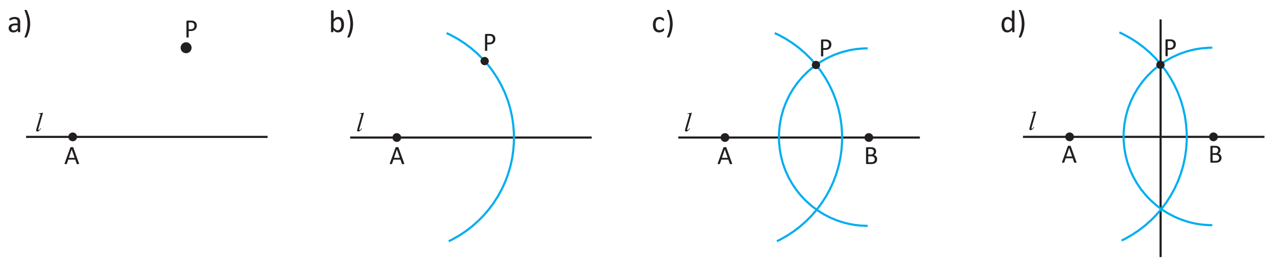
P

En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por el punto P.



S

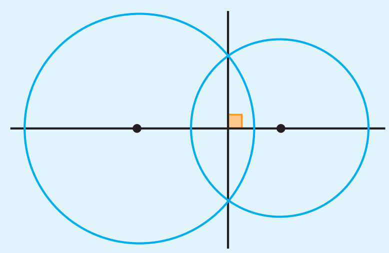
Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:



C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

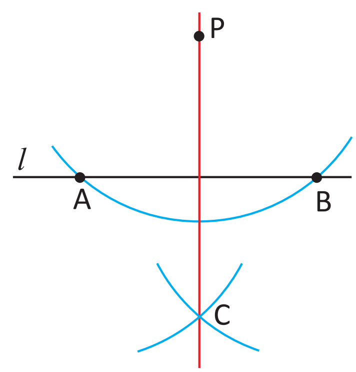
Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



E

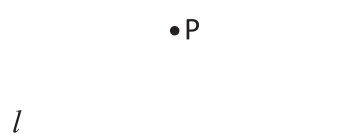
Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.

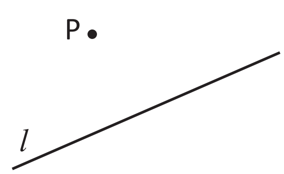


1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta l. Copia los segmentos en tu cuaderno.

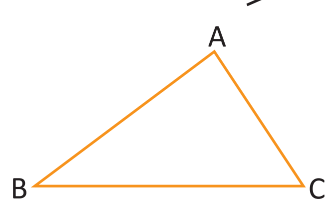
   a)



   b)



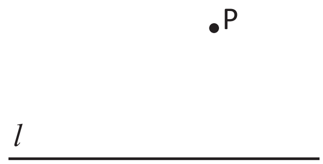
2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{AB}$.



2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

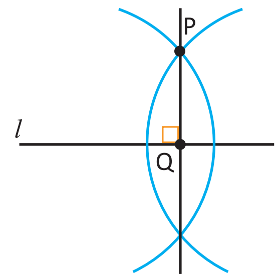
P

Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l.



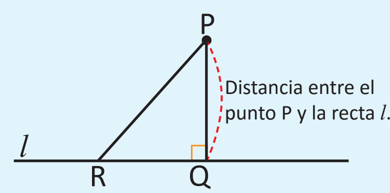
S

Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

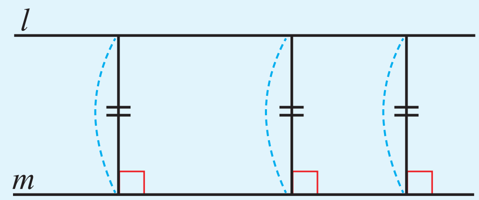


C

Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.

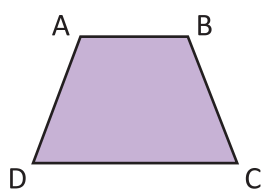


Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



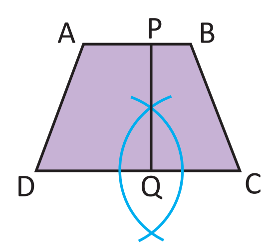
E

Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

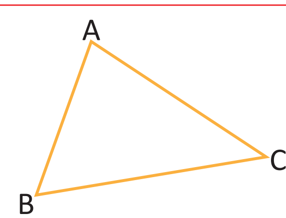


Solución.

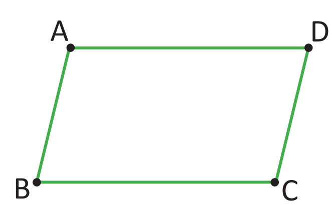
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



1. En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



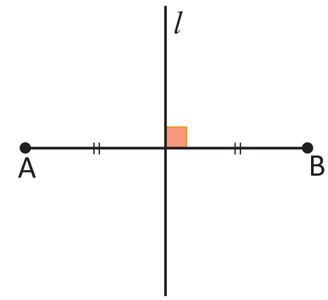
2. En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



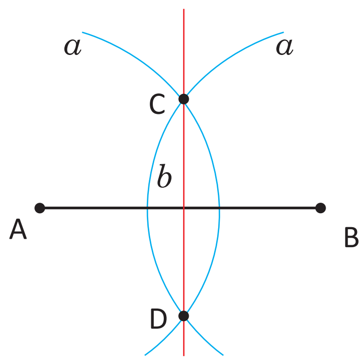
2.6 Mediatriz de un segmento

P

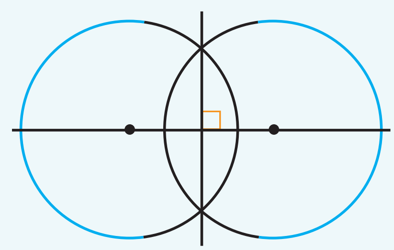
La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de $\overline{AB}$ es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.



S

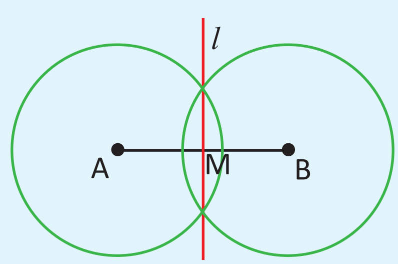
Para dibujar la mediatriz de $\overline{AB}$, se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C

Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

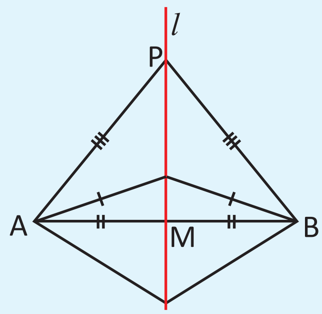
a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.



Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.

Por tanto, PA = PB.

Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.

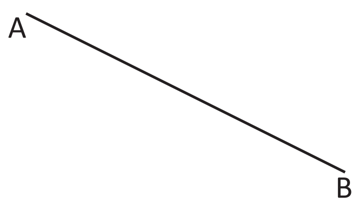


El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".

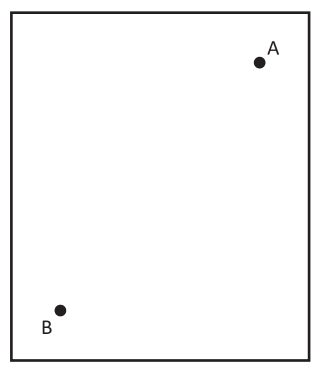
1. Dibuja la mediatriz del segmento AB.

a)

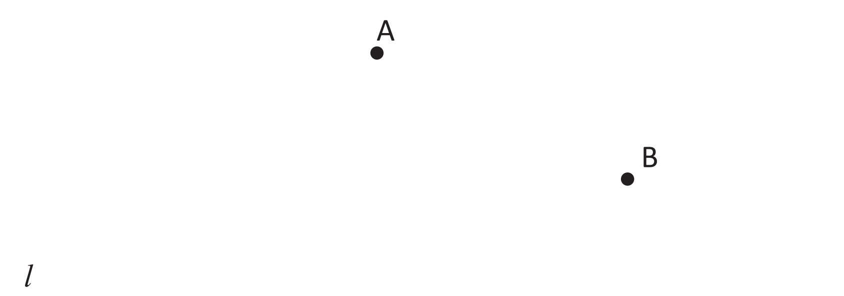
b)



En una página escribe los puntos A y B, traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B.

