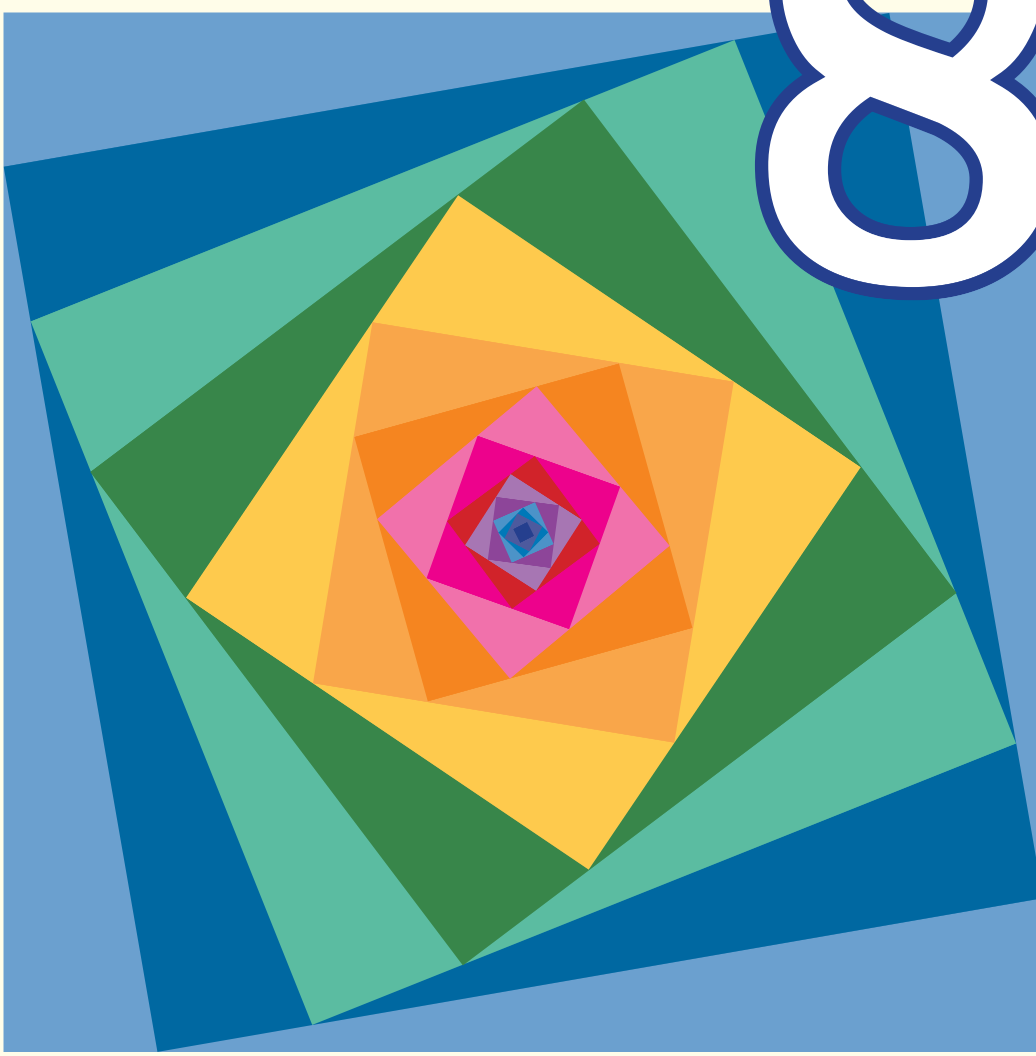
REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Matemática

8



Libro de Texto

Segunda edición

ESMATE

Libro de Texto Matemática Segunda Edición 8

Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Lic. Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Lic. Óscar de Jesús Águila Chávez
Director Nacional de Educación Media (Tercer Ciclo y Media)
Director del Proyecto ESMATE

Licda. Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Directora Nacional de Educación Básica

Licda. Mélida Hernández de Barrera
Directora Nacional de Prevención y Programas Sociales

Ing. Wilfredo Alexander Granados Paz
Gerente de Gestión y Desarrollo Curricular de Educación Media
Coordinador del Proyecto ESMATE

Lic. Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Jefe del Departamento de Especialistas en Currículo de Educación Media
Coordinador del equipo de Educación Básica, proyecto ESMATE

Lic. Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación (Matemática)
Coordinador del equipo de Tercer Ciclo y Bachillerato, proyecto ESMATE

Equipo Técnico Autoral del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
Félix Abraham Guevara Menjívar

Equipo de diagramación

Neil Yazdi Pérez Guandique
Francisco René Burgos Álvarez
Michael Steve Pérez Guandique
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

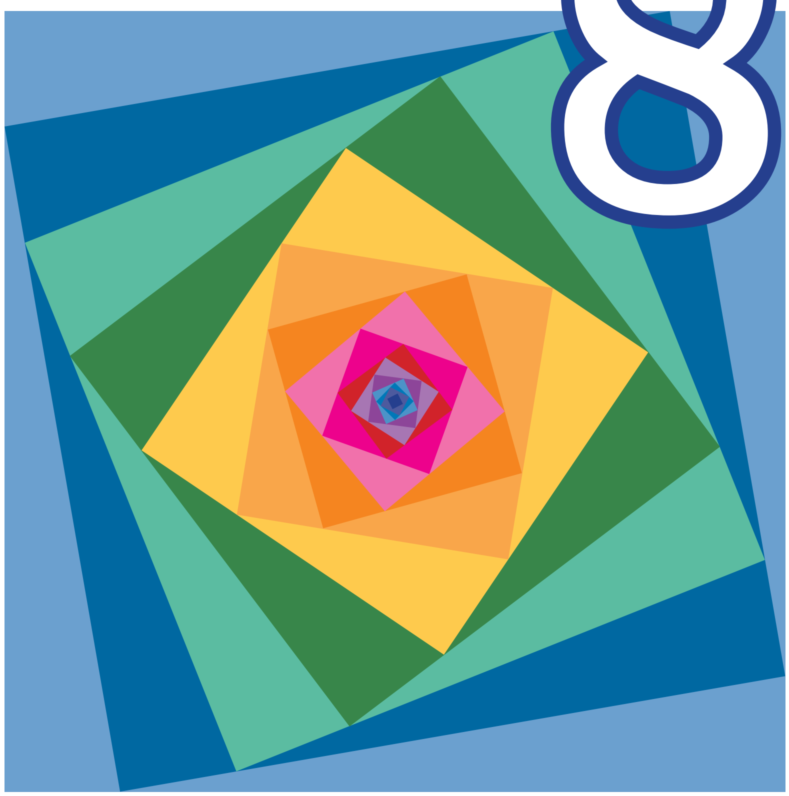
Revisión a nivel nacional por especialistas formados dentro del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio.
Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Segunda edición, 2019.

Imagen de portada con fines educativos, esta se construye a partir de una secuencia de cuadrados. En cada uno de ellos se forman cuatro triángulos rectángulos congruentes.

372.704 5
M425 Matemática 8 : libro de texto / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Reina Maritza Pleitez, Diana Marcela Herrera, César Omar Gómez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, Félix Abraham Guevara ; diagramación Neil Yazdi Pérez, Francisco René Burgos, Michael Steve Pérez, Judith Samanta Romero ; corrección de estilo Mónica Marlene Martínez, Marlene Elizabeth Rodas. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
188 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-62-1 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991-, coaut. II. Título.
BINA/jmh

Matemática 8



Libro de Texto
Segunda edición

ESMATE

Estimados jóvenes:

Es grato dirigirnos a ustedes con el propósito de felicitarlos por iniciar un nuevo año escolar con mucho entusiasmo, voluntad y entrega.

Desde “El proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media”(ESMATE), hemos trabajado este libro de texto, el cual presenta una nueva propuesta para el abordaje de la matemática.

Estamos convencidos que saber matemática significa tener una excelente herramienta para el desarrollo de sus capacidades productivas y ciudadanas; ya que les ayuda a ser más eficientes, a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Tenemos la seguridad de que su encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología constructiva, retadora y exigente, con el único fin de que los conocimientos matemáticos les enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en sus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Recuerden que en nuestro país todos los jóvenes son capaces de aprender y desarrollarse. Mantengan la confianza en sus capacidades, porque todos pueden alcanzar el éxito con esfuerzo, disciplina y dedicación.

Mucho ánimo ya que contamos con lo mejor de ustedes para desarrollar un mejor El Salvador.

Atentamente,

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Presentación del libro

Segunda edición

En la presente edición se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes de tercer ciclo del sistema educativo nacional.

Íconos

La letra P representa el Problema inicial. En el primer momento de cada clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática la cual permite introducir el contenido que se va a desarrollar.

La letra S simboliza la Solución. En este segundo momento, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Con la C de Conclusión se llega a la explicación del contenido. Aquí se relacionan los momentos P y S para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

La letra E representa un ejemplo. A veces es necesario presentar un problema adicional, que permita consolidar el contenido de la clase.

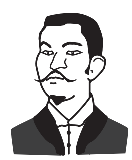
El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

Información complementaria

En el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional como historia de la matemática, esto se representa con diferentes colores:

Presaberes	Pista	Información adicional

En la información adicional donde aparezca la imagen del Dr. Alberto Sánchez, es porque se presenta historia de la matemática como un recurso de aprendizaje.



Alberto Sánchez (1864-1896)

El Dr. Alberto Sánchez, un matemático salvadoreño del siglo XIX, describió una curva que él llamo la cornoide, este fue uno de sus trabajos más relevantes como matemático.
Esta curva aparece en la contraportada de este libro.

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 3 de la lección 2 de la unidad 4 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

Indica el número de clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta morada en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 4

Índice

Unidad 1

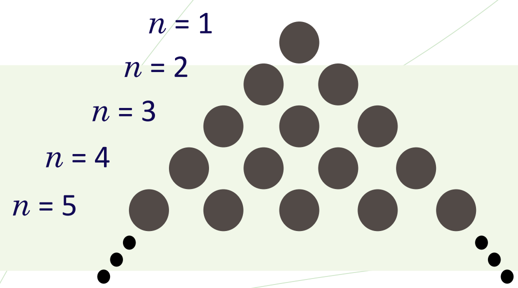
Operaciones algebraicas

Si un fenómeno ocurre una vez puede ser un accidente, si ocurre dos veces tal vez sea casualidad; pero si ocurre tres o más veces, genera un patrón. La búsqueda de patrones en la naturaleza ha sido una necesidad humana, esto debido a la constante búsqueda por explicar su entorno; por ejemplo, la posibilidad de comprender el cambio de las estaciones, los movimientos de los cuerpos celestes, la trayectoria de un objeto, qué es el fuego o cómo crear luz manipulando electrones. Todo esto hizo comprender que la única magia que permite predecir cualquier fenómeno es la de los modelos matemáticos.

Objetos que emiten ondas electromagnéticas en la vida cotidiana.

Los modelos matemáticos están relacionados a través de dos procesos: la abstracción y la interpretación, y se utilizan para modelar fenómenos naturales, sociales o características y propiedades de los números y sus operaciones, como por ejemplo, patrones de ocurrencia de terremotos, las ondas electromagnéticas que emiten y reciben los aparatos electrónicos. El modelaje matemático de un fenómeno busca encontrar un patrón básico o reglas para identificar su ordenamiento interno y sus regularidades. Estas reglas son representadas por símbolos y letras que se conocen como expresiones algebraicas.

En esta unidad aprenderás sobre operaciones con expresiones algebraicas y su uso para modelar propiedades con los números y sus operaciones, así como para resolver situaciones cotidianas.



Patrón geométrico de la suma de Gauss.

1.1 Comunicación con símbolos

P

Efectúa las siguientes operaciones:

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

S

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

Sustituyendo el valor de z:

$$\begin{aligned} 2z - 5 &= 2 \times 8 - 5 \\ &= 11 \end{aligned}$$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

Multiplicando cada término de la expresión:

$$\begin{aligned} (3x - 5) \times (-2) &= 3x \times (-2) - 5 \times (-2) \\ &= -6x + 10 \end{aligned}$$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

Efectuando la división:

$$\begin{aligned} (-8 + 4a) \div 2 &= -8 \div 2 + 4a \div 2 \\ &= -4 + 2a \\ &= 2a - 4 \end{aligned}$$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

Efectuando multiplicaciones y divisiones:

$$\begin{aligned} (-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5) &= -6y \div 3 + 15 \div 3 + 2x \times (-5) + 8 \times (-5) \\ &= -2y + 5 - 10x - 40 \\ &= -10x - 2y - 35 \end{aligned}$$

1. Identifica los coeficientes y las variables en los siguientes términos:

a) $3x$ b) $-6b$ c) $-7mn$

2. Identifica los términos en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x - 5$ b) $7b - 3a - 1$ c) $2x + 7st - 4$

3. Sustituye el valor de cada variable y determina el valor numérico de cada expresión algebraica.

a) $6a - 1$, si $a = 2$ b) $x - 4$, si $x = -5$ c) $6y - 1$, si $y = \frac{1}{3}$ d) $2a + 4$, si $a = -\frac{3}{2}$

4. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(4x + 7) \times 2$ b) $(n - 5) \times 3$ c) $(3a + 2) \times (-4)$ d) $(t - 5) \times (-3)$

5. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(8u + 24) \div 4$ b) $(-4n - 10) \div 2$ c) $(9y + 3) \div (-3)$ d) $(-15a - 5) \div (-5)$

6. Efectúa las siguientes operaciones y reduce términos semejantes:

a) $(-6y + 12) \div (-2) + (x + 5) \times 3$ b) $(-5y + 1) \times (-2) + (x - 8) \times 4$

1.2 Definición de monomio, polinomio y grado

P

María tiene 5 veces la edad de Carlos y la edad de Carlos es igual a la suma de la edad de Ana y Antonio. Representa la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio.
Utiliza a para representar la edad de Ana y b para representar la edad de Antonio.

S

Como la edad de Carlos es la suma de la edad de Ana y la de Antonio:
Edad de Carlos = edad de Ana + edad de Antonio = $a + b$.

La edad de María es 5 veces la edad de Carlos:
Edad de María = 5 × edad de Carlos = $5 \times (a + b) = 5a + 5b$

Por lo tanto, la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio se representa por la expresión $\mathbf{5a + 5b}$.

C

La expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes y un número llamado **coeficiente**, y que además solo hay operaciones de multiplicación se conoce como **término.**

Por ejemplo: $5x$, y, $2ay$, $\frac{3}{5}x^2$, b^2y, -7.

> Coeficiente → $7x^2$ ← Exponente ← Variable
>
> Observa que el número -7 es un monomio donde los exponentes de las variables son todos cero ($x^0 = 1$).

Las expresiones formadas por un término o por la suma de dos o más términos se conocen como **polinomios.**

Por ejemplo: $5a + 5x$, $4y - 2$, $2x^2 - 3ax + 5$.

> Observa que el polinomio $2x^2 - 3ax + 5$ está formado por los términos $2x^2$, $-3ax$ y 5.
>
> $2x^2 - 3ax + 5 = \underbrace{\mathbf{2x^2} + (\mathbf{-3ax}) + \mathbf{5}}_{\text{Términos}}$

Se define **monomio** como el polinomio formado por un solo término.

Se define **el grado de un término** como la suma de todos los exponentes de las variables.

Por ejemplo, el grado del término $-4xy^2$ es 3, porque $-4 \times \overbrace{\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{y}}^{\text{Grado 3}}$, la suma de los exponentes es 3.

Se define **el grado de un polinomio** como el mayor grado de los términos que conforman dicho polinomio.

Por ejemplo, el grado del polinomio $6x^3 + 5x^2 - 7x$ es 3, porque $\underbrace{\mathbf{6x^3}}_{\text{Grado 3}} + \overbrace{\mathbf{5x^2}}^{\text{Grado 2}} + (\underbrace{\mathbf{-7x}}_{\text{Grado 1}})$ y el mayor grado de todos los términos es 3.

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:
   a) $3a + 2x$ b) $6t + 5z - 2$ c) $-\frac{2}{3}a + 2x^3 - \frac{1}{2}$ d) $-ab + 2tv^2$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:
   a) $4x^3$ b) $-5xz$ c) $\frac{3}{5}x^2a^3$ d) $-\frac{2}{3}ab^2x^3$

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:
   a) $-6xyz$ b) $7x + 3t$ c) $\frac{3}{4}x^2a^3 - xa^3$ d) $-uvw^2 + v^2 - \frac{t^2}{3}$

1.3 Reducción de términos semejantes en un polinomio

P

Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3x + 5a - 2x + 4a$ b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

Los términos que poseen la misma variable elevada al mismo exponente se llaman: **términos semejantes.**

Términos semejantes

$4x + 5a - 2x + 4a$

Términos semejantes

Y se reducen así:

$ax + bx = (a + b)x$

S

a) $3x + 5a - 2x + 4a$

$= 3x - 2x + 5a + 4a$ Ordenando términos semejantes.

$= (3 - 2)x + (5 + 4)a$ Reduciendo términos semejantes.

$= x + 9a$

$= 9a + x$

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

$= 2y^2 + 3y^2 + 8y - 9y$

$= (2 + 3)y^2 + (8 - 9)y$

$= 5y^2 - y$

C

Para reducir términos semejantes en un polinomio se realizan los siguientes pasos:

1. Se ordenan los términos semejantes.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c$.

1. $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c = 7c^2 - 4c^2 + 2c + 3c$
2. $ = (7 - 4)c^2 + (2 + 3)c$

$ = 3c^2 + 5c$

Si las variables de dos términos están elevadas a potencias diferentes, entonces los términos NO son semejantes.

Por ejemplo, $5x^2$ y $5x$ NO son términos semejantes.

1. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$ b) $6x + 5x$ c) $3x + 5a - 2x + 3a$ d) $5y + 9b - 6b - 6y$

e) $6t + 2z - t - 5z$ f) $4x - y - 2y + x$ g) $9t^2 + 2t - 7t^2 + 6t$ h) $3y - 3y^2 - 4y^2 + 9y$

i) $a^2 + 5a - 5a^2 + a$ j) $z^2 + 9z + 3z - z^2$ k) $xy + \frac{2}{3}y - 3y + \frac{1}{2}xy$ l) $a^2 - 2a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}a^2$

2. Explica por qué el siguiente procedimiento para reducir términos semejantes en un polinomio es incorrecto.

$$\begin{aligned} 4x + 5a - 2x + 4a &= 4x - 2x + 5a + 4a \\ &= (4 - 2)x + (5 + 4)a \\ &= 2x + 9a \\ &= 11xa \end{aligned}$$

1.4 Suma y resta de polinomios

P

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$ b) $(2x + 5y) - (-3x + 9y)$

La ley de los signos es:
"La multiplicación de dos números de igual signo es positiva y de dos números de diferente signo es negativa".

S

Utilizando la ley de los signos y expresando sin los paréntesis.

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

$= 4x + 3y + 5x - 2y$

b) $(5y + 2x) - (9y - 3x)$

$= 5y + 2x - 9y + 3x$

Reduciendo términos semejantes:

a) $= 4x + 5x + 3y - 2y$

$= 9x + y$

b) $= 2x + 3x + 5y - 9y$

$= 5x - 4y$

Observa que puedes resolver utilizando la forma vertical:

a) $$\begin{array}{rr} & 4x + 3y \\ (+) & \underline{5x - 2y} \\ & 9x + y \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rr} & 2x + 5y \\ (-) & \underline{-3x + 9y} \\ & 5x - 4y \end{array}$$

C

Para efectuar sumas y restas de polinomios, se realizan los siguientes pasos:

1. Se utiliza la ley de los signos para expresarlos sin paréntesis.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $(3a + 5b) - (4a - 3b)$.

1. $(3a + 5b) - (4a - 3b) = 3a + 5b - 4a + 3b$
2. $ = 3a - 4a + 5b + 3b$

$ = -a + 8b$

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios.

a) $$\begin{array}{rr} & 6x + 2y \\ (+) & \underline{3x - 5y} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (-) & \underline{7a - 9b} \end{array}$$

Es igual a
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (+) & \underline{-7a + 9b} \end{array}$$

c) $(9x + 2y) + (7x - 5y)$

d) $(x + 2y) + (6x - y)$

e) $(5xy + 4y) - (7x - 8xy)$

f) $(4ab - 3a) + (5a - 2ab)$

g) $(-6t + 2z) - (7z - 7t)$

h) $(6a^2 + 2a) - (a^2 - 5a)$

i) $(-2t + 2u) - (2t + 2u)$

j) $(-x + 7y - 2) + (4x - y + 6)$

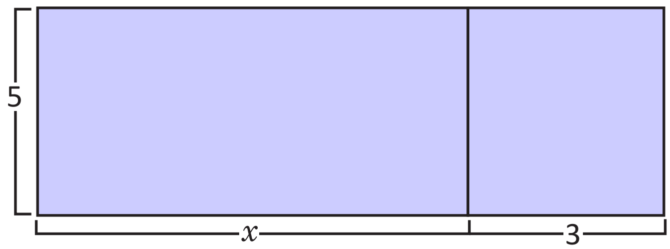
k) $(-ab + 5a - 4) - (4a - ab + 9)$

l) $(-8 + 5m - 4m^2) - (m^2 + 9 - m)$

1.5 Multiplicación de un polinomio por un número

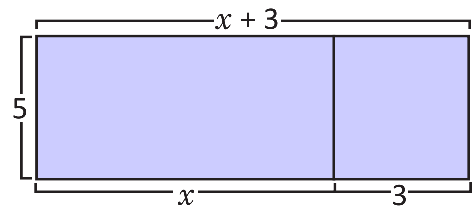
P

Para hacer un cartel fue necesario unir dos piezas como lo muestra la figura. Determina el área total del cartel.



S

El cartel tiene dimensiones 5 de ancho por $(x + 3)$ de largo.

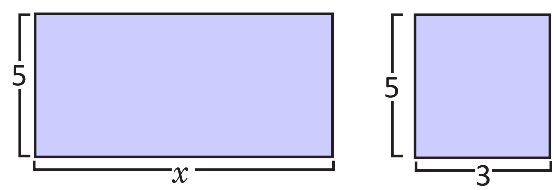


Entonces el área del cartel es $5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$.

Y también se puede calcular el área de cada pliego y sumarlas.

Área 1: $5 \times x = 5x$

Área 2: $5 \times 3 = 15$



Entonces, el área total es: $5(x + 3) = 5x + 15$.

Por lo tanto: $5(x + 3) = 5x + 15$.

C

Para realizar la multiplicación de un polinomio por un número, se multiplica el número por cada término del polinomio. Por ejemplo: $-3(4x - 3y - 2)$

$$\begin{aligned} -3(4x - 3y - 2) &= (-3) \times 4x + (-3) \times (-3y) + (-3) \times (-2) \\ &= -12x + 9y + 6 \end{aligned}$$

E

Realiza la siguiente operación: $5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$.

Se multiplica y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} 5(x - 4a) - 2(3x - 4a) &= 5x - 20a - 6x + 8a \\ &= 5x - 6x - 20a + 8a \\ &= -x - 12a \end{aligned}$$

Desarrolla las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $3(4x + y)$

b) $-6(2x - 7y)$

c) $7(2a - 3 - 4b)$

d) $-5(5 - 4a - 6b)$

e) $6(4t - 3b) - 5(-t + 2b)$

f) $-2(8y^2 - 5y) - 3(-7y + y^2)$

g) $-8\left(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}\right)$

h) $(-2x + 4y - 12) \times \frac{1}{2}$

1.6 División de polinomio por un número

P

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(10x - 4a) \div 2$.

S

Cambiando la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x - 4a) \times \frac{1}{2}$$

Multiplicando el número con el polinomio (clase anterior):

$$(10x - 4a) \times \frac{1}{2} = 10x \times \frac{1}{2} - 4a \times \frac{1}{2}$$

$$= 5x - 2a$$

Distribuyendo la división en cada monomio.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x \div 2) + (-4a \div 2)$$

$$= (5x) + (-2a)$$

$$= 5x - 2a$$

Observa la simplificación de la solución de la izquierda.

$$\overset{5}{\cancel{10}}x \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad -\overset{2}{\cancel{4}}a \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

C

Para realizar la división de un polinomio por un número, se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio. Por ejemplo, $(15x - 6y - 9) \div (-3)$.

$$(15x - 6y - 9) \div (-3) = (15x - 6y - 9) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 15x \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 6y \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -5x + 2y + 3$$

E

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5)$.

Se multiplica por el recíproco y se reducen términos semejantes.

$$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5) = (-30x^2 - 10x + 25) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= -30x^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 10x \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 6x^2 + 2x - 5$$

Efectúa las siguientes divisiones de un polinomio por un número.

a) $(16x - 8a) \div 2$

b) $(-24b - 12) \div 6$

c) $(9xy - 45y) \div (-3)$

d) $(-21x^2 + 49x) \div (-7)$

e) $(45x^2 - 20x - 35) \div 5$

f) $(-20y - 36x - 4) \div 4$

g) $(16y + 24x + 48) \div (-8)$

h) $(-63y + 27x + 54) \div (-9)$

1.7 Operaciones combinadas de polinomios con división por un número

P

Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes: $\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6}$.

S

Expresando con un término equivalente:

$$\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6} = \frac{2(5x+2y)}{6} - \frac{2y-x}{6},$$

colocando como una sola fracción:

$$= \frac{2(5x+2y)-(2y-x)}{6},$$

expresando sin los paréntesis:

$$= \frac{10x+4y-2y+x}{6},$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{10x+x+4y-2y}{6},$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11x+2y}{6}.$$

Expresando como multiplicación de un número por un polinomio:

$$\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6} = \frac{1}{3}(5x+2y) - \frac{1}{6}(2y-x),$$

efectuando los productos:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x,$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y,$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y.$$

Observa que las respuestas de ambos procedimientos son iguales:

$$\frac{11x+2y}{6} = \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y$$

C

Para realizar operaciones de polinomios con denominadores diferentes, se puede utilizar cualquiera de las dos formas:

1. Utilizar el mínimo común denominador y reducir términos semejantes.
2. Expresar los denominadores como multiplicación por un número y luego reducir términos semejantes.

E

Realiza las operaciones y reduce términos semejantes: $\frac{2x-y}{3} - \frac{x-5y}{6}$

$$\frac{2x-y}{3} - \frac{x-5y}{6} = \frac{2(2x-y)}{6} - \frac{(x-5y)}{6}$$

$$= \frac{2(2x-y)-(x-5y)}{6}$$

$$= \frac{4x-2y-x+5y}{6}$$

$$= \frac{3x+3y}{6} = \frac{3(x+y)}{6} = \frac{x+y}{2}$$

Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes:

a) $\frac{4x+y}{9} + \frac{3y-2x}{3}$

b) $\frac{6z+5t}{3} + \frac{3t-z}{2}$

c) $\frac{4x+7y}{2} - \frac{2y-3x}{4}$

d) $\frac{3a-4y}{5} - \frac{a-y}{2}$

e) $x+y+\frac{y+5x}{3}$

f) $x-y-\frac{4y-3x}{7}$

1.8 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $9st + 5x$

b) $3t^2 + 7zs - 21$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:

a) $8xyz$

b) $-5x^3z$

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $7xa + 3t^3$

b) $6 - 6xyz$

4. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$

b) $6x + 5x$

c) $5a + 7x + 3a - 2x$

5. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $$\begin{array}{r} 3x + 7y \\ (+)\ \underline{4x - 9y} \end{array}$$

b) $(4ab + 4a^2) - (6a^2 - 8ab)$

c) $(-5n^2 + 9n + 3) - (-2n^2 - 4n + 1)$

6. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por un polinomio:

a) $-5(-2s + 6t)$

b) $3(4x - 3y) - 2(5x - 2y)$

c) $(6x - 15y - 36) \times \frac{1}{3}$

7. Desarrolla las siguientes divisiones de polinomio con un número:

a) $(-9s + 24t) \div 3$

b) $(-54x^2 + 18x) \div -9$

c) $(36x^2 - 12x + 28) \div 4$

8. Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes:

a) $\frac{10x + 4y}{32} + \frac{-3x + y}{8}$

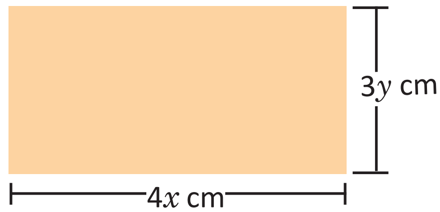
b) $\frac{2a + 5b}{10} - \frac{3a - 6b}{40}$

c) $s - t - \frac{2s - 5t}{6}$

1.9 Multiplicación de un monomio por un monomio

P

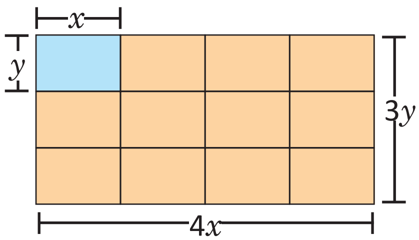
Determina el área de un rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho.



S

El área del rectángulo será el resultado de la multiplicación $4x \times 3y$.

Dividiendo el rectángulo en rectángulos más pequeños de y cm de ancho y x cm de largo.



Observa que la multiplicación de los monomios $4x$ x $3y$ se realiza así:

$$\begin{aligned} \mathbf{4x} \times \mathbf{3y} &= 4 \times x \times 3 \times y \\ &= 4 \times 3 \times x \times y \\ &= \mathbf{12xy} \end{aligned}$$

El área de cada rectángulo pequeño es $x \times y = xy$ (base × altura).

Hay 4 rectángulos de área xy a lo largo y 3 a lo ancho.

Por lo tanto, el área del rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho es la suma del área de los $4 \times 3 = 12$ rectángulos de área xy, así:

$A = 4x \times 3y = 4 \times 3 \times x \times y = 12xy$.

C

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes de los monomios y luego se multiplican las variables. Por ejemplo: $7x \times (-5y)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{7x} \times (\mathbf{-5y}) &= 7 \times (-5) \times x \times y \\ &= \mathbf{-35xy} \end{aligned}$$

Al multiplicar dos potencias de la misma base se puede expresar como una sola potencia:

$b \times b^2 = b \times (b \times b) = b^3$.

E

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $2b \times 5b^2$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} 2b \times 5b^2 &= 2 \times 5 \times b \times b^2 \\ &= 10b^3 \end{aligned}$$

b) $(-4n)^3$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} (-4n)^3 &= (-4n) \times (-4n) \times (-4n) \\ &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times n \times n \times n \\ &= -64n^3 \end{aligned}$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $5x \times 6y$

b) $8b \times (-3a)$

c) $-7m \times (-3n)$

d) $9x \times 4x^3$

e) $-9a^2 \times a^3$

f) $(-2n)^3$

g) $-6ab \times (-8a^2b)$

h) $-9ab \times 3(-a)^2$

1.10 División de un monomio por un monomio

P

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

b) $12ab \div (-4b)$

S

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

Expresando como división de fracciones, utilizando el recíproco del número y simplificando.

$$\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz = \frac{y^2z}{3} \div \frac{5yz}{9}$$

$$= \frac{y^2z}{3} \times \frac{9}{5yz}$$

$$= \frac{y \times \cancel{y}^{1} \times \cancel{z}^{1} \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1} \times 5 \times \cancel{y}_{1} \times \cancel{z}_{1}}$$

$$= \frac{3}{5}y$$

b) $12ab \div (-4b)$

Expresando la división como una fracción y simplificando.

$$12ab \div (-4b) = \frac{12ab}{-4b}$$

$$= -\frac{12ab}{4b}$$

$$= -\frac{\cancel{12}^{3} \times a \times \cancel{b}^{1}}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{b}_{1}}$$

$$= -3a$$

Además, para el literal b) se observa que se puede aplicar la multiplicación por el recíproco de la siguiente manera:

$$12ab \div (-4b) = 12ab \times \frac{1}{-4b}$$

$$= -\frac{12ab}{4b}$$

$$= -\frac{\cancel{12}^{3} \times a \times \cancel{b}^{1}}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{b}_{1}}$$

$$= -3a$$

Al dividir dos potencias puedes simplificar:

$$y^2z \div yz = \frac{y^2z}{yz} = \frac{y \times \cancel{y}^{1} \times \cancel{z}^{1}}{\cancel{y}_{1} \times \cancel{z}_{1}} = y$$

C

Para dividir dos monomios se expresa como división de fracciones, se utiliza la multiplicación por el recíproco y se simplifica a la mínima expresión.

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $18xy \div 6x$

b) $24x^3 \div (-6x)$

c) $15mn \div (-12n)$

d) $-8a^2b \div 6ab^2$

e) $6ab \div \frac{1}{4}bc$

f) $10y^2z^2 \div \frac{5}{2}yz$

g) $-\frac{3}{5}t^3u \div \frac{3}{10}t^2u$

h) $-\frac{5}{8}y^4 \div \frac{1}{2}y^2$

1.11 Multiplicación y división combinadas de monomios con monomios

P

Realiza las siguientes operaciones, luego simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x)$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b)$

S

Expresando las operaciones como una fracción.

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x) = -\dfrac{7\overset{x}{\cancel{x^2}} \times \overset{2}{\cancel{6}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\underset{y}{\cancel{y^2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$

$= -\dfrac{7x \times 2}{y}$

$= -\dfrac{14x}{y}$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b) = \dfrac{(\overset{1}{\cancel{2}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{1}{\cancel{b}}) \times (\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{b}})}{\underset{1}{\cancel{\underset{3}{\cancel{6}}}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{1}{\cancel{\underset{b}{\cancel{b^2}}}}}$

$= \dfrac{a \times 1}{1}$

$= a$

C

Para operar multiplicaciones y divisiones combinadas de monomios, primero se determina el signo (utilizando la ley de los signos), y luego se expresa como una sola fracción hasta simplificar a la mínima expresión.

E

Realiza la siguiente operación, simplifica el resultado a su mínima expresión: $(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right)$.

$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\dfrac{2a}{3}\right) = -8a^3 \times 4a^2 \times \left(\dfrac{3}{2a}\right)$

$= -\dfrac{\overset{4a^2}{\cancel{8a^3}} \times 4a^2 \times 3}{\underset{1\ 1}{\cancel{2a}}}$

$= -\dfrac{4a^2 \times 4a^2 \times 3}{1}$

$= -48a^4$

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $2x^2 \times 6x \div 3x^4$

b) $10yz \div 4z^2 \times (-6z)$

c) $a^2b \div (-ab) \times (-b^2)$

d) $-s^2t \times (-st^2) \div (-s^2t^2)$

e) $(-2a)^2 \div 6ab^2 \times 9b$

f) $-xy \div (-2xy)^3 \times (-4x)$

g) $3y^3 \times 6y \div (-3y)^2$

h) $24a^2b^2 \div 8ab \times 3b$

i) $(-2st)^3 \times (-2s) \div (-3s^2)$

j) $\frac{3}{5}ab^2 \times 5a \div \frac{1}{3}ab$

k) $(-\frac{1}{2}xz)^2 \div 6xz^3 \times (-4)$

l) $-\frac{2}{5}t^2 \div (-t^3) \times (-\frac{5}{2}t^2)$

1.12 Sustitución y valor numérico de polinomios

P

Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores dados para las variables.

$(4x - 5y) - (x - y)$ si $x = 6$, $y = -4$

S

Sustituyendo el valor de las variables en cada polinomio:

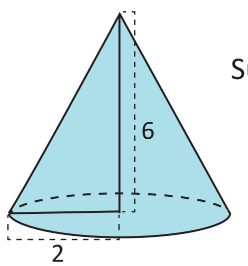
$$\begin{aligned}(4x - 5y) - (x - y) &= 4x - 5y - x + y\\ &= 3x - 4y\\ &= 3 \times 6 - 4 \times (-4); \text{ sustituyendo el valor de las variables.}\\ &= 18 + 16\\ &= 34\end{aligned}$$

C

Para encontrar el valor numérico de un polinomio sustituyendo el valor de las variables, primero se reducen los términos semejantes.

E

El volumen de un cono está dado por el polinomio $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde π es una constante (número), r es el radio de la base del cono y h es la altura. Determina el volumen de un cono de 2 cm de radio y 6 cm de altura.



Sustituyendo los valores de las variables r y h en el polinomio del volumen del cono.

$r = 2$
$h = 6$

Entonces, para este caso, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 6 = 8\pi$.

Por lo tanto, el volumen del cono de radio 2 cm y altura 6 cm es 8 πcm^3.

1. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio utilizando los valores de las variables indicadas.

a) $(3x - 2y) + (x - y)$ si $x = 5$, $y = -2$

b) $(x + 3y) - (x - y)$ si $x = 1$, $y = -4$

c) $(x - y) - 2(x - y)$ si $x = 8$, $y = -2$

d) $3(x - 2y) - (2x - 5y)$ si $x = -4$, $y = 5$

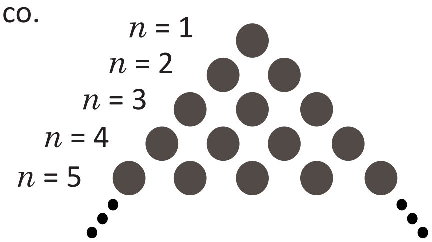
e) $(6x - y) - 2(3x - 5y)$ si $x = -2$, $y = 3$

f) $(4x - y) - (5x - 3y)$ si $x = -6$, $y = 4$

2. Analiza y determina cuál de los siguientes polinomios representa la suma de las primeras filas, en la siguiente figura, n representa el número de fila. Auxíliate del gráfico.

a) $2n - 1$

b) $\frac{1}{2}n(n + 1)$



1.13 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios, el grado de cada término y el grado del polinomio.

a) $5xyz + 2t^2$ b) $5x^4 + 7z^3 - 21xz$ c) $6ab - 6st^2$ d) $3xyz$

2. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(10a - 7b + 9) - (-3a - b + 5)$ b) $(5xy - 5y^2) + (-8xy + 8y^2)$ c) $(8t^2 + 2 - 4t) - (-t^2 - 2t + 7)$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de un número por un polinomio:

a) $-7(10m - 8n)$ b) $10(2a - 5b) - 7(-2a + 3b)$ c) $(35x - 5z) \div 5$ d) $(-64x^2 + 16x) \div (-8)$

4. Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes.

a) $\frac{6m - 3n}{27} + \frac{m - 2n}{3}$ b) $\frac{2a + 5b}{3} - \frac{-3a + 6b}{5}$ c) $y - z - \frac{-9y - 3z}{7}$ d) $t - 2u - \frac{5t - u}{2}$

1.14 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $9t \times 6s$ b) $(-4n^2) \times 6n^3$ c) $7a \times 8ab$ d) $(-7a)^2$

2. Desarrolla las siguientes divisiones de monomios:

a) $36mx \div 9x$ b) $(-18st^2) \div 10s^2t$ c) $12ay^3 \div \frac{3}{5}a^2y$ d) $-\frac{2}{9}w^3 \div \frac{2}{3}w$

3. Realiza las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $4y \times 15y^3 \div 10y^2$ b) $(-5n)^2 \div 15mn^2 \times 12m$ c) $(-4ab)^3 \times (-2b) \div (-6b^4)$ d) $(-\frac{2}{3}w^4) \div (-w^3) \times (-\frac{9}{10}w)$

4. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores de las variables indicadas.

a) $(2x - 5y) + (-4x + y)$ si $x = 3$, $y = -3$ b) $2(-x + y) - (3x - y)$ si $x = -1$, $y = 4$

c) $(-4x - 3y) + 5(x + y)$ si $x = 7$, $y = -5$ d) $-5(x - 2y) - (-4x - 6y)$ si $x = -4$, $y = 5$

2.1 Suma de números consecutivos

P

Efectúa las siguientes sumas, determina un procedimiento para sumar 5 números consecutivos.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \_\_\_\_\_\_\_$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \_\_\_\_\_\_\_$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \_\_\_\_\_\_\_$$

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \underline{15} \quad (5 \times 3)$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \underline{75} \quad (5 \times 15)$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \underline{150} \quad (5 \times 30)$$

La suma de 5 números consecutivos parece ser 5 veces el número del centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares.

Tomando n como el primer término de una suma de 5 términos.

$$\begin{array}{ccccc} 13, & 14, & 15, & 16, & 17 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{13}, & \mathbf{13} + 1, & \mathbf{13} + 2, & \mathbf{13} + 3, & \mathbf{13} + 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boldsymbol{n}, & \boldsymbol{n} + 1, & \boldsymbol{n} + 2, & \boldsymbol{n} + 3, & \boldsymbol{n} + 4 \end{array}$$

Entonces, la suma de 5 términos consecutivos en general será:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5 \times (n + 2).$$

Por lo tanto, la conjetura es verdadera y la suma de 5 números consecutivos es 5 veces el número del centro (ordenados de menor a mayor).

En matemática, para solucionar un problema pueden abordarse diversas estrategias, una de ellas es la utilizada en esta clase, en la cual se determina el resultado para casos particulares y se busca un "patrón" para formular una "conjetura"; es decir, una observación que al parecer se cumple en todos los casos pero carece de sustento lógico, es únicamente intuitivo. Posteriormente se demuestra la conjetura utilizando un método inductivo.

C

Para conjeturar sobre la suma de 5 números consecutivos fue necesario aplicar suma de polinomios. Utilizando variables para expresar la situación, se pueden comprobar varias propiedades que hay entre los números.

1. Escribe cinco números consecutivos representando el número del centro con n; luego expresa la suma de estos números en términos de n.

2. Encuentra la propiedad de la suma de 7 números consecutivos y compruébala.

2.2 Suma de un número con su invertido

P

Efectúa las siguientes sumas de un número con su invertido, demuestra si se cumple alguna regla.

$12 + 21 =$ ______
$63 + 36 =$ ______
$91 + 19 =$ ______

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

$12 + 21 = \underline{\ 33\ } = 11 \times 3$
$63 + 36 = \underline{\ 99\ } = 11 \times 9$
$91 + 19 = \underline{110} = 11 \times 10$

La suma de un número con su invertido es un múltiplo de 11, ¿se cumplirá siempre esta afirmación?