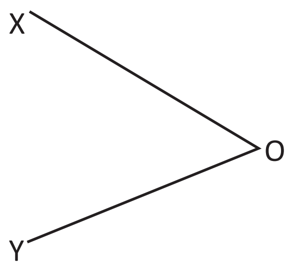


Unidad 8

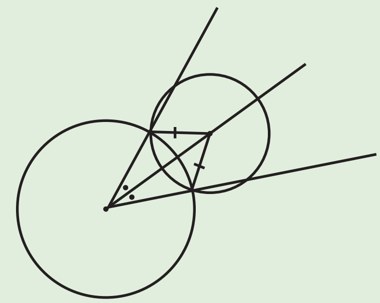
2.7 Bisectriz de un ángulo

P

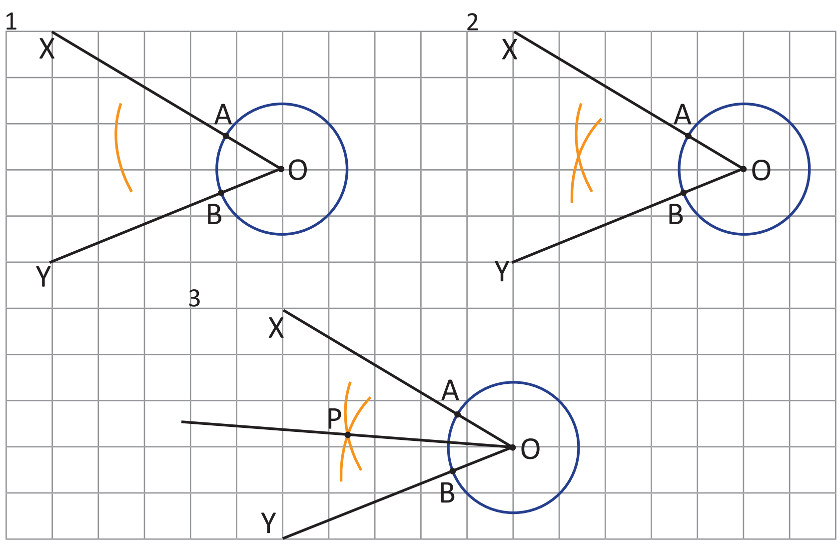
Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



S

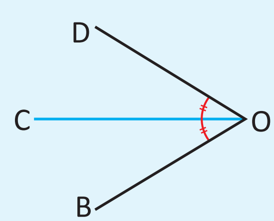


El compás se utiliza para trasladar distancias.

Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.
Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.
Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.
Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

C

La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.

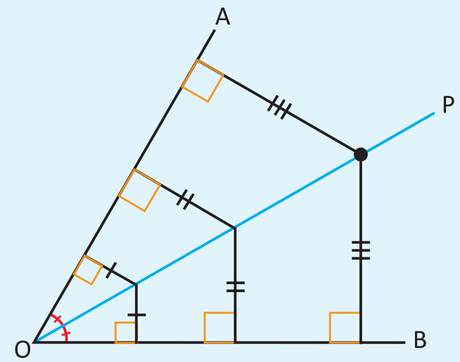


Por tanto, ∢DOC = ∢COB = $\frac{1}{2}$ ∢DOB.

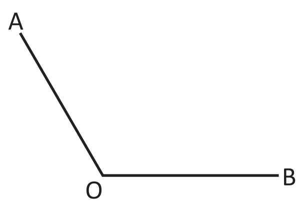
Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:
1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirecta OP.

Dado que la bisectriz de ∢AOB es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

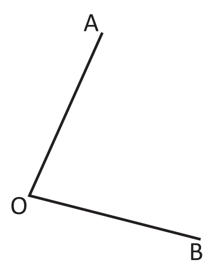
En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:



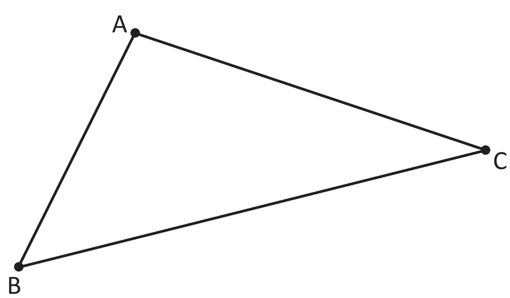
1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.
   a)



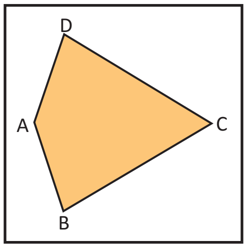
   b)



2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC.



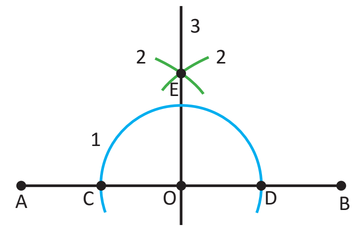
3. En la figura:
   a) Dobla de tal forma que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero se sobrepongan.
   b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.
   c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?



Unidad 8

2.8 Tangente a una circunferencia

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.

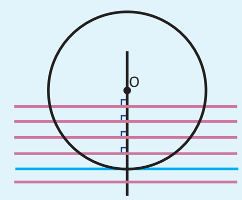


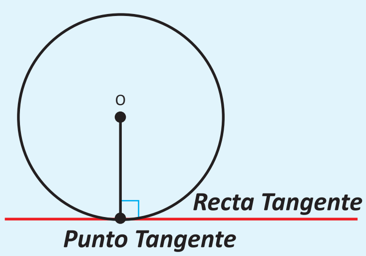
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE.
b) Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a $\overline{AB}$.

a) Se observan tres pasos:
1. Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D.
2. Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones como E.
3. Trazar la recta que pasa por EO.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, ∢AOE = 90°.

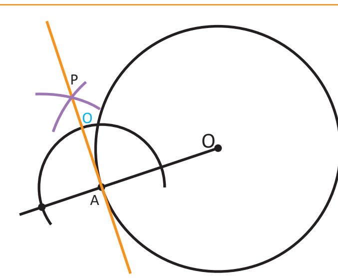
Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.





En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

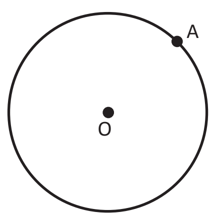
En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.



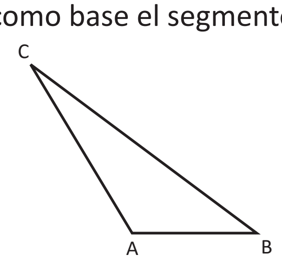
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
b) Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.

Solución.
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.



2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB.

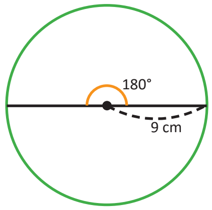


2.9 Longitud de arco de un sector circular

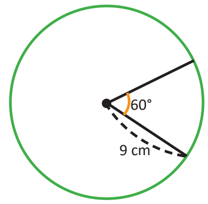
P

La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma: $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180°.



2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60°.



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.

Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$$l : 180 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 180$$
$$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{180}}}{\underset{2}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$$
$$l = 9\pi$$

2.

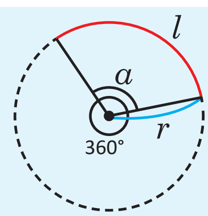
Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

$$l : 60 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 60$$
$$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$$
$$l = 3\pi$$

C

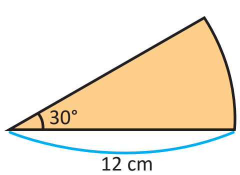
Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



E

Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.



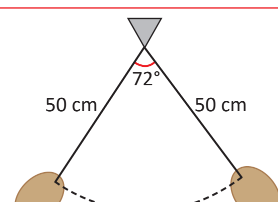
Solución.

En el problema: $a = 30°$ y $r = 12$.

La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.

2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo?



2.10 Área de un sector circular

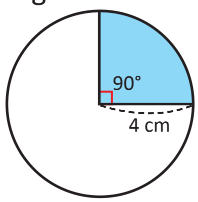
P

El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

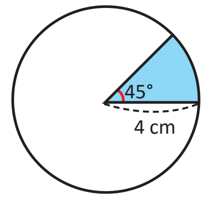
$$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90°.



2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45°.



El área del círculo se calcula como: $\mathbf{A} = \pi \times r^2$. Donde r es el radio del círculo y π **= 3.14159...**

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$$S : 90 = 16\pi : 360$$
$$360S = 16\pi \times 90$$
$$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$$
$$S = 16\pi \times \frac{\cancel{90}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,4}}$$
$$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$$
$$S = 4\pi$$

2.

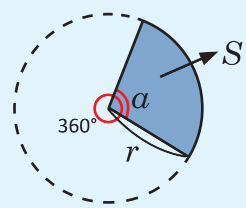
Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$$S : 45 = 16\pi : 360$$
$$360S = 16\pi \times 45$$
$$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$$
$$S = 16\pi \times \frac{\cancel{45}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,8}}$$
$$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$$
$$S = 2\pi$$

C

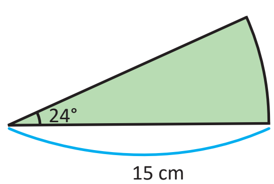
Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



E

Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



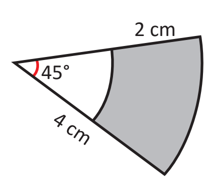
Solución.

Datos del problema: $a = 24°$ y $r = 15$

El área del sector circular es: $S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\,\pi$

1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura:



2.11 Incentro de un triángulo

En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 1

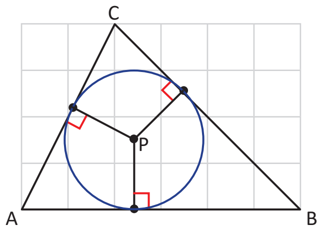
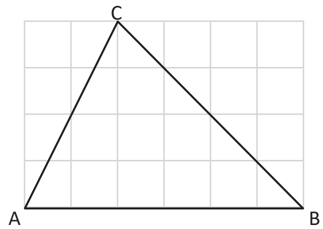


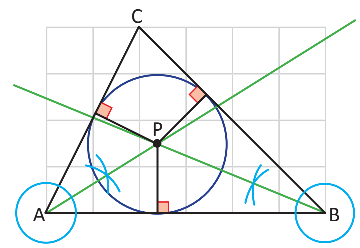
Imagen 2



Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

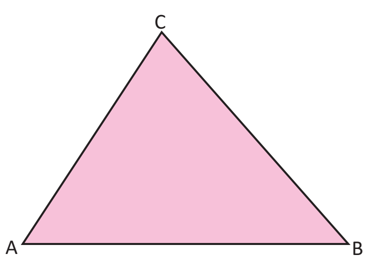
Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

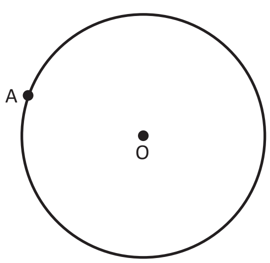
Este punto P cumple que está a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢ABC, también cumple estar a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢CAB. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

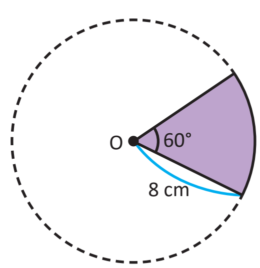
1. En el ΔABC, considerando AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
   a) El punto A hacia el segmento $\overline{BC}$.
   b) El punto B hacia el segmento $\overline{AC}$.
   c) El punto C hacia el segmento $\overline{AB}$.
   d) Determina en incentro de ΔABC.





2. Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

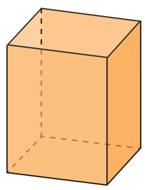
3. Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60°:
   a) Calcula la longitud de su arco.
   b) Calcula el área del sector circular.

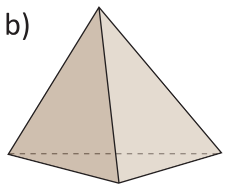


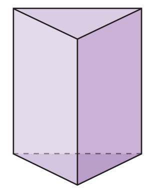
Unidad 8

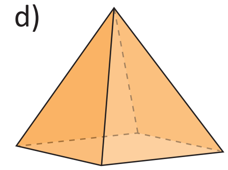
3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

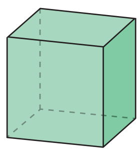
En los cuerpos geométricos se entiende como **cara** tanto las caras laterales como las bases. En las figuras del literal a) hasta el literal h) se observan algunos cuerpos geométricos.

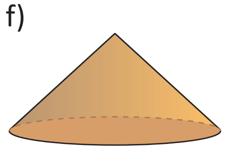
a)


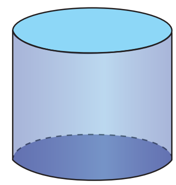
b)


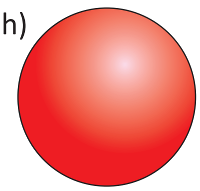
c)


d)


e)


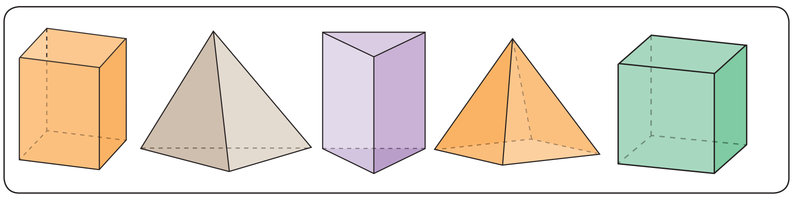
f)


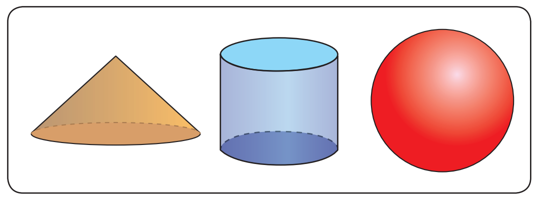
g)


h)


Clasifica los cuerpos geométricos según las similitudes de sus caras.

Se hace la siguiente clasificación de las figuras desde a) hasta h).

1.


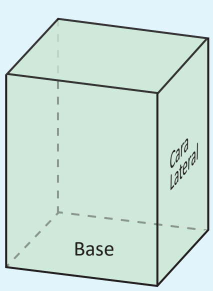
2.


Las figuras de a) hasta d) del grupo 1 son llamadas **poliedros**, la característica de estos cuerpos es que sus caras son figuras planas, por lo general polígonos, como rectángulos o triángulos.

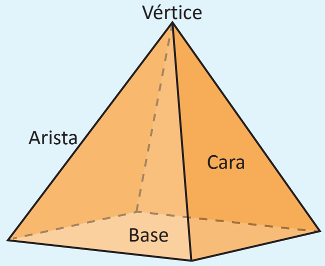
La palabra **poliedro** viene de las raíces griegas: πολύς (polys), "muchas" y de έδρα (edra), "base", "caras".

Dentro de estas, las figuras como a) y c) cuyas caras laterales son rectángulos, son llamadas **prismas**. Las figuras como b) y d), cuyas caras laterales son triángulos, reciben el nombre especial de **pirámides**. Si además, el prisma tiene todos sus lados iguales, se le llama **cubo**.

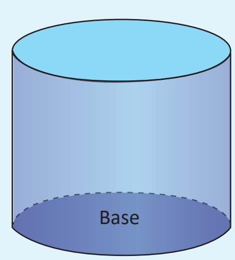
Las figuras desde f) hasta h) cuyas caras laterales son curvas, reciben el nombre de **cuerpos redondos**. En las imágenes de abajo se pueden observar los elementos de algunos cuerpos geométricos, a) es un prisma cuadrangular, b) es una pirámide de base rectangular, c) es un cilindro y d) es un cono.

a)


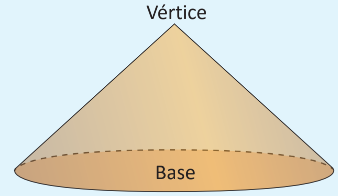
Prisma rectangular

b)


Pirámide rectangular

c)


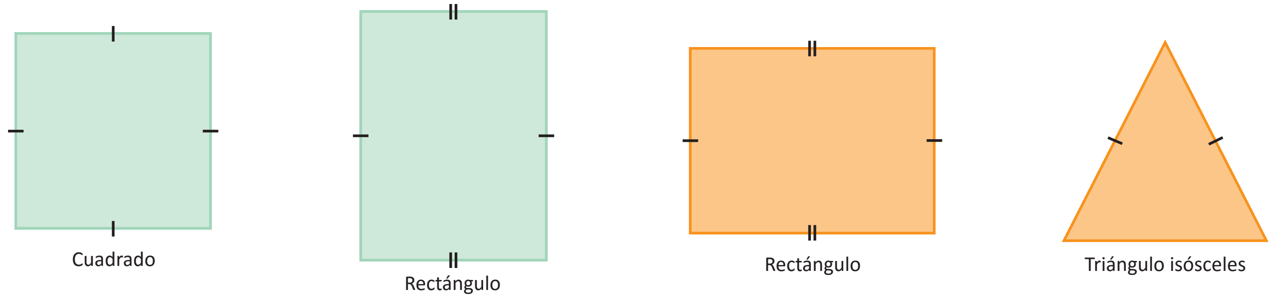
Cilindro

d)


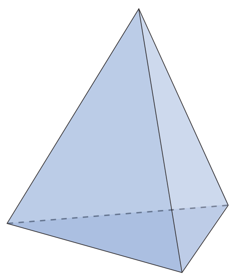
Cono

De la imagen anterior, se pueden obtener las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide, se resume a continuación.

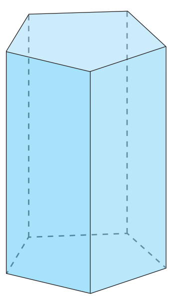
Base del prisma mostrado en el literal a).	Cara lateral del prisma mostrado en el literal a).	Base de la pirámide mostrada en el literal b).	Cara lateral de la pirámide mostrada en el literal b).