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba, se toma y como el dígito de las unidades y x como el dígito de las decenas, escribiendo el número mediante la expresión de los números base 10.

$$63 = 60 + 3$$
$$63 = 10 \times 6 + 3$$
$$= 10 \times x + y$$

Observa que en este caso, las variables x y y representan dígitos; es decir, números entre 0 y 9, y no se está tomando en cuenta el valor posicional de las decenas.

Entonces, la suma de un número con su invertido utilizando las variables x y y, es:

$$(10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y$$
$$= 11(x + y)$$

Por lo tanto, la suma de un número con su invertido siempre es múltiplo de 11.

C

Para comprobar las propiedades de los números, hay que utilizar variables adecuadamente según la situación, identificar regularidades y aplicar las operaciones algebraicas necesarias para representarlas.

1. Determina si la suma de un número de 4 cifras con su invertido es múltiplo de 11. Considera los casos a continuación:

a) 1 234 + 4 321

b) 1 032 + 2 301

c) 1 121 + 1 211

2. Comprueba tus resultados del numeral 1.

2.3 Sumas de días del calendario

P

Efectúa la suma de los días del calendario que están sombreados, demuestra si se cumple alguna regla en general.

Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón:

Color rosado: $2 + 8 + \mathbf{9} + 10 + 16 = 45 = 5 \times \mathbf{9}$

Color azul: $14 + 20 + \mathbf{21} + 22 + 28 = 105 = 5 \times \mathbf{21}$

Las sumas de los cinco días coloreados parecen ser 5 veces el número que queda al centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba; se toma n como el término del centro de la parte sombreada.

Entonces, un día después será denotado por $n + 1$ y un día antes por $n - 1$.
Además, para denotar el mismo día, pero de la semana anterior, será $n - 7$ y el mismo día la semana siguiente será $n + 7$.

La suma de los 5 días coloreados estará dado por:

$$14 \quad + \quad 20 \quad + 21 + \quad 22 \quad + \quad 28$$
$$\downarrow$$
$$(\mathbf{21} - 7) + (\mathbf{21} - 1) + \mathbf{21} + (\mathbf{21} + 1) + (\mathbf{21} + 7)$$
$$\downarrow$$
$$(\boldsymbol{n} - 7) + (\boldsymbol{n} - 1) + \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} + 1) + (\boldsymbol{n} + 7) = 5n$$

Por lo tanto, la suma de los días sombreados en esta forma en el calendario es 5 veces el número que queda al centro.

C

Cuando se trata de varios números, es importante elegir el número que se representará con la variable conveniente, para identificar los patrones y expresarlos mediantes expresiones algebraicas.

Utiliza polinomios para comprobar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

b) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

c) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

2.4 Resolución de problemas utilizando polinomios

P

Carlos tiene 25 centavos de dólar para comprar dulces en la tienda, si los dulces de miel cuestan 3 centavos y los de eucalipto 2.5 centavos cada uno. Tomando a como la cantidad de dulces de miel, b como la cantidad de dulces de eucalipto, establece el polinomio que representa la situación. Luego responde, Carlos compra 5 dulces de miel, ¿cuántos dulces de eucalipto puede comprar con el vuelto?

S

Cada dulce de miel cuesta 3 centavos de dólar y cada dulce de eucalipto 2.5, se gastan 25 centavos, entonces se puede plantear la siguiente ecuación:

Costo de los dulces de miel → $3a + 2.5b = 25$ ← Dinero que tiene Carlos.

Costo de los dulces de eucalipto.

El problema pide la cantidad de dulces de eucalipto que puede comprar Carlos, es decir b; si compra 5 dulces de miel, es decir $a = 5$. Trabajando la ecuación:

$$3a + 2.5b = 25$$

Multiplicando ambos lados por 2,

$$6a + 5b = 50$$

transponiendo el término $6a$,

$$5b = 50 - 6a$$

dividiendo ambos lados por 5.

$$b = \frac{50 - 6a}{5} = -\frac{6a}{5} + 10$$

Finalmente para determinar cuántos dulces de eucalipto puede comprar Carlos hay que sustituir el valor numérico de $a = 5$ en el polinomio $-\frac{6a}{5} + 10$, se tiene $\frac{-6 \times 5}{5} + 10 = -6 + 10 = 4$.

C

Para resolver problemas utilizando polinomios se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se identifican las variables del problema.
2. Se plantea una ecuación con las variables identificadas en el paso anterior.
3. Se despeja la variable que soluciona el problema planteado.
4. Se sustituye el valor numérico de una variable en el polinomio que resulta después de despejar.

E

Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

$\frac{1}{3}ab = 5$ [a, $b = 5$]. Entonces, $\frac{1}{3}ab = 5$ → $ab = 15$ → $a = \frac{15}{b}$. Por lo tanto, $a = \frac{15}{5} = 3$.

Multiplicando por 3 ambos lados. Dividiendo por b ambos lados.

1. Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

   a) $5x - 6y = 25$ [x, $y = 10$] b) $3.5t + u = 7$ [u, $t = 4$] c) $\frac{1}{6}wz = 10$ [w, $z = 15$]

2. Un arquitecto trabaja en el diseño de las paredes de una casa; cuenta con dos tipos de ladrillo, el primer tipo es de 10 pulgadas de altura y el segundo de 6 pulgadas de altura. Si la pared mide 72 pulgadas de alto, tomando w como la cantidad de ladrillos del tipo 1, z como la cantidad de ladrillos del tipo 2, establece el polinomio que representa la situación. Además, el arquitecto decide que esta pared debe tener 6 filas de ladrillos del primer tipo, ¿cuántas filas del segundo tipo debe tener la pared?

2.5 Practica lo aprendido

1. Determina un procedimiento para sumar 9 números consecutivos.

2. Demuestra que si un número de tres cifras tiene la cifra de las decenas dos unidades mayor que la de las centenas y dos unidades menos que la de las unidades, entonces al sumarlo con su invertido el resultado es múltiplo de 111.

3. Utiliza polinomios para encontrar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

b) Marzo 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

4. Carlos compra 3 pupusas de queso con loroco y 2 revueltas, en total debe pagar \$2.20. Si Carlos sabe que las pupusas de queso con loroco valen \$0.50, ¿qué precio tienen las pupusas revueltas? Resuélvelo utilizando polinomios y valor numérico.

5. ¿Cuántos cuadrados de 10 m^2 de área son necesarios para cubrir un área de 200 m^2 si ya se han utilizado 7 cuadrados de 20 m^2 de área?

6. El abuelito de Ana tiene problemas con uno de sus riñones y el nefrólogo le ha recomendado que tome 2 litros de agua al día. Para cumplir la recomendación del médico, Ana quiere conocer la capacidad que tienen los vasos de su casa, y así podrá saber cuántos vasos con agua tendrá que beberse al día el abuelo. Considerando que los vasos tienen forma cilíndrica. Determina cuántos vasos con agua debe beber cada día el abuelo de Ana; ¿cómo se resuelve esto?

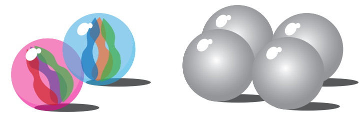
   Nota: para resolver esta situación, toma las medidas de un vaso cilíndrico que esté en tu escuela o en tu casa.

7. Una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...) es que “la suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión es igual a 11 veces el séptimo elemento de ese grupo”. No es necesario que comience por el primer término de la sucesión. Ilustra la propiedad con dos ejemplos y escribe una expresión algebraica tomando como x el séptimo elemento del grupo.

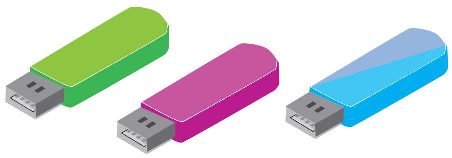
2.6 Practica lo aprendido

Expresa los siguientes problemas como ecuaciones con polinomios, luego resuélvelos utilizando valor numérico.

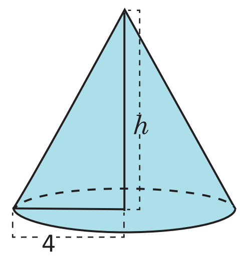
1. Carmen compra 2 chibolas de cristal y 4 metálicas por \$1.90, ¿cuánto cuestan las chibolas metálicas si las de cristal cuestan \$0.25 cada una?



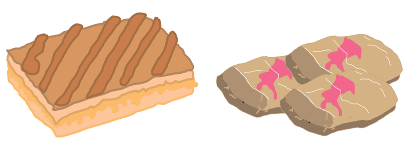
2. Mario necesita 1 024 MB para hacer un respaldo de sus archivos de la computadora, para ello cuenta con 3 memorias *USB* con capacidad de 256 MB. ¿Cuántas memorias *USB* con capacidad de 128 MB necesita Mario para esta labor?



3. El volumen de un cono es $8\pi \text{cm}^3$. Si el cono tiene un radio de 4 cm, determina la medida de la altura de dicho cono.



4. Beatriz vende pan dulce y ha olvidado el precio de la semita de piña, pero recuerda que ayer Miguel compró 2 semitas y 3 salpores y pagó \$0.83. Si Beatriz sabe que cada salpor cuesta \$0.11, ¿cómo podría Beatriz saber el precio de la semita de piña?



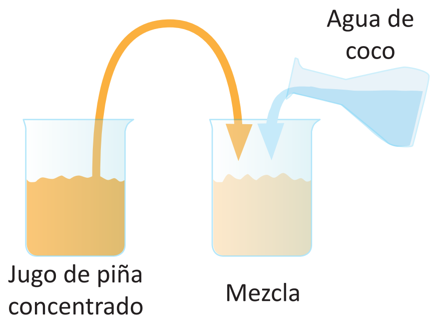
5. José cultiva maíz y frijol, este año venderá 5 quintales de frijol y 3 de maíz, él se ha proyectado recaudar \$500 con la venta de su cosecha. Si piensa vender el quintal de frijol a \$85, ¿qué precio debe tener el quintal de maíz para que José logre su proyección?

6. En la escuela de María se celebrará el día del amor y la amistad, por lo que se requiere instalar algunos parlantes, con el cuidado de que no sobrepasen los 120 decibeles de sonido. Si se cuenta con 2 parlantes de 40 decibeles cada uno, ¿cuántos parlantes de 20 decibeles se necesitan?

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

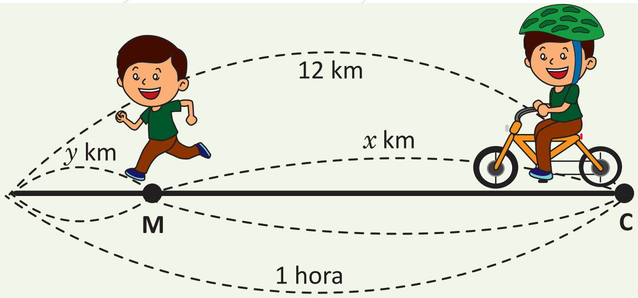
Los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud y anchura, sin que tuvieran relación con problemas de medida. La matemática comienza a interesarse por las operaciones que pueden realizarse con cualquier número, y esta idea permite dar el salto desde la Aritmética al Álgebra. En este contexto, Diofanto introdujo símbolos y dio soluciones algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como $x + y = 100$, $x - y = 40$.



Preparación de una mezcla.

Los sistemas de ecuaciones se utilizan para modelar situaciones de diferentes contextos, por ejemplo analizar el flujo de tráfico en una red de calles que se cruzan unas con otras, calcular el presupuesto de un proyecto, analizar la oferta y demanda mediante el equilibrio parcial, determinar la proporción de elementos para una mezcla, optimizar procesos de producción, etc.

Durante las clases siguientes estudiarás las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, los métodos de solución de los sistemas y sus aplicaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana en diferentes contextos, por ejemplo: geometría, ciencias naturales, economía, etc.



Uso de los modelos matemáticos para representar la velocidad.

1.1 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

$$3 + 4x - 8 = -3 - 5x + 25$$
$$4x - 5 = -5x + 22$$
$$4x + 5x = 22 + 5$$
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

$$20x - 3 = 17x + 21$$
$$20x - 17x = 21 + 3$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

$$12 \times \frac{7}{12}x + 12 \times \frac{5}{6} = 12 \times x$$
$$7x + 10 = 12x$$
$$7x - 12x = -10$$
$$-5x = -10$$
$$x = 2$$

1. Determina el valor de x que satisface las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 8 = 4$

b) $-4x - 2 = -18$

c) $2x - 3 = -x - 9$

d) $11x - 15 = 12 + 2x$

e) $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$

f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.5x - 1.2 = 0.4x + 3.3$

b) $3 + 0.8x = 2.4 + 0.9x$

c) $0.2x - 0.04 = 0.16x + 0.28$

d) $1.31x + 0.04 = 1.35x - 0.04$

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$

b) $-\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}$

c) $-\frac{1}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$

d) $-\frac{x + 5}{2} = \frac{3}{4}$

e) $\frac{x - 3}{3} = \frac{1}{6}x$

f) $-\frac{5x - 4}{3} = -\frac{3}{4}$

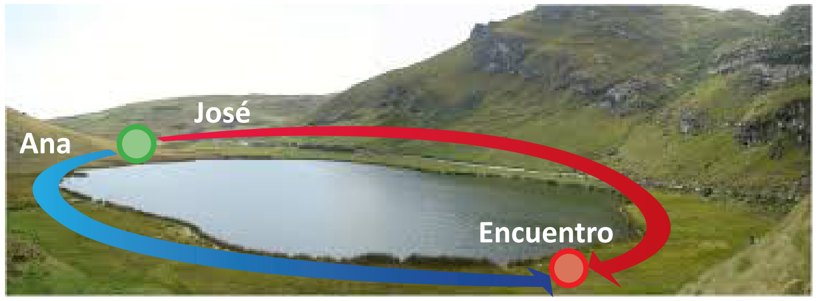
g) $\frac{x + 5}{12} = \frac{x + 7}{24}$

h) $-\left(\frac{x + 3}{2}\right) - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

1.2 Aplicación de las ecuaciones de primer grado con una incógnita

P

Resuelve la siguiente situación: una laguna tiene 1 200 m de perímetro, Ana corre a una velocidad de 140 m/min en dirección horaria, mientras que José corre a una velocidad de 160 m/min en sentido antihorario. Si ambos salen del mismo punto al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se vuelven a encontrar?



S

La suma de las distancias recorridas por Ana y José es equivalente a 1 200 m.

	Ana	José
Velocidad (metros/minutos)	140 m/min	160 m/min
Tiempo (minutos)	x	x
Distancia (metros)	$140x$	$160x$

$$140x + 160x = 1\,200$$
$$300x = 1\,200$$
$$x = \frac{1\,200}{300}$$
$$x = 4$$

Ana y José se encontrarán después de 4 minutos.

1. Julia tiene una librería, ella tiene \$5 de ganancias por cada libro que vende y sus gastos mensuales de funcionamiento son de \$150, ¿cuál es la mínima cantidad de libros que necesita vender para no quedar endeudada?

2. Un tanque está lleno de agua. Al utilizar la cuarta parte por la mañana y la octava parte por la tarde quedan en el tanque 100 galones, ¿cuál es la capacidad del tanque?

3. Marta renta un equipo multimedia a \$20 por día de uso, más una cuota única de \$10, cuando se retira el equipo del local. José tiene un negocio del mismo tipo en el que cobra \$18 por día de uso del equipo, más una cuota única de \$26 al retirar el equipo. Carlos desea alquilar el equipo por 5 días, ¿a los cuántos días el costo del alquiler es el mismo en los dos negocios?, ¿en cuál negocio debe alquilar el equipo Carlos?

4. Se contrata un bus para hacer una excursión, si se hubieran completado los asientos el costo del pasaje por persona hubiera sido de \$10, pero faltaron 10 personas, entonces el costo del pasaje por persona es de \$15. ¿Cuántos asientos tiene el bus?

5. Un vehículo sale de la ciudad A a la velocidad de 60 km/h, dos horas más tarde sale de la misma ciudad otro vehículo, siguiendo al primero, con una velocidad de 90 km/h.
   a) ¿En cuántas horas alcanza el otro vehículo al primero?
   b) Si la distancia entre la ciudad A y otra ciudad B fuera 350 km, ¿lograría el segundo auto alcanzar al primero?

1.3 Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas

P

Carlos es un jugador de baloncesto, y en la final de 2015 acertó 7 tiros en total, ¿cuántos tiros libres y de 2 puntos acertó?

a) Considerando que acertó x tiros libres y y tiros de 2 puntos, escribe una ecuación que represente la condición "acertó 7 tiros."
b) Construye una tabla para determinar los valores para x y y.

S

a) Considerando x tiros libres y y tiros de 2 puntos, entonces al formar la ecuación con la condición "acertó 7 tiros", se obtiene $x + y = 7$.

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
Total acertado	7	7	7	7	7	7	7	7

Las ecuaciones de la forma $x + y = 7$ se llaman **ecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, y tal como se desarrolló anteriormente, para estas ecuaciones existe más de un par de valores que las satisfacen.

Las ecuaciones que se aprendieron en séptimo grado se llaman ecuaciones de primer grado con una incógnita, por ejemplo:

$5x + 6 = 21$

Ahora se tienen dos valores desconocidos: x y y, por lo que se les denomina con dos incógnitas.

E

Según Carlos, por acertar 7 tiros obtuvo 10 puntos. ¿Cuántos tiros libres y cuántos de 2 puntos acertó?

a) Escribe una ecuación que represente la condición "obtuvo 10 puntos."
b) Agrega una fila a la tabla anterior y encuentra los pares de valores que cumplen la nueva condición.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
Total acertado: $x + y$	7	7	7	7	7	7	7	7
Total de puntos: $x + 2y$	14	13	12	11	10	9	8	7

Se considera siempre que ha acertado x tiros libres y y tiros de 2 puntos, entonces al formar una expresión con la condición "obtuvo 10 puntos", se obtiene $x + 2y = 10$.

C

Para satisfacer las dos condiciones y encontrar los valores de x y y que satisfagan las dos condiciones, se plantean las dos ecuaciones de forma simultánea $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

A la combinación de dos ecuaciones se le llama **sistema de dos ecuaciones** y la solución del sistema será el par de valores que satisfacen las dos ecuaciones. En el ejemplo, la solución del sistema es $x = 4$, $y = 3$.

Lee la siguiente situación:

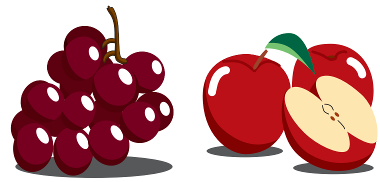
Ana tiene en su cartera 8 billetes, haciendo un total de \$55, unos billetes son de \$5 y otros de \$10. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene, considerando que Ana tiene x billetes de \$5 y y de \$10?

a) Escribe una ecuación que represente la condición "Ana tiene 8 billetes".
b) Escribe una ecuación que represente la condición "un total de \$55 ".
c) Elabora la tabla y determina cuántos billetes de cada tipo tiene.

1.4 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

P

En la tienda Vida Sana, una libra de uvas y una de manzanas cuesta \$5 y una libra de uvas y tres de manzanas cuesta \$11. ¿Cuál es el precio de una libra de uvas y una libra de manzanas?



a) Representa cada condición con una ecuación.
b) Construye una tabla para determinar los pares de valores que cumplen cada ecuación.

S

a) Considera como x el precio de la libra de uvas y como y el precio de la libra de manzanas.

Costo de una libra de uvas + costo de una libra de manzanas $\longrightarrow$ $x + y = 5$

Costo de una libra de uvas + costo de tres libras de manzanas $\longrightarrow$ $x + 3y = 11$

b) Para elaborar la tabla, considera las dos condiciones $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

x	0	1	**2**	3	4	5
y	5	4	**3**	2	1	0
$x + y$	5	5	**5**	5	5	5
$x + 3y$	15	13	**11**	9	7	5

Los valores para x y y que cumplen las dos condiciones son $\mathbf{x = 2, y = 3}$; entonces, el precio de una libra de uvas es de \$2 y el de manzanas \$3.

C

Los valores que cumplen las dos condiciones del problema se les llama **solución del sistema**, entonces **resolver un sistema de ecuaciones** es encontrar los valores que satisfacen las dos ecuaciones.

1. De los siguientes pares de valores, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + y = 32 \end{cases}$?

a) $x = 15$, $y = 5$
b) $x = 20$, $y = 6$
c) $x = 14$, $y = 4$

2. ¿A cuál sistema de ecuaciones corresponde la solución $x = 3$, $y = 1$?

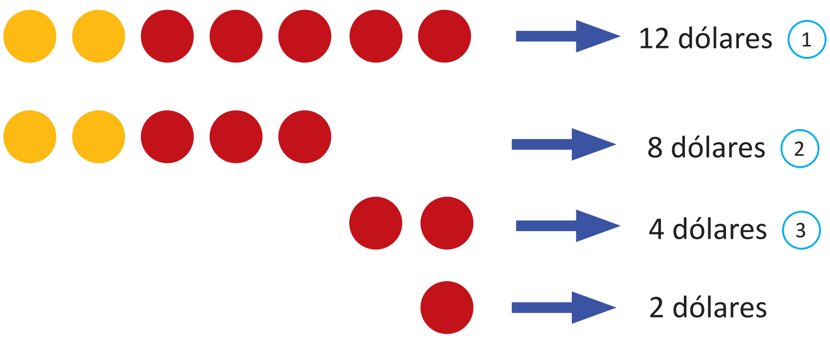
a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

1.5 Sentido del método de reducción

En el Mercado Central el precio de 2 piñas y 5 sandías es de 12 dólares y el de 2 piñas y 3 sandías es de 8 dólares, ¿cuál es el precio de 1 piña y de 1 sandía?

Si se representa gráficamente:

Precio de 1 piña , precio de 1 sandía .



El precio de 1 piña es de \$1 y el de la sandía de \$2.

Llamando x dólares al precio de la piña y y dólares al de la sandía, al representar la solución gráfica 1 y 2 se tiene:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 & (1) \\ 2x + 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

A partir de estas dos ecuaciones se obtiene: $2y = 4$ (3)

$y = 2$

$2x + 3 \times 2 = 8$, de donde se obtiene $x = 1$.

Para resolver un sistema de ecuaciones en el que los coeficientes de una de las incógnitas tienen igual signo e igual valor absoluto:

1. Se encuentra la diferencia restando los miembros izquierdos y derechos de las dos ecuaciones, respectivamente.
2. Se obtiene una nueva ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y = 12 \\ (-) & 2x + 3y = 8 \\ \hline & 2y = 4 \\ & y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3 \times 2 &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Al proceso descrito se le llama **reducción**. Por ejemplo, para el sistema resuelto, x tiene coeficientes de igual valor absoluto e igual signo.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción por sustracción.

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 34y = 0 \\ 2x + 34y = 9 \end{cases}$

1.6 Método de reducción por adición

P

Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 5y = 25 & (1) \\ 5x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

Considera los signos de los coeficientes e indica qué operación realizar para aplicar el método de reducción.

> Considera el signo y valor absoluto de los coeficientes de la letra y.

S

Al sumar los miembros izquierdo y derecho, respectivamente, de las dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{array}{rrcll} & 3x - 5y & = & 25 & \longrightarrow (1) \\ (+) & 5x + 5y & = & 15 & \longrightarrow (2) \\ \hline & 8x & = & 40 & \\ & x & = & 5 & \end{array}$$

> Generalmente, en álgebra, se suprime el símbolo × y se expresa la multiplicación con paréntesis; por ejemplo, 5 × 5 = 5(5).

Sustituye $x = 5$ en (2) y encuentra el valor de y,

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= 15 \\ 5(5) + 5y &= 15 \\ 5y &= 15 - 25 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, aplicando reducción, es necesario considerar siempre el valor absoluto y el signo de los coeficientes de las incógnitas.

Si los coeficientes de una de ellas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, se suman respectivamente los términos en ambos miembros de las dos ecuaciones.

Por ejemplo, en el sistema resuelto anteriormente, los coeficientes de y tienen igual valor absoluto, pero distinto signo:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 25 \\ 5x + 5y = 15 \end{cases}$$

> Tal como se muestra, cuando se resuelve un sistema de ecuaciones aplicando reducción, se obtiene una tercera ecuación con una incógnita:
>
> - Si la ecuación obtenida no contiene a y, se dice **reducir** y.
> - Si la ecuación obtenida no contiene a x, se dice **reducir** x.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición.

a) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$

1.7 Método de reducción por adición o sustracción, parte 1

P

¿Cómo puedes reducir un sistema cuando los valores absolutos de los coeficientes de la incógnita a reducir no son iguales?

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 3y = -4 & ① \\ 4x + 2y = 4 & ② \end{cases}$

S

$$\begin{array}{lll} ① \times 4 & \longrightarrow & \quad 4x + 12y = -16 \\ ② & \longrightarrow & \underline{(-)\ 4x + 2y \ \ = 4} \\ & & \qquad\quad 10y = -20 \\ & & \qquad\qquad y = -2 \end{array}$$

Sustituyendo y en ①

$$\begin{aligned} x + 3y &= -4 \\ x + 3(-2) &= -4 \\ x - 6 &= -4 \\ x &= -4 + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -2$.

Recuerda la propiedad de las igualdades: cuando multiplicas una ecuación por un número, se multiplica todos los términos de ambos miembros. Por ejemplo, si multiplicas la ecuación $x + 3y = -4$ por 4:

$$4(x + 3y) = 4(-4)$$

C

Para resolver el sistema de ecuaciones donde ninguna de las incógnitas tiene coeficiente con igual valor absoluto, pero al analizar los coeficientes para una de las incógnitas uno es múltiplo del otro, es necesario:

1. Identificar la incógnita que conviene reducir.
2. Multiplicar una ecuación por un número de modo que el valor absoluto del coeficiente sea igual al coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación.
3. Determinar qué operación realizar: suma o resta.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor encontrado en el numeral 4 en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Para el ejemplo resuelto se eligió reducir x, pues tiene coeficiente 1 en ①.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición o sustracción.

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ 9x + 5y = 64 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$

Identificar la incógnita en la que se desea reducir, luego pensar un número por el que se debe multiplicar para que sus coeficientes tengan igual valor absoluto.

1.8 Método de reducción por adición o sustracción, parte 2

P

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 3 & ① \\ 2x - 3y = 1 & ② \end{cases}$

¿Qué debes hacer para que los coeficientes de una de las incógnitas tengan igual valor absoluto y aplicar el método de reducción?

S

$$\begin{array}{lcr} ① \times 2 & \longrightarrow & 6x - 8y = 6 \\ ② \times 3 & \longrightarrow & (-)\ 6x - 9y = 3 \\ \hline & & y = 3 \end{array}$$

Sustituyendo y en ②

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x - 3(3) &= 1 \\ 2x - 9 &= 1 \\ 2x &= 1 + 9 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5,\ y = 3$.

$$\begin{array}{lcr} ① \times 3 & \longrightarrow & 9x - 12y = 9 \\ ② \times 4 & \longrightarrow & (-)\ 8x - 12y = 4 \\ \hline & & x \qquad = 5 \end{array}$$

Sustituyendo x en ①

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 3 \\ 3(5) - 4y &= 3 \\ 15 - 4y &= 3 \\ -4y &= 3 - 15 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5,\ y = 3$.

C

Para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando reducción, es necesario:

1. Identificar la incógnita que se va a reducir.
2. Multiplicar cada una de las ecuaciones por un número de tal manera que la incógnita que se va a reducir tenga coeficientes de igual valor absoluto.
3. Identificar si se suma o resta para reducir.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor obtenido en la ecuación reducida, en una de las ecuaciones del sistema.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición o sustracción.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 18 \\ 7x - 5y = 41 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 37 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 0 \end{cases}$

Para igualar los valores absolutos de los coeficientes primero piensa la incógnita que vas a reducir

Para tener coeficientes del mismo valor absoluto, se puede pensar en el mcm de los coeficientes para que los cálculos sean más sencillos.

1.9 Sentido del método de sustitución

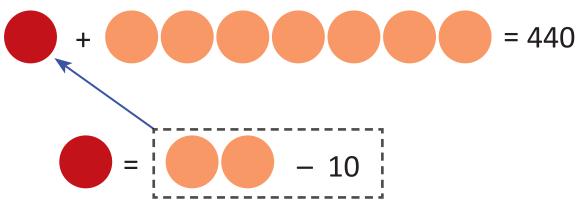
P

En el Mercado Central el costo de 1 quintal de frijol y 7 quintales de maíz es de 440 dólares y el costo de 1 quintal de frijol es de 10 dólares menos que el de 2 quintales de maíz. ¿Cuál es el precio de un quintal de frijol y de uno de maíz?

S

Si se representa gráficamente:

Precio de un quintal de frijol, precio de un quintal de maíz .



Representando por x el precio del quintal de frijol y por y el de maíz, para satisfacer las dos condiciones se forma el sistema:

$$\begin{cases} x + 7y = 440 & (1) \\ x = 2y - 10 & (2) \end{cases}$$

En la ecuación (2) puede verse que $x = 2y - 10$.

$x = 2y - 10$

↓

$x + 7y = 440$

↓

$(2y - 10) + 7y = 440$

Al sustituir (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} (2y - 10) + 7y &= 440 \\ 2y - 10 + 7y &= 440 \\ 9y &= 440 + 10 \\ 9y &= 450 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido $y = 50$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} x &= 2(50) - 10 \\ x &= 100 - 10 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

C

De las dos ecuaciones del sistema se obtuvo una nueva ecuación con una incógnita, sustituyendo la incógnita x en la ecuación $x + 7y = 440$, y al resolverla se obtiene que el costo del quintal de maíz es de \$50 y el de frijol de \$90.

Tal como se muestra en el ejemplo, el método que reduce en una incógnita al sustituir una de las incógnitas por su expresión equivalente, se llama **sustitución.**

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x = 9y - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - 3y = 12 \\ y = 11 - 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 10 \\ \frac{1}{2}y = 9 - 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y = 7 - x \end{cases}$

1.10 Método de sustitución

P

Aplica el método de sustitución para resolver el siguiente sistema y describe el proceso realizado:

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

S

Se tiene el sistema:

$$5x + y = 14 \quad (1)$$
$$2x + 3y = 16 \quad (2)$$

Despeja la incógnita que tenga coeficiente 1.

Se despeja y en la ecuación (1) y se obtiene: $y = 14 - 5x$,
se sustituye y por $14 - 5x$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ -13x + 42 &= 16 \\ -13x &= 16 - 42 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$5x + y = 14 \;\downarrow\; y = 14 - 5x \;\downarrow\; 2x + 3y = 16 \;\downarrow\; 2x + 3(14 - 5x) = 16$$

Al sustituir $x = 2$ en $y = 14 - 5x$

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5x \\ y &= 14 - 5(2) \\ y &= 14 - 10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 4$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando sustitución, es necesario considerar:

1. Identificar la incógnita que resulta más fácil despejar.
2. Realizar el despeje.
3. Sustituir la incógnita despejada en el numeral 2 en la otra ecuación.
4. Resolver la ecuación obtenida.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$

Para identificar la incógnita que resulta más fácil despejar se puede ver los coeficientes.

c) $\begin{cases} x = y + 9 \\ 7x - 2y = 57 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$

1.11 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

P

Dado el sistema $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$

- Indica el método que consideras más adecuado para resolverlo. Justifica tu respuesta.
- Determina la solución.

S

- Aplicando reducción.

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 10x - 3y = 4 \\ (+) & -4x + 3y = 2 \\ \hline & 6x \qquad = 6 \\ & x = 1 \end{array}$$

- En (2) sustituye $x = 1$

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

- Aplicando sustitución.

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$$

- Sustituye $3y$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 10x - 3y &= 4 \\ 10x - (4x + 2) &= 4 \\ 10x - 4x - 2 &= 4 \\ 6x &= 4 + 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Sustituye $x = 1$ en (2)

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones, se puede seleccionar un método según los tipos de ecuaciones.

- Cuando las incógnitas tienen coeficientes del mismo valor absoluto o uno de sus coeficientes es múltiplo del otro, es más fácil aplicar el método de **reducción**.
- Cuando una ecuación tiene despejada una incógnita o la incógnita tiene coeficiente 1, es más fácil aplicar **sustitución**.

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2y = 5x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 9x - 8y = -18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x + 11 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

2. ¿En qué casos es más útil emplear el método de sustitución? ¿En qué casos es más útil emplear el método de reducción?

1.12 Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 0.4x + 1.7y = 5.8 & (1) \\ 0.1x + 0.3y = 1.2 & (2) \end{cases}$$

Convierte los coeficientes en números enteros y aplica uno de los métodos estudiados.

S

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$(1) \times 10 \longrightarrow 4x + 17y = 58$$
$$(2) \times 10 \longrightarrow x + 3y = 12$$

2. Se despeja x en (2)

$$x + 3y = 12$$
$$x = 12 - 3y \quad (3)$$

3. Se sustituye x en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 4x + 17y &= 58 \\ 4(12 - 3y) + 17y &= 58 \\ 48 - 12y + 17y &= 58 \\ 5y &= 58 - 48 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

4. Se sustituye $y = 2$ en (3)

$$x = 12 - 3(2)$$
$$x = 6$$

La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o 1 000, es equivalente a mover el punto decimal a la derecha tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.

$0.123 \times 10 = 1.23$	$0.2 \times 10 = 2$
$0.123 \times 100 = 12.3$	$0.2 \times 100 = 20$
$0.123 \times 1\,000 = 123$	$0.2 \times 1\,000 = 200$

Recuerda multiplicar todos los términos de ambos miembros de la ecuación.

C

Tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, para resolver el sistema de ecuaciones cuyos coeficientes son decimales, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes se conviertan en números enteros, luego se aplica el método que se considere más adecuado.

Resuelve el sistema aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 3 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0.15x + 0.08y = 1 \\ 0.5x + 0.3y = 3.5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 0.1 \\ x + 0.5y = 3.5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0.8x + 2y = 0.9 \\ 0.4x - 3y = -0.55 \end{cases}$

¿Por cuánto se debe multiplicar cada ecuación para convertir los coeficientes en números enteros?

Aunque no se conviertan en enteros los coeficientes se puede resolver el sistema, pero el cálculo será más complejo.

Intenta resolver los sistemas sin convertir los coeficiente a números enteros, luego compara tus resultados.

1.13 Sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & (1) \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & (2) \end{cases}$$

Convierte los coeficientes en números enteros y luego aplica uno de los métodos estudiados: reducción o sustitución.

S

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$(1) \times 12 \longrightarrow 8x + 9y = 144$$
$$(2) \times 9 \longrightarrow 7x + 9y = 135$$

2. Se reduce en y, restando (2) de (1)

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & & 8x + 9y = 144 \\ (2) \longrightarrow & (-) & 7x + 9y = 135 \\ \hline & & x \qquad = 9 \end{array}$$

Se debe aplicar las propiedades de las igualdades estudiadas en séptimo grado.

No olvidar multiplicar todos los términos de ambos miembros de las ecuaciones.

3. Se sustituye $x = 9$ en la ecuación (1)

$$8(9) + 9y = 144$$
$$9y = 144 - 72$$
$$9y = 72$$
$$y = 8$$

La solución del sistema es $x = 9$, $y = 8$.

C

Tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, para resolver el sistema de ecuaciones cuyo coeficiente es un número fraccionario, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes fraccionarios se conviertan en números enteros, luego se aplica el método de solución que se considere más adecuado.

Aunque no se conviertan en enteros los coeficientes se puede resolver el sistema, pero el cálculo será más complejo.

Intenta resolver los sistemas sin convertir los coeficiente a números enteros, luego compara tus resultados.

Resuelve los sistemas aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ 3x + 5y = 63 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

Para saber por cuál número multiplicar, considera el mcm de los denominadores.

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -4 \\ x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{5}y = -2 \\ \frac{1}{3}x + y = 4 \end{cases}$

1.14 Sistemas de ecuaciones que contienen signos de agrupación

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & (1) \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & (2) \end{cases}$$

Suprimir los signos de agrupación para obtener un sistema equivalente y luego aplicar uno de los métodos estudiados: reducción o sustitución.

S

1. Realiza las operaciones indicadas:

$$\begin{array}{lll} (1) \longrightarrow & 8x - 3x + 3y = 50 & \longrightarrow 5x + 3y = 50 \\ (2) \longrightarrow & 3x + 3y - 6y + 5x = 41 & \longrightarrow 8x - 3y = 41 \end{array}$$

2. Reduce en y, sumando (1) y (2)

$$\begin{array}{lrr} (1) \longrightarrow & & 5x + 3y = 50 \\ (2) \longrightarrow & (+) & 8x - 3y = 41 \\ \hline & & 13x \quad = 91 \\ & & x = 7 \end{array}$$

En séptimo grado se aprendió a suprimir los signos de agrupación efectuando las operaciones indicadas y aplicando la ley de los signos.

3. Sustituye x en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 50 \\ 5(7) + 3y &= 50 \\ 3y &= 50 - 35 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 7$, $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tiene signos de agrupación, como el que se muestra en el ejemplo, es necesario:

- Suprimir los signos de agrupación y efectuar las operaciones indicadas.
- Resolver el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Resuelve el sistema aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 4(y - x) + y = -27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x - y) + 34 = 0 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5(2x + y) = 19 \\ 5(6x + y) - 10 = 45 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}(4x - 4) + \frac{3}{2}y = 2 \\ 3(2x + 34) - 5y = -4 \end{cases}$

1.15 Sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

P

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.8x + 1.3y - 14.5 = 0 & (1) \\ 0.4x - 0.3y - 2.5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Transformar cada una de las ecuaciones del sistema a la forma $ax + by = -c$, dejando los dos términos con incógnitas a un solo miembro de la igualdad.

S

1. Transpone el término independiente c para llevar a la forma $ax + by = -c$.

$$(1) \longrightarrow 0.8x + 1.3y = 14.5$$
$$(2) \longrightarrow 0.4x - 0.3y = 2.5$$

2. Multiplica por 10 para convertir los coeficientes a números enteros.

$$\times 10 \longrightarrow 8x + 13y = 145$$
$$\times 10 \longrightarrow 4x - 3y = 25$$

3. Reduce x, restando 2 veces (2) de (1)

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & & 8x + 13y = 145 \\ (2) \times 2 \longrightarrow & (-) & 8x - 6y = 50 \\ \hline & & 19y = 95 \\ & & y = 5 \end{array}$$

4. Sustituye $y = 5$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 25 \\ 4x - 3(5) &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 25 + 15 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 10$, $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$, como el que se muestra en el ejemplo, se debe:

- Llevar las ecuaciones a la forma $ax + by = -c$, efectuando la transposición de términos.
- Resolver el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Resuelve los sistemas aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 15y = 4x + 3 \end{cases}$

Intenta también resolver los sistemas sin llevar a la forma $ax + by = -c$.

1.16 Practica lo aprendido

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 5x - 3y = 32 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0.8x - 0.5y = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0.8x - 0.2y = 7 \\ 0.4x + 2y = 14 \end{cases}$

1.17 Practica lo aprendido

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{x - 5}{4} = x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2(x + y) = 3y - 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

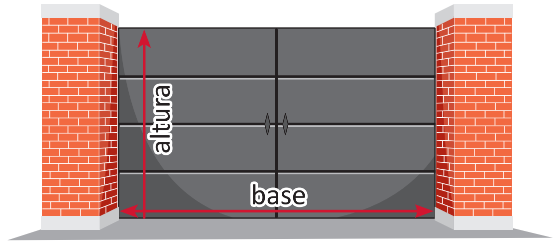
5. $\begin{cases} 6x - 5y - 7 = 0 \\ -13x + 30y - 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0.2x + 0.3y + 0.2 = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$

2.1 Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría

P

Encuentra las dimensiones de un portón, sabiendo que el perímetro mide 16 metros y la base mide 2 metros más que la altura.



S

1. Identifica las cantidades conocidas y las desconocidas, y define las incógnitas; sea x la base y y la altura.
   "El perímetro mide 16 m" → $2x + 2y = 16$
   "La base excede en 2 m a la altura" → $y = x - 2$

2. Encuentra las igualdades y escribe el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 16 & (1) \\ y = x - 2 & (2) \end{cases}$

Escribir una ecuación para cada una de las condiciones que plantea el problema.

El perímetro es:
2(base) + 2(altura) = 16
$2x + 2y = 16$

3. Resuelve el sistema aplicando sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + 2(x - 2) &= 16 \\ 2x + 2x - 4 &= 16 \\ 4x - 4 &= 16 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- Sustituye el valor $x = 5$ en (2)

$$\begin{aligned} y &= 5 - 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La base es 5 m y la altura 3 m.

4. Verifica si la solución es pertinente a la situación.
   Los valores son positivos, por tanto son pertinentes para las dimensiones del portón.

C

Para resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario:

1. Definir las cantidades que se representan con las incógnitas.
2. Escribir las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones.
4. Verificar si la solución es pertinente a la situación.

1. Don Carlos heredó una parcela de forma rectangular, en la cual el largo más el ancho mide 30 metros y la diferencia entre el largo y el ancho es de 6 metros. ¿Cuánto mide de largo y de ancho la parcela?

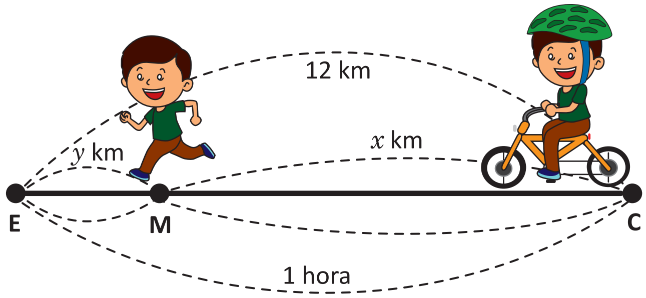
2. La base de un rectángulo mide 20 cm más que su altura. Si el perímetro mide 172 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2.2 Aplicación de sistemas de ecuaciones en ciencias naturales

P

Antonio, para ir a la escuela que dista 12 km de su casa, viaja en bicicleta a una velocidad de 20 km por hora, desde su casa hasta el mercado y de ahí hasta la escuela corre a 4 km por hora. El recorrido tarda en total 1 hora. ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y el mercado y del mercado a la escuela?

a) Elabora la tabla que representa la relación entre distancias y tiempos.
b) Escribe un sistema de ecuaciones que represente la información, luego resuélvelo.