1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide.

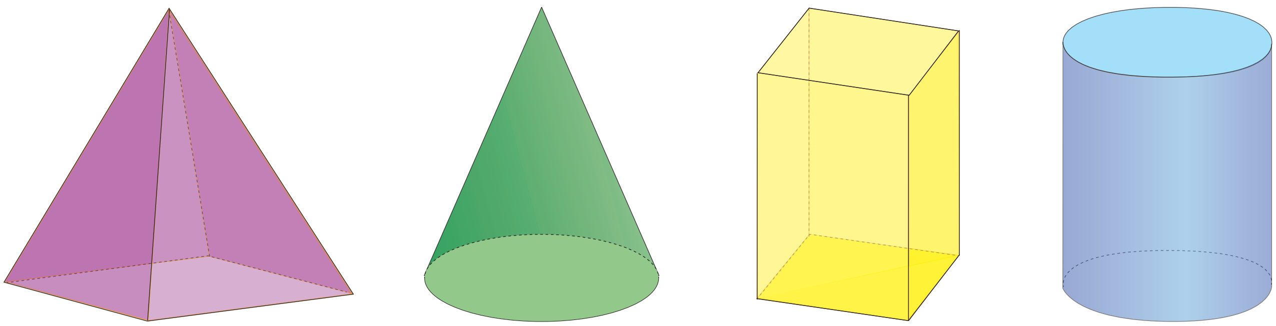


Base de la pirámide	Cara lateral de la pirámide



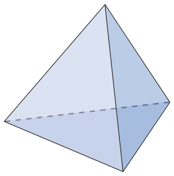
Base del prisma	Cara lateral del prisma

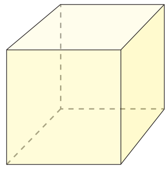
2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:
   a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono.
   b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro.

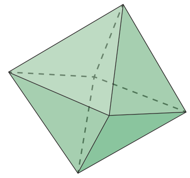


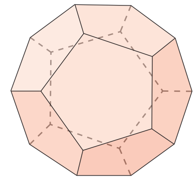
3.2 Características de poliedros regulares

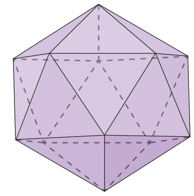
Observa los siguientes poliedros. Luego responde.


Tetraedro


Cubo


Octaedro

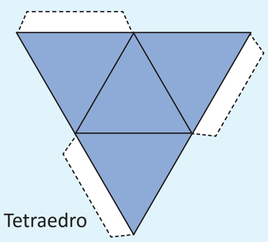

Dodecaedro

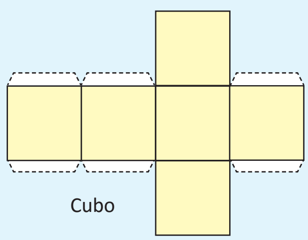

Icosaedro

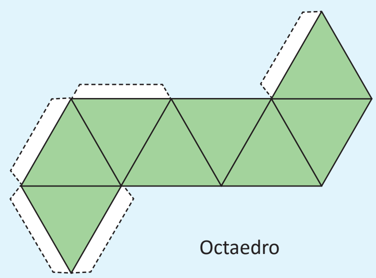
a) ¿Qué figuras forman las caras de la superficie de cada poliedro?
b) ¿Cuántas caras tiene cada poliedro?
c) ¿Qué característica es común en todos los poliedros?

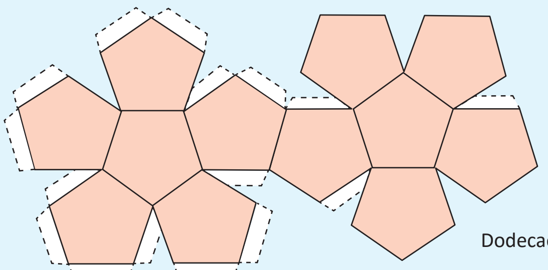
	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

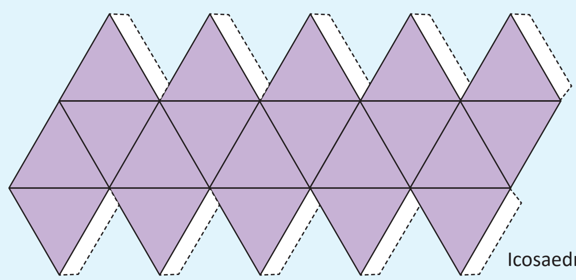
Un **poliedro regular** es el cuerpo geométrico en el cual todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama plano desarrollado de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico. Ejemplo:


Tetraedro


Cubo


Octaedro


Dodecaedro


Icosaedro

1. Completa la siguiente tabla:

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	Triángulos equiláteros	Cuadrados			
Número de caras			8		
Número de vértices	4				12

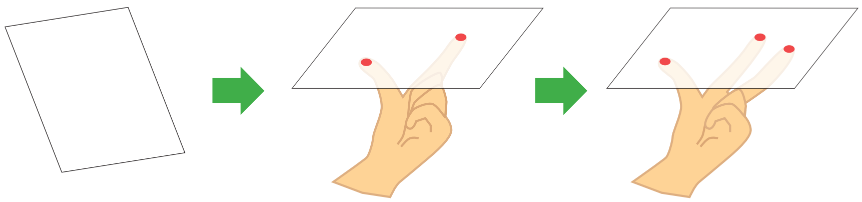
2. Construye polígonos regulares.

3.3 Relación de posición entre rectas y planos

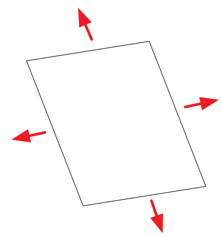
P

Toma una hoja de papel, ¿cómo se puede sostener una hoja de papel de forma estable, sin que haya un desbalance?

a) Intenta sostenerla utilizando únicamente dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál de las formas la hoja de papel es más estable?



Se puede tomar la idea de un plano como una hoja de papel, la cual se extiende indefinidamente, hacia los lados.



S

a) Si se toma con dos dedos la hoja de papel, queda siempre en desbalance.
b) Sin embargo, si se toma con tres dedos la hoja de papel queda firme, sin moverse.
c) Por tanto, una hoja de papel queda perfectamente sostenida utilizando tres dedos.

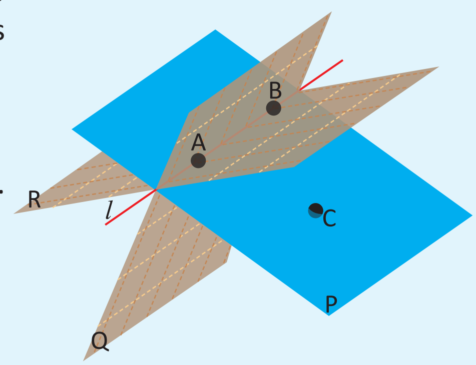
En la imagen se puede observar que la tapa del piano también está sostenida de forma estable por la base con forma de recta y un punto de soporte.

También se puede observar que el piano se mantiene estable con tres puntos de soporte.

C

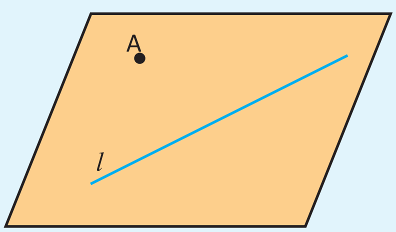
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

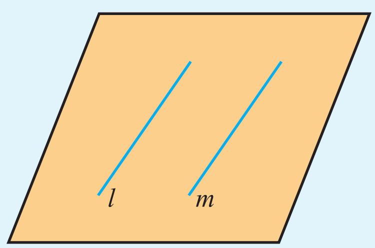


También, un plano queda determinado por:

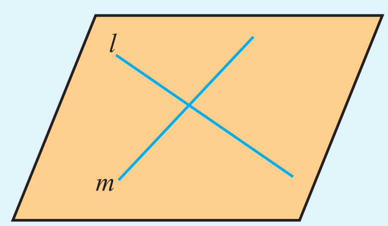
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



b) Dos rectas paralelas.



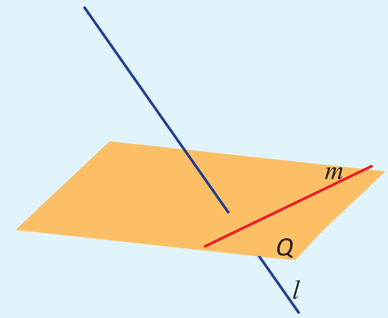
c) Dos rectas secantes que se cortan.



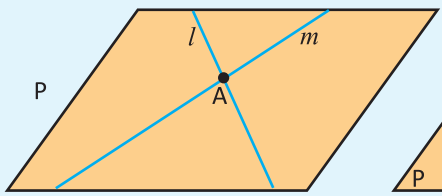
Unidad 8

En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como l y m en la imagen.

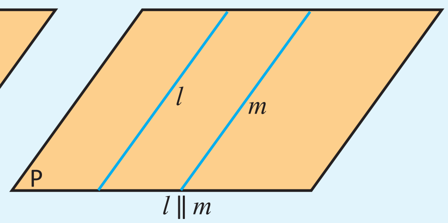
Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como lo siguiente:



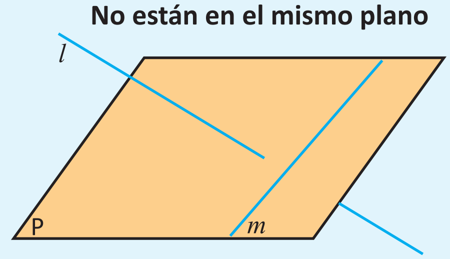
Sobre un mismo plano **No están en el mismo plano**



Rectas secantes



Rectas paralelas



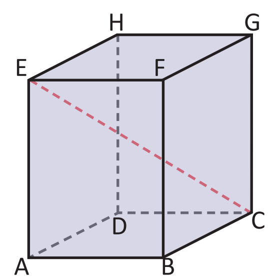
Rectas cruzadas

E

Observa el prisma rectangular y responde:

Qué lados del prisma están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:

a) $\overline{BC}$
b) $\overline{EC}$



El segmento $\overline{EC}$ se dice que es la diagonal del prisma rectangular.

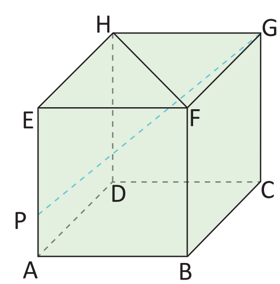
Solución.

a) Los lados: $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

1. Observa el cubo y responde:

Qué lados están sobre rectas:

a) Secantes a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
b) Paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
c) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.
d) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{PG}$.



2. Encuentra líneas rectas y objetos parecidos a planos en tu aula. Describe las relaciones de posición entre ellos, según lo aprendido.

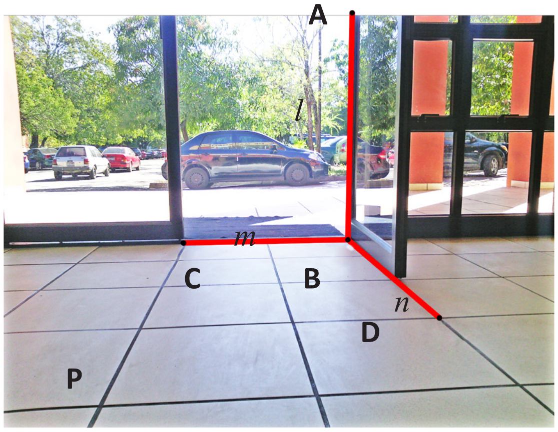
a) ¿Puedes observar objetos sobre rectas paralelas?
b) ¿Puedes observar objetos sobre rectas que se intersectan?
c) ¿Puedes observar objetos sobre rectas cruzadas?

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

P

En la siguiente imagen se muestra una puerta abierta.

a) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BC?
b) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BD?
c) ¿Qué relación tiene la línea recta que pasa por AB con el plano P?



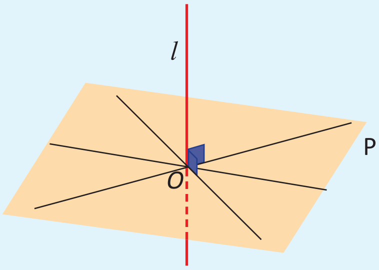
S

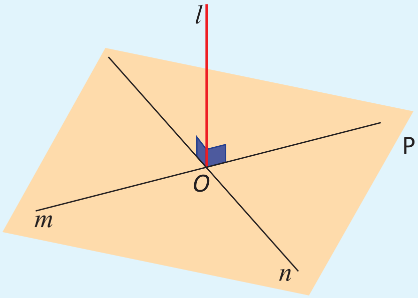
Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

C

Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O.

En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P.





Si una recta l es perpendicular a un plano P, entonces será perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto O que es la intersección entre la recta l y el plano P. Como se muestra en la imagen de la izquierda.

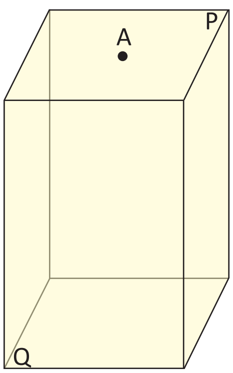
E

En la imagen, hay un punto A sobre el plano P que es una base del prisma rectangular.

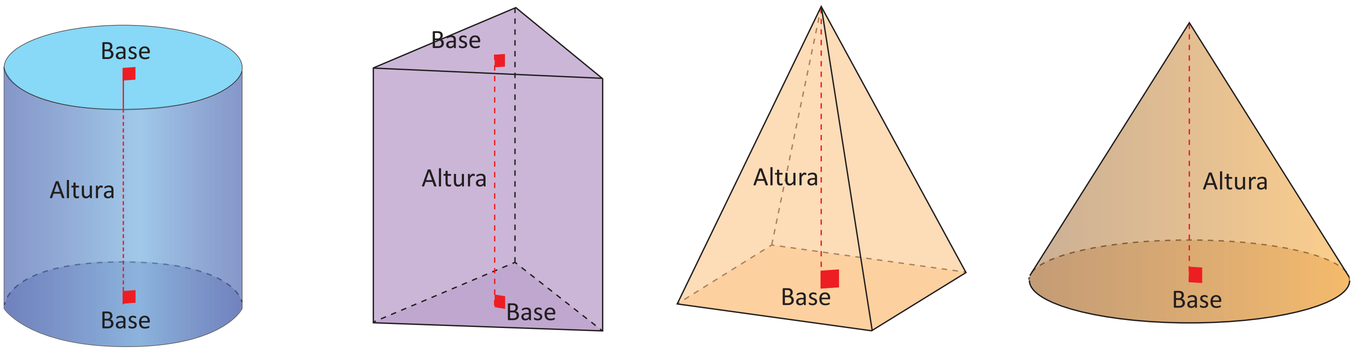
¿Cuál es el procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q?

Solución.

Se debe trazar un segmento desde el punto A hacia el plano Q, que está sobre una recta perpendicular al plano Q.



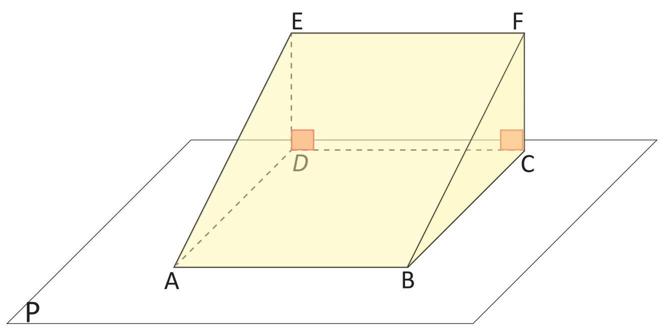
En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base es perpendicular a esta última.



Cilindro | Prisma Triangular | Pirámide | Cono

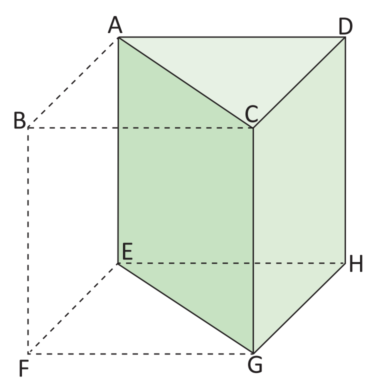
1. En la imagen hay un prisma triangular sobre un plano P:

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{BC}$?
   b) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{AE}$?
   c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?
   d) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base la cara que cae sobre el plano P.



2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo.

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AC}$?
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{DH}$?
   c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base $\overline{GH}$

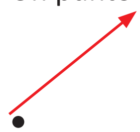


3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

P

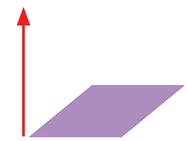
Observa las situaciones presentadas en los literales, cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña, ¿qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto



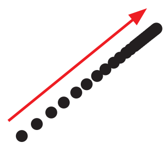
b) Una recta

c) Un plano



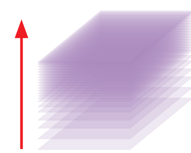
S

a) Se forma una recta



b) Se forma un plano

c) Se forma un prisma

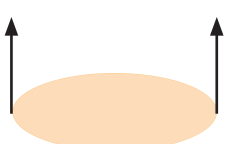


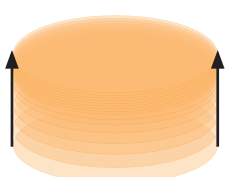
C

- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

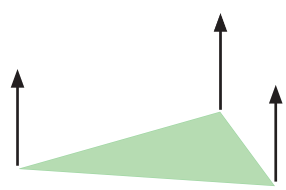
E

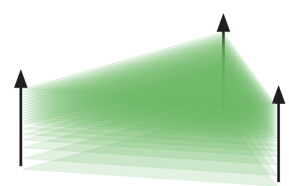
Si se desplaza el círculo verticalmente, como en la imagen, se obtiene un cilindro.