S

a)

	Desde la casa (C) al mercado (M)	Desde el mercado (M) a la escuela (E)	Total
Distancia	x km	y km	12 km
Velocidad	20 km por hora	4 km por hora	--------
Tiempo	$\frac{x}{20}$ hora	$\frac{y}{4}$ hora	1 hora

Velocidad = $\frac{\textit{distancia}}{\textit{tiempo}}$

Tiempo = $\frac{\textit{distancia}}{\textit{velocidad}}$

b) Se plantea el sistema con las condiciones dadas: $\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Se resuelve aplicando reducción:

$$\begin{array}{lcr} ① & \longrightarrow & x + y = 12 \\ ② \times 20 & \longrightarrow & (-)\ x + 5y = 20 \\ \hline & & -4y = -8 \\ & & y = 2 \end{array}$$

- Sustituyendo $y = 2$ en ①

$x + 2 = 12$

$x = 10$

Los valores $x = 10$ km, $y = 2$ km satisfacen las dos condiciones del problema; por tanto desde la casa al mercado hay 10 km y del mercado a la escuela hay 2 km.

C

Para resolver situaciones de las ciencias naturales, es importante que se identifique e indique las magnitudes que serán representadas por las incógnitas x y y; luego plantear el sistema y resolverlo.

1. Carlos viajó a la playa el fin de semana en su vehículo; desde su casa a la playa hay 50 km, desde su casa hasta la gasolinera llevaba una velocidad de 30 km por hora, y de ahí hasta la playa condujo a 15 km por hora. El recorrido tarda en total 2 horas. ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y la gasolinera y de la gasolinera a la playa?

2. Un bote que navega en aguas tranquilas, alcanza una velocidad de 25 km por hora y con el viento a su favor 30 km por hora. Para ir desde el muelle hasta el punto de pesca tardó 3 horas y media. ¿Cuánto tiempo navegó en aguas tranquilas y cuánto tiempo con el viento a su favor, considerando que entre los dos lugares hay 92 kilómetros?

2.3 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 1

P

Ana compró su vestido con un descuento del 15%, su hermana Beatriz compró otro vestido 25 dólares más caro que el de Ana, pero consiguió un descuento del 20%, y al final solamente pagó 8 dólares más que Ana. ¿Cuál era el precio de cada vestido sin el descuento?

a) Elabora la tabla que representa la relación entre los precios.
b) Escribe el sistema de ecuaciones que represente las condiciones del problema y resuélvelo.

S

1.

	Vestido de Ana	Vestido de Beatriz	Comparación de precios
Precio original	x dólares	y dólares	$y = x + 25$
Descuento	15% de x	20% de y	– – – – – – – –
Precio con descuento	$0.85x$ dólares	$0.8y$ dólares	$0.8y = 0.85x + 8$ dólares

2. Se plantea el sistema con las condiciones del problema: $\begin{cases} y = x + 25 & (1) \\ 0.8y = 0.85x + 8 & (2) \end{cases}$

- Se convierten en enteros los coeficientes de la ecuación (2)
  $80y = 85x + 800$

3. Aplicando el método de sustitución:

$$\begin{aligned} 80(x + 25) &= 85x + 800 \\ 80x + 2\,000 &= 85x + 800 \\ 80x - 85x &= 800 - 2\,000 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

- Sustituyendo $x = 240$ en la ecuación (1)
  $y = 240 + 25$
  $y = 265$

4.

	Precio sin descuento	Descuento	Precio con descuento
Ana	\$240.00	\$36.00	\$204.00
Beatriz	\$265.00	\$53.00	\$212.00

Por tanto, Ana pagó \$204.00 por el vestido y Beatriz \$212.00.

C

Para resolver situaciones sobre tanto por ciento mediante el uso de sistemas de ecuaciones, es importante indicar los datos que serán representados por las magnitudes x y y; luego plantear el sistema y resolverlo.

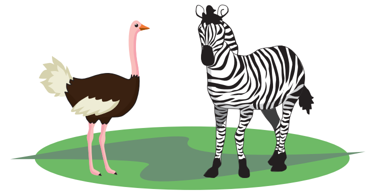
1. María ha comprado un pantalón y una blusa. Los precios de estas prendas suman \$70.00, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en la blusa, pagando en total \$59.00, ¿cuál es el precio sin descuento de cada prenda?

2. Un comerciante compra dos objetos por \$200.00 y los vende por un total de \$233.00. Si en la venta de uno de los objetos gana el 25% y en el otro pierde el 20%, ¿cuánto pagó por cada uno de los objetos?

2.4 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 2

P

En el zoológico tienen avestruces y cebras a razón de 7 a 8, si entre todas se cuentan 92 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas cebras hay?



S

1. Llamando y al número de avestruces y x al número de cebras, representa las condiciones:

"a razón de 7 a 8" $\quad y:x = 7:8 \longrightarrow 8y = 7x$

"se cuentan 92 patas" $\quad 4x + 2y = 92 \longrightarrow 4x + 2y = 92$

2. Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} 8y = 7x & (1) \\ 4x + 2y = 92 & (2) \end{cases}$$

3. Se resuelve el sistema:

- Despejar y de la ecuación (1)

$$y = \frac{7}{8}x$$

- Sustituir $y = \frac{7}{8}x$, en la ecuación (2)

$$4x + 2\left(\frac{7}{8}x\right) = 92$$

$$4x + \frac{7}{4}x = 92$$

$$16x + 7x = 368$$
$$23x = 368$$
$$x = 16$$

- Sustituye el valor $x = 16$ en (1)

$$y = \frac{7}{8}(16)$$

$$y = 7(2)$$

$$y = 14$$

Por lo tanto, hay 14 avestruces y 16 cebras.

- Las partes de una razón:

$a:b$

Antecedente $\quad$ Consecuente

- La propiedad fundamental de las proporciones.

  Si $a:b = c:d$, entonces:
  $a \times d = b \times c$

C

Los sistemas de ecuaciones pueden utilizarse para resolver distintas situaciones de la vida cotidiana, tal como se evidencia en los ejemplos desarrollados:

- Geometría: áreas de figuras planas, perímetro, etc.
- Ciencias naturales: movimiento rectilíneo, etc.
- Matemática financiera: tanto por ciento, etc.
- Aritmética: razones, proporciones, etc.

1. Un fontanero y su ayudante reciben por la instalación de tres sanitarios $270.00, los que se reparten en la razón 7:2, ¿cuánto dinero recibirá cada uno?

2. Las edades de dos hermanos son entre sí como 2:5 y ambas edades suman 28 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

3. El perímetro de una cancha de fútbol mide 432 metros. Si la razón entre el ancho y el largo es 5:7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?

2.5 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. Mario entrena en el río. Primero nada contra la corriente y demora 30 minutos en recorrer 2 kilómetros. Luego, nada a favor de la corriente y demora 15 minutos en recorrer la misma distancia.
   a) ¿Cuántas cantidades desconocidas involucra el problema? ¿Cuáles son?
   b) ¿Cuáles son los datos conocidos del problema?
   c) ¿Qué condiciones impone el problema sobre estas cantidades? ¿Cómo se expresan matemáticamente estas condiciones?
   d) ¿Cuál es la velocidad de Mario respecto al río y la velocidad del río respecto a la orilla?

2. Carlos pagó una cuenta de \$300 con billetes de \$5 y de \$10. En total empleó 45 billetes para hacer el pago, ¿cuántos billetes de cada valor utilizó?

3. Un número de dos cifras es tal, que la cifra que ocupa el lugar de las decenas es el doble de la que ocupa el lugar de las unidades, y la diferencia de las dos cifras es igual a 3. Calcula ese número.

4. Juan dispone de un capital de \$8,000.00, del cual una parte la deposita en una cuenta al 5% de interés anual y otra al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año será de \$8,450.00.

5. Miguel pagó \$84.00 por 3 cajas de clavos y 5 cajas de tornillos. José compró 5 cajas de clavos y 7 de tornillos, y tuvo que pagar \$124.00, ¿cuál es el precio de cada caja de clavos y de cada caja de tornillos?

2.6 Practica lo aprendido

Valora si los datos y las condiciones son suficientes para que los siguientes problemas tengan solución o que la solución sea lógica.

1. En la granja El Corral se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada tipo se han utilizado?

2. El propietario de una hacienda ha decidido sembrar dos tipos de cultivo: maíz y frijol. La semilla del maíz cuesta \$4 por tarea, y la del frijol \$8 por tarea. El costo de mano de obra es de \$10 por tarea para el maíz y de \$20 por tarea para el frijol. Si el propietario dispone gastar \$216 en semillas y \$5,400 en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada cultivo podrá sembrar?

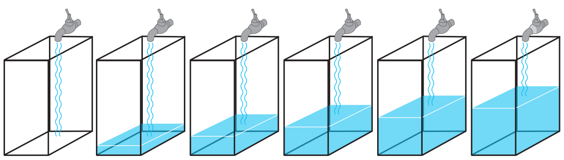
3. Si al antecedente de una razón le sumamos 3 y al consecuente le restamos 2, la razón se convierte en 6:7; pero si al antecedente le restamos 5 y al consecuente le sumamos 2, la razón resultante es 2:5, ¿cuál es el valor del antecedente y del consecuente de la razón?

4. Un elaborador de jugos artesanales se dispone a preparar una mezcla entre dos variedades. Para responder a un pedido de compra, el volumen total de la mezcla a obtener debe ser de 1 420 litros. Si el volumen de coco que interviene en la mezcla es igual a dos tercios del volumen de piña más 120 litros, ¿cuántos litros de cada variedad deben mezclarse para obtener la variedad de jugo deseada?

Unidad 3

Función lineal

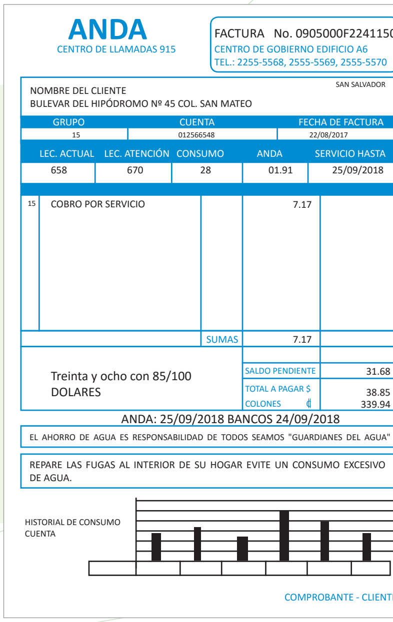
El término función fue usado por primera vez en el año 1637, por el matemático francés René Descartes, para designar una potencia n de la variable x. En 1694, el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente, su uso más generalizado ha sido definido en 1829 por el matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien escribió una definición de función donde relaciona la variable x y y mediante alguna regla o correspondencia que le asigna automáticamente un valor a y.



Para modelar el tiempo de llenado de una pila se puede utilizar la función lineal.

Las funciones permiten describir el mundo real en términos matemáticos, como por ejemplo, las variaciones de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, el ritmo cardíaco, el crecimiento poblacional, etc.

Sobre las funciones, en este grado conocerás las más usuales en la modelización de fenómenos de las distintas ciencias y de la vida diaria, así como sus características generales, tanto analíticas como gráficas. Específicamente se revisará la función lineal y sus elementos, que utilizarás para resolver situaciones en diferentes contextos; por ejemplo, determinar el total a pagar en una factura, a partir del análisis de consumo mensual y los cargos fijos.



ANDA
CENTRO DE LLAMADAS 915

FACTURA No. 0905000F2241150
CENTRO DE GOBIERNO EDIFICIO A6
TEL.: 2255-5568, 2555-5569, 2555-5570

SAN SALVADOR
NOMBRE DEL CLIENTE
BULEVAR DEL HIPÓDROMO Nº 45 COL. SAN MATEO

GRUPO	CUENTA	FECHA DE FACTURA
15	012566548	22/08/2017

LEC. ACTUAL	LEC. ATENCIÓN	CONSUMO	ANDA	SERVICIO HASTA
658	670	28	01.91	25/09/2018

15	COBRO POR SERVICIO		7.17	
		SUMAS	7.17	

Treinta y ocho con 85/100
DOLARES

SALDO PENDIENTE	31.68
TOTAL A PAGAR $	38.85
COLONES ₡	339.94

ANDA: 25/09/2018 BANCOS 24/09/2018

EL AHORRO DE AGUA ES RESPONSABILIDAD DE TODOS SEAMOS "GUARDIANES DEL AGUA"

REPARE LAS FUGAS AL INTERIOR DE SU HOGAR EVITE UN CONSUMO EXCESIVO DE AGUA.

HISTORIAL DE CONSUMO
CUENTA

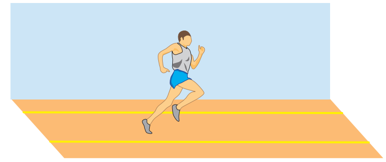
COMPROBANTE - CLIENTE

El total a pagar en una factura se puede determinar mediante una función lineal.

1.1 Recordando el sentido de la proporcionalidad directa

P

Un corredor de maratón ha avanzado 2 km en los primeros 8 minutos de su recorrido. Si mantiene la velocidad después de los 8 minutos:



1. Encuentra la constante de proporcionalidad.
2. Representa la distancia recorrida y, después de x minutos.
3. ¿Cuánto tiempo tardará en completar los 42 km del recorrido?

S

1. Como se conoce un par de valores para x y y, se sustituyen en la expresión $y = ax$ para calcular el valor de a.

   $y = ax$, cuando $x = 8$, $y = 2$.

   $2 = a(8)$

   $\frac{2}{8} = a$

   $a = \frac{1}{4}$

2. Al expresar la distancia y, después de x minutos, se tiene $y = \frac{1}{4}x$.

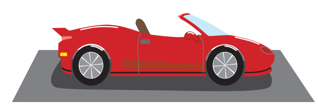
3. Para determinar en cuánto tiempo completa los 42 km de recorrido, se sustituye el valor de $y = 42$, en $y = \frac{1}{4}x$.

   $42 = \frac{1}{4}x$, entonces $x = 168$ minutos.

Por tanto, para completar los 42 km, necesita 2 horas con 48 minutos.

1. Un automóvil consume 5 litros de gasolina por cada 100 kilómetros que recorre.

   a) Encuentra la constante de proporcionalidad.
   b) Represента la cantidad de litros de gasolina consumida y, después de x kilómetros.
   c) ¿Cuántos litros de gasolina necesita para recorrer 1 250 kilómetros?



2. Por un grifo salen 38 litros de agua en 5 minutos, completa la tabla y responde.

Tiempo	5	10		
Litros de agua	38	76		152

   a) ¿Es proporcional el número de litros al tiempo transcurrido? Justifica tu respuesta.
   b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se tengan 228 litros?

3. Tres fotografías cuestan 5 dólares, seis fotografías 9 dólares. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio.

4. Por 3 horas de trabajo, Alberto ha cobrado $60. ¿Cuánto cobrará por 8 horas, si el pago recibido es directamente proporcional al tiempo trabajado?

1.2 Aplicaciones de la proporcionalidad directa

P

La tabla muestra la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro, completa la tabla y realiza lo siguiente:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro y (cm)	4	8			

1. Determina si existe proporcionalidad directa entre la medida del lado del cuadrado x y su respectivo perímetro y, justifica tu respuesta utilizando la relación $y = ax$.

2. Representa el perímetro y, cuando el lado del cuadrado mide x.

3. Representa gráficamente la relación entre la medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

S

Al completar la tabla se tiene:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro y (cm)	4	8	12	16	20

1. Como se conocen algunos valores para x y los respectivos valores para y, se puede calcular la constante de proporcionalidad calculando el cociente entre ellos:

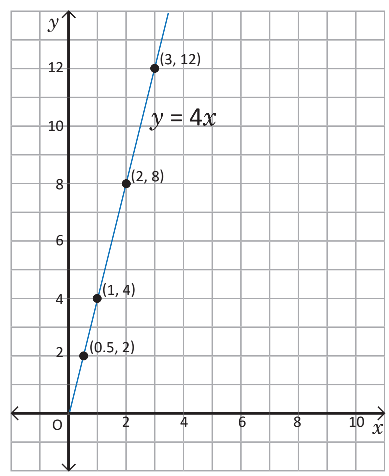
   Si $x = 2$, $y = 8$, entonces $8 = a(2)$, $a = \frac{8}{2} = 4$, se puede verificar que el cociente es igual para todos los casos.

2. Como la constante de proporcionalidad es 4, entonces $y = 4x$.

3. Para elaborar la gráfica de la relación entre el lado del cuadrado y su perímetro, es necesario representar en el plano algunos pares de valores para x y y de la tabla, luego se unen con segmentos de recta para considerar todos los posibles valores que pueda tomar el lado del cuadrado.

   - Si $x = 0$, $y = 4(0) = 0$, este sería el mínimo valor que puede tomar x, en este caso el cuadrado se vuelve un punto.

   - Si $x = 0.5$, $y = 4(0.5) = 2$.



Así se pueden determinar más pares ordenados haciendo variar la medida del lado del cuadrado.

C

Para representar la relación de proporcionalidad directa en forma $y = ax$, a partir de un par de valores de las variables:

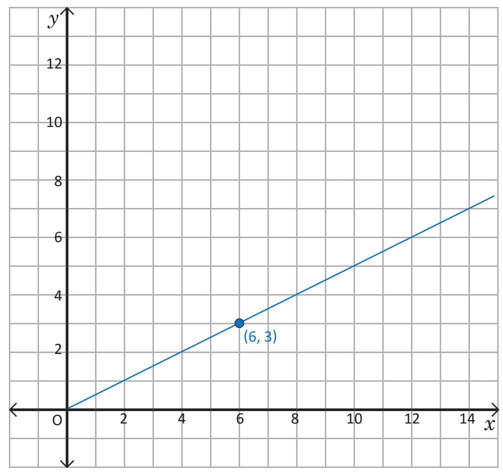
- Se sustituyen los valores en las variables y se forma la ecuación.
- Se encuentra el valor de la constante en una ecuación.
- Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen O(0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por esos puntos.

1. Un automóvil que viaja desde San Salvador hacia San Miguel, ha recorrido 50 km después de una hora de camino, si continúa a velocidad constante hasta llegar a su destino:

   a) Determina si existe proporcionalidad directa entre el tiempo transcurrido x y la distancia recorrida y, justifica tu respuesta.
   b) Representa la distancia recorrida y, cuando ha transcurrido x horas.
   c) Representa gráficamente la relación entre el tiempo transcurrido x y la distancia recorrida y.

2. La gráfica muestra la relación entre la cantidad de pasteles en el eje x y el total a pagar en dólares, en el eje y.

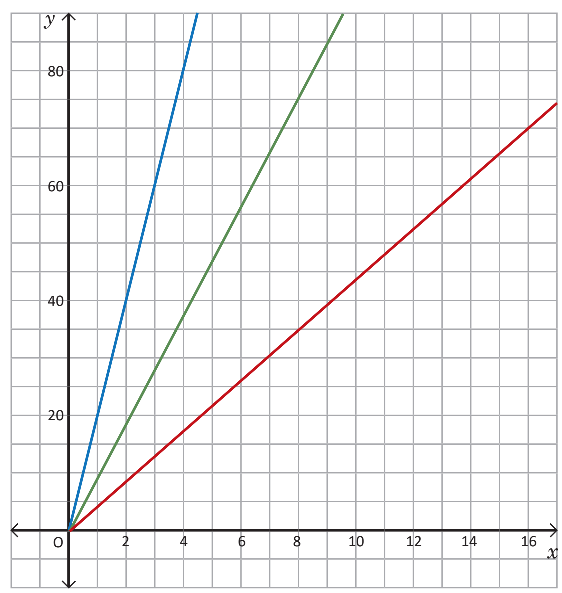


   a) ¿Cuánto cuestan 2 pasteles?

   b) Encuentra la constante de proporcionalidad entre el número de pasteles y el costo.

   c) Escribe la relación entre el número de pasteles x y el costo a pagar y de la forma $y = ax$.

3. Un depósito se llena mediante una bomba que vierte 20 galones de agua por minuto.



   a) Identifica, ¿cuál de las tres rectas representa el agua del depósito en función del tiempo?

   b) Determina la constante de proporcionalidad.

   c) Escribe en la forma $y = ax$, la relación que hay entre la cantidad y de agua que tiene el depósito después de x minutos.

   d) ¿Qué cantidad de agua tendrá el depósito después de 15 minutos?

Para escribir la función $y = ax$ a partir de la gráfica:

- Se elige un punto por el que pasa la gráfica, cuyos valores son números enteros.
- Se sustituye el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y se encuentra el valor de a.
- Se escribe $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado.

1.3 Sentido de la función lineal

P

La pila de la casa de Carmen tiene 5 litros de agua, al abrir el grifo, este arroja 3 litros de agua por minuto. La tabla muestra la variación de los litros de agua en la pila a medida que transcurre el tiempo, completa los espacios vacíos y responde.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...
y (litros de agua)	5	8	11			

a) Analiza cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo, ¿es y directamente proporcional a x?
b) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pila después de 5 minutos?
c) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pila después de x minutos?
d) Escribe una ecuación donde y esté en términos de x.

S

Al completar la tabla se tiene:

x (minutos)	0	1	2	3	4	...
y (litros de agua)	5	5 + 3 = 8	8 + 3 = 11	11 + 3 = 14	14 + 3 = 17	...

a) Para determinar si y es directamente proporcional a x, se calculan los cocientes $\frac{y}{x}$, luego se comparan. Por ejemplo, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{11}{2} = 5.5$, y así sucesivamente se comparan todos a medida que el tiempo transcurre y la cantidad de agua en la pila aumenta, de donde se puede concluir que la razón $\frac{y}{x}$ no es constante y por tanto, y no es directamente proporcional a x.
b) Después de cinco minutos la pila tendrá 20 litros de agua, 20 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 3(5).
c) Como la cantidad de agua en la pila es igual a los litros que tenía al inicio más 3 litros por cada minuto transcurrido, entonces después de x minutos tendrá $5 + 3x$ litros de agua.
d) Considerando la cantidad de agua después de x minutos, se tiene que $y = 5 + 3x$ o $y = 3x + 5$.

C

Si se tienen dos variables x y y, donde y se puede escribir como una expresión de primer grado en x, como el ejemplo mostrado arriba, se dice que **y es una función lineal de x**, generalmente se expresa de la forma $\boldsymbol{y = ax + b}$: donde $\boldsymbol{a}$ indica que es una relación de proporcionalidad entre las variables, $\boldsymbol{b}$ es una constante y recibe el nombre de **ecuación de la función**. Se puede obtener el valor de b observando la tabla donde $x = 0$. Cuando la constante $\boldsymbol{b}$ toma el valor de cero, la función lineal coincide con la proporcionalidad directa y se expresa como $\boldsymbol{y = ax}$.

Para el ejemplo anterior, se tiene $\boldsymbol{y = 3x + 5}$, donde se puede identificar $a = 3$ y $b = 5$. Por eso se dice que la cantidad de agua en la pila no es directamente proporcional al tiempo transcurrido.

Un recipiente que contiene agua hasta 1 cm de altura comienza a llenarse a un ritmo constante de 3 cm por minuto.

a) Completa en la siguiente tabla los valores para la cantidad de agua que tiene el recipiente, donde x es el número de minutos transcurridos y y es la altura hasta donde se ha llenado el recipiente.

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y (centímetros)	1	4	7	10					

b) ¿Cuál es la altura del agua después de un minuto? ¿Y después de dos minutos?
c) Determina el aumento de la altura en x minutos.
d) Escribe una ecuación donde y esté en términos de x.

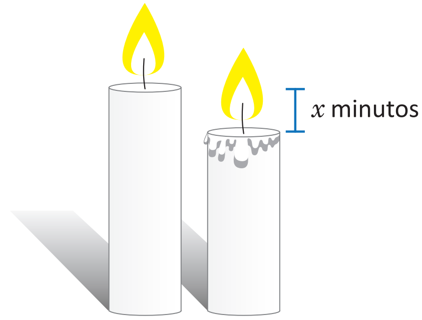
1.4 Función lineal

P

Determina si la relación entre las variables para cada una de las siguientes situaciones corresponde a una función lineal.

1. Una candela de 140 milímetros (mm) de largo se enciende y se acorta 4 mm por minuto transcurrido. Tomando como y la longitud de la candela después de x minutos de encenderla, expresa y en función de x.

2. Carlos obtiene un salario de \$200 por cada carro vendido. Representa con y el salario que Carlos recibe al vender x carros, expresa y en función de x.



S

1. Como se acorta 4 mm por minuto, después de x minutos se acorta $4x$, por tanto la longitud de la candela que tenía 140 mm al inicio, después de x minutos será $y = 140 - 4x$; es decir, $y = -4x + 140$, si se compara con la expresión $y = ax + b$, se obtiene $a = -4$ y $b = 140$; por tanto, es una función lineal.

2. Carlos recibe \$200 por cada carro vendido. Si vende x carros tiene un ingreso de $200x$; entonces su salario mensual al vender x carros será $y = 200x$, al comparar con la expresión $y = ax + b$, se obtiene que $a = 200$ y $b = 0$; por tanto, es una función lineal.

C

La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$ y la expresión de proporcionalidad directa $y = ax$, también son casos de la función lineal.

- La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$, a medida que x aumenta, y disminuye.
- La expresión $y = ax$, corresponde a la función lineal cuando $b = 0$.

Por ejemplo, en la situación 2 que se desarrolló, se puede ver que $y = 200x$, donde $b = 0$ y corresponde a una función lineal, y también es una relación de proporcionalidad donde la razón $\frac{y}{x} = 200$.

1. Identifica las ecuaciones que corresponden a una función lineal.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = \frac{3}{x}$ c) $y = -3x + 2$ d) $y = 3x$

2. Escribe y en función de x, luego analiza si corresponde a una función lineal.

a) Perímetro y de un cuadrado cuyo lado mide x.
b) Altura y de un triángulo de base x y su área 16 cm^2.
c) Perímetro y de un círculo de radio x.

1.5 Sentido de la razón de cambio

P

Marta tiene un taller de costura, mensualmente tiene un gasto fijo de 10 dólares en energía eléctrica, más 3 dólares por cada hora trabajada.

a) Completa la siguiente tabla tomando como y el total mensual a pagar por la energía eléctrica al trabajar x horas al mes.

x (horas trabajadas)	0	1	2	3	4	...
y (dólares)	10					

b) Si trabaja 8 horas, ¿cuánto paga de energía eléctrica? Y si se trabajan 100 horas, ¿cuánto pagaría?
c) Expresa y como una función lineal de x.
d) Determina cómo cambian los valores de y a medida que los valores de x cambian.

S

a) Al completar la tabla con las horas trabajadas y el total a pagar, se tiene:

x (horas trabajadas)	0	1	2	3	4	...
y (dólares)	10	13	16	19	22	...

+1 +1 +1 +1

+3 +3 +3 +3

b) Como cada hora que trabaja genera un costo de 3 dólares, entonces el total a pagar después de 8 horas trabajadas es $y = 10 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 + 3(8) = 10 + 24 = 34$ dólares; y si trabaja 100, sería $y = 10 + 3(100) = 310$ dólares.
c) Considerando el resultado del literal b), el total a pagar después de x horas trabajadas es $y = 10 + 3x$, que es equivalente a $y = 3x + 10$.
d) Para determinar cómo cambian los valores de y respecto a los de x, se toman 2 cantidades de horas trabajadas distintas: 1 hora y 3 horas.

Variación en x: $3 - 1 = 2$
Variación en y: $19 - 13 = 6$

$\Rightarrow$ $\frac{\text{Variación en } y}{\text{Variación en } x} = \frac{6}{2} = 3$, el cambio en y es 3 veces el cambio en x.

C

Al comparar la variación de la variable y respecto a la variación de x en una función lineal, a esa razón se le llama razón de cambio; es decir, ***Razón de cambio*** $= \frac{\textbf{Variación en } y}{\textbf{Variación en } x}$.
Para el ejemplo desarrollado la razón de cambio es 3, esto se puede verificar comparando los valores de y con los de x en dos tiempos cualesquiera de la tabla.

Miguel acompañó a su padre a comprar y observó que 2 libras de tomates cuestan \$ 3.00. Le preguntó a su padre cómo se calcula el precio para diferente cantidad de libras de tomates, su padre le explica que debe relacionar el número de libras de tomates con el precio de una libra.

a) Llamando x al número de libras y y al precio, completa la tabla con los datos que hacen falta.

x (libras)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y (dólares)	0	1.5	3						...

b) Si desea comprar 10 libras de tomates, ¿cuánto debe pagar?
c) Si un comerciante desea comprar 50 libras de tomates, ¿cuánto debe pagar?
d) Determina la razón de cambio tomando los resultados de los literales b) y c).
e) Si un comerciante desea comprar x libras de tomates, ¿cuánto debe pagar?

1.6 Razón de cambio

P

Observa los datos de la tabla:

x	0	1	2	3	4	...
y	20	18	16	14	12	...

a) Expresa y como una función lineal de x.
b) Si x toma el valor de 6, ¿cuánto vale y? Y si x toma el valor de 9, ¿cuánto vale y?
c) Calcula la razón de cambio de y respecto a x.
d) Compara la razón de cambio con el valor de a en el resultado del literal a). ¿Qué concluyes?

S

a) Al observar $x = 0$, $y = 20$ y cada vez que x aumenta una unidad y disminuye 2, entonces al expresar y en función de x, se tiene $y = 20 - 2x$, lo cual es equivalente a $y = -2x + 20$.

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4	...
y	20	18	16	14	12	...

−2 −2 −2 −2

b) Para determinar el valor de y, se analiza la variación de los valores que se reflejan en la tabla, tal como se muestra en la figura. Mientras x aumenta una unidad, y disminuye 2; por tanto:

Si $x = 6$, $y = 20 - 2(6) = 20 - 12 = 8$.
Si $x = 9$, $y = 20 - 2(9) = 20 - 18 = 2$.

c) Se toman los valores en dos momentos y se determina el cambio en las dos variables:
Variación en x: $4 - 1 = 3$. Variación en y: $12 - 18 = -6$.

Utilizando la expresión ***Razón de cambio*** $= \dfrac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$; se tiene Razón de cambio: $\frac{-6}{3} = -2$.

d) Al comparar la función $y = -2x + 20$, con la forma de la función lineal $y = ax + b$, se tiene que $a = -2$, en donde se puede concluir que la razón de cambio es igual al valor de a.

C

En la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio es constante y es equivalente al valor de a, es decir:

$$\textbf{\textit{Razón de cambio}} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x} = a$$

Considerando la expresión para determinar la razón de cambio se tiene:

- ***Variación en y = a × (variación en x)***, es decir, que el aumento en y es proporcional al aumento en x.
- El valor de a es equivalente al aumento de y cuando x aumenta una unidad.

E

Para cada una de las siguientes funciones lineales, realiza:
1. Identifica la razón de cambio.
2. Determina el valor de y, cuando $x = 4$.

a) $y = 3x - 5$

b) $y = -2x + 3$

Solución.

a) Para la función $y = 3x - 5$
   1. Razón de cambio: 3
   2. Valor de y, cuando $x = 4$:
      $y = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

b) Para la función $y = -2x + 3$
   1. Razón de cambio: -2
   2. Valor de y, cuando $x = 4$:
      $y = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$

Para cada una de las siguientes funciones lineales, realiza:
1. Identifica la razón de cambio.
2. Determina el valor de y, cuando $x = 6$.

a) $y = 2x - 7$

b) $y = -3x + 4$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

1.7 Características de la función $y = ax + b$

P

Si se tiene en la refrigeradora una jarra con agua a una temperatura de 3° C y luego se pone a calentar en la cocina y esta eleva la temperatura del agua 2° C por cada minuto que transcurre, si se representa con x el tiempo transcurrido y con y la temperatura.

a) En tu cuaderno, elabora la siguiente tabla y complétala:

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3						...

b) Expresa y como una función lineal de x.

c) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.

d) Estima otros valores para y tomando por ejemplo 0.5, 1.5, etc., para x. Grafica los pares ordenados de los valores estimados.

S

a) Al ir sumando los 2° C a la temperatura, por cada minuto que transcurre, la tabla queda de la siguiente manera:

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3	5	7	9	11	13	...

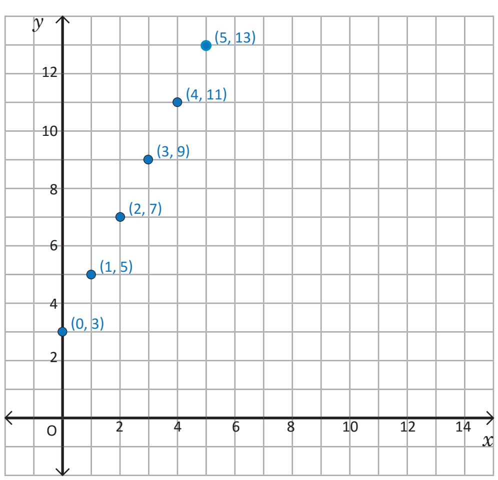
b) Al analizar la variación de los valores y con los de x, se observa que cada vez que x aumenta 1, y aumenta 2, tal como se muestra en la figura, de donde se obtiene que $y = 2x + 3$.

+1 +1 +1 +1

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3	5	7	9	11	13	...

+2 +2 +2 +2

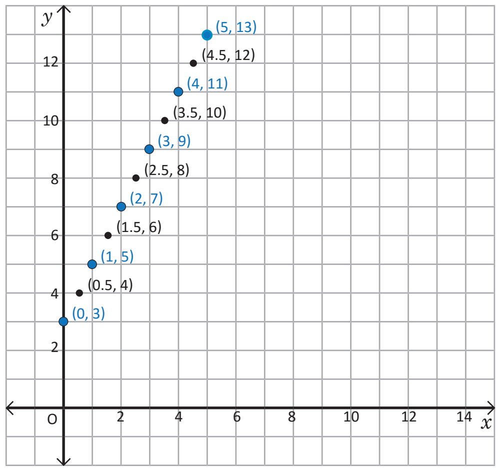
c) Considerando los valores calculados en el literal a), los puntos quedan graficados como se muestra en la figura:

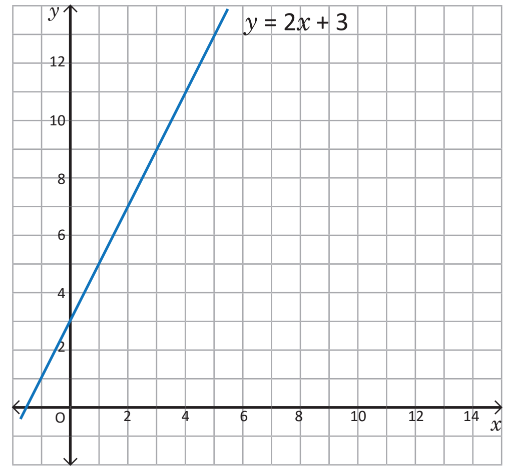


Para graficar los pares ordenados en el plano cartesiano:

El valor de x se sitúa sobre la recta horizontal o eje x, y a partir de ahí se cuentan las unidades de y desplazándose hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa.

d) Al estimar y graficar otros valores para las variables x y y, los puntos van quedando cada vez más juntos hasta formar una línea recta, tal como se muestra en la figura.

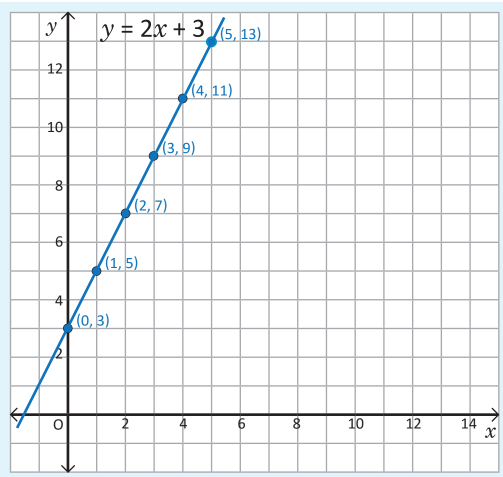




La gráfica de la función $y = ax + b$ es una línea recta, que se puede graficar conociendo los valores de las variables x y y para al menos dos pares ordenados.

Por ejemplo, para la función $y = 2x + 3$, la gráfica es una línea recta que pasa por el punto (0, 3).

Todas las funciones lineales $y = ax + b$ tienen una línea recta como gráfica y siempre pasan por el punto $(0, b)$; y en el caso que $b = 0$, pasan por el origen del sistema de coordenadas cartesianas.



1. En tu cuaderno, elabora la tabla y complétala, siguiendo la secuencia planteada.

x	...	0	1	2	3	4	5	...
$y = x + 5$	...	5	6					...

a) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.
b) Estima otros valores para y asignándole otros valores a la variable x.
c) Completa la gráfica de la función.

2. En tu cuaderno, elabora la tabla y complétala, calculando los respectivos valores de y.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 2x + 3$	...								...

a) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.
b) Estima otros valores para y asignándole otros valores a la variable x.
c) Completa la gráfica de la función.

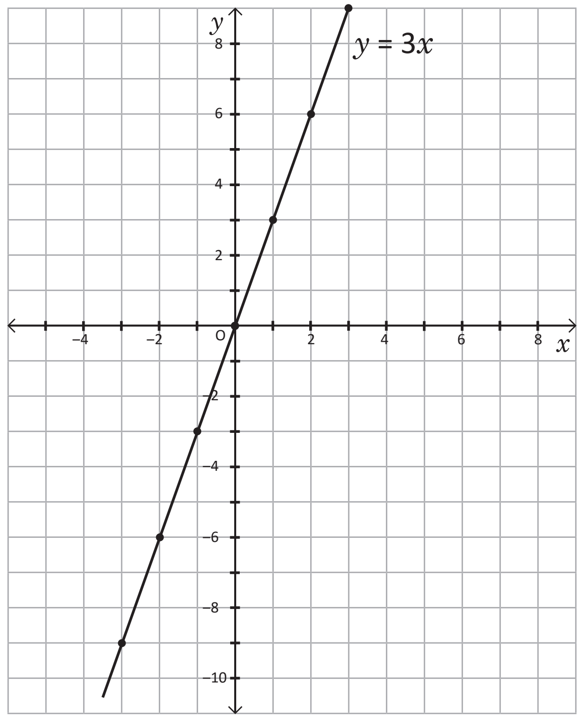
1.8 Relación entre la gráfica de la función $y = ax + b$ y la de $y = ax$

P

A partir de la gráfica de $y = 3x$, realiza lo siguiente:

a) Elabora la tabla, complétala y grafica la función $y = 3x + 2$ en el mismo plano que $y = 3x$.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 3x$	...	−9	−6	−3	0	3	6	9	...
$y = 3x + 2$	...								



b) Encuentra similitudes y diferencias entre la gráfica de $y = 3x$ y la de $y = 3x + 2$.

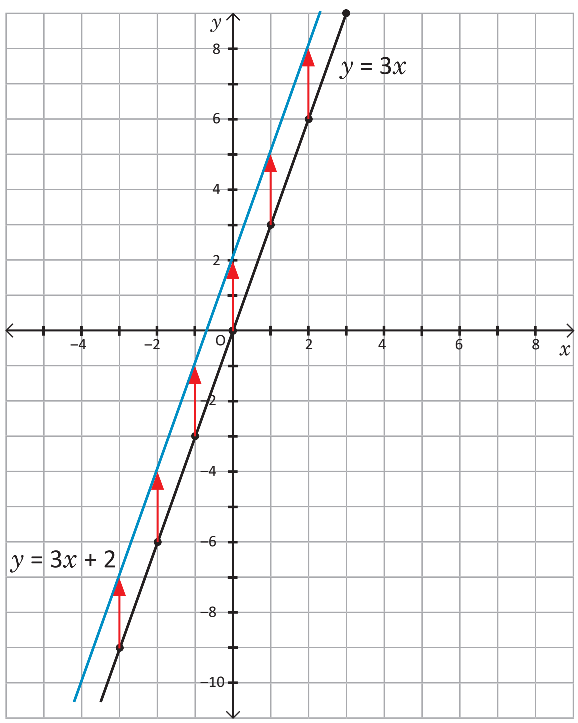
c) Compara las gráficas para $x = 0$ y $x = 2$. ¿Qué concluyes?

S

a) Asignándole a x los valores enteros desde −3 a 3 y determinando los respectivos valores de y para cada función se puede observar que los valores de $y = 3x + 2$, son el resultado de sumarle 2 a los valores de $y = 3x$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 3x$	...	−9	−6	−3	0	3	6	9	...
$y = 3x + 2$	...	−7	−4	−1	2	5	8	11	...

b) Al representar los puntos en el plano y unirlos, se tienen las gráficas que se muestran en el plano de la derecha, en ellas se puede ver que ambas corresponden a una línea recta, y tienen razón de cambio 3, pero se diferencian en que $y = 3x$ corta al eje y en 0 y $y = 3x + 2$ corta al eje y en 2.



c) Para $x = 0$ el valor de y en $y = 3x + 2$ es el valor de $y = 3x$ aumentado en 2. Lo mismo sucede para $x = 2$. En general, el valor de y en $y = 3x + 2$ es el de $y = 3x$ aumentado en 2.