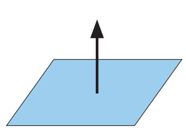
Si se desplaza verticalmente un triángulo, como en la imagen, se forma un prisma triangular.



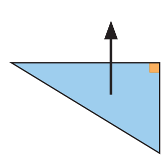


1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

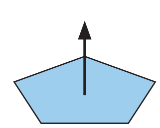
a)



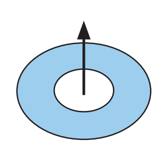
b)



c)

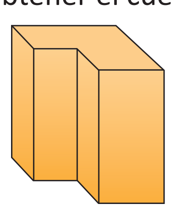


d)

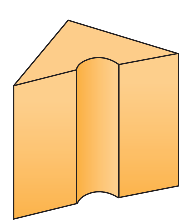


2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos, dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente, para lograr obtener el cuerpo geométrico.

a)



b)

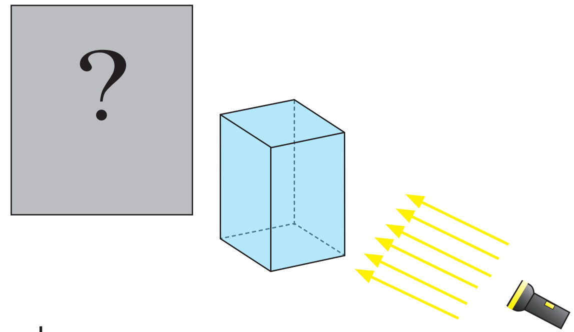


Unidad 8

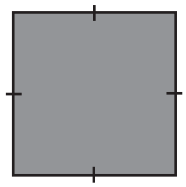
3.6 Proyección ortogonal

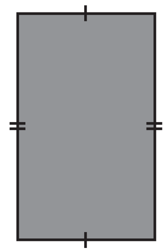
P

En la imagen, la lámpara proyecta rayos de luz que son perpendiculares a la pared gris. Entre la pared y los rayos de luz hay un prisma rectangular de base cuadrada, el cual proyecta una sombra sobre la pared. Según la forma en la que se gira el prisma se pude ver distintas sombras.



¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran a continuación?

a) 

b) 

S

a) Para obtener esta sombra, el prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.

b) Para obtener la sombra el prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

C

La **proyección ortogonal** de un cuerpo es aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Si se tiene un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos, se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, como lo muestra la imagen 3.

Se consideran tres tipos de perspectivas: **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

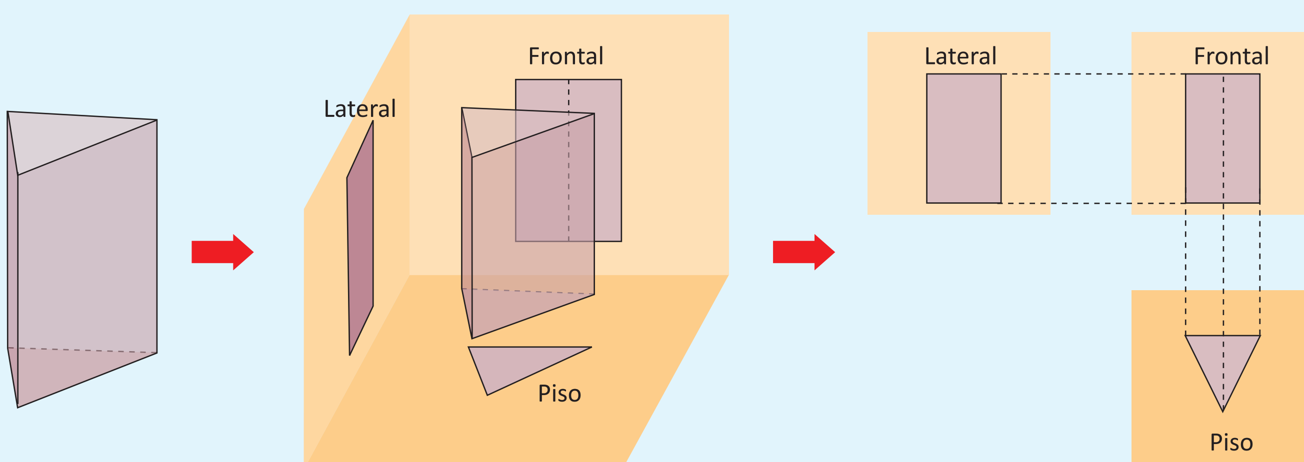
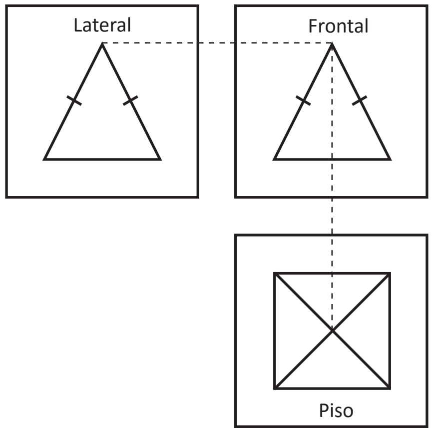


Imagen 1 Imagen 2 Imagen 3

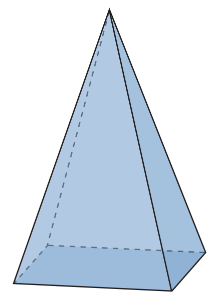
E Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que corresponde a la proyección ortogonal mostrada y escribe el nombre del sólido.



Solución.

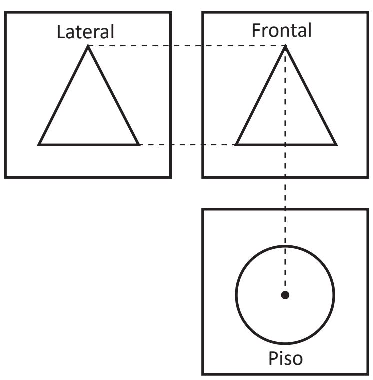
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

Por tanto, la figura es una pirámide.

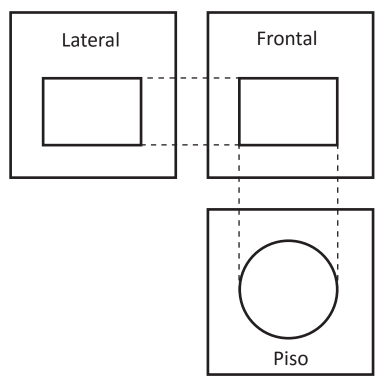

Pirámide

1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan la siguientes proyecciones ortogonales.

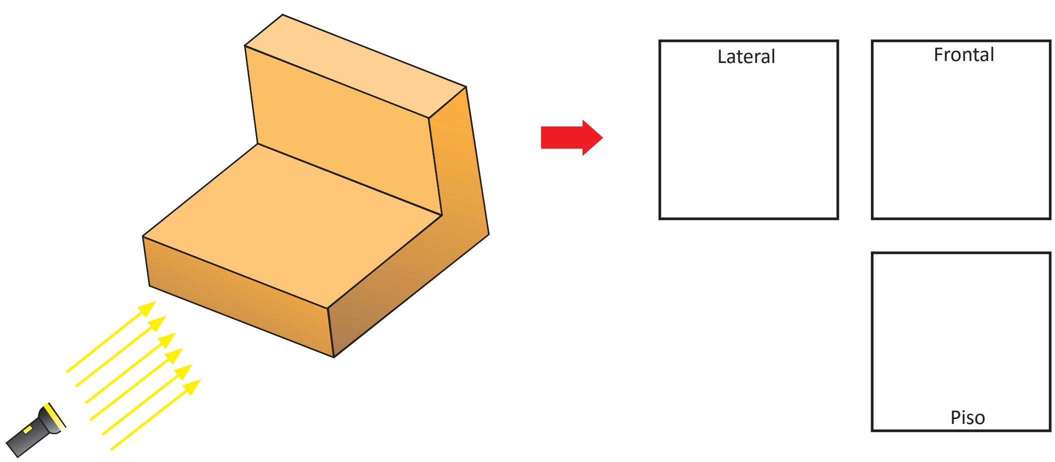
a)



b)



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.