La gráfica de la función $y = ax + b$ pasa por el punto $(0, b)$ y es paralela a la gráfica de la función $y = ax$; entonces, la gráfica de $y = ax + b$, corresponde a la gráfica de $y = ax$ desplazada b unidades sobre el eje y.

- La constante b es el valor de y cuando $x = 0$, y se le llama **intercepto** de la función lineal con el eje y.
- En el caso de las funciones de la forma $y = ax$, donde $b = 0$, el intercepto corresponde al origen del sistema de coordenadas cartesianas, donde $x = 0$ y $y = 0$.
- La gráfica de la función $y = ax + b$ es una recta paralela a la gráfica de la función $y = ax$.

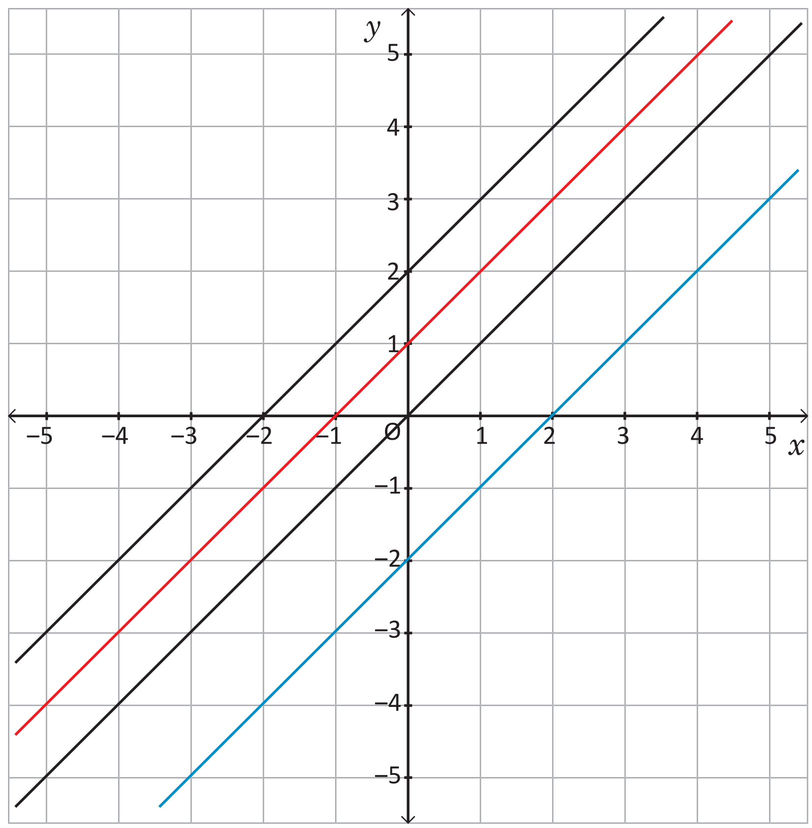
1. Relaciona las siguientes funciones con sus respectivas gráficas, luego identifica diferencias y similitudes.

   a) $y = x + 2$

   b) $y = x - 2$

   c) $y = x + 1$

   d) $y = x$



2. Considerando los resultados encontrados en el Problema inicial, determina qué relación hay entre las gráficas de las funciones.

   a) $y = 2x$

   b) $y = 2x + 3$

   c) $y = 2x - 3$

1.9 Análisis gráfico de la pendiente positiva

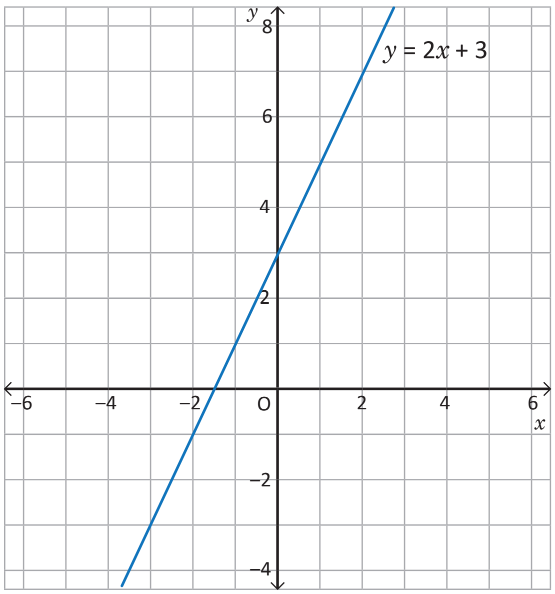
P

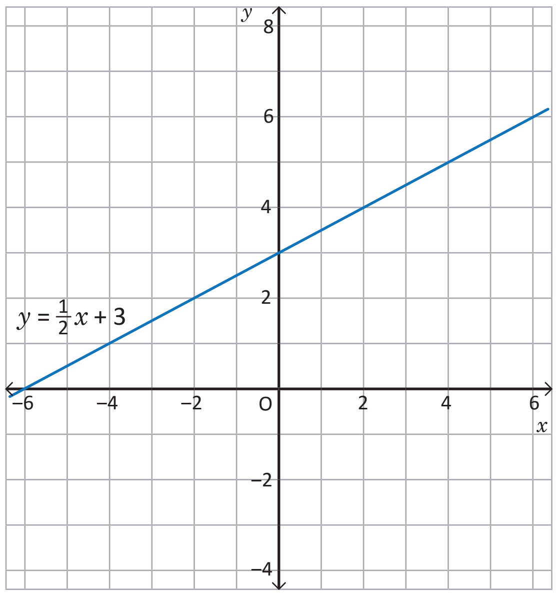
Para la función de cada una de las gráficas, realiza lo siguiente:

a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?

b) ¿Qué valor le corresponde a y cuando x vale 8?

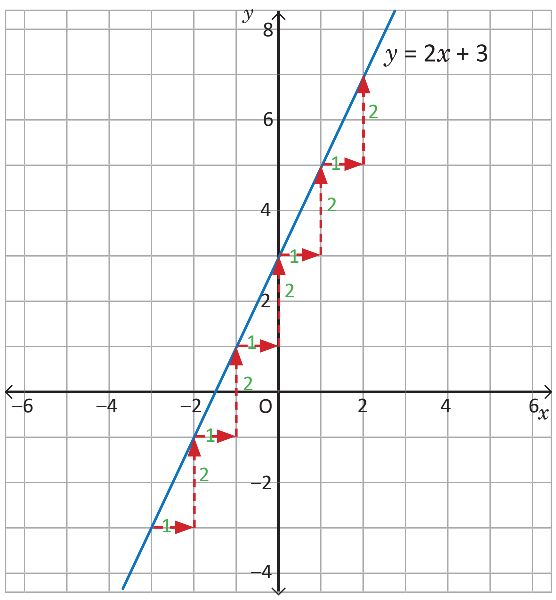
c) Determina la razón de cambio.

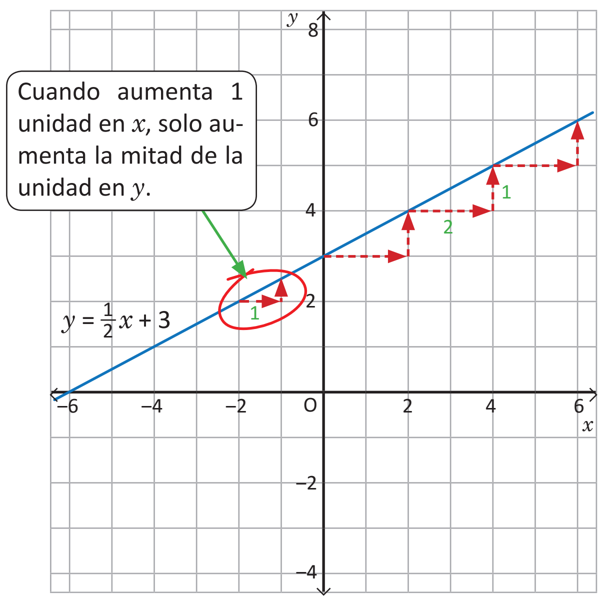




S

a) Al analizar qué sucede con los valores de y cuando x aumenta una unidad, se obtiene que





En la gráfica de $y = 2x + 3$, se puede observar que si x aumenta 1 unidad, y aumenta 2.

En la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 3$, se dificulta determinar con exactitud cuánto aumenta y cuando x aumenta una unidad. En este caso se puede considerar otros valores, por ejemplo, si x aumenta 2 unidades, y aumenta 1.

b) Para determinar el valor que le corresponde a y, cuando x vale 8, es necesario analizar la gráfica, en donde se tiene que

En la gráfica de $y = 2x + 3$, si $x = 2$, $y = 7$.

- Del literal a) se tiene que por cada unidad que aumenta x, y aumenta 2; entonces, como de 2 a 8 x aumenta 6, y aumenta 12, por tanto, si $x = 8$, $y = 19$.

En la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 3$, si $x = 2$, $y = 4$.

- Del literal a) se tiene que cada 2 unidades que aumenta x, y aumenta 1, entonces como de 2 a 8 x aumenta 6, entonces y aumenta 3, por tanto, si $x = 8$, $y = 7$.

c) Para determinar la razón de cambio, se sustituye en la expresión:

$$\textbf{\textit{Razón de cambio}} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$$

Para la función $y = 2x + 3$.

Razón de cambio $= \frac{2}{1} = 2$

$a = 2$

Al aumentar 1 en x, y aumenta 2.

Para la función $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Razón de cambio $= \frac{1}{2} = 0.5$

$a = \frac{1}{2}$

Al aumentar 1 en x, y aumenta $\frac{1}{2}$.

C

La inclinación de la gráfica de una función lineal $y = ax + b$, depende del valor de la razón de cambio, entonces cada vez que a aumenta, también aumenta la inclinación de la recta y viceversa.

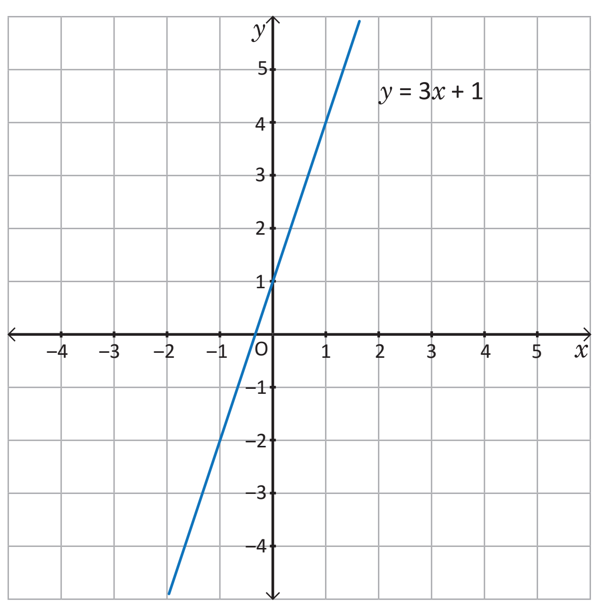
En los ejemplos desarrollados se observa que la inclinación de la gráfica de la función $y = 2x + 3$ es mayor que la de la función $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Por tanto, si se quiere cambiar la inclinación de una línea recta, se modifica únicamente el valor de a en la función $y = ax + b$.

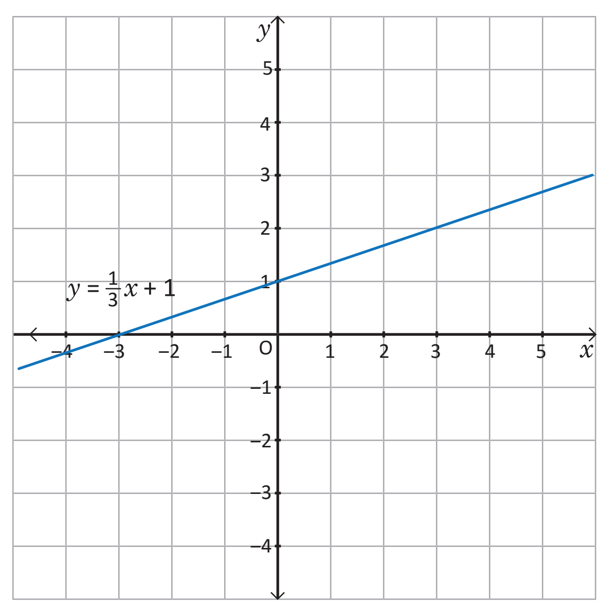
Observa las gráficas de las funciones y responde para cada caso:

a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad?
b) ¿Qué valor le corresponde a y, cuando x vale 6?
c) Determina la razón de cambio.

1.



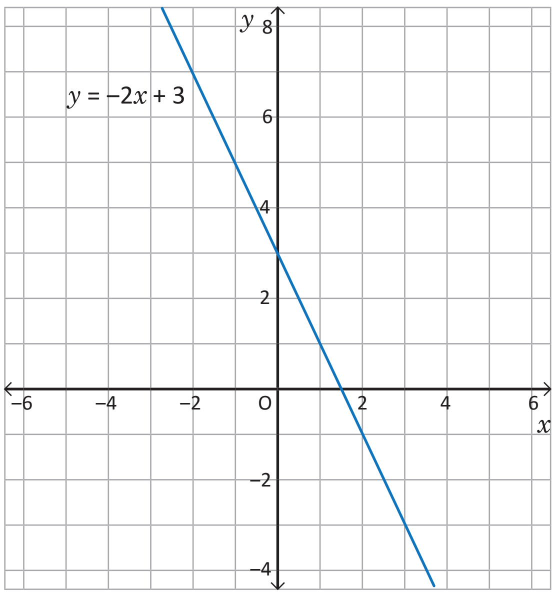
2.

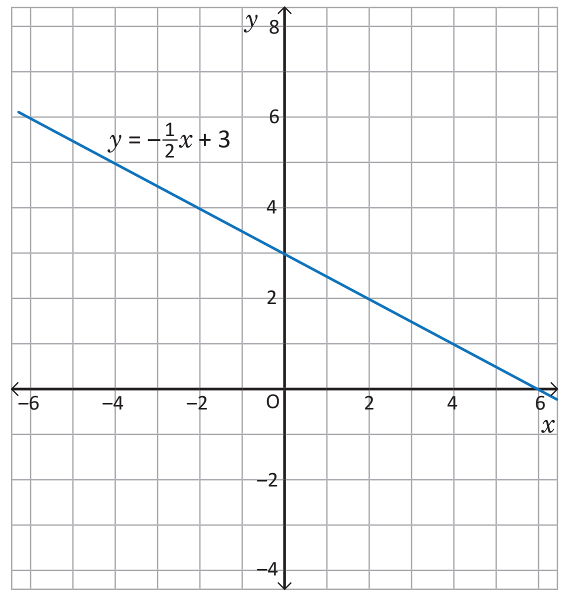


1.10 Análisis gráfico de la pendiente negativa

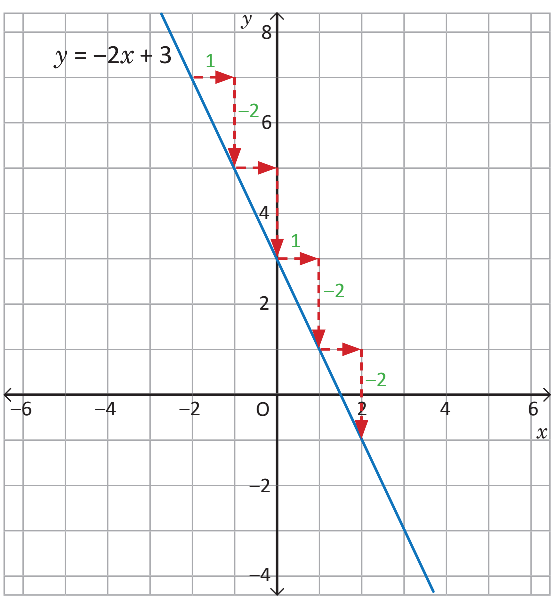
P Para la función de cada una de las gráficas, realiza lo siguiente:

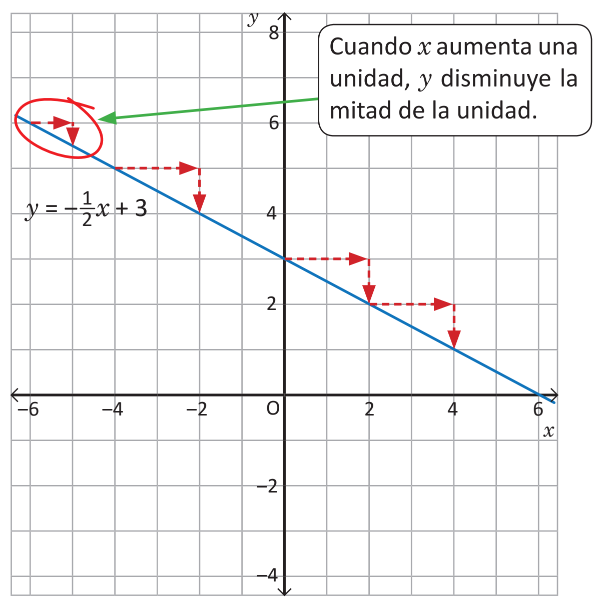
a) Analiza, ¿qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?
b) Determina la razón de cambio.





S a) Al analizar qué sucede con los valores de y cuando x aumenta una unidad, se obtiene que





En la gráfica de $y = -2x + 3$, se puede observar que si x aumenta 1 unidad, y disminuye 2.

En la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$, se dificulta determinar con exactitud cuánto aumenta y cuando x aumenta una unidad. En este caso se puede considerar otros valores, por ejemplo, si x aumenta 2 unidades, y disminuye 1.

Unidad 3

b) Para calcular la razón de cambio (***Razón de cambio*** = $\frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$), se tiene:

Para la función $y = -2x + 3$.

Razón de cambio = $\mathbf{\frac{-2}{1} = -2}$

$\boldsymbol{a = -2}$

Al aumentar 1 en x, y disminuye 2.

Para la función $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Razón de cambio = $\mathbf{\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}\ -0.5}$

$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$

Al aumentar 1 en x, y disminuye 0.5 o $\frac{1}{2}$.

Al aumentar una unidad en la variable x, la variable y disminuye; entonces, la razón de cambio es negativa, es decir, cada vez que se desplaza una unidad a la derecha en la dirección del eje x, la línea recta que corresponde a la gráfica de la función se desplaza hacia abajo tantas unidades como el valor de la razón de cambio.

Por tanto, para una función $y = ax + b$ se tiene que

- **Si $\boldsymbol{a} > 0$, al aumentar 1 unidad en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ aumenta $\boldsymbol{a}$ unidades.**
  Ejemplo: para $y = 3x + 2$, $a > 0$, entonces cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 3 unidades.

- **Si $\boldsymbol{a} < 0$, al aumentar 1 unidad en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ disminuye $\boldsymbol{-a}$ unidades.**
  Ejemplo: para $y = -3x + 2$, $a < 0$, entonces cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 3 unidades.

Observa las gráficas de las funciones y responde para cada caso:

a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad?
b) Determina la razón de cambio.

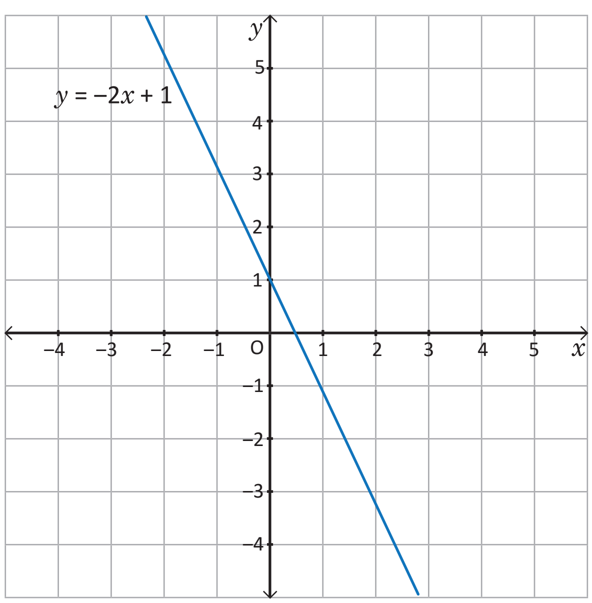


Gráfico 1

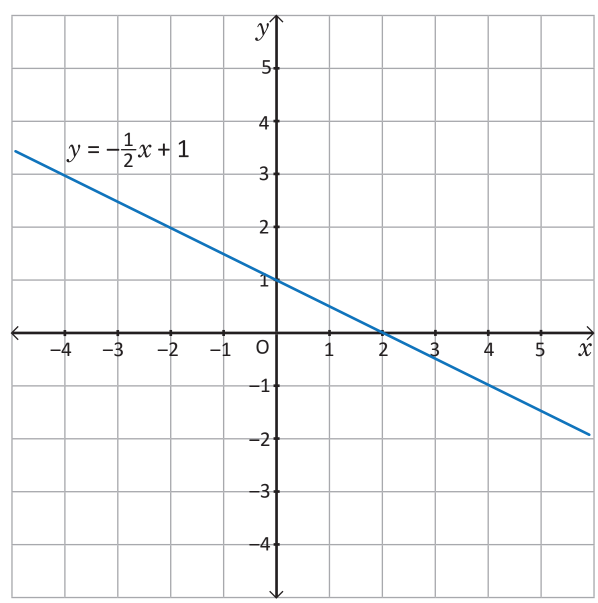
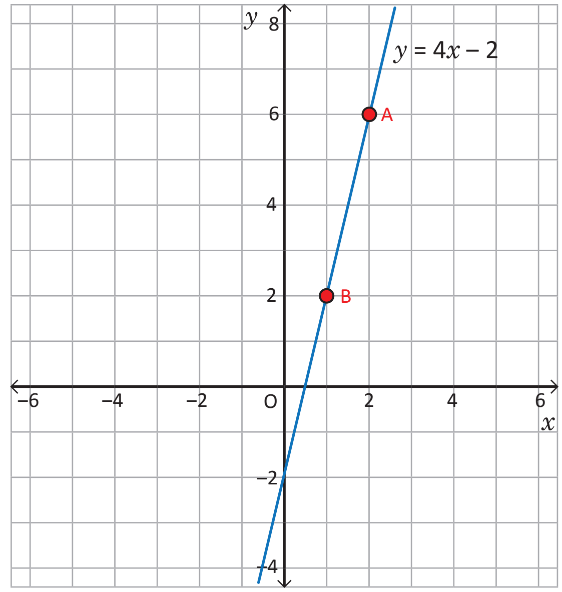


Gráfico 2

1.11 Relación entre la razón de cambio y pendiente de la gráfica de $y = ax + b$

P

Para la función $y = 4x - 2$, realiza lo siguiente:



a) Determina la razón de cambio mediante conteo de unidades.

b) Determina la diferencia entre los valores de x y y, toma como referencia las coordenadas de los dos puntos indicados.

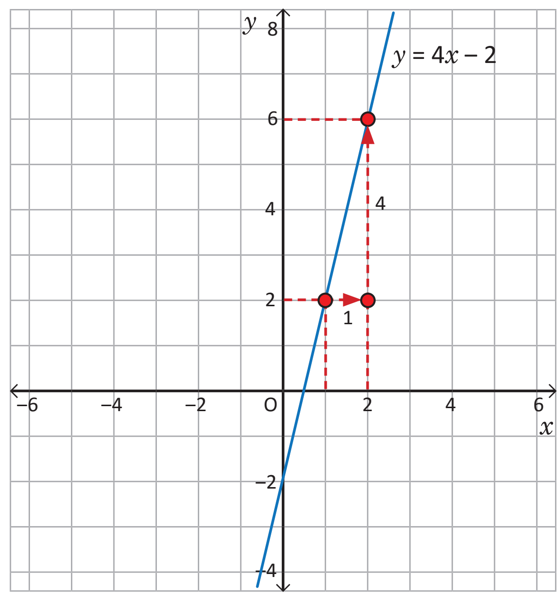
c) Calcula el cociente entre la diferencia de los valores de las coordenadas en y, con la diferencia de los valores de las coordenadas en x.

d) Compara el resultado obtenido en los literales a) y c), ¿qué concluyes?

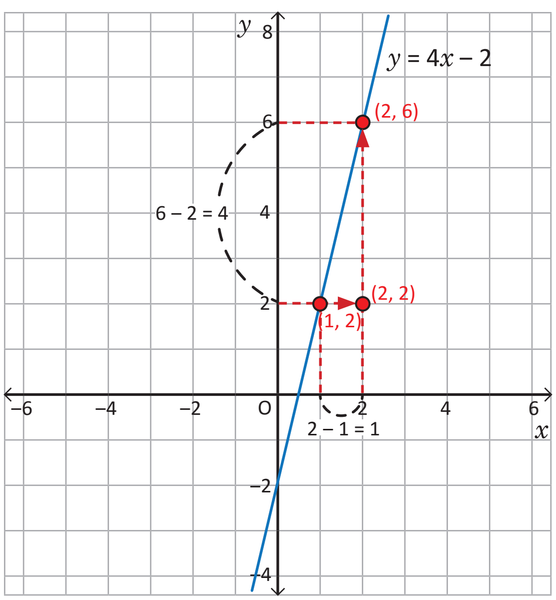
S

a) Al determinar la razón de cambio mediante conteo de unidades que incrementa y, cuando x aumenta 1 unidad, se tiene:

***Razón de cambio** = $\frac{4}{1}$ = 4*



b) Para determinar la diferencia entre los valores de las coordenadas en x y y, se restan las coordenadas de los dos puntos seleccionados (Punto A y B).



Diferencia en $y = 6 - 2 = 4$.
Diferencia en $x = 2 - 1 = 1$.

c) Al calcular el cociente entre la diferencia de los valores de las coordenadas en y, con la diferencia en los valores de las coordenadas en x, se tiene:

$$\frac{\text{Diferencia en } y}{\text{Diferencia en } x} = \frac{4}{1} = 4$$

d) Al comparar los resultados obtenidos en el literal a) y en el literal c) se observa que los resultados son iguales.

En la gráfica de la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio coincide con el valor de la pendiente y puede determinarse mediante el cálculo del cociente del incremento para cada una de las coordenadas x y y de dos puntos dados.

Por ejemplo, para una función $y = 4x - 2$, que pasa por los puntos (1, 2) y (2, 6), se tiene:

$$\textbf{Razón de cambio = Pendiente} = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

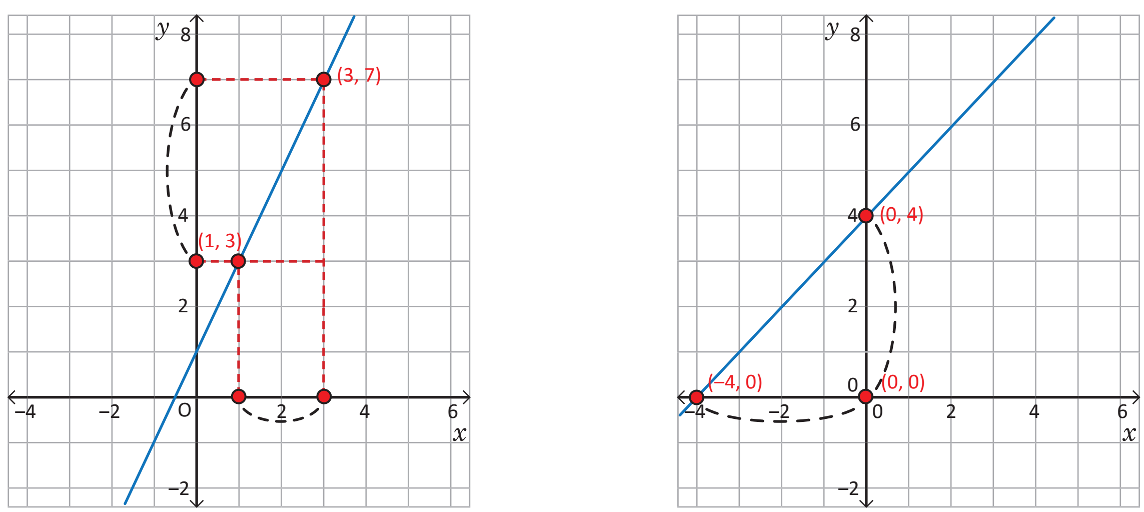
- Para cualquier función que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente se calcula mediante la fórmula:

$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- El coeficiente $\boldsymbol{a}$ en la función $y = ax + b$, corresponde a la pendiente de la línea recta de la gráfica de la función, la cual tiene el mismo valor que la razón de cambio.

Para cada una de las funciones mostradas en las gráficas siguientes realiza lo que se indica a continuación:

a) ¿Puedes determinar, cuántas unidades avanza en y cuando x avanza 1 unidad? Justifica tu respuesta.
b) Calcula el incremento en x y y, considerando las coordenadas de los puntos indicados.
c) Calcula la pendiente de la función de cada gráfica.



En la vida cotidiana se hace uso de la pendiente en diferentes contextos; por ejemplo, una pendiente se encuentra en la inclinación de un techo, de una carretera, o bien de una escalera apoyada en una pared. En matemática se usa la palabra pendiente para definir, de forma particular, el grado de inclinación de algo.

En la figura se muestra una obra arquitectónica donde se puede observar claramente el uso de la pendiente de la línea recta, en este ejemplo el puente más grande del mundo, fabricado con hormigón armado en Millau, Francia.

1.12 Pendiente e intercepto de la gráfica de la función $y = ax + b$

P

Para cada una de las funciones, calcula la pendiente y determina el valor de y donde la gráfica corta al eje y, analizando la gráfica.

1. $y = 2x - 1$
2. $y = -3x + 2$

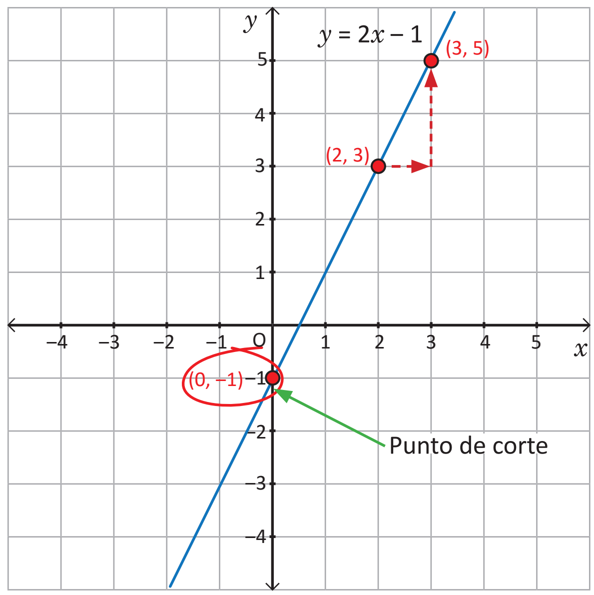
S

Para determinar la pendiente de una función, únicamente se identifica el valor de a; mientras que el valor de b corresponde al valor de y donde la gráfica corta al eje y, así para las funciones dadas se tiene:

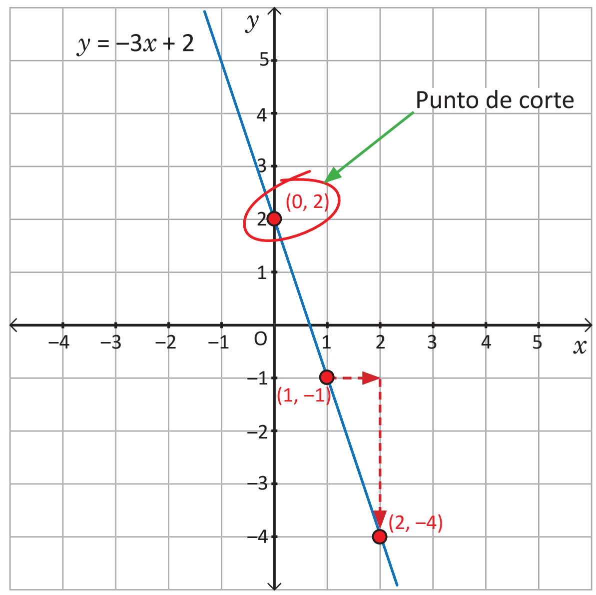
1. $y = 2x - 1$
   Pendiente: $a = 2$
   Corte con el eje y: $b = -1$
2. $y = -3x + 2$
   Pendiente: $a = -3$
   Corte con el eje y: $b = 2$

Al graficar las funciones se tiene:

1.



2.



C

Para identificar la pendiente y el punto de corte de la gráfica de la función $y = ax + b$ con el eje y, únicamente es necesario considerar que el valor del coeficiente a indica la pendiente, y la constante b corresponde al valor de y donde la gráfica corta al eje y. Al valor donde la gráfica corta al eje y se le llama **intercepto**.

- Así la función $y = ax + b$, tiene: Pendiente: a
  Intercepto con el eje y: b

b, corresponde gráficamente al punto $(0, b)$.

- Por ejemplo, la gráfica de la función $y = 3x - 5$, tiene: Pendiente: 3
  Intercepto con el eje y: -5

1. Para cada una de las funciones, identifica la pendiente y el intercepto con el eje y.

a) $y = 3x + 2$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = 5x - 2$ d) $y = 2x - 5$

e) $y = x + 4$ f) $y = x - 2$ g) $y = -x + 6$ h) $y = \frac{1}{2}x + 3$

2. Identifica la pendiente e indica el intercepto con el eje y.

a) $y = 3x$ b) $y = 2x$ c) $y = -2x$ d) $y = x$

Unidad 3

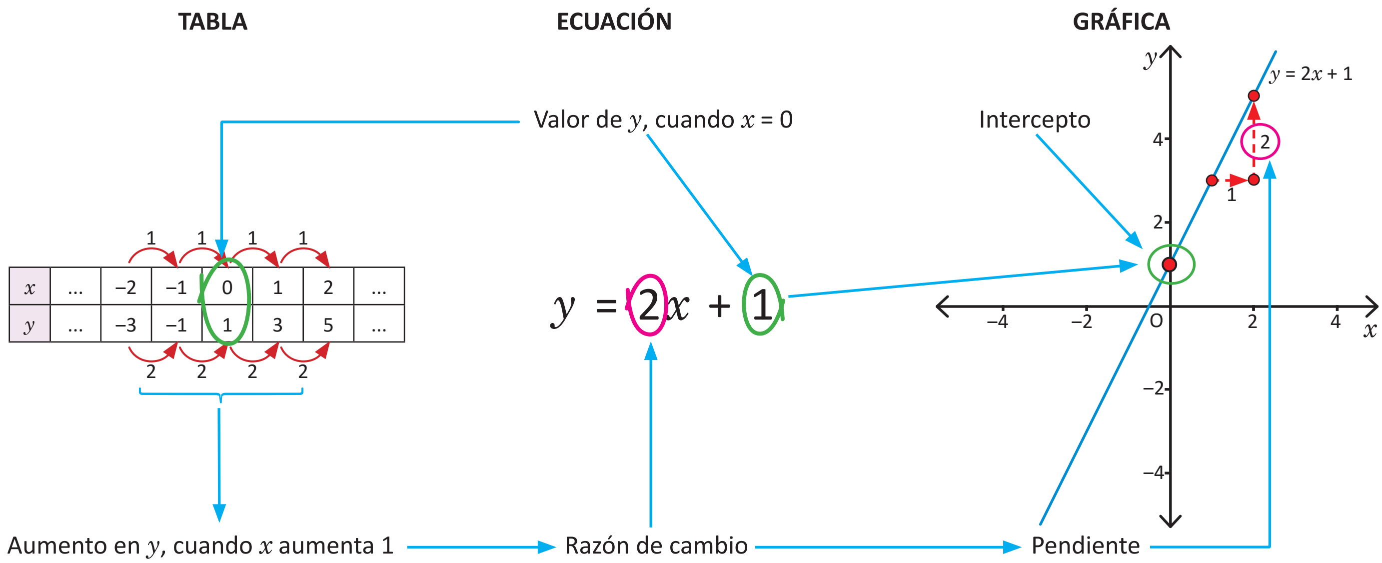
1.13 Relación entre tabla, ecuación y gráfica de función lineal

P

Para la función $y = 2x + 1$, identifica la relación entre las siguientes representaciones: tabla, ecuación y gráfica.

S

Al analizar la función $y = 2x + 1$ y comparar la respectiva tabla para algunos valores de x con la ecuación y la gráfica, se puede observar lo siguiente:



C

En el diagrama anterior que relaciona la tabla, ecuación y gráfica de la función $y = ax + b$, se puede observar que

Tabla	Ecuación	Gráfica
Valor de y, cuando $x = 0$	b	Intercepto con el eje y
Aumento en y, al aumentar 1 unidad en x	a	Pendiente

Para cada una de las funciones, determina el valor de a, b y el intercepto, luego identifica la relación entre las siguientes representaciones: tabla, ecuación y gráfica.

a) $y = 3x + 1$

b) $y = 4x - 3$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -3x - 4$

e) $y = 5x - 4$

f) $y = -2x - 1$

g) $y = 2x - 3$

h) $y = -4x + 1$

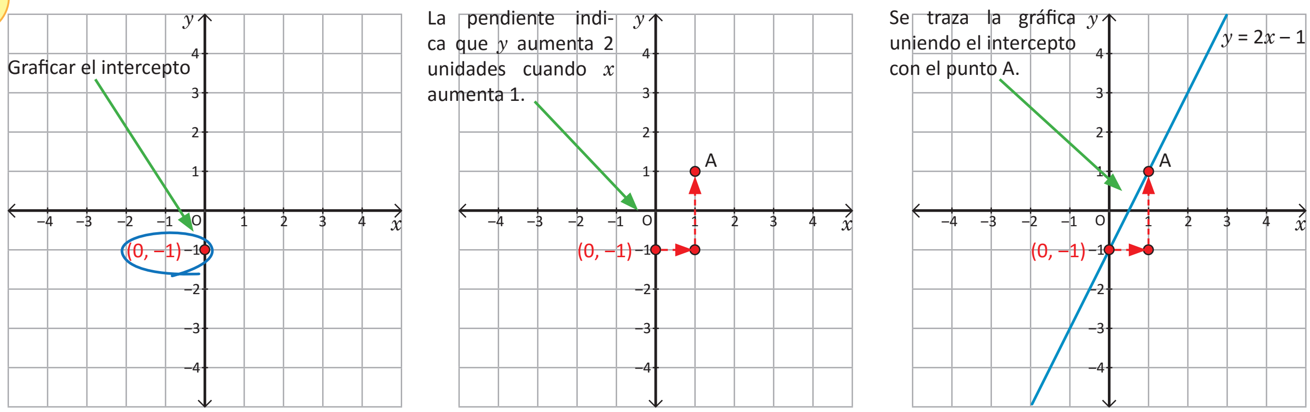
i) $y = -5x + 3$

1.14 Trazo de la gráfica de la función lineal dada la pendiente y el intercepto

P

Traza el gráfico de la función $y = ax + b$, si $a = 2$ y $b = -1$.

S



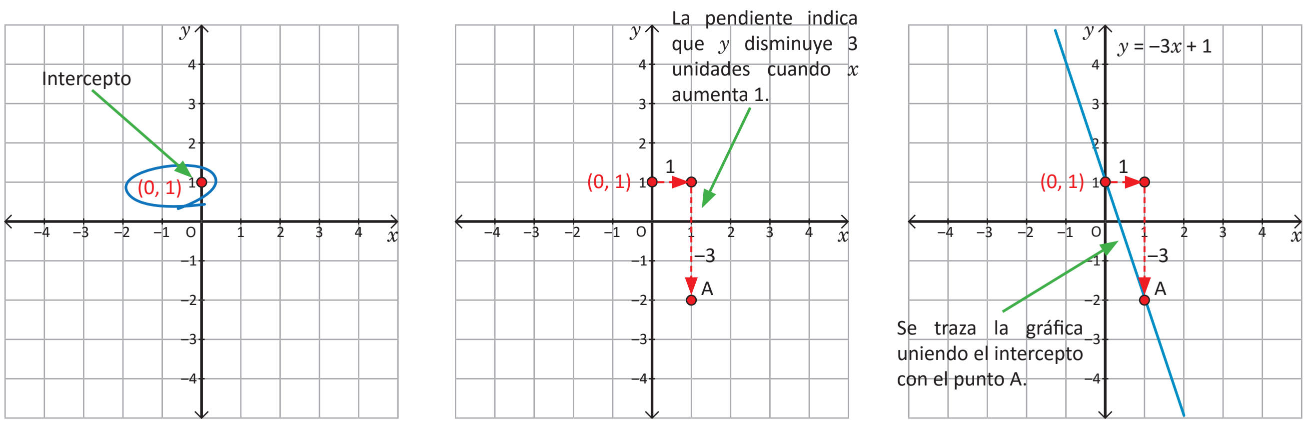
C

Para graficar una función $y = ax + b$, dado el valor de a y b, se coloca el punto $(0, b)$, luego se determina un nuevo punto por donde pasa la gráfica a partir de la pendiente, considerando la variación en x y la variación en y, tal como se ha desarrollado en el ejemplo anterior.

E

Identifica el valor de a y b en la función $y = -3x + 1$, luego grafícala.

Solución.
Al comparar la función $y = -3x + 1$ con la expresión de la función lineal $y = ax + b$, se tiene que $a = -3$ y $b = 1$.



1. Traza la gráfica de la función $y = ax + b$ en cada caso.

   a) Si $a = 3$ y $b = -2$

   b) Si $a = -2$ y $b = 1$

2. Para cada una de las funciones, identifica el valor de a y b, luego grafícalas.

   a) $y = 3x + 1$

   b) $y = 2x - 2$

   c) $y = -2x + 3$

   d) $y = 2x - 3$

   e) $y = x + 3$

   f) $y = x - 2$

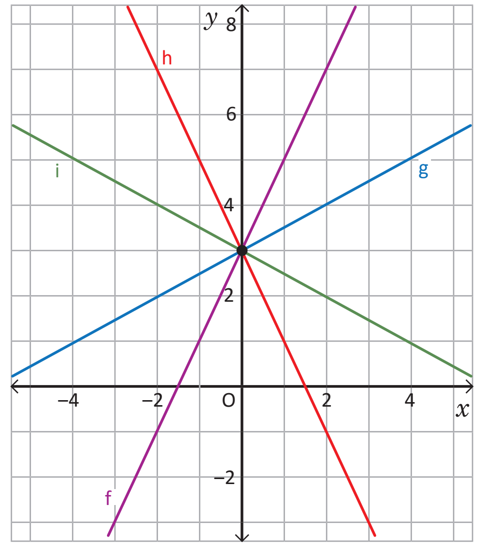
   g) $y = \frac{1}{2}x + 3$

   h) $y = -\frac{1}{3}x - 3$

1.15 Relación entre la ecuación y gráfica de la función lineal

P

Relaciona cada función con su respectiva gráfica, considera el valor de a y b para justificar tu respuesta.



a) $y = 2x + 3$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

S

Al observar la ecuación de las 4 funciones, se tiene que todas intersecan al eje y en $y = 3$, pues tienen $b = 3$; es decir, pasan por el punto (0, 3), esto se puede verificar en la gráfica.

Al analizar el valor de a para cada función, se tiene:

a) La función $y = 2\,x + 3$, tiene $a = 2$, lo que indica que cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2 (ver gráfico 1).

b) La función $y = \frac{1}{2}x + 3$, tiene $a = \frac{1}{2}$, lo que indica que cuando x aumenta 2 unidades, y aumenta 1 (ver gráfico 2).

c) La función $y = -2x + 3$, tiene $a = -2$, lo que indica que cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 2 (ver gráfico 3).

d) La función $y = -\frac{1}{2}x + 3$, tiene $a = -\frac{1}{2}$, lo que indica que cuando x aumenta 2 unidades, y disminuye 1 (ver gráfico 4).

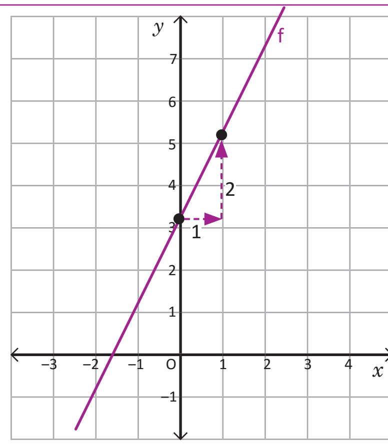


Gráfico 1

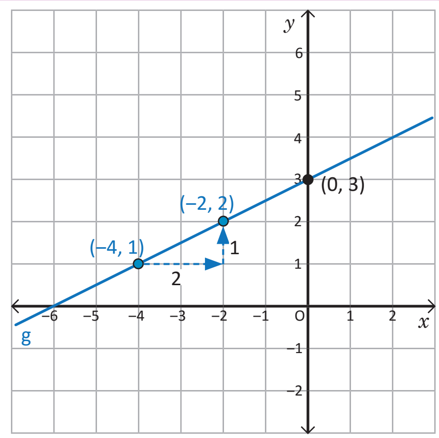


Gráfico 2

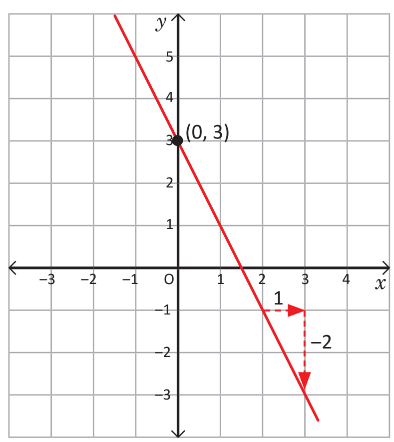


Gráfico 3

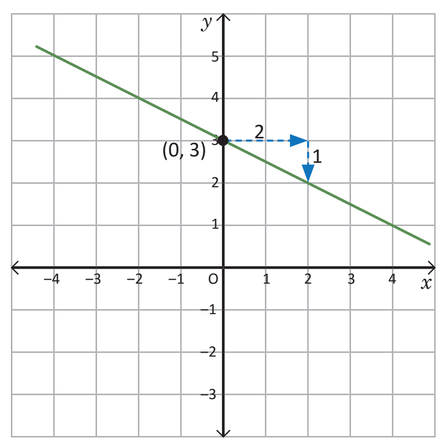


Gráfico 4

C

Para relacionar la gráfica de una función lineal con la respectiva expresión matemática, únicamente se debe relacionar:

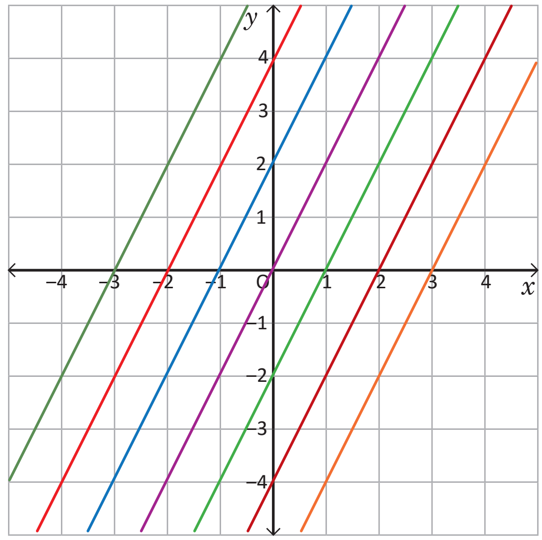
- El valor de b con el punto de intersección de la gráfica con el eje y.
- El valor de a con la variación de y cuando x aumenta una unidad.

Para el ejemplo desarrollado, como todas las funciones tienen igual valor de b, pasan por el mismo punto (0, b), donde intersecan al eje y.

E

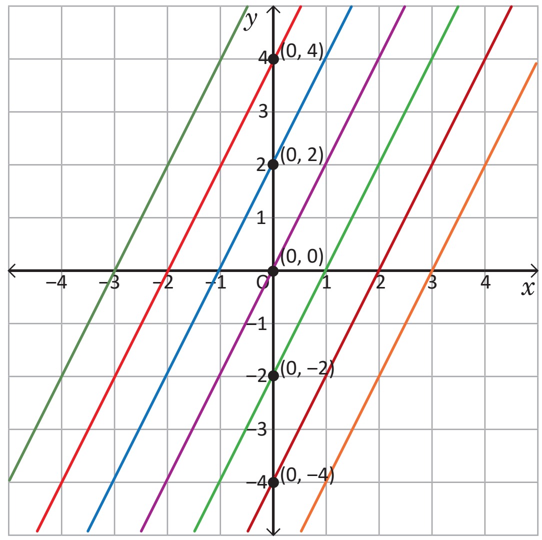
Grafica en el mismo plano las siguientes funciones, luego analiza tus resultados. ¿Qué concluyes?

a) $y = 2x$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = 2x + 4$
d) $y = 2x + 6$
e) $y = 2x - 2$
f) $y = 2x - 4$
g) $y = 2x - 6$

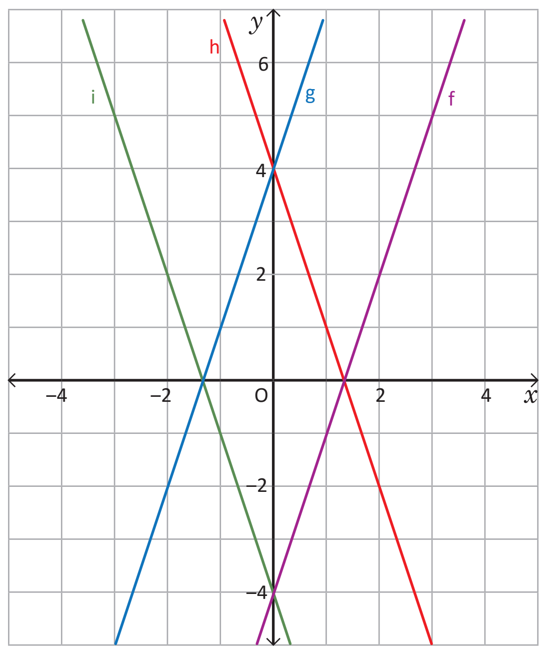


Solución.

- Al observar la ecuación de las 7 funciones, se tiene que todas tienen la misma pendiente $a = 2$; es decir, por cada unidad que aumenta x, y aumenta 2.
- En este caso, la pendiente no permite establecer relación entre la gráfica y la ecuación de la función. Entonces, se establecerá la relación entre gráfica y la ecuación relacionando el valor de b con el punto de intersección de la gráfica con el eje y.
- Al realizar la relación de cada función con su respectiva gráfica, se puede concluir que si la pendiente de las funciones es la misma y únicamente cambia el valor de b, las gráficas son rectas paralelas.



1. Relaciona cada función con su respectiva gráfica, considera el valor de a y b para justificar tu respuesta.
   a) $y = 3x + 4$
   b) $y = 3x - 4$
   c) $y = -3x + 4$
   d) $y = -3x - 4$



2. Analiza las siguientes funciones y describe qué relación existe entre las gráficas de a) y b) y las de c) y d).
   a) $y = 4x + 4$
   b) $y = 4x - 4$
   c) $y = 5x + 1$
   d) $y = 5x - 1$

1.16 Valores de y cuando se delimitan los valores de x

P

Para la función $y = 5x - 3$, si x está entre -1 y 4, ¿entre qué valores está y?

S

Para determinar entre qué valores está y, se puede considerar dos posibles soluciones.

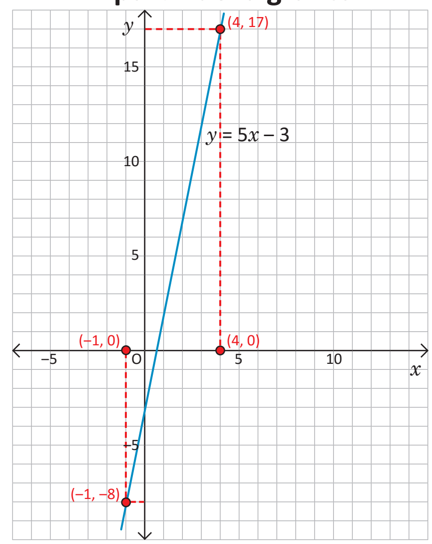
A partir de la expresión:

Para determinar los valores de y, se sustituye el valor de x en la expresión y se realizan las operaciones indicadas.

Si $x = -1$	Si $x = 4$
$y = 5(-1) - 3$	$y = 5(4) - 3$
$y = -5 - 3$	$y = 20 - 3$
$y = -8$	$y = 17$
$(-1, -8)$	$(4, 17)$

Para la función $y = 5x - 3$, cuando x está entre -1 y 4, y está entre -8 y 17.

A partir de la gráfica



C

Para determinar entre qué valores se encuentra y, cuando se conocen los valores de x, se puede utilizar cualquiera de las opciones mostradas anteriormente.

- A partir de la ecuación: sustituyendo los valores de x de los extremos, se encuentran los valores de y de los extremos.
- A partir de la gráfica: identificando las coordenadas de x, se buscan las correspondientes coordenadas de y.

La opción a utilizar dependerá si se conoce la gráfica o la ecuación de la función.

1. A partir de la ecuación de cada función, determina entre qué valores se encuentra y, conociendo los respectivos valores de x.

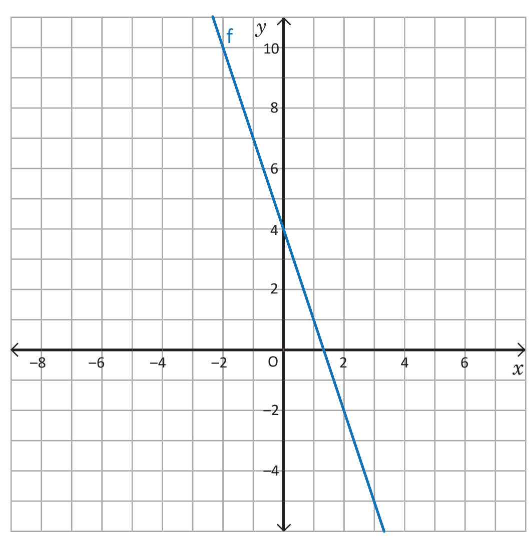
a) Si $y = 2x + 3$, ¿entre qué valores está y, si x está entre -3 y 5?

b) Si $y = -x + 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre 2 y 5?

c) Si $y = 3x - 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre -1 y 4?

d) Si $y = \frac{2}{3}x - 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre -3 y -6?

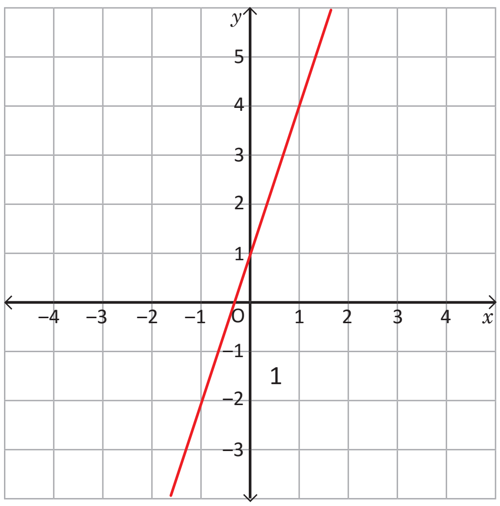
2. Para la gráfica de la derecha, determina entre qué valores está y, si x está entre -2 y 3.

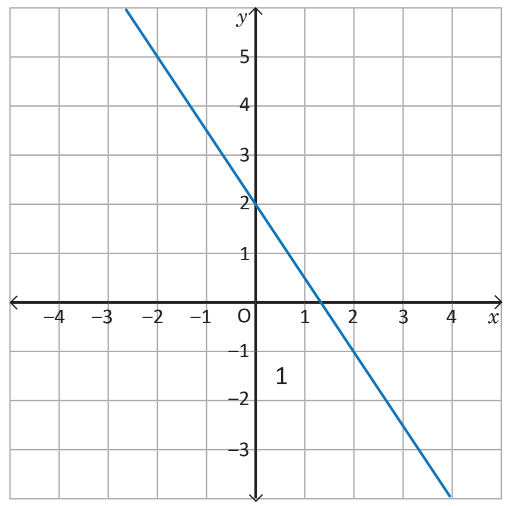


1.17 Expresión de la función en $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica

P

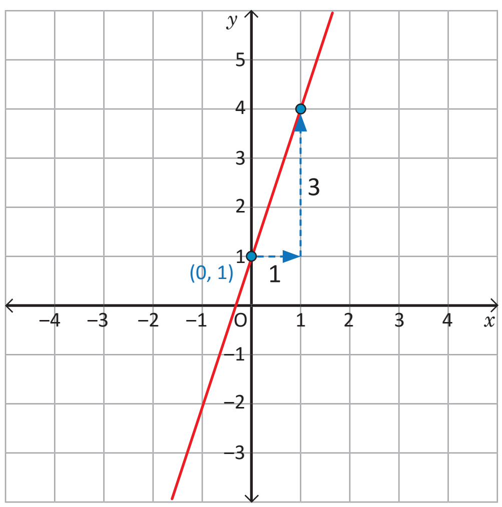
Escribe la ecuación para cada una de las funciones, cuyas gráficas se muestran a continuación:

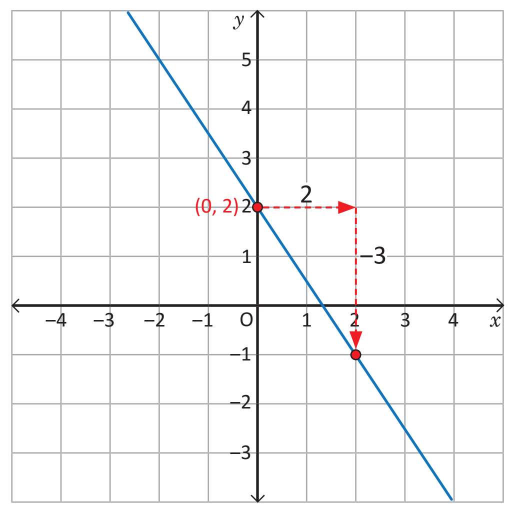
1.


2.


S

Para escribir la expresión matemática de una función, se identifica el intercepto b con el eje y, y se analiza la pendiente a.





$b = 1,\ a = \frac{3}{1} = 3,\ y = 3x + 1.$

$b = 2,\ a = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2},\ y = -\frac{3}{2}x + 2.$

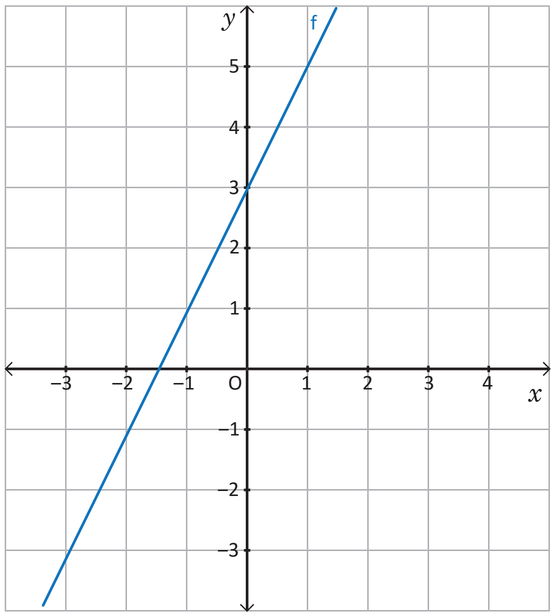
C

Para escribir la ecuación de una función de la forma $y = ax + b$, a partir del gráfico, es necesario identificar el intercepto con el eje y, y determinar la pendiente de la recta, tal como se muestra en los ejemplos desarrollados.

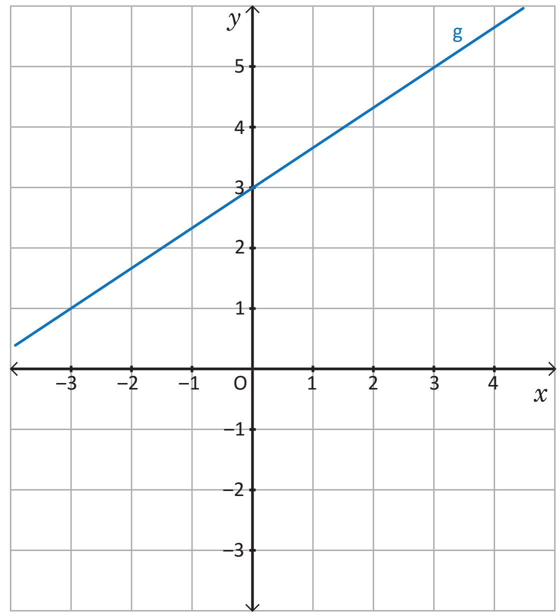
Unidad 3

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

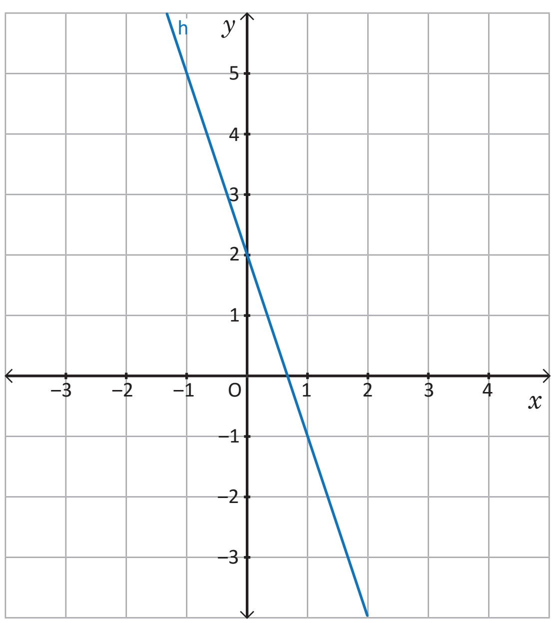
a)



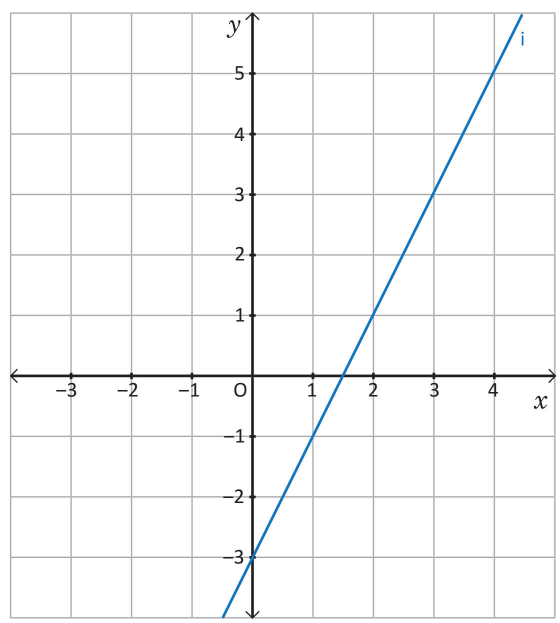
b)



c)



d)



1.18 Ecuación de la función a partir de un punto de la gráfica y la pendiente

P

Escribe la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto (3, 4).

S

Para determinar la ecuación, se identifican los elementos proporcionados.

A partir de los datos proporcionados:

- La pendiente es $\frac{2}{3}$, la función lineal es $y = \frac{2}{3}x + b$.
- La gráfica pasa por el punto (3, 4), al sustituir el valor de x y y en la expresión se tiene: $x = 3$, $y = 4$.

$$4 = \frac{2}{3}(3) + b$$

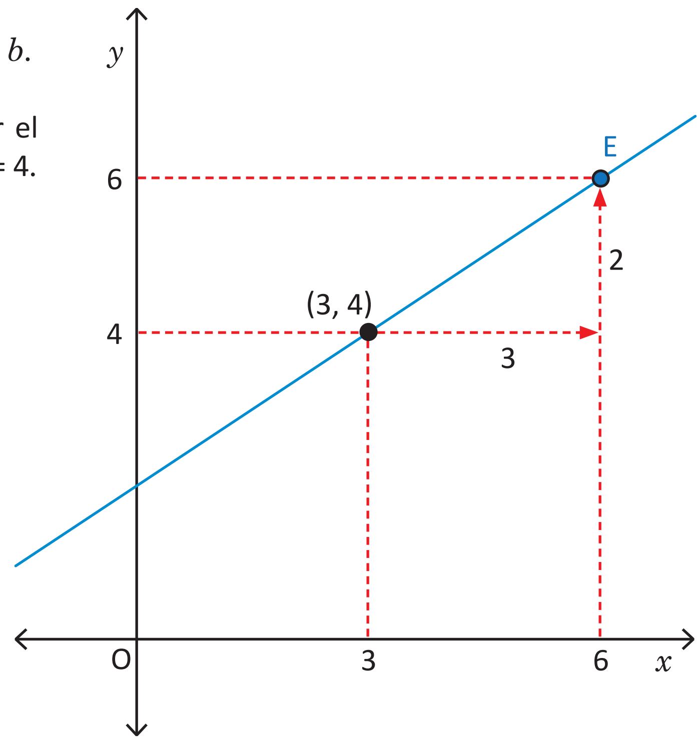
$$4 = 2 + b$$

$$2 = b$$

Entonces, $y = \frac{2}{3}x + 2$.

- Para graficar, se toma el punto (3, 4) ya dado; luego, con la pendiente se busca un nuevo punto por donde pasa la gráfica. Como la pendiente es $\frac{2}{3}$, desde el punto (3, 4) al avanzar 3 unidades en x hacia la derecha, se avanza 2 unidades en y hacia arriba y se llega al punto (6, 6).

Representación gráfica de la función



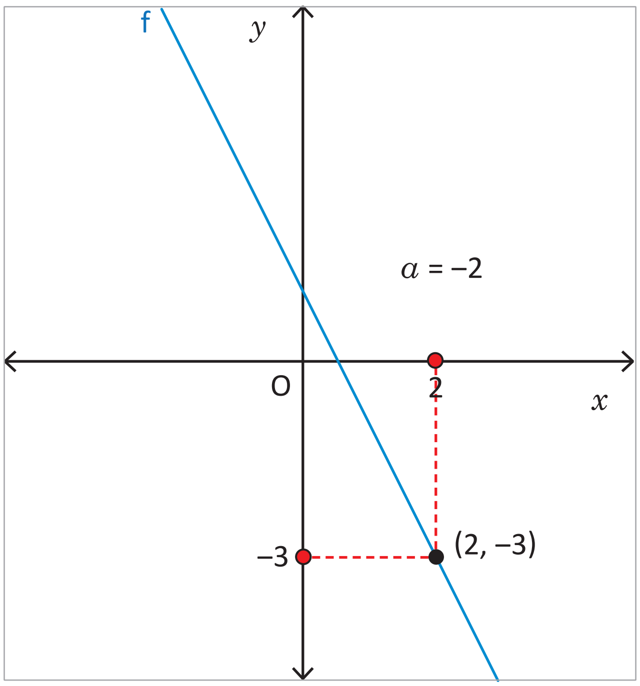
C

Para determinar la ecuación de la función lineal cuando se conoce la pendiente y las coordenadas (x, y) de un punto por donde pasa la gráfica, se realiza lo siguiente:

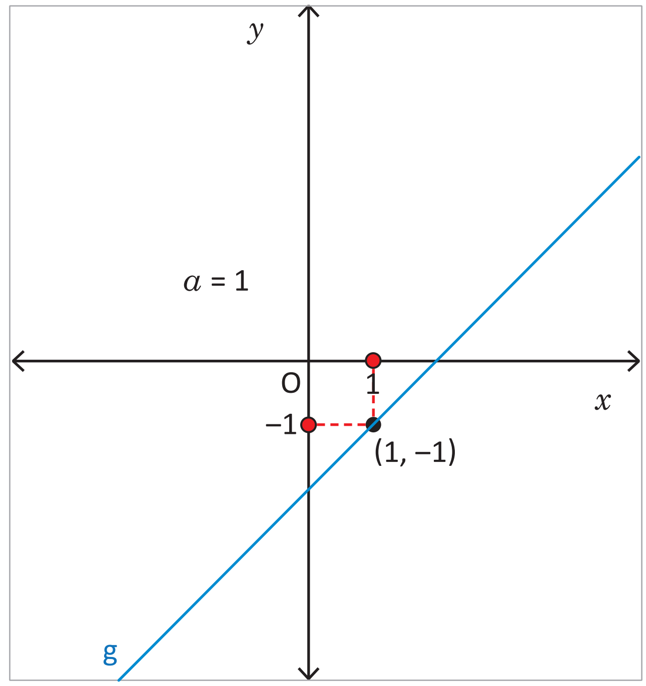
1. Sustituir la pendiente en la forma $y = ax + b$.
2. Sustituir los valores de las coordenadas del punto (x, y) en $y = ax + b$ y calcular el valor de b.
3. Escribir la ecuación $y = ax + b$ con los valores a y b encontrados.

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

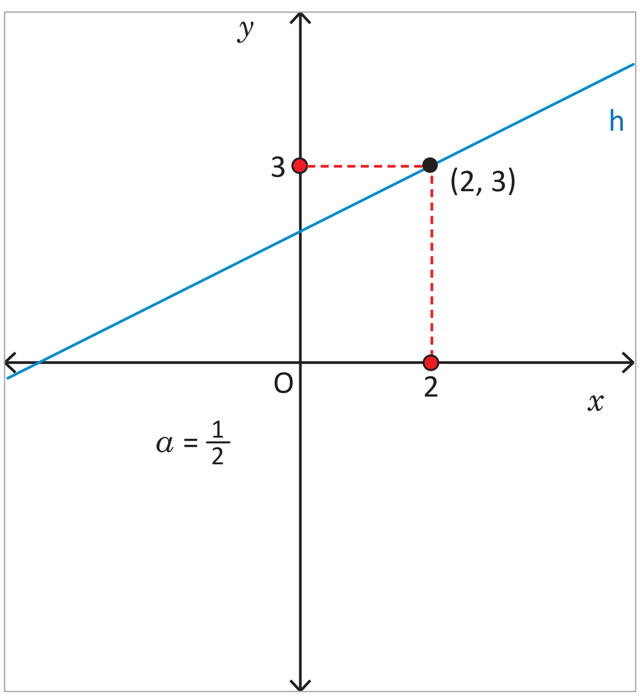
a)



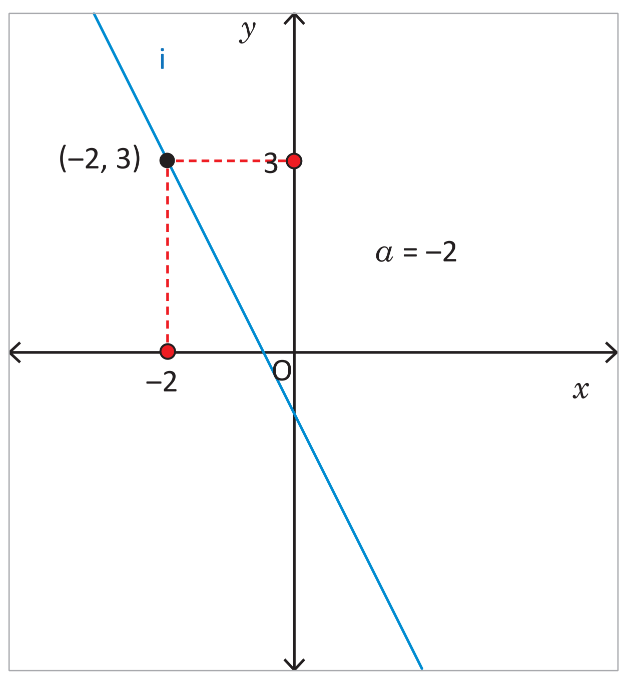
b)



c)

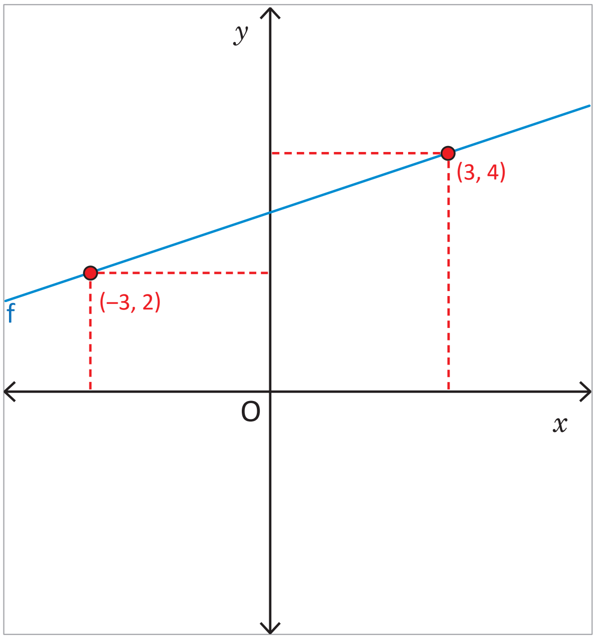


d)



1.19 Ecuación de la función a partir de dos puntos de la gráfica

P Para la función de la gráfica con las dos coordenadas dadas, escribe la ecuación de la forma $y = ax + b$.



S La ecuación de la función se puede determinar aplicando una de las formas siguientes:

Calculando la pendiente:

- Pasa por los puntos (−3, 2) y (3, 4), entonces:

$$a = \frac{4-2}{3-(-3)} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- La gráfica de la función $y = \frac{1}{3}x + b$ pasa por el punto (3, 4), al sustituir los valores se tiene:

$$4 = \frac{1}{3}(3) + b$$
$$4 = 1 + b$$
$$3 = b$$
$$b = 3$$

Entonces, la función lineal es $y = \frac{1}{3}x + 3$.

Mediante sistemas de ecuaciones:

Como pasa por los puntos (−3, 2) y (3, 4), entonces:

- Para el punto (−3, 2), sustituyendo se tiene:
  $2 = -3a + b$ ①
- Para el punto (3, 4), sustituyendo se tiene:
  $4 = 3a + b$ ②

Al resolver las ecuaciones ① y ② como sistemas de ecuaciones, se encuentran los valores de $a = \frac{1}{3}$ y $b = 3$, luego se escribe la función $y = \frac{1}{3}x + 3$.

C Para determinar la ecuación de una función cuando se conocen las coordenadas de dos puntos A(x_A, y_A) y B (x_B, y_B) de la gráfica, se puede:

1. Determinar la pendiente a utilizando la fórmula $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

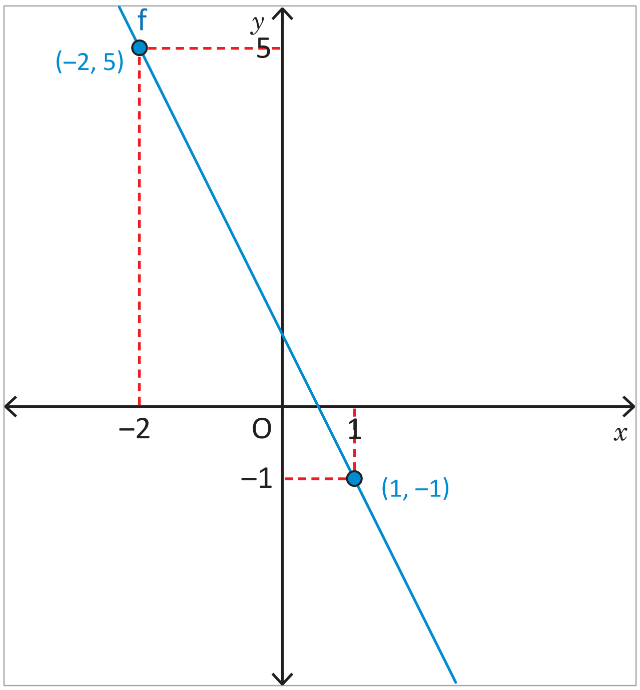
2. Sustituyendo en $y = ax + b$, el valor de a calculado en 1 y las coordenadas de uno de los puntos dados, para encontrar el valor de b.

3. Escribir la ecuación $y = ax + b$, sustituyendo los valores de a y b encontrados.

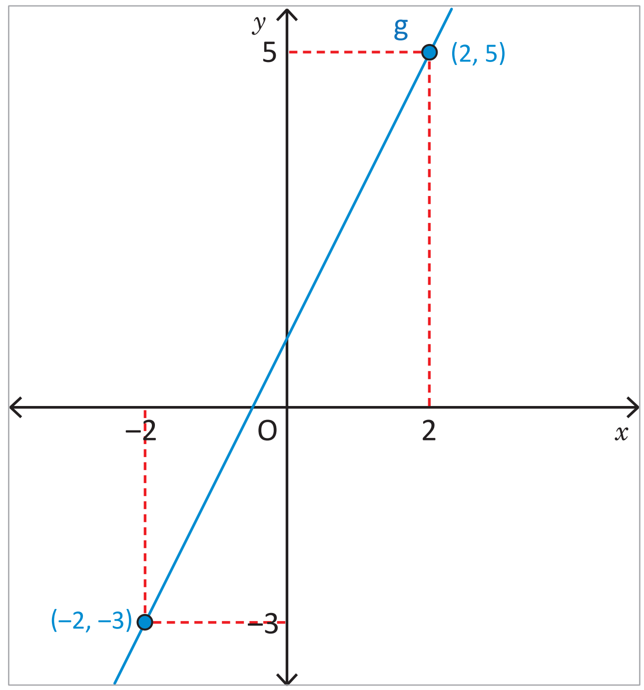
O bien, se puede tomar las coordenadas de los dos puntos dados para formar un sistema de ecuaciones lineales, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

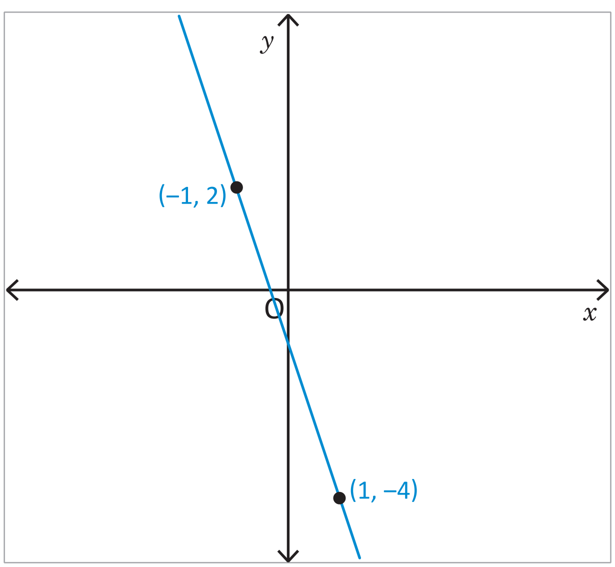
a)



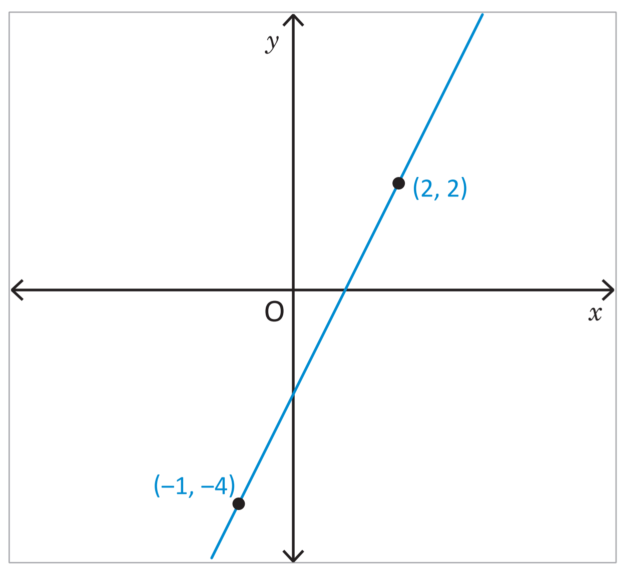
b)



c)



d)



1.20 Ecuación de la función a partir de los interceptos con los ejes

P

Escribe la ecuación de la función lineal que pasa por lo puntos (–4, 0) y (0, 6).

S

Para determinar la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos, es necesario considerar:

- El punto (0, 6) tiene la forma (0, y), por lo que corresponde al intercepto con el eje y, entonces $b = 6$.
- Se calcula la pendiente con las coordenadas de los puntos (–4, 0) y (0, 6).

$$a = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{6}{0+4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Se escribe la ecuación sustituyendo el valor determinado de a y b en la expresión $y = ax + b$, y se obtiene $y = \frac{3}{2}x + 6$.

Los puntos de la forma (x, 0) y (0, y) se llaman interceptos.

(0, y) intercepto con el eje y; (x, 0) intercepto con el eje x.

C

Cuando se conocen las coordenadas de dos puntos de la forma (x, 0), (0, y) de la gráfica de una función lineal, entonces se puede determinar la ecuación considerando que

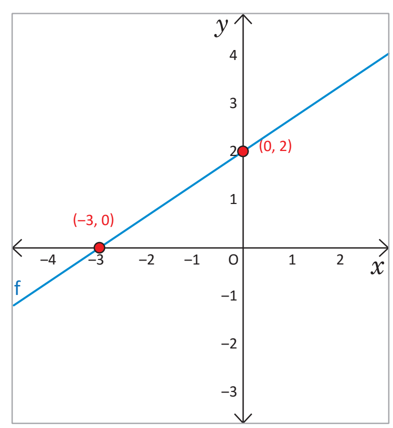
1. Para (0, y) $\longrightarrow$ $y = b$ corresponde al intercepto con el eje y.

2. La pendiente $a = \frac{y-0}{0-x} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$.

3. Se escribe la ecuación sustituyendo los valores calculados de a y b en la expresión $y = ax + b$.

E

Considerando las coordenadas de los puntos que se muestra en la gráfica de la función, escribe la respectiva ecuación.



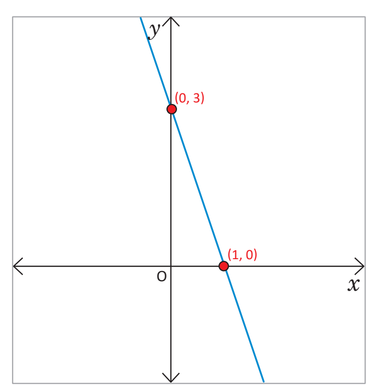
Solución.

Para determinar la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos que se muestran en la gráfica, se procede de manera similar al ejemplo anterior.

- Se identifica el intercepto con el eje y, $b = 2$.
- Se calcula la pendiente $a = \frac{2}{-(-3)} = \frac{2}{3}$.
- Se escribe la ecuación sustituyendo el valor determinado para a y b, en la expresión $y = ax + b$, se obtiene $y = \frac{2}{3}x + 2$.

1. Escribe la ecuación para la función lineal que pasa por los puntos:
   a) (0, 3) y (4, 0)
   b) (–2, 0) y (0, 4)
   c) (3, 0) y (0, 6)

2. Considerando las coordenadas de los puntos que se muestra en la gráfica de la función, escribe la respectiva ecuación.



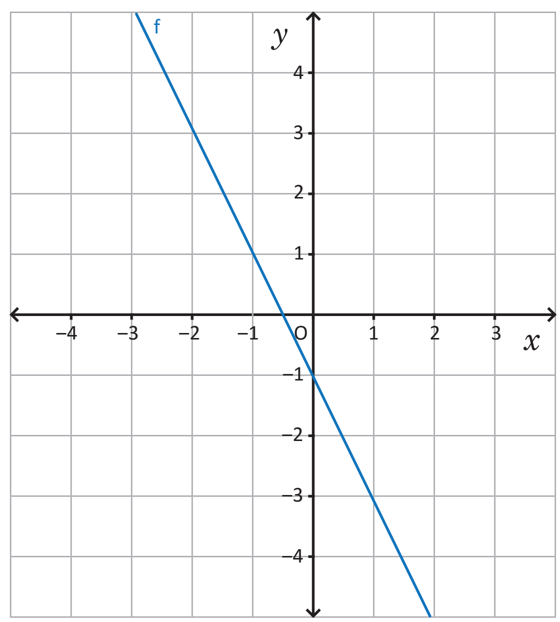
1.21 Practica lo aprendido

Resuelve de manera ordenada, en tu cuaderno, cada una de las situaciones planteadas:

1. Un determinado día, Ana pagó 3.6 dólares por 3 euros, y Carlos pagó 8.4 dólares por 7 euros.
   a) Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio en euros y, de x dólares.
   b) Represéntala gráficamente.
   c) ¿Cuánto habrían pagado por 15 euros?