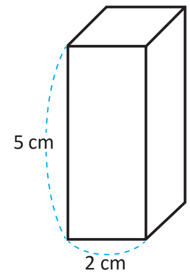


Unidad 8

3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

P

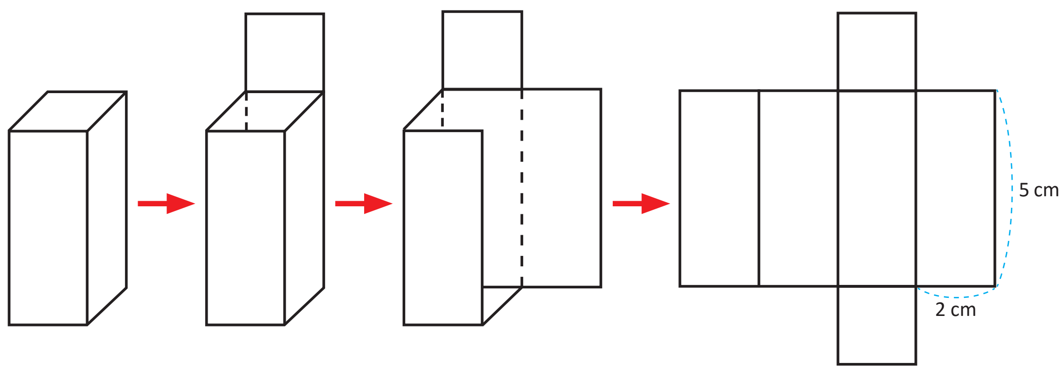
Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



Se le llama superficie a la parte más externa del cuerpo geométrico.

S

Como se muestra en la imagen, se puede descomponer el prisma cuadrangular como si fuese de papel.



La imagen final muestra el desarrollo plano del cuerpo geométrico. La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes, que son las bases del prisma.

El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm^2.
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2.

Por tanto, el área total de la superficie es: $\underbrace{10 \times 4}_{\text{Área lateral}} + \underbrace{4 \times 2}_{\text{Área de las bases}} = 40 + 8 = \underbrace{48 \text{ cm}^2}_{\text{Área total}}$.

C

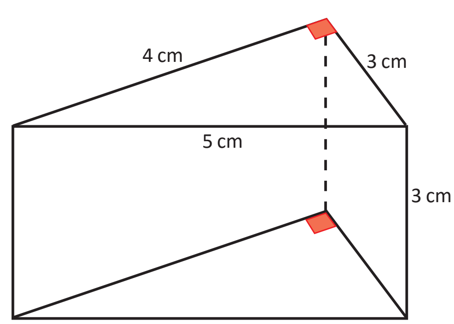
El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$$

Donde $\mathbf{A}_l$: Área lateral y $\mathbf{A}_b$: Área de la base.

E

Encuentra el área total del prisma triangular:



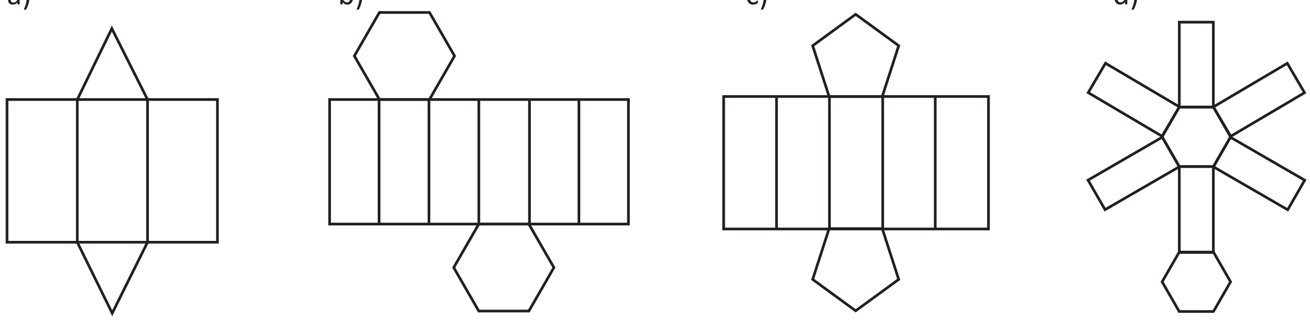
Solución.

El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$.

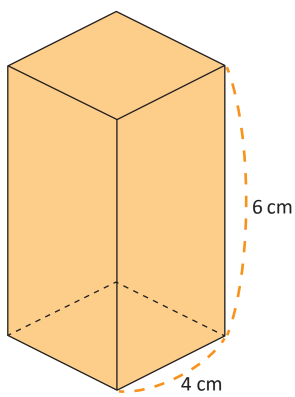
$$\mathbf{A_l} = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 15 + 12 + 9 = 36$$
$$\mathbf{A_b} = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2 = 6 + 6 = 12$$
$$\mathbf{A_T} = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

1. ¿Con cuál de los siguientes planos desarrollados se puede lograr construir un prisma hexagonal?

a) b) c) d)



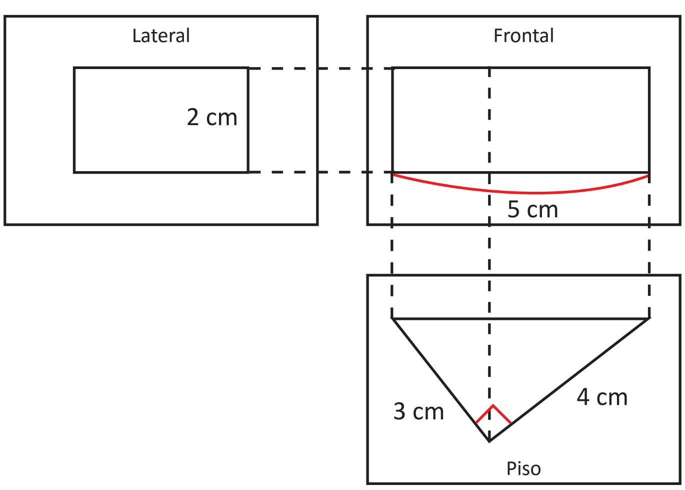
2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada.



3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto.

a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

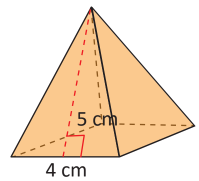
b) Encuentra el área total del prisma formado.



3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

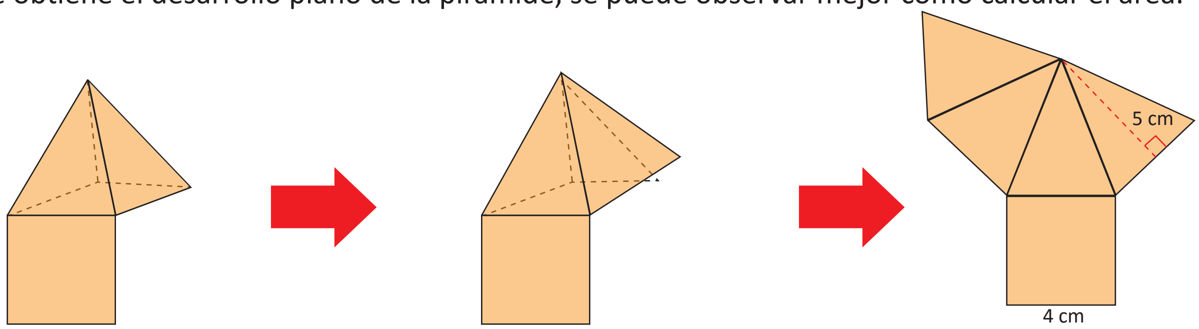
P

La imagen muestra una pirámide de base cuadrada.
Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



S

Si se obtiene el desarrollo plano de la pirámide, se puede observar mejor cómo calcular el área.



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm^2
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm^2
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm^2
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm^2

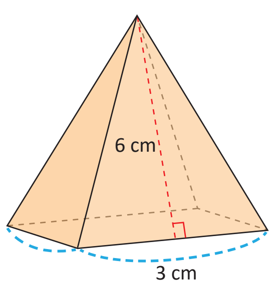
C

El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

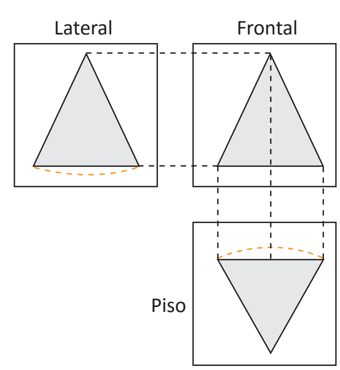
$$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$$

Donde $\mathbf{A_l}$: Área lateral y $\mathbf{A_b}$: Área de la base.

1. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada.



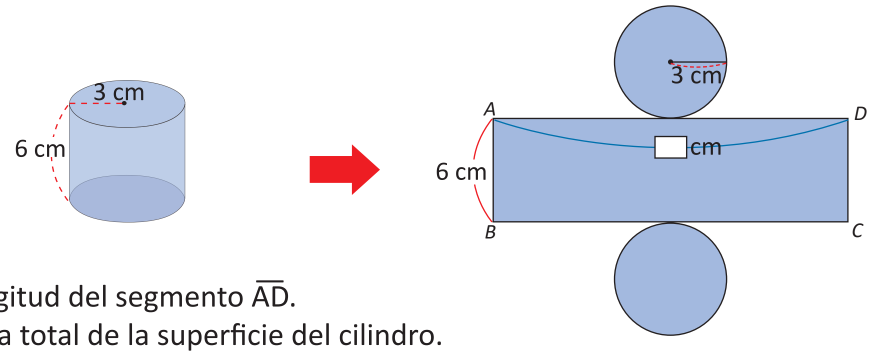
2. En la imagen de la derecha se observa la proyección ortogonal de una figura: Dibuja el cuerpo geométrico que se forma.