2. Un algodonero recoge 30 kg de algodón por cada hora de trabajo, y demora media hora preparándose todos los días cuando inicia la jornada. La función lineal que representa esta situación está dada por la ecuación $y = 30x - 15$; donde y representa los kg de algodón recogido y x es el tiempo transcurrido en horas.
   a) Realiza una tabla para la función y grafícala.
   b) ¿Cuántos kg de algodón se recogerán en una jornada de 8 horas?

3. Se llena una piscina con una manguera en forma constante, de modo que la altura alcanzada por el agua aumenta 15 cm por cada hora que transcurre. Si inicialmente el agua que había en la piscina llegaba a una altura de 12 cm.
   a) ¿Cuál será la altura alcanzada por el agua después de 3 horas?
   b) Escribe la altura y del agua después de x horas.



4. Para la función de la gráfica, realiza lo siguiente:
   a) Identifica el intercepto.
   b) Determina la razón de cambio.
   c) Escribe la ecuación de la función.

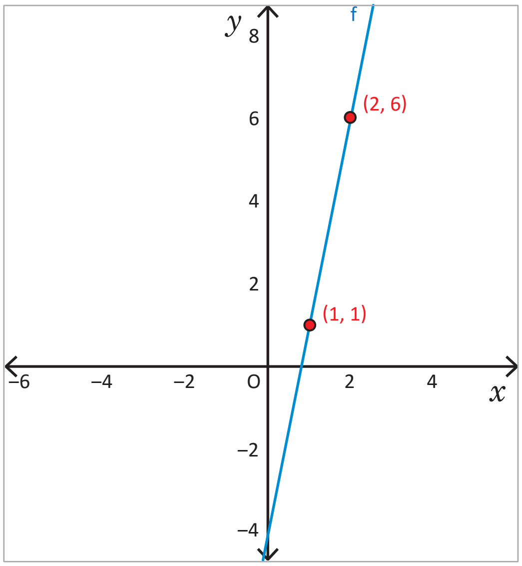
5. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano, luego realiza lo que se pide en cada numeral.
   a) $y = 3x$ b) $y = 3x + 1$
   c) $y = 3x - 1$ d) $y = -3x + 1$
   e) $y = -3x - 1$ f) $y = 3x + 2$
   g) $y = 3x + 3$ h) $y = 3x + 5$

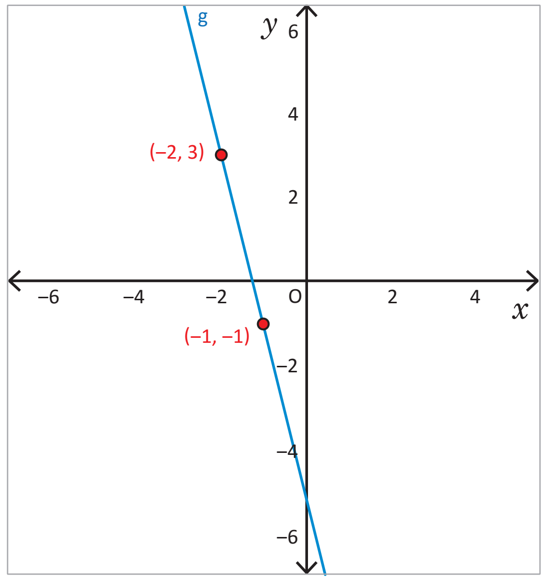
   I. Identifica el intercepto.
   II. Determina la razón de cambio.
   III. ¿Qué concluyes?

1.22 Practica lo aprendido

Resuelve de manera ordenada, en tu cuaderno, cada una de las situaciones planteadas.

1. Para las funciones de las gráficas siguientes:
   a) Determina cuántas unidades avanza y, cuando x avanza 1 unidad, justifica tu respuesta.
   b) El incremento en x y y, considerando las coordenadas de los puntos indicados.
   c) Calcula la pendiente de la función en cada caso.



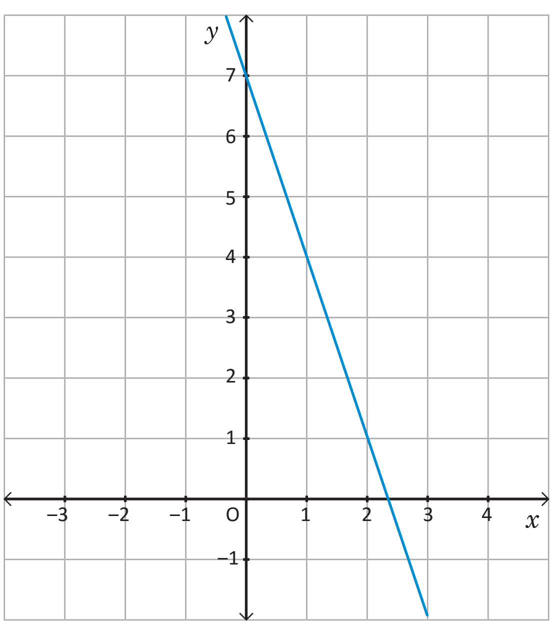


2. Identifica la pendiente y el intercepto para cada una de las siguientes funciones:
   a) $y = x + 1$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -5x + 4$ d) $y = \frac{5}{3}x - 2$

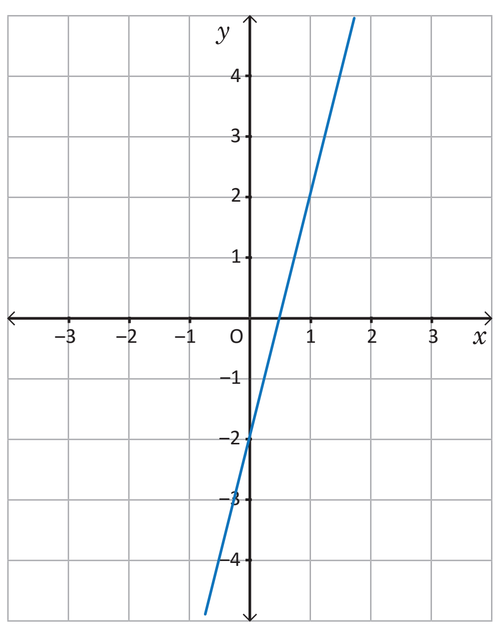
3. Determina entre qué valores está y, en cada caso.
   a) $y = 8x - 10$, x está entre −1 y 5. b) $y = -6x + 5$, x está entre −2 y 3.

4. Escribe la ecuación de la función graficada en cada literal:

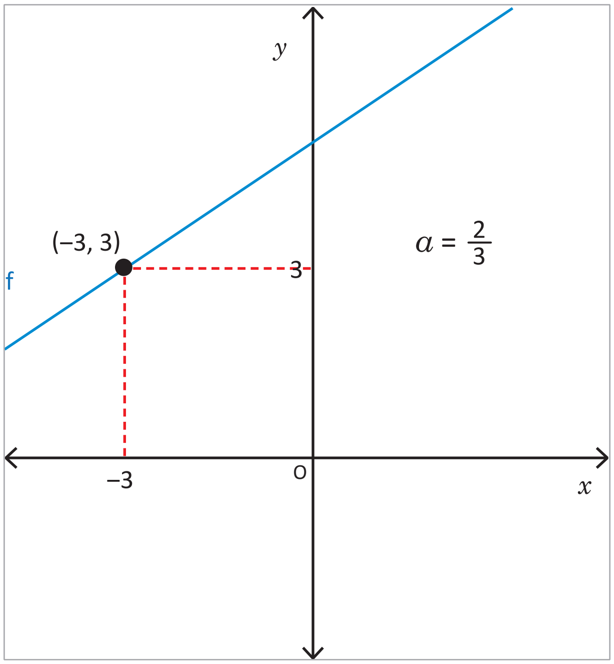
a)



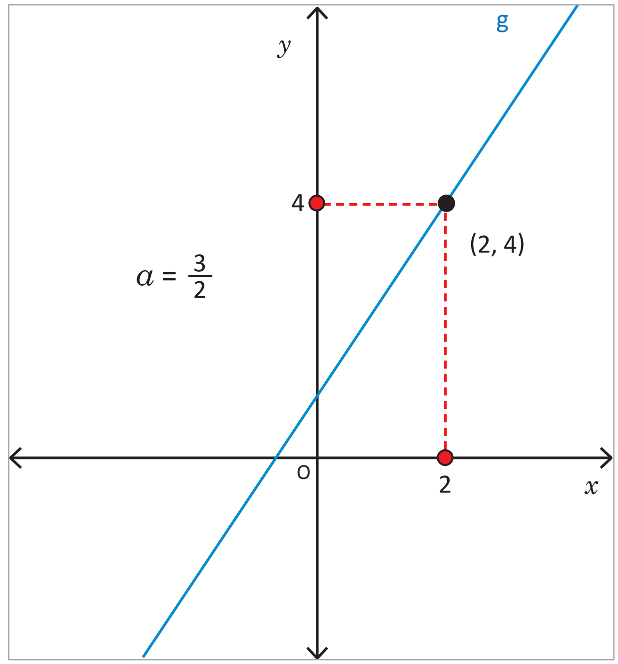
b)



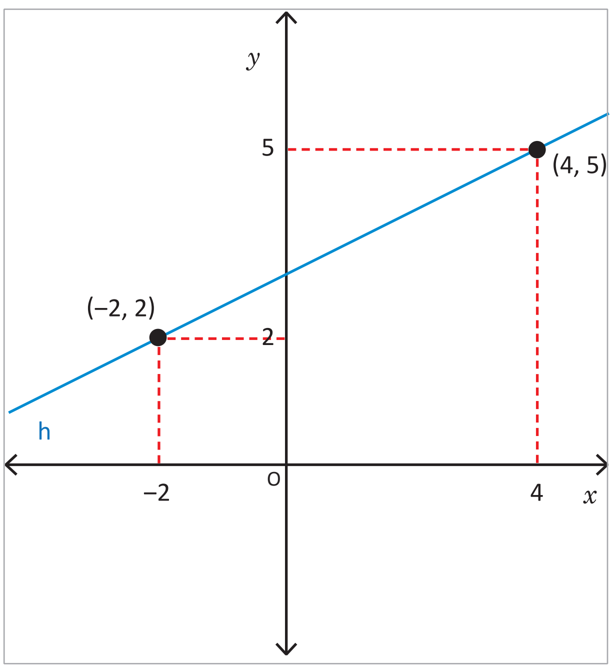
c)



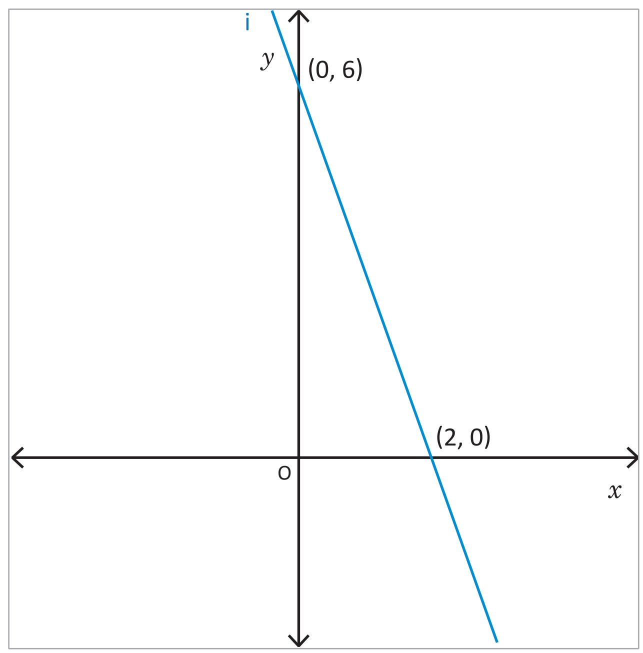
d)



e)



f)



5. Determina la ecuación $y = ax + b$, considerando la información proporcionada en cada caso.

a) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto (0, 5).
b) Tiene pendiente $\frac{3}{4}$ y pasa por el punto (4, 3).
c) Pasa por los puntos (0, −2) y (6, 2).
d) Pasa por los puntos (−2, 1) y (−1, 3).
e) La función cuya gráfica es paralela a la de la función $y = 3x - 2$, y pasa por el punto (0, 7).

2.1 Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas

P

¿Cómo puedes representar gráficamente la ecuación $x + 2y + 4 = 0$?

S

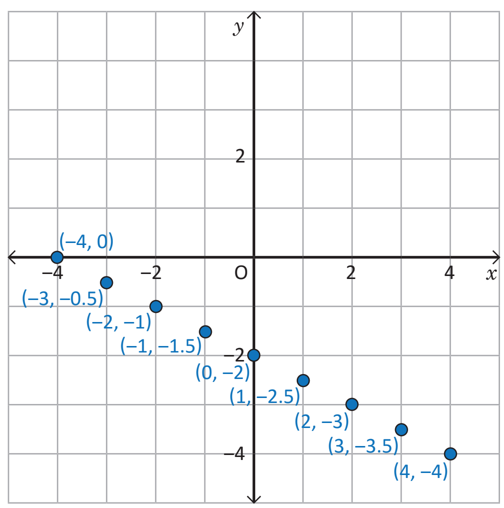
Para representar gráficamente una ecuación $x + 2y + 4 = 0$, es necesario conocer algunos valores de x y los respectivos valores de y, para representarlos en el plano como pares ordenados. Por ejemplo, si $x = -4$, al sustituir en la ecuación se tiene $-4 + 2y + 4 = 0$, $2y = 0$, entonces $y = 0$. Los valores obtenidos se organizan en la tabla.

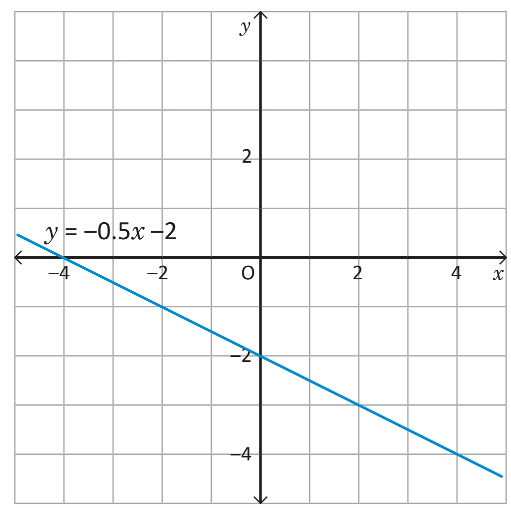
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	...

Para facilitar el cálculo, se puede resolver en y la ecuación, así se tiene: $x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = -x - 4$, x y 4 pasan a la derecha; $y = -\frac{1}{2}x - 2$, se divide entre 2 ambos miembros.

Otra manera de hacerlo es encontrando el valor de y que corresponde a un valor x, y sustituyendo otros valores para x.

Si $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}(-2) - 2$, entonces $y = -1$.





C

Para representar gráficamente la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, es necesario determinar algunos valores para x y y que hacen cierta la ecuación y representarlos como pares ordenados en el plano.

Al comparar la representación gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, con la gráfica de la función lineal, se puede concluir que en ambos casos la gráfica es una línea recta y que para graficar la ecuación $ax + by + c = 0$, es necesario encontrar el valor de y correspondiente a x.

Para cada una de las ecuaciones:

1. Determina el valor de y correspondiente a x.
2. Elabora la tabla para organizar los pares ordenados.
3. Represéntalas gráficamente.

a) $-x + y - 3 = 0$ b) $-2x + y - 2 = 0$ c) $x + 2y - 6 = 0$

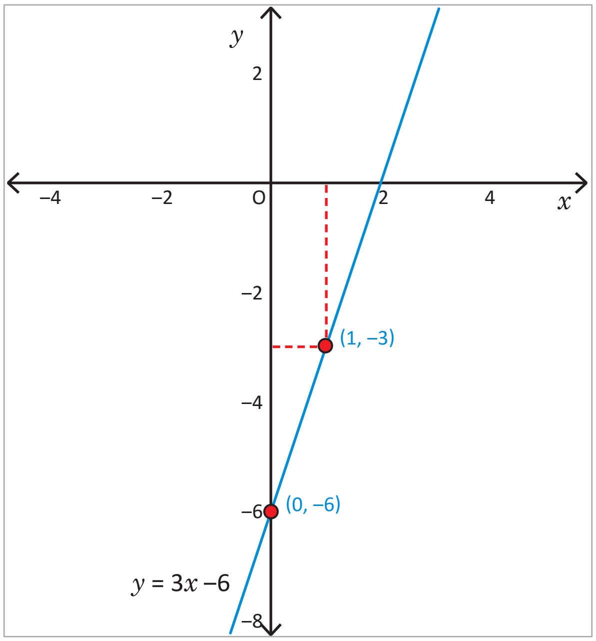
2.2 Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ y la función $y = ax + b$

P

Lleva la ecuación $-6x + 2y + 12 = 0$, a la forma $y = ax + b$, luego grafícala.

S

- Para llevar la ecuación $-6x + 2y + 12 = 0$ a la forma $y = ax + b$, se despeja y:
  $2y = 6x - 12$, $-6x$ y 12 pasan al miembro derecho,
  $y = 3x - 6$, se dividen ambos miembros entre 2.



- Ahora para graficar, se tiene que la pendiente es $a = 3$, y el intercepto $b = -6$, es decir pasa por el punto (0, 6).
- Se determina otro punto de la gráfica:

  Si $x = 1$

  $$y = 3(1) - 6$$

  $$y = -3$$

O sea que la gráfica pasa por el punto (1, −3).

Trazar la gráfica que pasa por los puntos (0, −6) y (1, −3).

C

Para llevar la ecuación de primer grado con dos incógnitas a la forma $y = ax + b$ de la línea recta, es necesario:

1. Resolver la ecuación $6x + 2y + 12 = 0$, sobre y.
2. Identificar la pendiente a y el intercepto b.
3. A partir de la pendiente y el intercepto, encontrar las coordenadas de otro punto de la gráfica.
4. Trazar la línea recta que pasa por los dos puntos determinados.

Para cada una de las siguientes ecuaciones, realiza:

1. Lleva la ecuación a la forma $y = ax + b$, resolviendo sobre y.
2. Determina otro punto por donde pasa la gráfica.
3. Traza la gráfica.

a) $-x + y = 6$
b) $2x + y = 10$
c) $3x - y = 1$

2.3 Gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ a partir de los interceptos

P

Para la ecuación $2x + y - 4 = 0$, realiza lo siguiente:

1. Identifica los interceptos con el eje y, cuando $x = 0$.
2. Identifica los interceptos con el eje x, cuando $y = 0$.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

S

Los interceptos con los ejes son:

1. El intercepto con el eje y, como $x = 0$, se tiene

$$2(0) + y - 4 = 0$$
$$0 + y - 4 = 0$$
$$y = 4$$

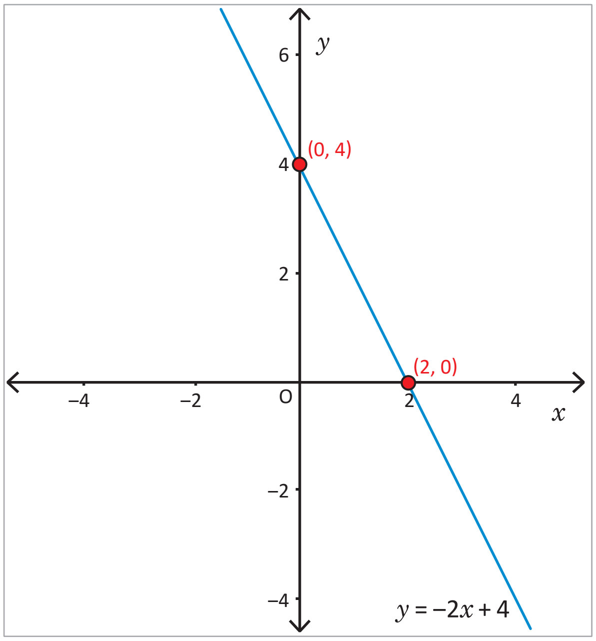
Se obtiene el punto (0, 4).

2. El intercepto con el eje x, $y = 0$, entonces sustituyendo en la expresión $2x + y - 4 = 0$

$$2x + 0 - 4 = 0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Se obtiene el punto (2, 0).

3. Representa los puntos (0, 4) y (2, 0) y traza la gráfica.



C

Para trazar la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, basta con conocer dos puntos y se pueden utilizar los interceptos con los ejes x y y, es necesario:

1. Identificar el intercepto con el eje y, $(0, b)$.
2. Determinar el intercepto con el eje x, haciendo $y = 0$ y calculando el respectivo valor de x, obteniendo el punto $(x, 0)$.
3. Representar los interceptos y trazar la gráfica.

Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Determina el valor de los interceptos de la gráfica con los ejes y y x.
2. Traza la gráfica de la ecuación.

a) $3x + y = 6$

b) $5x - 2y = 10$

c) $3x - y = -6$

2.4 Trazo de la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, cuando $a = 0$

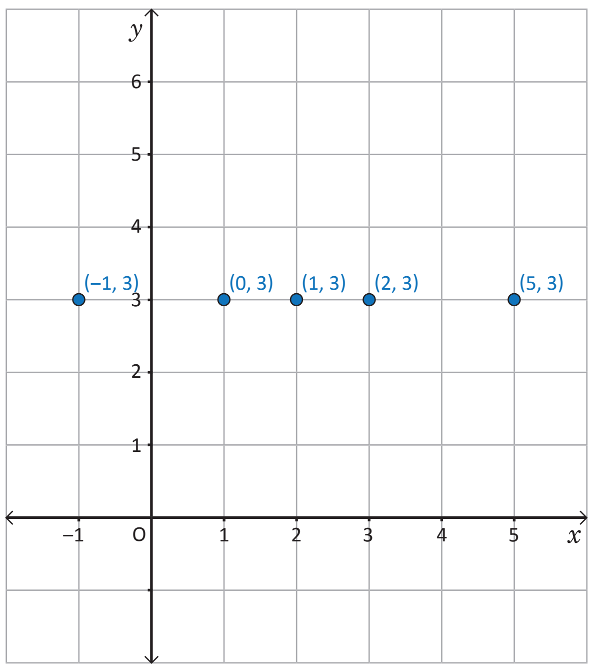
P

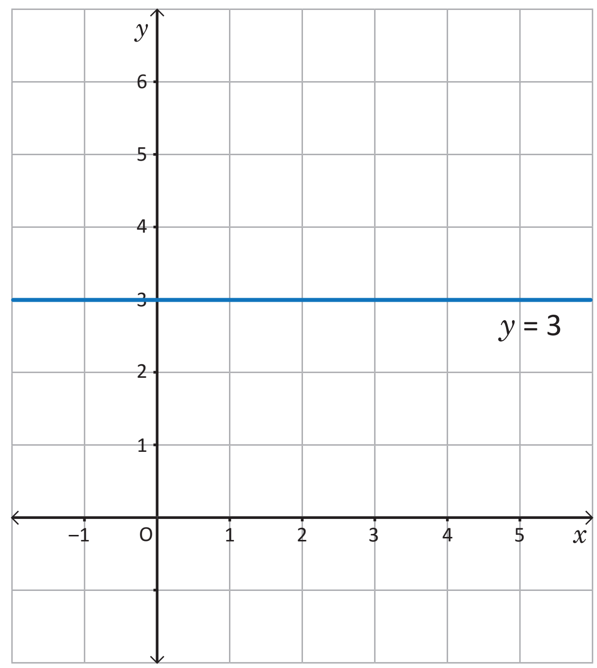
Para la ecuación $3y - 9 = 0$, realiza lo siguiente:

1. Resuelve la ecuación en y.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

S

1. Al resolver la ecuación en y, se tiene $3y = 9$, entonces $y = 3$.
2. Para determinar los pares ordenados, como en la ecuación $y = 3$, no aparece x, entonces serán todos los pares ordenados que tengan $y = 3$, por ejemplo: (–1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (5, 3), etc.
3. Entonces al representar gráficamente se tiene:





C

Para representar gráficamente la ecuación $by + c = 0$, se traza una recta horizontal en $y = -\frac{c}{b}$, pues x puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje x, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $by + c = 0$:

1. Despeja la incógnita y.
2. Represéntala gráficamente trazando la línea recta paralela al eje x, la cual pasa por el punto $(0, -\frac{c}{b})$.

a) $2y - 10 = 0$ b) $-3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{2}y - 3y = 0$ d) $4y + 12 = 0$

2.5 Trazo de la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, cuando $b = 0$

P

Para la ecuación $3x + 6 = 0$, realiza lo siguiente:

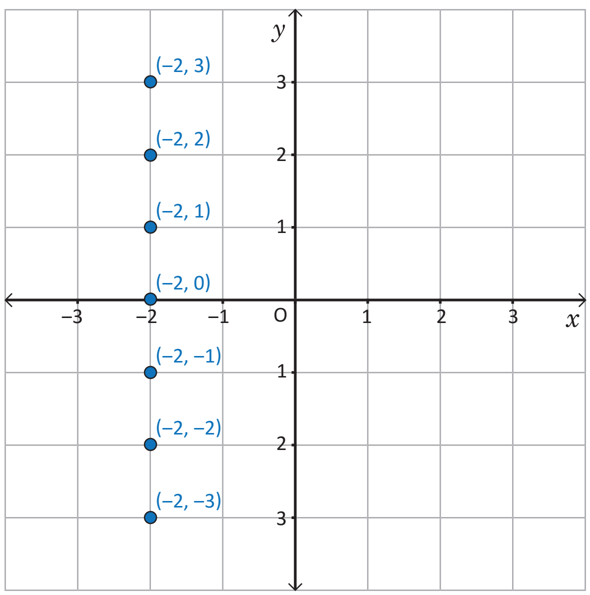
1. Resuelve la ecuación en x.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

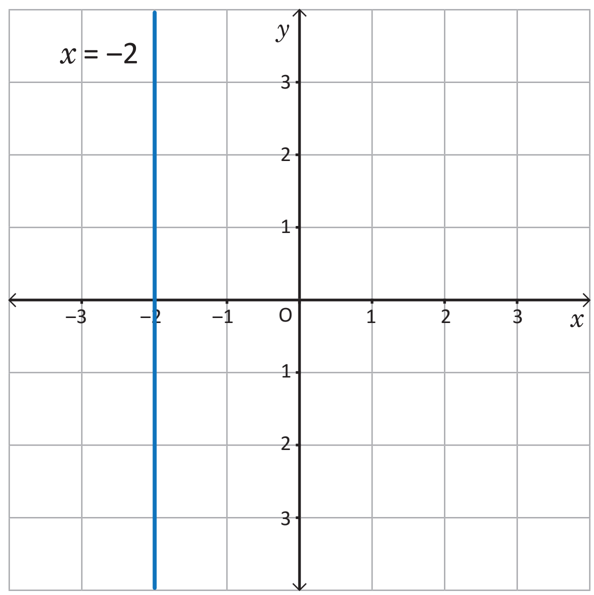
S

1. Al resolver la ecuación en x, se tiene $3x = -6$, entonces $x = -2$.

2. Para determinar los pares ordenados, como en la ecuación $x = -2$, no aparece y, entonces serán todos los pares ordenados que tengan $x = -2$, por ejemplo: $(-2, -3)$, $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, $(-2, 3)$, etc.

3. Entonces, al representar gráficamente se tiene:





C

Para representar gráficamente la ecuación $ax + c = 0$, únicamente se traza una recta vertical en $x = -\frac{c}{a}$ pues y puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje y, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

En cada una de las siguientes ecuaciones $ax + c = 0$:

1. Despeja la incógnita x.
2. Represéntala gráficamente trazando la línea recta paralela al eje y, la cual pasa por el punto $(-\frac{c}{a}, 0)$.

a) $x - 2 = 0$ b) $-2x + 6 = 0$ c) $5x + 20 = 0$ d) $\frac{1}{2}x - 2 = 0$

2.6 Intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

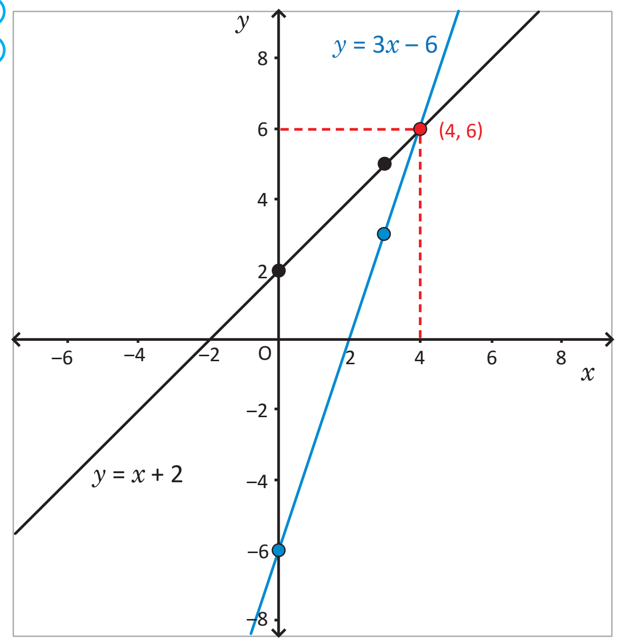
P

Para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -3x + y + 6 = 0 & ① \\ x - y + 2 = 0 & ② \end{cases}$, realiza lo siguiente:

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma $y = ax + b$.
2. Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
3. Identifica las coordenadas del punto donde se intersecan las dos rectas.
4. Interpreta el sentido del punto de intersección.

S

1. Al resolver las ecuaciones en y se tiene $\begin{cases} y = 3x - 6 & ① \\ y = x + 2 & ② \end{cases}$



2. Para obtener la gráfica de cada ecuación se identifican dos puntos, estos pueden ser el intercepto con el eje y y un punto adicional.

① Si $x = 3$, entonces:

$y = 3(3) - 6$
$y = 9 - 6$
$y = 3$

Pasa por los puntos (0, –6) y (3, 3)

②

$y = x + 2$
$y = 3 + 2$
$y = 5$

Pasa por los puntos (0, 2) y (3, 5)

3. Al trazar líneas paralelas al eje y y eje x, respectivamente, se determina las coordenadas del punto en que se cortan las dos gráficas, tal como se muestra en la gráfica corresponde al punto (4, 6).

4. Como el punto (4, 6) corresponde a la gráfica de las dos ecuaciones, se puede decir que satisface las dos ecuaciones; por tanto corresponde a la solución del sistema de las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Entonces la solución del sistema es $x = 4$, $y = 6$.

Otra manera de encontrar la solución del sistema propuesto es mediante cualquiera de los métodos ya conocidos.

C

Cuando se grafica un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en un solo plano, las coordenadas del punto en que se intersecan las dos gráficas, corresponde a la solución del sistema, por tanto, un sistema de ecuaciones también se puede resolver de manera gráfica, representando las dos gráficas en un solo plano e identificando las coordenadas que corresponden al punto de intersección.

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma pendiente intercepto.
2. Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
3. Identifica las coordenadas del punto donde se intersecan las dos rectas.
4. Encuentra la solución aplicando un método conocido.

a) $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ -x + y = -1 & ② \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 8 & ① \\ -2x + y = -8 & ② \end{cases}$

2.7 Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

P

Resuelve gráficamente el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 12 & ① \\ -x - 3y = 3 & ② \end{cases}$

Para graficar las ecuaciones, puedes determinar los interceptos con los ejes x y y.

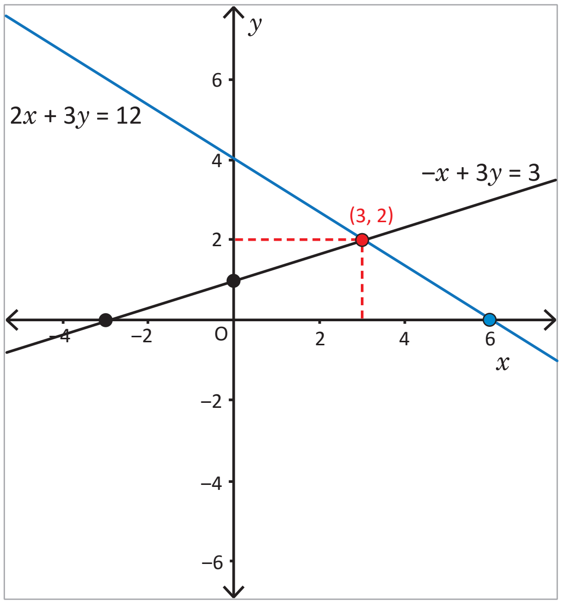
S

Para resolver el sistema gráficamente, se pueden utilizar los interceptos, y realizar lo siguiente:

1. Determinar las coordenadas de los interceptos de cada una de las ecuaciones con los ejes x y y.

2. Se grafican las dos ecuaciones en un mismo plano, a partir de los interceptos.

Ecuación	Intercepto eje y ($x = 0$)	Intercepto eje x ($y = 0$)	Par ordenado
$2x + 3y = 12$	$2(0) + 3y = 12$ $y = 4$ $(0, 4)$	$2x + 3(0) = 12$ $x = 6$ $(6, 0)$	(0, 4) y (6, 0)
$-x + 3y = 3$	$-(0) + 3y = 3$ $y = 1$ $(0, 1)$	$-x + 3(0) = 3$ $x = -3$ $(-3, 0)$	(0, 1) y (−3, 0)



3. Construir las gráficas e identificar el intercepto.

4. Analizar la solución, tal como se muestra en la gráfica, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$, $y = 2$.

C

Para determinar la solución de un sistema de ecuaciones de manera gráfica, se pueden utilizar los interceptos y se realiza lo siguiente:

1. Determinar el intercepto con cada uno de los ejes x y y.
2. Representar los interceptos en el plano y construir la gráfica.
3. Identificar los valores de x y y que corresponden al punto de intersección de las rectas.

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, de forma gráfica.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 & ① \\ x + 4y = -4 & ② \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -2 & ① \\ -x + 2y = 2 & ② \end{cases}$

2.8 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

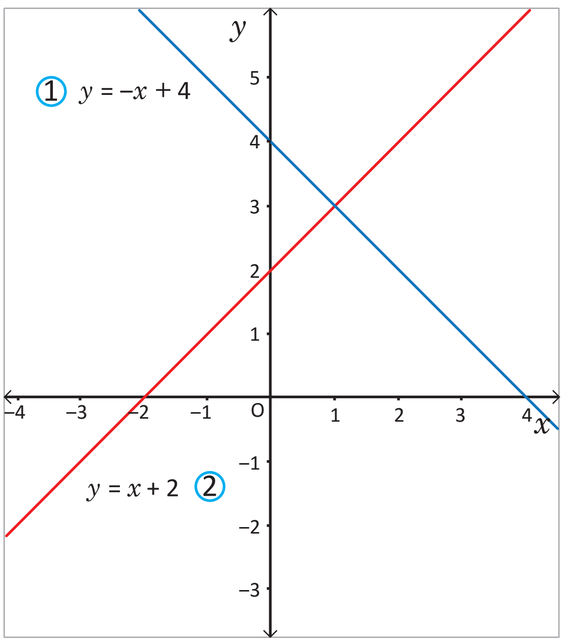
1. Para cada una de las ecuaciones lineales, realiza lo siguiente:
   - Resuélvela en y, llevándola a la forma $y = ax + b$, si es posible.
   - Identifica los interceptos con cada uno de los ejes, si es posible.
   - Grafícala en el plano cartesiano.

   a) $2x + y = 6$ b) $x + 3y = 12$ c) $3x + 4y = 12$ d) $5x - 3y = 15$

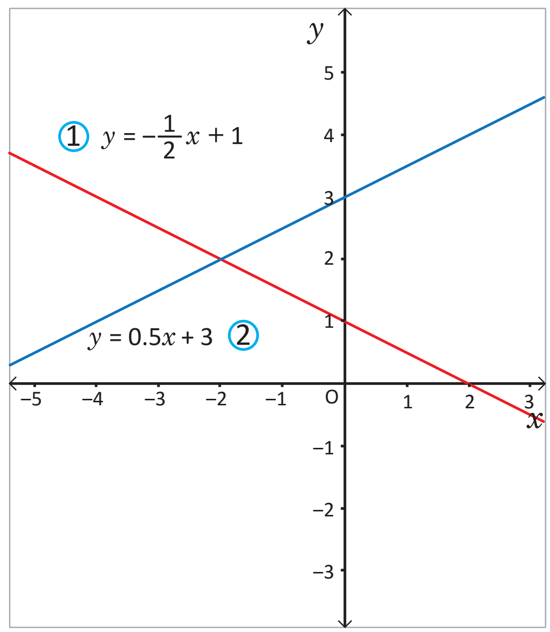
   e) $\frac{1}{2}y - 3 = 0$ f) $3y + 9 = 0$ g) $\frac{1}{3}x - 1 = 0$ h) $2x + 6 = 0$

2. Relaciona cada ecuación del sistema con su respectiva representación gráfica e identifica la solución.

   a)



   b)



3. Para cada uno de los sistemas realiza lo siguiente:
   - Expresa las ecuaciones en la forma $y = ax + b$.
   - Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
   - Determina la solución del sistema.

   a) $\begin{cases} -2x + 5y = 10 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 & ① \\ 2x + 3y = 12 & ② \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y = -6 & ① \\ -2x - y = -2 & ② \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y = -1 & ① \\ x + y = 3 & ② \end{cases}$

4. Grafica cada uno de los sistemas de ecuaciones e indica si tienen solución, justifica tu respuesta.

   a) $\begin{cases} 4x + 6y = 12 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y = 5 & ① \\ -x + 3y = -2 & ② \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y = 3 & ① \\ -3x - y = 9 & ② \end{cases}$ d) $\begin{cases} -3x + 4y = 0 & ① \\ -4x - 3y = 0 & ② \end{cases}$

3.1 Aplicaciones de la función lineal, parte 1

P

En el recibo del consumo mensual de agua de la casa de Carlos, aparecen reflejados los siguientes conceptos: servicio de alcantarillado \$3.00 mensuales y \$0.50 por metro cúbico (m^3) de agua consumida.

1. ¿Cuánto deberá pagar en un mes que haya consumido 16 m^3?
2. Escribe el total y a pagar, cuando se consumen x metros cúbicos de agua.
3. Representa gráficamente la función que relaciona el consumo del agua en metros cúbicos con el costo total a pagar.

S

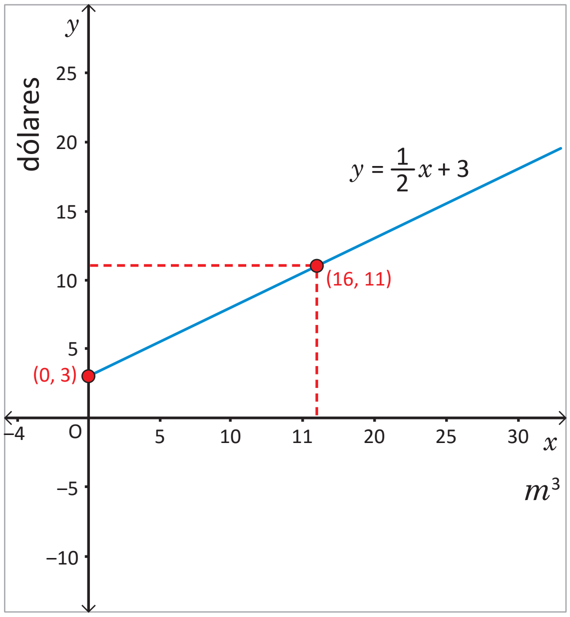
1. Para determinar cuánto debe pagar Carlos al consumir 16 metros cúbicos de agua, se considera servicio de alcantarillado + 0.50 × total de m^3 de agua consumidos:

$$3 + 0.5(16) = 3 + 8 = 11.$$

   Por 16 metros cúbicos deberá pagar 11 dólares.

2. A partir del literal anterior, si se sustituye para x metros cúbicos se tiene: $y = 3 + 0.5x$, que es equivalente a $y = 0.5x + 3$.

3. Conociendo el costo cuando no se ha generado consumo de agua y el costo cuando se consumen 16 metros cúbicos, se puede trazar la gráfica, tal como se muestra en la figura.



Como x representa el consumo, $x \geq 0$; por tanto, no aparece la gráfica para valores negativos de x.

C

Para resolver problemas aplicando la función lineal, únicamente se necesita identificar las dos variables x y y, y pensar en y como una función lineal de x, luego dar respuesta a la situación planteada.

La relación entre los grados Fahrenheit (F) y los Celsius (C) es la siguiente:

- 0° C es equivalente a 32° F y 100° C a 212° F.
- Si x° C equivalen a y° F, y es una función lineal de x, encuentra la ecuación que relaciona las dos variables.

  1. Determina la variación térmica de un día de invierno en que se registra una temperatura mínima de 0° C y una máxima de 15° C, exprésala en grados Fahrenheit.

  2. ¿A qué temperatura un termómetro Fahrenheit marca numéricamente el triple que el de Celsius?

Unidad 3

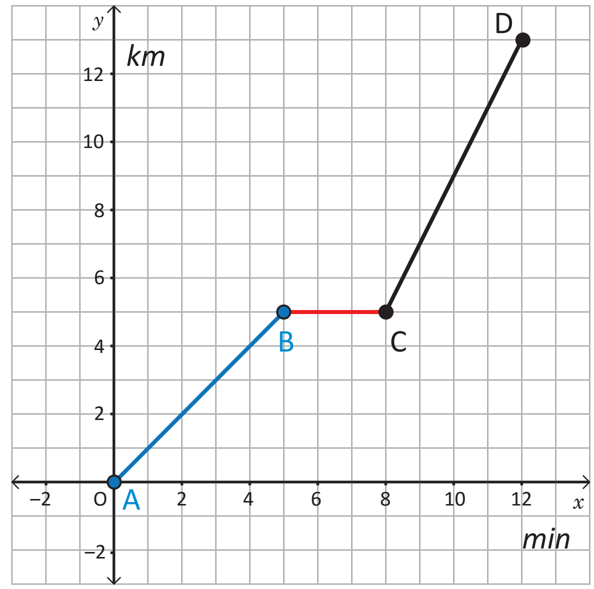
3.2 Aplicaciones de la función lineal, parte 2

P

Mario participó en una carrera, después de 5 minutos tuvo dificultades e hizo una parada, luego de 3 minutos se restableció y retomó la carrera, para recuperar el tiempo perdido aumentó la velocidad. Considerando y kilómetros recorridos en x minutos, responde:

1. ¿A qué distancia del punto de partida hizo la parada Mario?

2. Expresa la distancia recorrida y después de transcurrido x minutos en el recorrido, tanto antes como después de la parada.



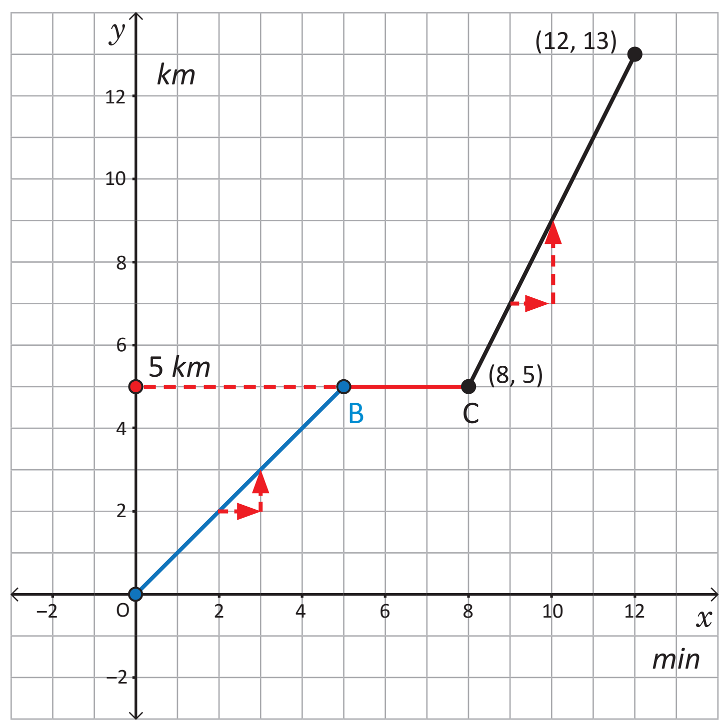
S

1. Para determinar a qué distancia se encontraba Mario, se traza una línea paralela al eje x y que pase por el punto en que se detuvo, se puede observar que Mario paró a 5 km del punto de partida.

2. Distancia antes y después de la parada.
   - Al determinar la razón de cambio antes de la parada, se observa que por cada minuto que pasa, Mario recorre 1 km, es decir, $a = 1$; por tanto, la distancia y antes de la parada es $y = x$.

   - Al determinar la razón de cambio después de la parada puede verse que por cada minuto que transcurre, Mario recorre 2 km, es decir, $a = 2$, además pasa por el punto (12, 13); de donde se obtiene el valor de b al sustituir en $y = ax + b$:

$$13 = 2(12) + b$$
$$13 = 24 + b$$
$$13 - 24 = b$$
$$-11 = b$$



Por tanto, la distancia y después de la parada puede expresarse como $y = 2x - 11$.

María salió de su casa hacia la escuela que dista 1 500 m de su casa.

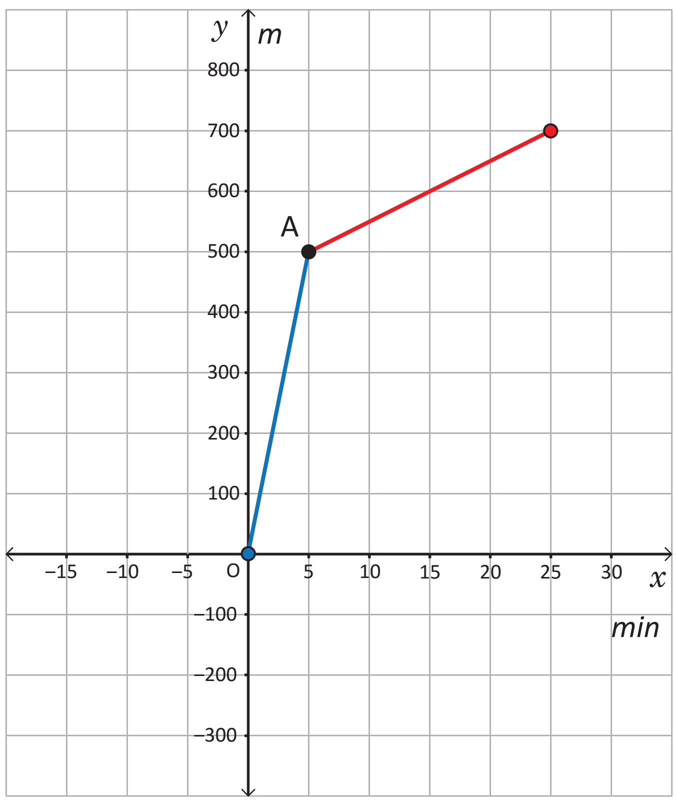
De la casa hasta el punto A se desplazó en bicicleta, y a partir de ahí se fue caminando. La gráfica muestra la relación entre el tiempo x (minutos) transcurridos desde que sale de casa y la distancia recorrida y (metros).

a) Determina la velocidad en metros por minuto mientras se desplaza en bicicleta.

b) Expresa la relación entre el tiempo transcurrido x minutos y la distancia recorrida y metros, desde 0 a 5 minutos.

c) ¿Cuál es la velocidad de María cuando se desplaza caminando?

d) Expresa la relación entre los x minutos transcurridos y la distancia y recorrida desde 5 a 25 minutos.



3.3 Aplicaciones de la función lineal, parte 3

P

En el rectángulo ABCD, el punto E se mueve sobre el borde del rectángulo desde el punto A, hasta D, pasando por los puntos B y C. Cuando el punto E se ha movido x cm, se toma el área del triángulo AED como y cm². Observa las figuras y responde:

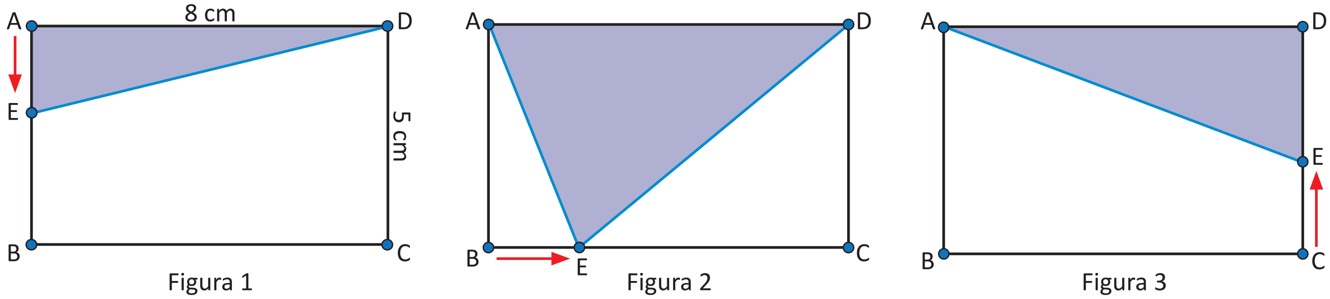


Figura 1 — Figura 2 — Figura 3

1. Explica qué sucede con el área del triángulo AED, cuando:

   a) E se desplaza sobre el lado AB, es decir $0 \leq x \leq 5$.
   b) E se desplaza sobre el lado BC, es decir $5 \leq x \leq 13$.
   c) E se desplaza sobre el lado CD, es decir $13 \leq x \leq 18$.

2. Expresa el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de A hasta B (ver figura 1).

3. Determina el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de B hasta C (ver figura 2).

4. Expresa el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de C hasta D (ver figura 3).

S

1. Al observar el movimiento que realiza el punto E en cada uno de los casos se puede concluir que
   a) Cuando E se mueve sobre el lado AB, el área del triángulo AED aumenta.
   b) Cuando E se mueve sobre el lado BC, el área del triángulo se mantiene constante, pues la base es 8 cm y la altura es 5 cm, en cualquier momento.
   c) Cuando E se mueve sobre el lado CD, el área del triángulo disminuye hasta llegar a cero.

2. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre AB, se puede calcular considerando que la base es 8 cm y la altura x, entonces $y = \frac{1}{2}(8)(x) = 4x$; es decir, $y = 4x$ para $0 \leq x \leq 5$.

3. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre BC, en este caso la base es 8 cm y la altura 5 cm, entonces el área es $y = \frac{8(5)}{2}$; es decir $y = 20$ para $5 \leq x \leq 13$.

4. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre CD, en este caso la base es 8 cm y la altura es $(18 - x)$ cm, entonces el área es $y = \frac{1}{2}(8)(18 - x) = 4(18 - x) = 72 - 4x$; es decir, $y = -4x + 72$, para $13 \leq x \leq 18$.

Representa gráficamente en un mismo plano el área del triángulo AED, cuando:

a) E se mueve sobre el lado AB.
b) E se mueve sobre el lado BC.
c) E se mueve sobre el lado CD.

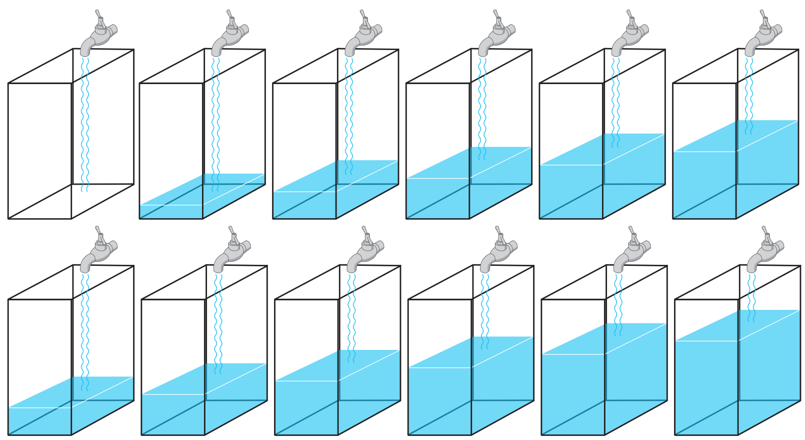
3.4 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. Don Juan, tiene una microempresa familiar dedicada a la elaboración de armarios. Esta microempresa cuenta con un pequeño local por el cual pagan 800 dólares mensuales de alquiler y dos empleados que cobran 600 dólares mensuales cada uno. El costo de materia prima de cada armario más gastos de distribución asciende a 100 dólares y el precio por unidad de venta es de 150 dólares.

    a) Define la función lineal **Costo total** y, de elaboración de x unidades de clósets y grafícala.
    b) Define la función lineal y **Ingreso total**, por la venta de x clósets y grafícala, (considera que Ingreso = precio unitario por número de unidades vendidas).
    c) Define la función lineal y **Utilidad total** (Utilidad = Ingreso total – Costo total), para x armarios vendidos.
    d) Para que don Juan no se quede endeudado, ¿cuántos armarios debe vender como mínimo por mes?

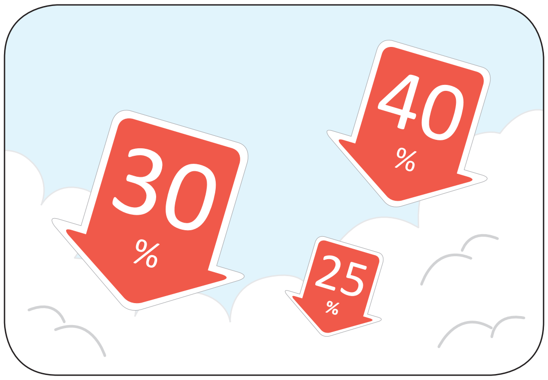
2. Miguel lavó la pila de su casa, luego abrió el grifo y observó que por cada minuto que transcurría, el nivel de agua en la pila subía un centímetro; mientras que la pila de su tía tenía agua hasta un nivel de 2 centímetros y al abrir el grifo la cantidad de agua aumentó de la misma manera que en el caso de Miguel. Considerando que ambas pilas tienen 90 cm de altura, realiza lo siguiente:



    a) Toma la medida del nivel de agua en distintos momentos y organiza los resultados en una tabla.
    b) ¿Es posible determinar el tiempo de llenado de la pila?
    c) ¿Es posible comparar los datos del llenado de la pila de Miguel con los datos del llenado de la pila de la tía?, ¿existe alguna relación?

3. Han llegado las rebajas de fin de año y en una tienda aplican el 20% de descuento en todos los productos.

    a) Escribe una ecuación que relacione el precio rebajado y con el precio original x.
    b) ¿Cuánto se debe pagar por una camisa que originalmente costaba $60.00?
    c) Considera productos de distintos precios y elabora una gráfica que relacione el precio original x con el rebajado y.



Unidad 3

3.5 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. En una ciudad existen dos compañías de telefonía:

   • La compañía A ofrece una cuota fija de \$15.00 al mes, más \$0.05 el minuto consumido.
   • La compañía B cobra únicamente el consumo a \$0.25 el minuto.

   a) Grafica en un mismo plano la función lineal entre x minutos consumidos y el importe y de pago de la factura mensual para ambas compañías.
   b) Si se habló menos de 70 minutos al mes, ¿cuál compañía conviene contratar?
   c) ¿En qué casos es indiferente que se contrate cualquiera de las dos compañías?
   d) ¿En qué caso conviene contratar la compañía A?

2. En una ciudad se cuenta con una regulación sobre estacionamientos, la norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.

   • José deposita \$1.10 y el parquímetro indica que dispone de 45 minutos (3/4 de hora).
   • Beatriz con \$3.30 tiene 3 horas y media.

   a) Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo.
   b) Dibuja la gráfica.
   c) ¿Cuánto hay que pagar por estacionarse 40 minutos (2/3 de hora)?
   d) Si se paga \$4.50, ¿de cuánto tiempo se dispone para estacionarse?

3. Marta es vendedora de automóviles, tiene un sueldo fijo de \$800 mesuales más una comisión de \$100 por cada automóvil que venda. Encuentra la función que expresa el sueldo de Marta en un mes que haya vendido x automóviles y dibuja su gráfica.

4. A Julia sus padres le dan cada mes \$10.00 para su refrigerio más \$0.50 por cada día que haga la limpieza. Encuentra la función que expresa el dinero que recibe Julia, al final del mes, habiendo hecho la limpieza x días y dibuja su gráfica.

5. En un negocio de reparación de llantas un trabajador tiene un sueldo diario formado por la suma de una base fija más \$2 por cada llanta reparada. En cierto día del mes, después de que había reparado 12 llantas, el empleado calculó que su sueldo diario era de \$44.

   a) ¿Cuál es el sueldo diario fijo del trabajador?
   b) ¿Cuál es la función que representa el sueldo del trabajador cuando arregla x llantas?
   c) Grafica la función lineal que representa el sueldo diario del trabajador.

6. En una factura de agua potable el cargo fijo es de \$3.00, y el costo del metro cúbico de agua es de \$1.50. Considerando que el monto a cancelar se calcula mediante una función lineal:

   a) Escribe la ecuación para determinar el total de la factura y para x metros cúbicos.
   b) Elabora una gráfica para la relación entre el consumo de agua x y el costo a pagar y.
   c) ¿Cuánto se facturó en diciembre, si en ese mes el consumo fue de 28 m^3?

Paralelismo y ángulos de un polígono

4 Unidad

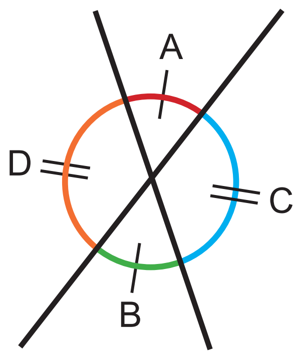


Ilustración que demuestra que los ángulos opuestos por el vértice son iguales; según Pinasco, Juan Pablo (2009) Las Geometrías.

Tales de Mileto (Miletus, Turquía; 620 a. C. - 545 a. C.) fue el primer matemático a quien se le atribuyó una serie de resultados teóricos generales, es decir, de teoremas. Si bien no se sabe cómo los demostró originalmente, hoy son parte de la geometría básica, entre ellos se tienen:

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Dadas dos paralelas y una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.

Los ángulos y rectas paralelas se utilizan en diferentes contextos, entre los que se pueden mencionar: la construcción de edificios, puentes, escaleras, vías férreas y carreteras; en el diseño de los instrumentos musicales, cables del tendido eléctrico, diseño de pisos, etc.

Bulevar Monseñor Romero

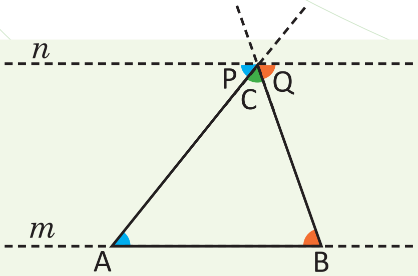


Ilustración de la demostración pitagórica de los ángulos internos de un triángulo.

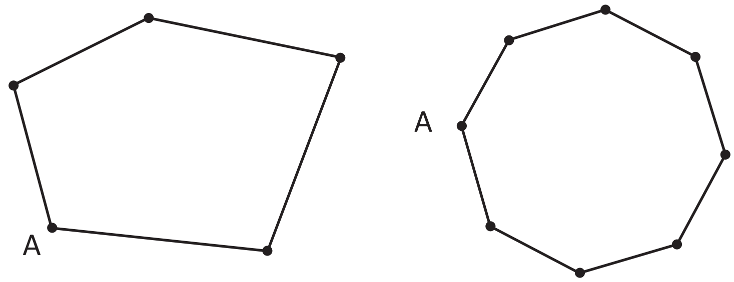
En el desarrollo de los contenidos de esta unidad recordarás la relación entre los ángulos internos de un triángulo, que te servirá de base para el estudio de los ángulos internos y externos de un polígono, así como la relación entre los ángulos que se forman entre paralelas y sus aplicaciones en situaciones cotidianas.

1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

P

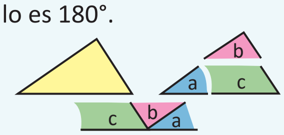
Trazando las diagonales desde el vértice A, divide estos polígonos en triángulos y determina:

a) ¿Cuánto suman los ángulos internos del pentágono?
b) ¿Cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman?
c) ¿Cuánto suman los ángulos internos del octágono?
d) ¿De cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forma?



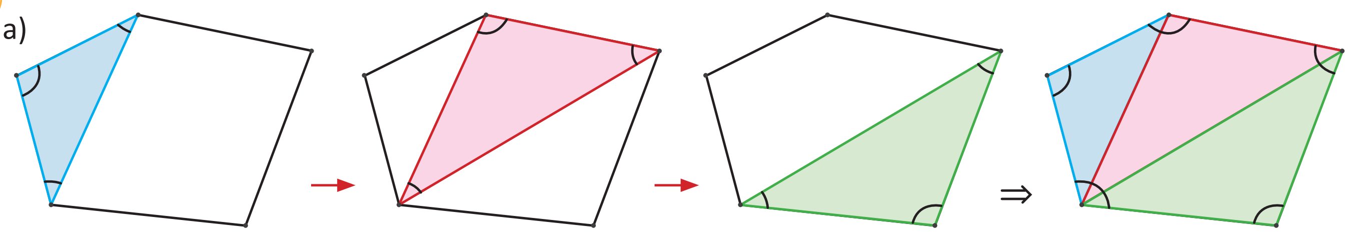
Se puede dividir el polígono en triángulos trazando todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.

Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



S

a)



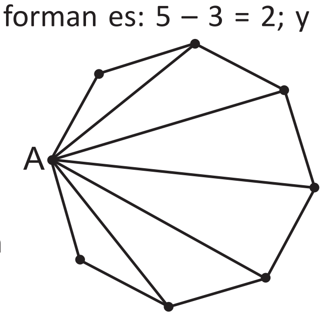
180° + 180° + 180° = 180° × 3

El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:

Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2; y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

c) En el octágono se forman 6 triángulos, de donde se obtiene que la suma de los ángulos internos es 180° × 6.



d) La diferencia del número de lados y la cantidad de triángulos que se forman es: 8 – 6 = 2.

C

En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos para un polígono de n lados es 180° × (n – 2).

Encuentra la suma de los ángulos internos de

a) Un eneágono

b) Un dodecágono

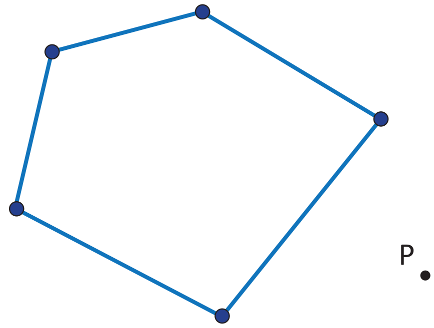
Un eneágono tiene 9 lados y un dodecágono tiene 12 lados.

1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

P

Encuentra 3 maneras distintas de triangular el pentágono para determinar la suma de sus ángulos internos.

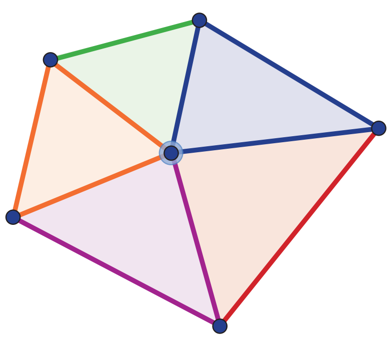
a) Desde un punto interior
b) Desde un punto del borde
c) Desde un punto exterior P
d) Compara los resultados con los obtenidos en la clase anterior



S

Considerando los tres casos se tiene:

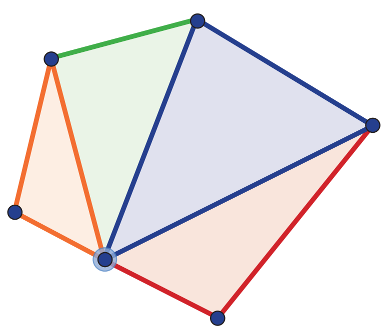
a) Se coloca un punto dentro del pentágono y desde ahí, se trazan segmentos a cada uno de los vértices para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 360°; pues se le resta el ángulo que se forma en el punto interno seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

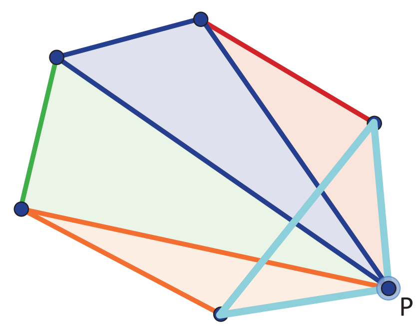
b) Se coloca un punto sobre cualquiera de los lados del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices no adyacentes para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta el ángulo llano que se forma en el punto del borde que fue seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c) Se coloca un punto fuera del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta la suma de los ángulos internos del triángulo que se forma con el punto externo que fue seleccionado y el lado del pentágono.

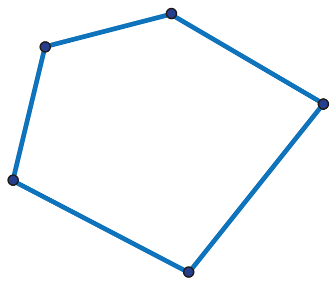
Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

d) Al comparar los resultados obtenidos en los tres literales anteriores, se observa que son exactamente iguales entre sí e iguales a los resultados de la clase anterior.

La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

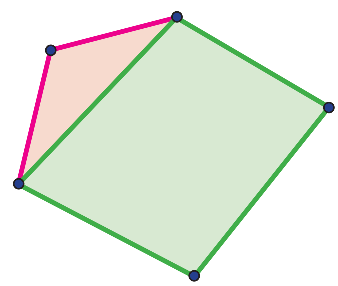
Determina la suma de los ángulos internos del pentágono, utilizando una estrategia distinta a las ya utilizadas.



Piensa en dividir el pentágono en cuadriláteros y/o triángulos.

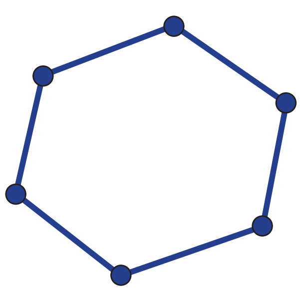
Se puede dividir en un cuadrilátero y un triángulo y luego determinar la suma de los ángulos.

Suma de ángulos internos = 180° + 360°
= 180°+ 2 × 180°
= 3 × 180°

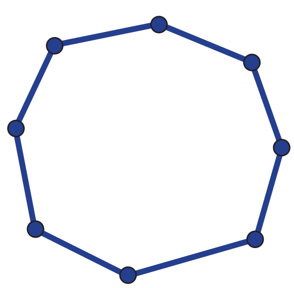


Encuentra la suma de los ángulos internos de

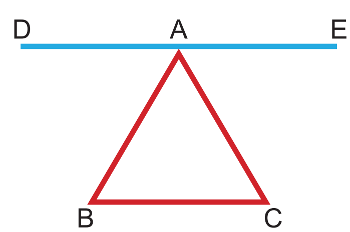
Un hexágono

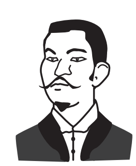


Un octágono



La figura de Pitágoras en los comienzos de la matemática es central por haber relacionado, en cierto modo, los problemas aritméticos que dependen de números, con los problemas geométricos relacionados con figuras; además de ello existen dos resultados importantes que debemos a Pitágoras o a su escuela, uno de ellos es: "En todo triangulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos".



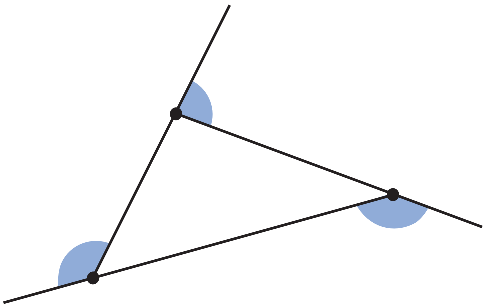


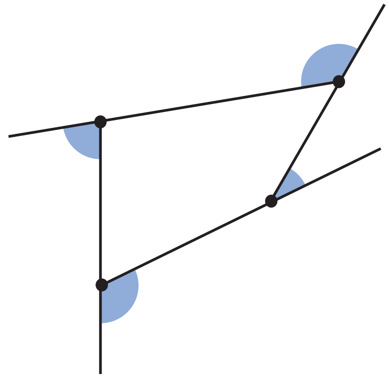
Hazlo utilizando al menos 2 de las estrategias aprendidas en esta clase.

1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

P

Encuentra la suma de los ángulos externos de estos polígonos.

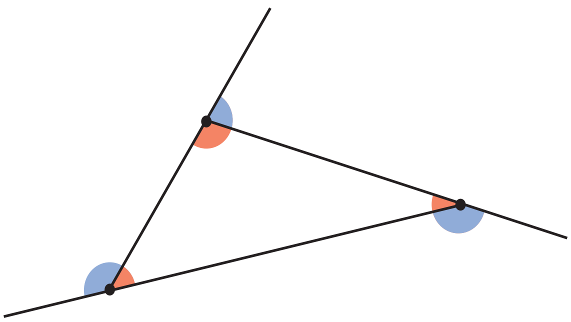




Un ángulo externo es el que se forma por un lado del polígono y la prolongación del lado contiguo.

En la suma de los ángulos externos se toma solo uno de cada vértice.

S



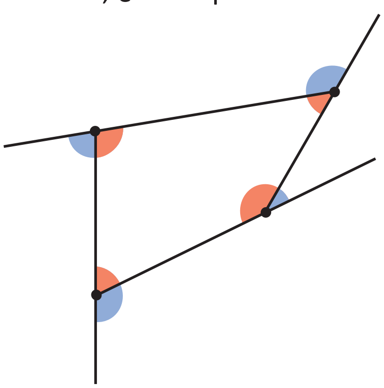
En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3.

Pero 180° × 3 contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2); por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es:

$$180° \times 3 - 180°(3 - 2) = 180° \times [3 - (3 - 2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°$$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ahora, ¿cómo puedes encontrar la suma de los ángulos externos del siguiente cuadrilátero?



En el cuadrilátero cada ángulo interno junto al respectivo externo suman 180°; por tanto, se tiene 180° × 4 y al restarle los ángulos internos: 180° × (4 – 2), se tiene 180° × 4 – 180° × (4– 2) = 180° × [4 – (4 – 2)]

$$=180° \times 2 = 360°.$$

La suma de los ángulos externos de un cuadrilátero es 360°.

C

- La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados.
- La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.

Encuentra la suma de los ángulos externos de

a) Un pentágono

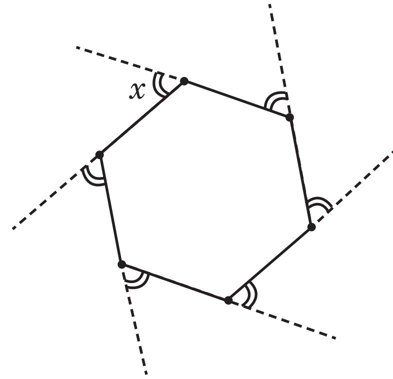
b) Un hexágono

1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

P

Para el hexágono regular que se muestra determina:

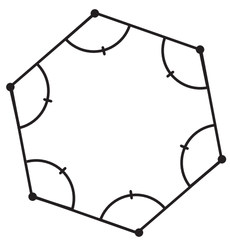
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de x.



Un polígono regular tiene todos sus ángulos internos iguales.

S

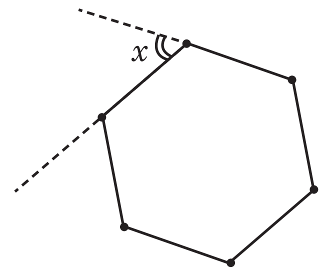
a)



Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

b)

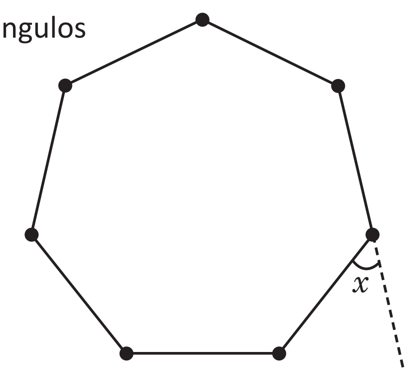


A partir del literal a) se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

C

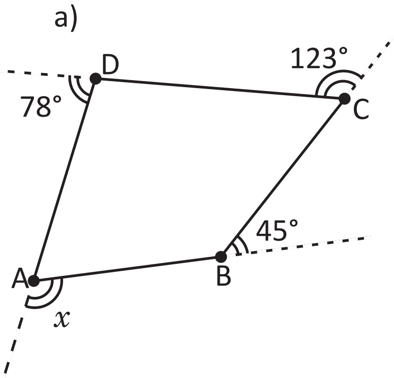
En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

1. Para el heptágono regular determina la medida de cada uno de sus ángulos internos y el valor de x.

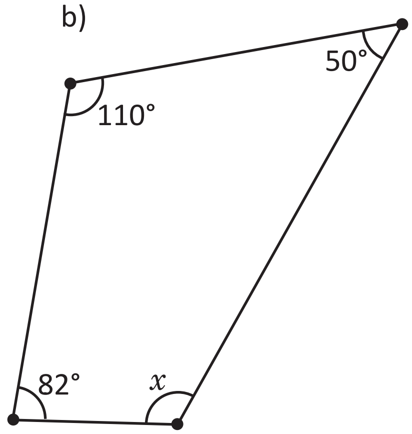


2. Encuentra la medida del ángulo x en cada caso.

a)



b)

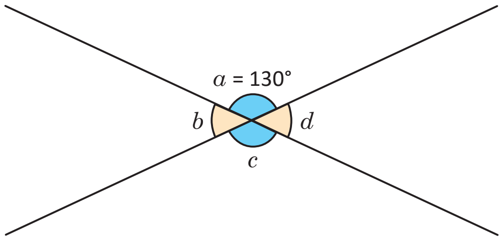


Utiliza tus conocimientos sobre la suma de los ángulos internos y externos de un cuadrilátero.

2.1 Ángulos opuestos por el vértice

P

Si el $\sphericalangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?



Dos ángulos son opuestos por el vértice si uno de ellos tiene como lados la prolongación de los lados del otro.

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

S

Se tiene que $a + b = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\sphericalangle b = 50°$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle a = \sphericalangle c \\ \sphericalangle b = \sphericalangle d \end{array}\right\}\text{por ser opuestos por el vértice.}$$

Se pueden encontrar las medidas de los ángulos formados en un vértice común, utilizando los ángulos opuestos por el vértice y los suplementarios.

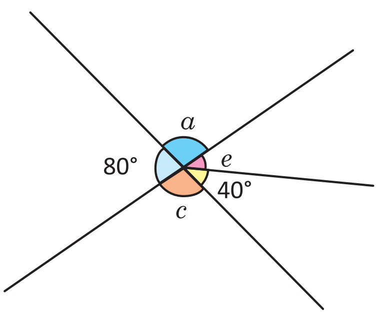
Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c = 130°$ y $\sphericalangle b = \sphericalangle d = 50°$.

C

Cuando se tienen dos rectas que se intersectan, se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice, cuyas medidas se pueden determinar conociendo únicamente el valor de uno de ellos.

E

Determina la medida de los ángulos indicados.



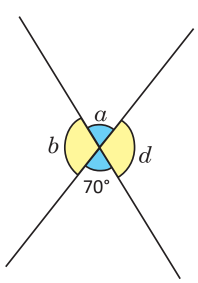
$\sphericalangle c + 80° = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\sphericalangle c = 100°$.

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle a = \sphericalangle c \\ \sphericalangle e + 40° = 80° \end{array}\right\}\text{por ser opuestos por el vértice.}$$

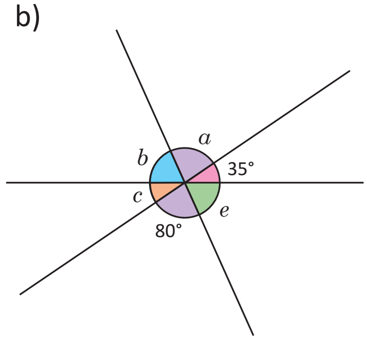
Por tanto, $\sphericalangle a = \sphericalangle c = 100°$ y $\sphericalangle e = 80° - 40° = 40°$.

Determina la medida de los ángulos que se indican en cada literal.

a)



b)



La tradición matemática griega, instaurada por Pitágoras, es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico canónico en el texto *Los Elementos*. En la proposición I. 32 del primer libro de este texto, se establece que "Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos", aunque Pitágoras ya había demostrado este teorema mediante el uso de paralelas.

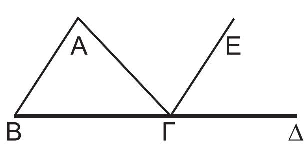
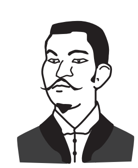


Ilustración de la demostración I. 32, según Euclides.

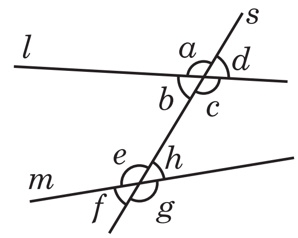


2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

P

En el siguiente diagrama identifica:

1. Los ángulos que se encuentran entre las rectas l y m.
2. Los ángulos que no están entre las rectas l y m.
3. Los ángulos que se encuentran a la izquierda o a la derecha de s.



S

1. $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$ } Entre las rectas l y m.

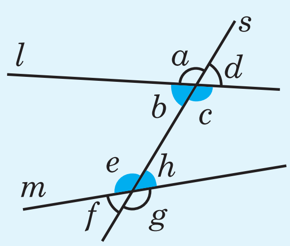
2. $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$ } Fuera de las rectas l y m.

3. $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$ A la izquierda de s. $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ } A la derecha de s.

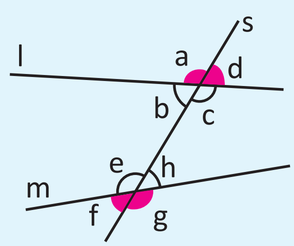
C

Los ángulos que se identificaron reciben nombres especiales, según la posición respecto a las rectas que los forman, tal como se muestra a continuación:

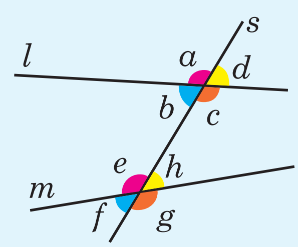
Internos:
$\measuredangle b$, $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$



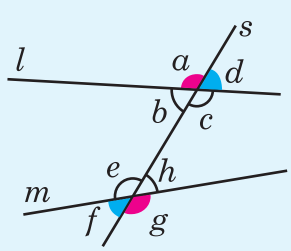
Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$



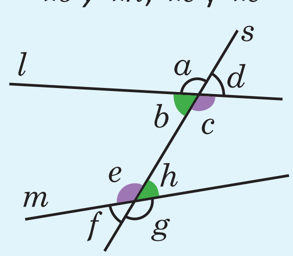
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$,
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$



Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

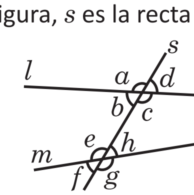


Alternos internos:
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$



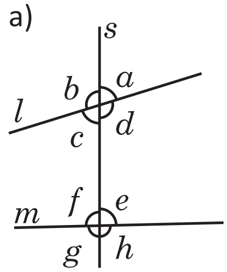
A la recta que corta a dos o más rectas se le llama secante.

En la figura, s es la recta secante.

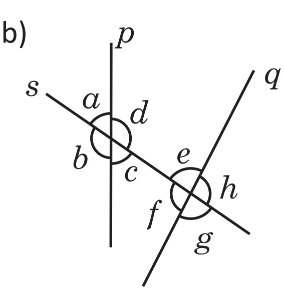


Para cada uno de los siguientes literales indica los ángulos internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)



b)



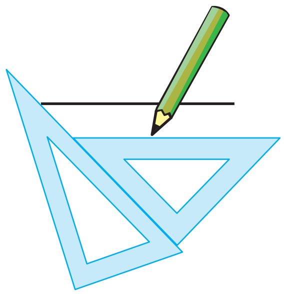
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

P

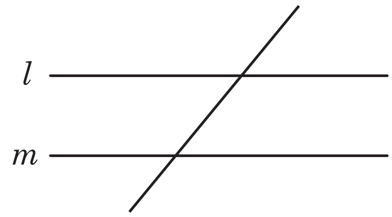
Construye dos rectas paralelas l y m, traza una secante, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

S

1. Se trazan las paralelas haciendo uso de las escuadras.

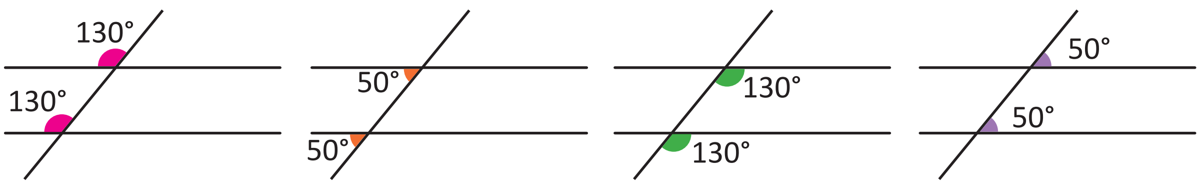


2. Se traza una recta secante a las paralelas construidas.



Para denotar el paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo ||; es decir, si la recta m es paralela a la recta l se denota como $m \parallel l$.

3. Se miden los ángulos con el transportador.



C

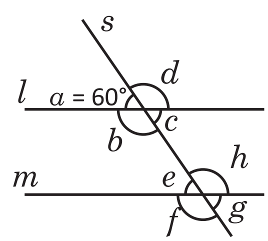
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales.

Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

E

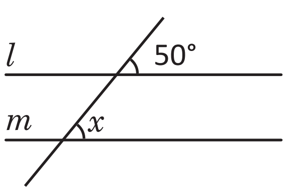
Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\measuredangle a$ = 60°, determina la medida de los ángulos restantes.

$\measuredangle a + \measuredangle d$ = 180°, por ser suplementarios $\Longrightarrow$ $\measuredangle d$ = 120°.
$\measuredangle c = \measuredangle a$ = 60° y $\measuredangle b = \measuredangle d$ =120°, por ser opuestos por el vértice.
$\measuredangle e = \measuredangle a$ = 60°, $\measuredangle g = \measuredangle c$ = 60°,
$\measuredangle f = \measuredangle b$ = 120° y $\measuredangle h = \measuredangle d$ =120°, por ser correspondientes.

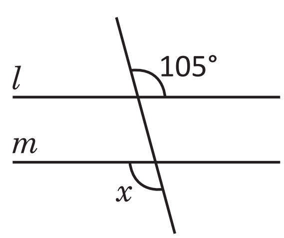


Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

a)



b)

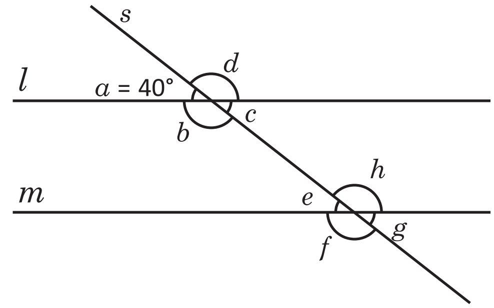


2.4 Caracterización de los ángulos alternos

P

Dado que las rectas l, m, son paralelas y s es la recta secante, realiza lo siguiente:

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.