3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

P

Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.

b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

S

a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ coincide con la longitud de la circunferencia sobre él. Esta se puede obtener utilizando la fórmula para la longitud de la circunferencia: $l_c = 2\pi r$.

Por tanto: AD = $2\pi \times 3 = 6\pi$ cm.

b) El área total del cilindro está formada por el área de las bases más el área lateral, la cual es el área del rectángulo.

Área de las bases: $A_b = 2\pi \times 3 \times 3 = 18\pi$ cm^2
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm^2
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm^2

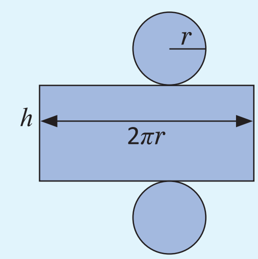
C

El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

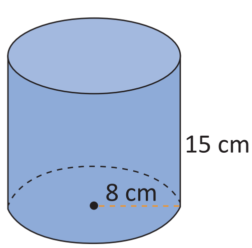
Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

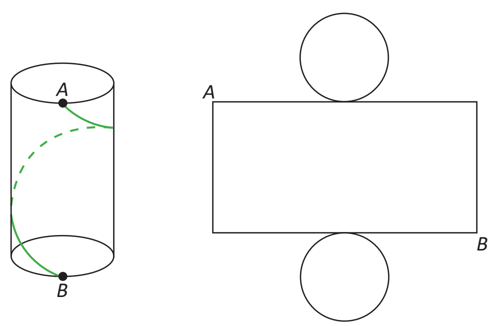
$$A_T = A_b + A_l$$
$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.



1. Encuentra el área total del cilindro.





2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro:

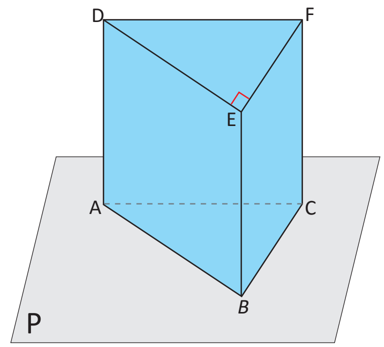
Dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano.

Unidad 8

3.10 Practica lo aprendido

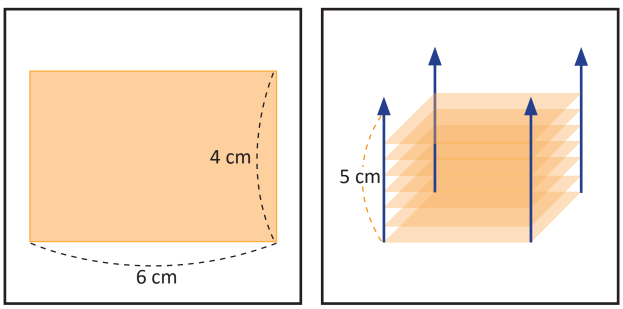
1. En la imagen se encuentra un prisma triangular sobre un plano P. Según lo que se observa en la imagen, responde:

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AB}$?
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{ED}$?
   c) ¿Qué segmentos del prisma están en posición cruzada con la recta que pasa por AB?
   d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?

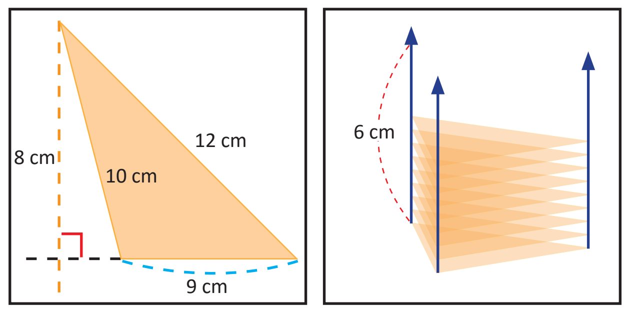


2. Para cada literal, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico formado, al desplazar la figura verticalmente y encuentra el área total del cuerpo.

a)

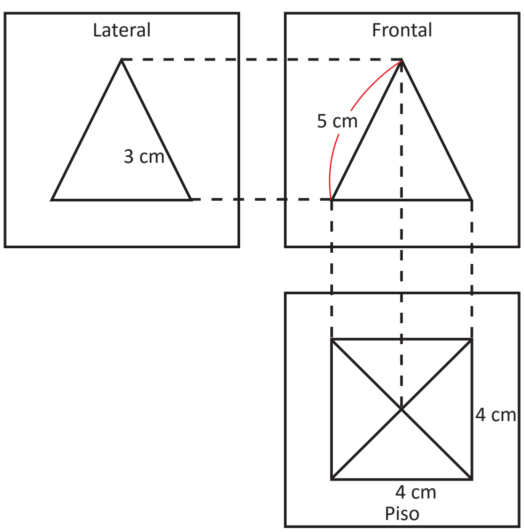


b)

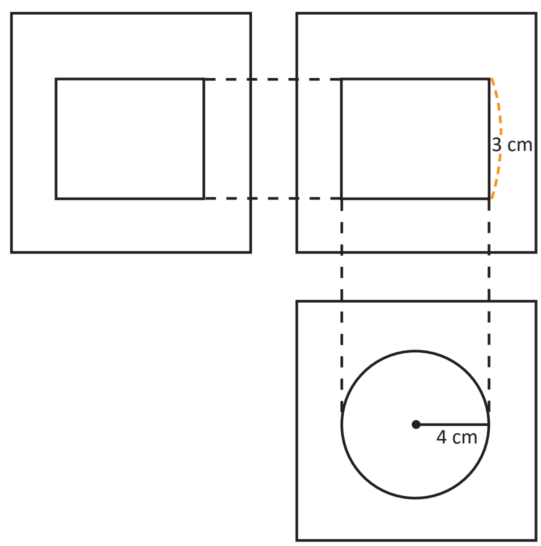


3. En las siguientes proyecciones ortogonales dibuja en tu cuaderno el cuerpo formado y encuentra su área total.

a)

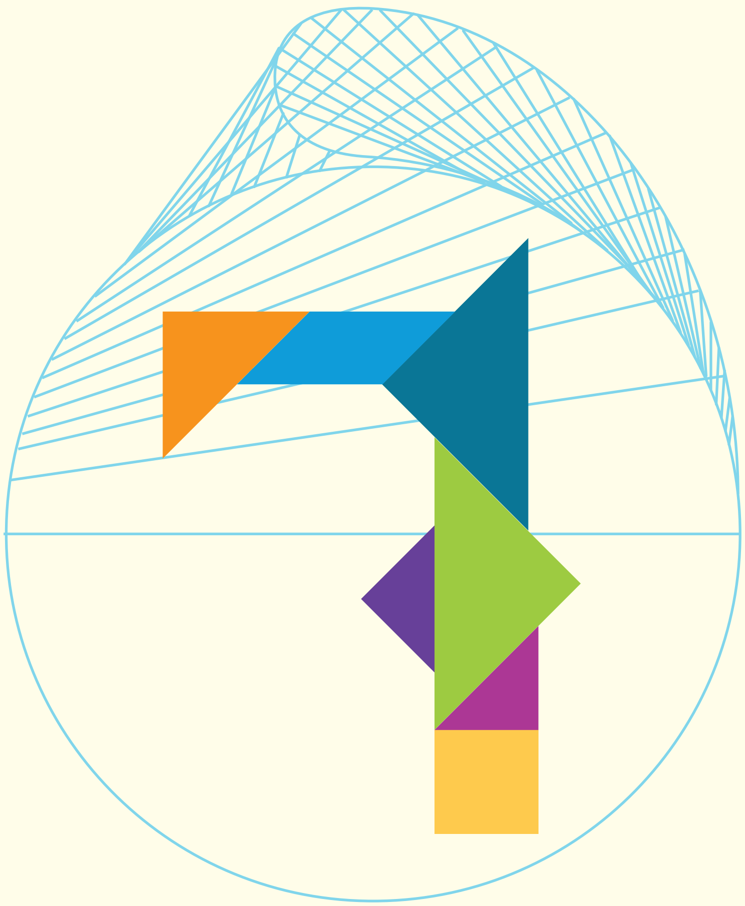


b)



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

GOBIERNO DE EL SALVADOR



EL SALVADOR

Grande como su gente

JICA

Libro de Texto Matemática Segunda Edición 7