S

1. Calculando la medida de los ángulos

$\sphericalangle a + \sphericalangle b = 180°$, por ser suplementarios.

$\sphericalangle b = 140°$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle c = \sphericalangle a = 40° \\ \sphericalangle d = \sphericalangle b = 140°\end{array}\right\}$ son opuestos por el vértice.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle e = \sphericalangle a = 40° \\ \sphericalangle f = \sphericalangle b = 140° \\ \sphericalangle h = \sphericalangle d = 140° \\ \sphericalangle g = \sphericalangle c = 40°\end{array}\right\}$ son correspondientes entre paralelas.

2.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle h \\ \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí.

$\sphericalangle b = \sphericalangle h = 140°$ y $\sphericalangle c = \sphericalangle e = 40°$.

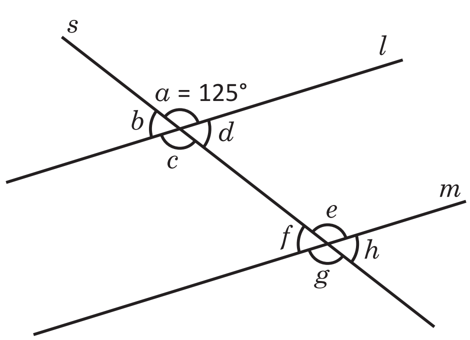
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle g \\ \sphericalangle d \text{ y } \sphericalangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí.

$\sphericalangle a = \sphericalangle g = 40°$ y $\sphericalangle d = \sphericalangle f = 140°$.

C

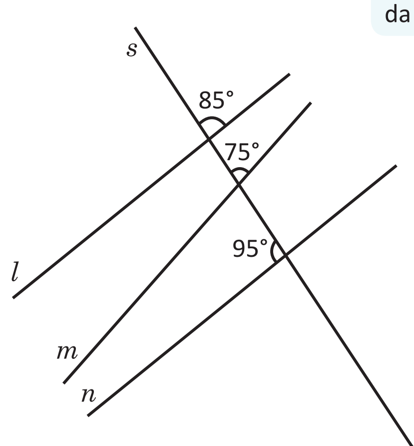
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.



2. Identifica cuáles rectas son paralelas. Justifica tu respuesta.

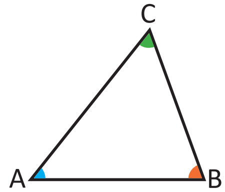
Considera la medida de los ángulos.



2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

P

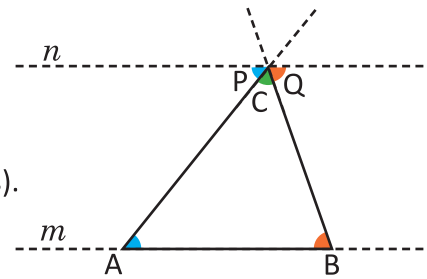
Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces ∢A + ∢B + ∢C = 180°.



Usa las relaciones de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

S

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.



∢P + ∢C + ∢Q = 180° (por formar un ángulo llano).

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo).

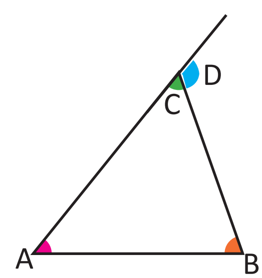
Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

C

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas.

1. Llena los espacios en blanco y demuestra que "si el ∢D es el ángulo externo del vértice C, entonces su medida es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC"; así, ∢D = ∢A + ∢B.

Solución.
Se quiere demostrar que



Si el ∢D, es el ángulo externo del ∢C, entonces ∢D= ∢A + ∢B.

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.

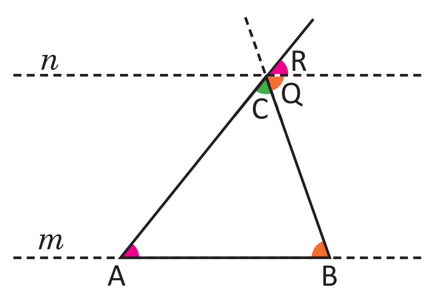
$n \parallel$ ______ (por construcción).

∢Q = ∢B . . . (1) (por ser ______ entre paralelas).

∢R = ______ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas).

∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción).

∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)



Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

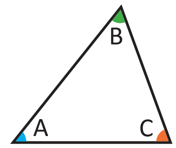
2. Busca otra forma para demostrar el teorema, puedes utilizar la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo.

2.6 Elementos de una demostración

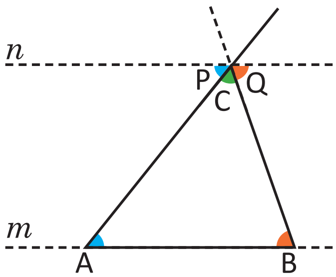
Observa el ejemplo y determina los elementos de una demostración.

Si ∢A, ∢B y ∢C , son ángulos internos de un triángulo, entonces:

∢A + ∢B + ∢C = 180°



∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**



Afirmación	Justificación
1. $n \parallel m$.	Por construcción.
2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180°	Por formar un ángulo llano.
3. ∢P = A; ∢Q = ∢B.	Por ser alternos internos entre paralelas.
4. ∢A + ∢B + ∢C = 180°	Por transitividad.

→ **Afirmaciones justificadas**

→ **Conclusión**

La demostración es un método que permite llegar a la conclusión partiendo de la hipótesis a través de afirmaciones que tienen una justificación matemática.

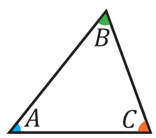
Una afirmación es una proposición con base lógica.

Una justificación es el argumento que hace cierta la afirmación.

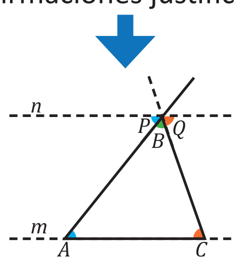
En la demostración hay:

1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

En la figura de la derecha se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.



Afirmaciones justificadas

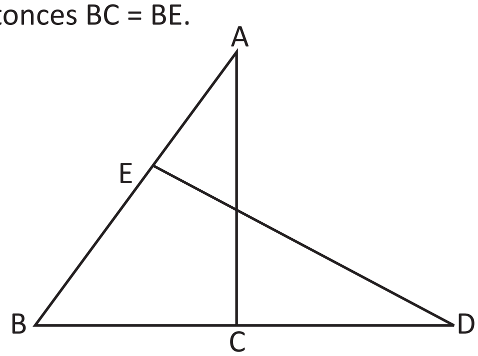


Demostración

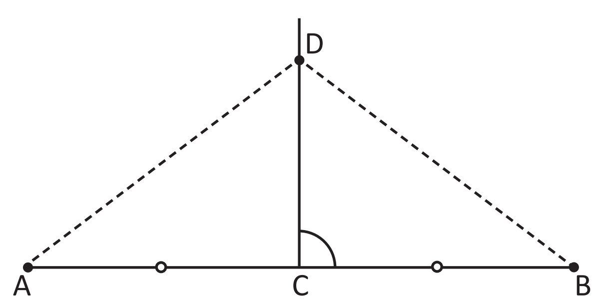
A la expresión de la forma "si ____ , entonces ____", se le llama **proposición**.
A la parte representada por ____ se le llama **hipótesis**; y la representada por ____ se llama **conclusión**.

Identifica la hipótesis y la conclusión.

1. Si en la figura el ∢CAB = ∢BDE y AB = DB, entonces BC = BE.



2. Si el punto D está en la mediatriz del segmento AB entonces DA = DB.



2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

P

Carlos necesita diseñar una escalera con una altura de 560 cm, los escalones deben tener una contrahuella de 18 cm y un descansillo a la mitad de la altura. ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

Santiago Francisco Blondel fue un arquitecto y urbanista francés, uno de los más importantes teóricos de la arquitectura del siglo XVIII. Uno de sus aportes fue la "Ley de Blondel" que establece una relación entre las huellas y las contrahuellas en una escalera (ver figura 1). La Ley de Blondel establece la siguiente relación: 2CH + H = 64 cm donde, CH es la dimensión de la contrahuella y H es la dimensión de la huella.

La huella es la parte de la escalera donde pisas, mientras la contrahuella se determina por la distancia en altura entre 2 huellas.

En tramos que superen los 275 centímetros de altura se recomienda colocar un "Descansillo" (ver figura 2) que es una superficie llana en que termina cada tramo de una escalera.

El ángulo de inclinación se determina según la razón entre la huella y la contrahuella (ver figura 3). Generalmente las escaleras más cómodas tienen una inclinación comprendida entre 31° y 37°.

S

En primer lugar, es necesario considerar las condiciones del problema:

1. La altura de la escalera es de 560 cm.
2. Debe haber un descansillo a los 280 cm.
3. La contrahuella debe ser de 18 cm.

Lo primero es encontrar el número de contrahuellas:

$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}}$ = 15.56, que se aproxima a 16.

Luego, se determina la medida real de la contrahuella:

$\frac{280 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene: $2 \times 17.5 + H = 64$

$$H = 64 - 35$$
$$H = 29$$

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.

La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} = 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

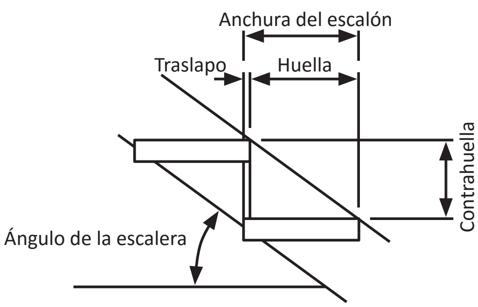


Figura 1

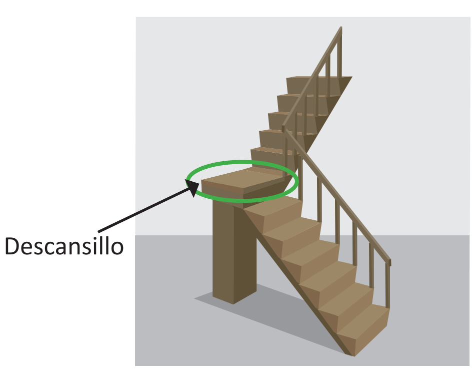


Figura 2

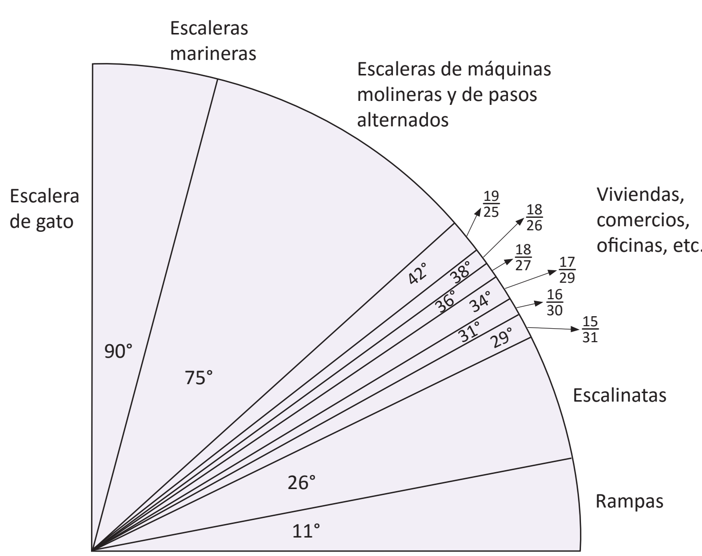
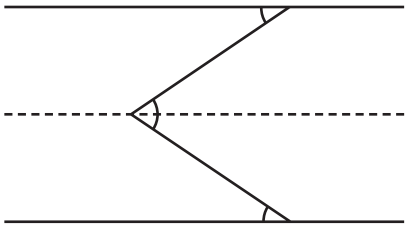
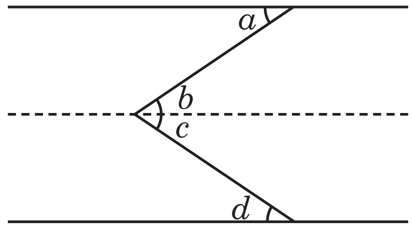


Figura 3

Trazando una paralela a nivel del descansillo tenemos que



Observa que se forman los siguientes ángulos:



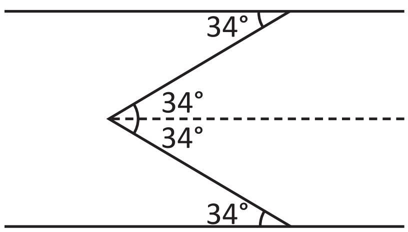
$\sphericalangle d$ = 34° por la razón de la huella con la contra-huella.

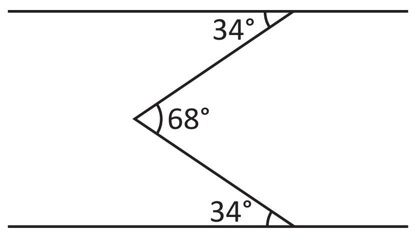
$\sphericalangle d = \sphericalangle c$ por ser alternos internos.

$\sphericalangle b$ = 34° porque el segundo tramo de las escaleras debe tener la misma inclinación.

$\sphericalangle b = \sphericalangle a$ por ser alternos internos.

Luego $\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = \measuredangle d$ = 34°

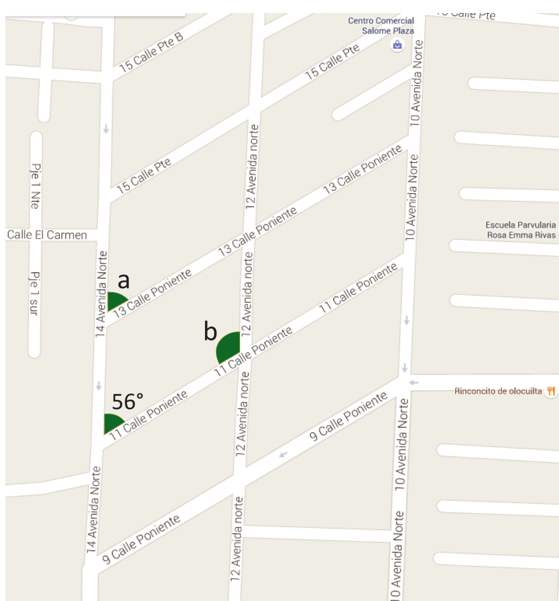




Con esta información, Carlos puede completar el informe de su diseño.

Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

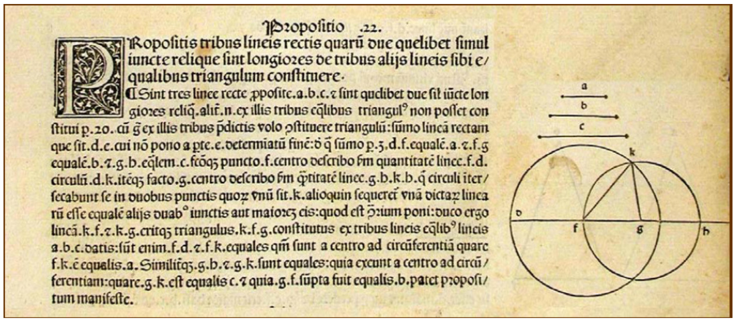
La Alcaldía Municipal de Santa Tecla necesita conocer la medida de los ángulos que se forman en la intersección entre las calles y avenidas. El topógrafo ya midió los ángulos cuyos datos se muestran en el mapa, considerando que desde la 9ª hasta la 13ª calle son paralelas, al igual que las avenidas desde la 10ª hasta la 14ª. Determina la medida de los ángulos indicados.



Unidad 5

Criterios de congruencia de triángulos

El texto *Los Elementos* de Euclides, es el tratado de matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la historia de la cultura, incluso mucho más allá de la propia matemática y ciencias afines. Desde la proposición 16 hasta la 26 del libro I, Euclides presenta resultados generales acerca de los triángulos; por ejemplo, construcciones elementales con regla y compás, congruencias de triángulos y cuadriláteros, desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, etc.


Propositio .22.

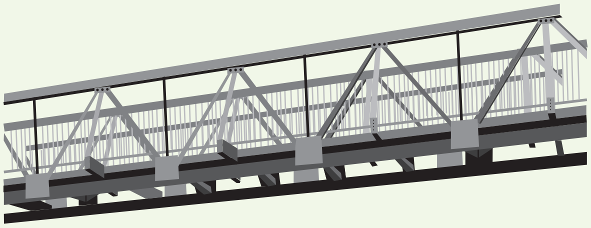
Propositis tribus lineis rectis quarũ due quelibet simul iuncte relique sint longiores de tribus alijs lineis sibi equalibus triangulum constituere.

Sint tres linee recte pposite.a.b.c.z sint quelibet due sil iũcte longiores reliq̃.aliť.n.ex illis tribus eq̃libus triangulᵒ non posset constitui p.20.cũ g̃ ex illis tribus p̃dictis volo ↄstituere triangulũ:sũmo lineã rectam que sit.d.e.cui nõ pono a pte.e.determiatũ finẽ:d q̃ sũmo p.3.d.f.equalẽ.a.z.f.g equalẽ.b.z.g.b.eq̃lem.c.fcõq3 puncto.f.centro describo ƀm quantitatẽ linee.f.d.circulũ.d.k.itẽq3 facto.g.centro describo ƀm q̃titatẽ linee.g.b.k.b.q̃ circuli intersecabunt se in duobus punctis quoꝝ vnũ sit.k.alioquin sequeretᷣ vnã dictaꝝ linearũ esse equalẽ alijs duabᵒ iunctis aut maiorẽ eis:quod est ↄ̃triũ poni:duco ergo lineã.k.f.z.k.g.eritq3 triangulus.k.f.g.constitutus ex tribus lineis eq̃libᵒ lineis a.b.c.datis:sũt enim.f.d.z.f.k.equales q̃m sunt a centro ad circũferentiã quare f.k.ẽ equalis.a.Similitq3.g.b.z.g.k.sunt equales:quia exeunt a centro ad circũferentiam:quare.g.k.est equalis c.z quia.g.f.sũpta fuit equalis.b.patet propositum manifeste.

Proposición I. 22 del texto Los Elementos *de Euclides.*

La congruencia de figuras, es utilizada en la construcción arquitectónica, ensamble de equipo y mobiliario, diseño de interiores, fabricación de automóviles, reconstrucción de infraestructura, etc.

La congruencia, se puede utilizar en el diseño de muebles en serie.

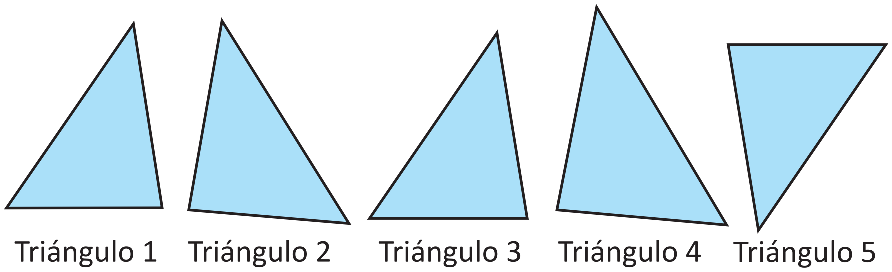


La congruencia de figuras se puede utilizar para el diseño de pasarelas.

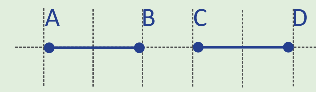
En esta unidad estudiarás el sentido de la congruencia de triángulos y los criterios que permiten determinar si dos o más triángulos son congruentes; así como sus aplicaciones para demostrar propiedades matemáticas o para resolver situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

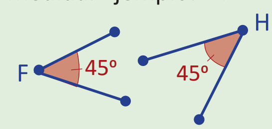
De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).



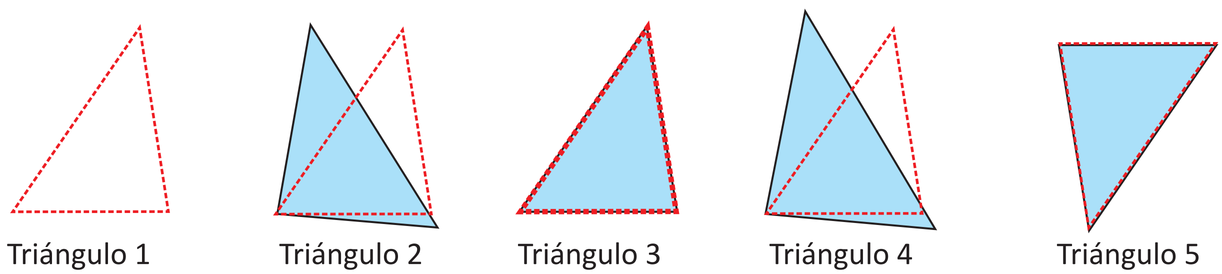
Dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales. Ejemplo: AB = CD.



Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Ejemplo: ∢F = ∢H.



Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.

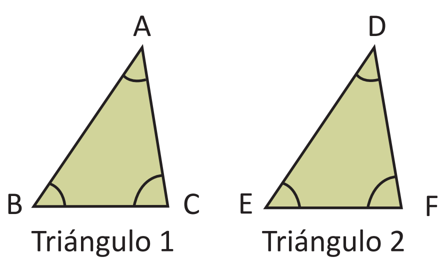


Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o volteando al revés una de ellas si es necesario, se llaman **congruentes**.

Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

A los elementos **correspondientes** de una figura también se les llama **homólogos**.

Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.

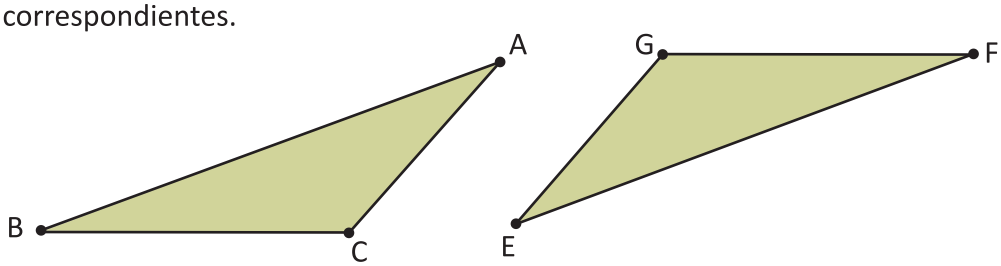


Vértices correspondientes: A y D, B y E, C y F.

Lados correspondientes: AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Ángulos correspondientes: ∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

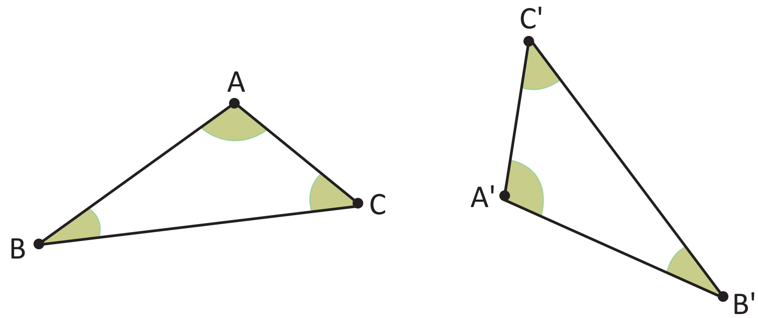
Los siguientes triángulos son congruentes. Compáralos e identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Aunque los triángulos estén en distinta posición son congruentes, puedes girarlos o darles vuelta para que coincidan.

1.2 Congruencia de triángulos

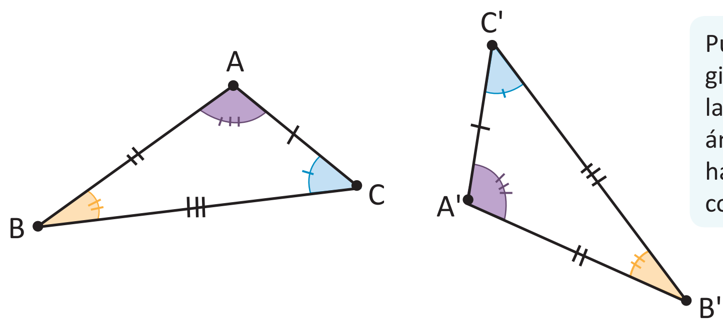
Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.



La notación A', B', y C', se lee “A prima”, “B prima” y “C prima” y se utiliza para representar puntos que son diferentes, pero que se corresponden con los puntos A, B y C.

Al comparar la longitud de los lados correspondientes y la medida de los ángulos correspondientes se obtiene que

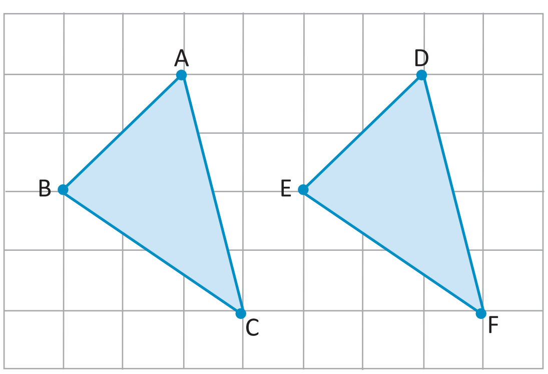
AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

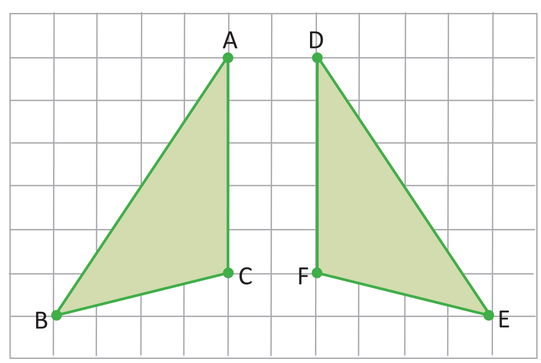


Puedes comparar la longitud de cada uno de sus lados y amplitud de sus ángulos respectivamente, haciendo uso de regla, compás y transportador.

En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales. Para indicar que los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo ≅; es decir: ΔABC ≅ ΔA'B'C', que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

Dado que los siguientes triángulos son congruentes, identifica los lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.

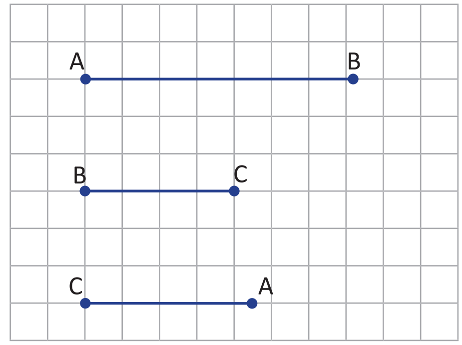




Cuando se escribe la congruencia de triángulos, es necesario tomar en cuenta que se deben escribir las letras en orden de los vértices correspondientes.

1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

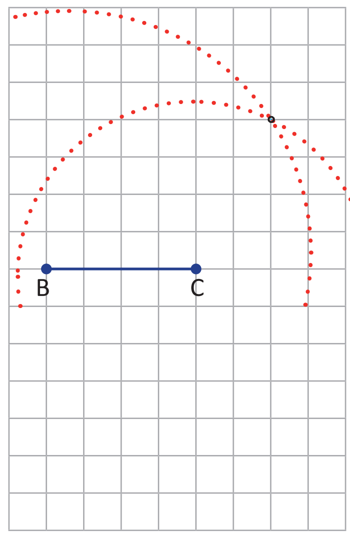
Utilizando compás y regla, realiza lo siguiente:

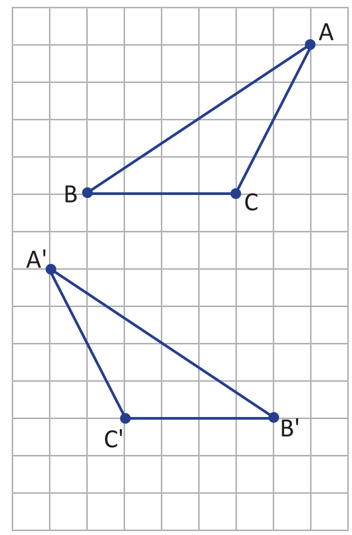


a) Construye un triángulo utilizando los tres segmentos de la derecha como lados.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

a) Para construir el triángulo se realiza lo siguiente:
- Construye un segmento de longitud BC.
- Traza una circunferencia de radio BA y centro en B y otra con centro en C y radio CA.
- Identifica la intersección de los dos arcos.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.





b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.

Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales, son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$

b) ΔDEF; $DE = 2$, $EF = 4$, $FD = 3$

c) ΔGHI; $GH = 4$, $HI = 5$, $IH = 3$

d) ΔJKL; $JK = 5$, $KL = 7$, $LJ = 8$

e) ΔMNO; $MN = 3$, $NO = 4$, $OM = 5$

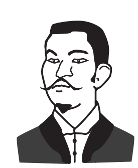
f) ΔPQR; $PQ = 5$, $QR = 8$, $RP = 7$

g) ΔSTU; $ST = 7$, $TU = 5$, $US = 6$

h) ΔXYZ; $XY = 4$, $YZ = 3$, $ZX = 2$

El tratado *Los Elementos*, de Euclides, ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* p.116.

En la proposición I.22. del tratado *Los Elementos*, Euclides hace referencia a la congruencia de triángulos estableciendo: "Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante".

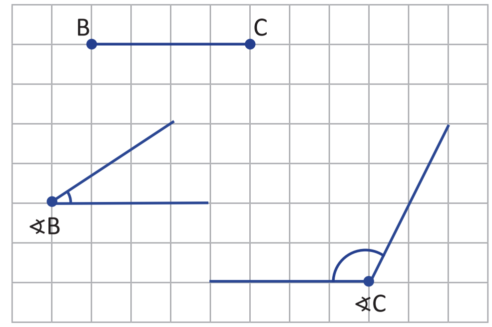


1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

Utilizando regla y transportador, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos de la derecha, como dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

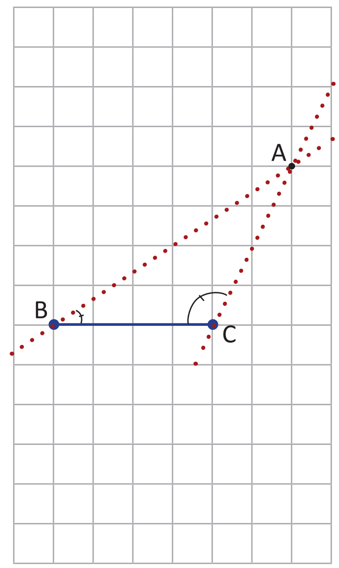
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

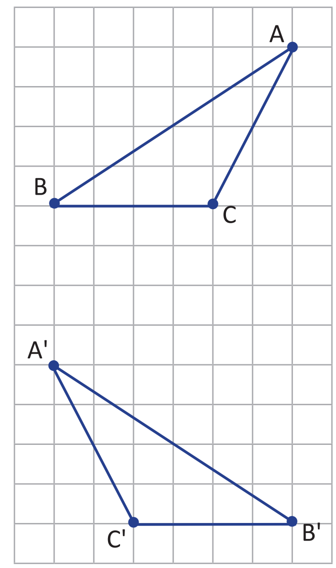


a) Para construir el triángulo usando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

- Construye un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo B y el ángulo C en los respectivos extremos del segmento BC.
- Identifica la intersección de los rayos de los ángulos trazados ∢B y ∢C.
- Une los puntos y forma el ΔABC.

b) Al comparar los triángulos, puedes ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' *y* ∢C = ∢C'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

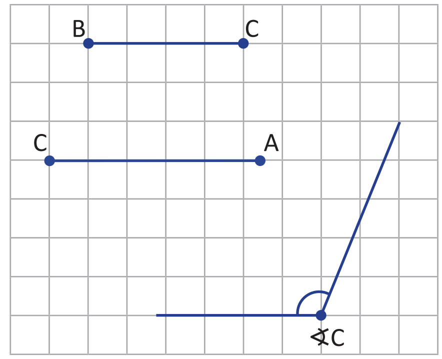
1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando regla, transportador y compás, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo de la derecha, como dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

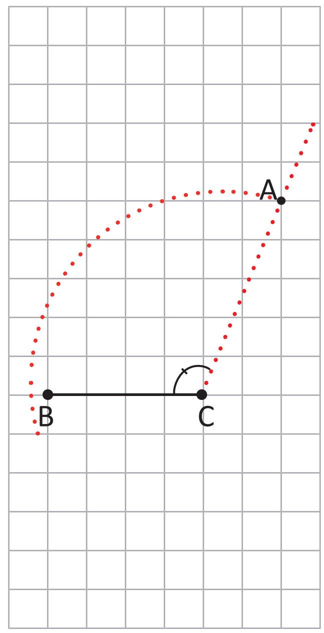


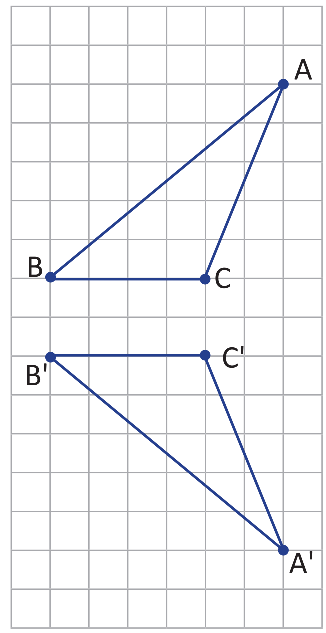
S

a) Para construir el triángulo a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se realiza lo siguiente:

- Traza un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo C.
- Traza una circunferencia de radio CA.
- Marca la intersección de la circunferencia y el rayo del ∢C.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que BC = B'C', ∢C = ∢C' y CA = C'A'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

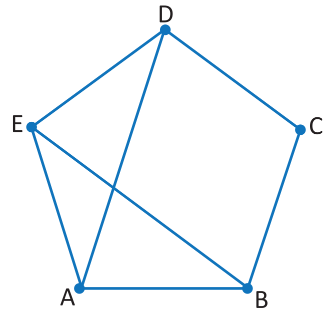
f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

Dado el pentágono regular, explica por qué ΔABE ≅ ΔEDA.



En el pentágono regular la medida de sus lados y ángulos internos son iguales.

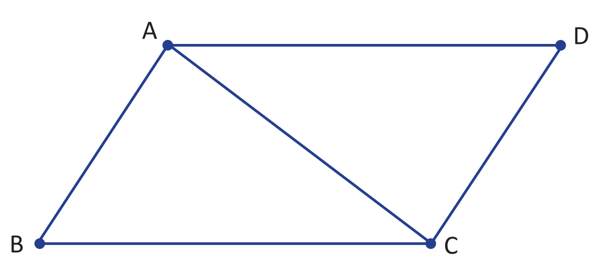
Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
∢EAB = ∢DEA	Son ángulos internos del pentágono regular.
ΔABE ≅ ΔEDA	Por criterio LAL.

A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**

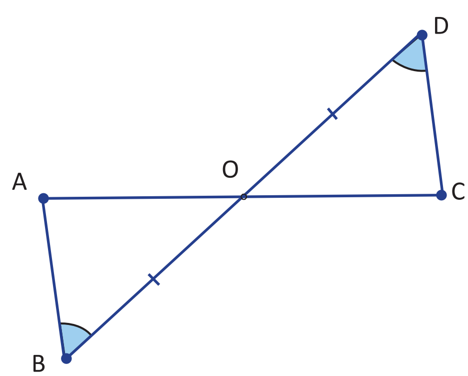
En el problema mostrado anteriormente, las características de los lados y ángulos internos del pentágono regular y los criterios de congruencia de triángulos son asuntos comprobados y la solución mostrada es la *demostración*.

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Dado que el cuadrilátero ABCD es un romboide y AC es diagonal, demuestra que ΔABC ≅ ΔCDA.



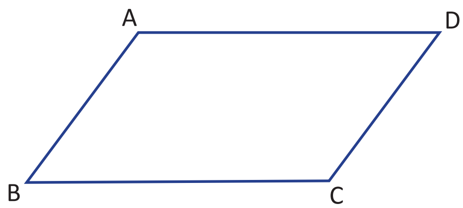
2. Dado que AB ∥ CD y DO = BO. Demuestra que ΔABO ≅ ΔCDO.



Unidad 5

1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

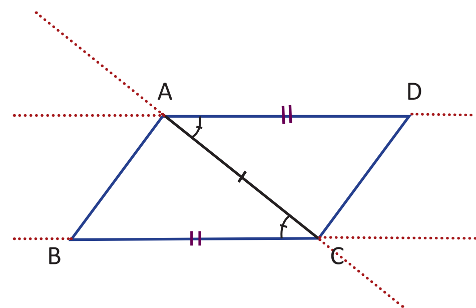
Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.



Utiliza congruencia de triángulos que contenga AB y DC, para demostrar la igualdad de lados.

Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.

Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.



De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

La demostración está estructurada de la siguiente manera:

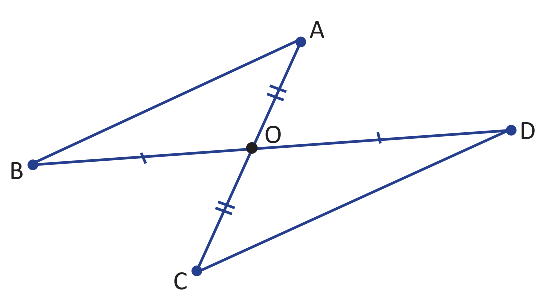
BC = DA, argumento dado en el enunciado y se le denomina **hipótesis**.

CA = AC
∢BCA = ∢DAC, resultados ya comprobados.
ΔABC ≅ ΔCDA

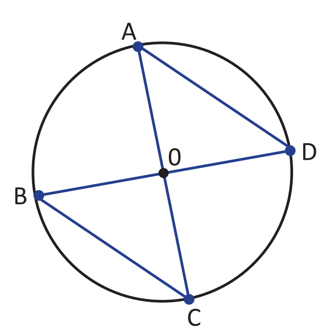
AB = CD, argumento o asunto a demostrar, **conclusión**.

En matemática se usa el lenguaje:
Si ☐, entonces ◯.
☐ corresponde a la hipótesis y
◯, corresponde a la conclusión.

1. Dos segmentos AC y BD se cortan en el punto O. Considerando que BO = DO y AO = CO, demuestra que AB = CD, luego escribe la hipótesis y la conclusión.



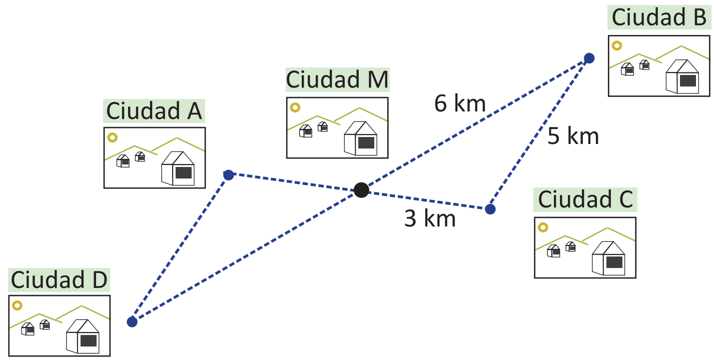
2. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersectan en el centro O del círculo. Demuestra que AD = CB.



1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

P

El mapa siguiente muestra 5 ciudades. La ciudad M debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: la ciudad A y la ciudad C; y las otras dos son las ciudades B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?



S

Al comparar las distancias entre cada una de las ciudades se observa que se forman dos triángulos, cuyos elementos se relacionan de la siguiente manera:

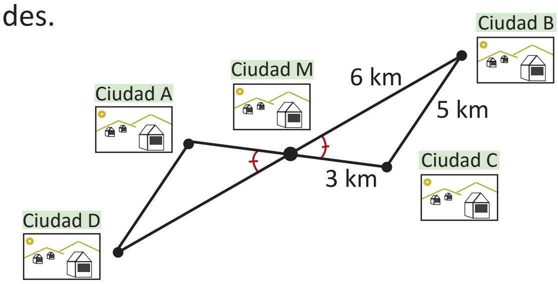
AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.

ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.

DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.



Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. En la figura 1, BC = EC, CA = CD y AB = DE.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de θ.

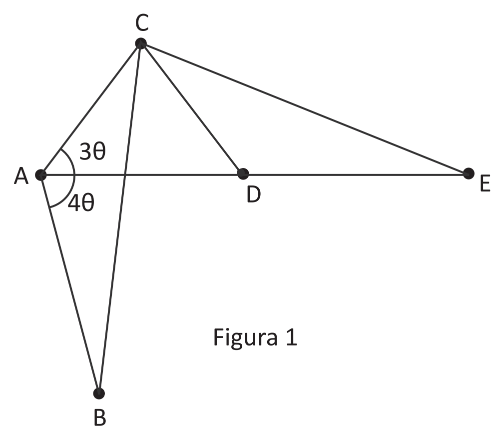


Figura 1

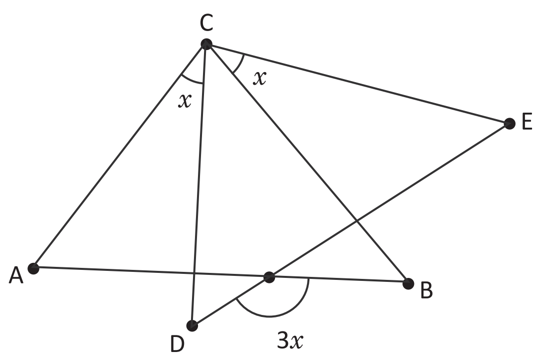


Figura 2

2. En la figura 2, AC = DC, BC = EC.

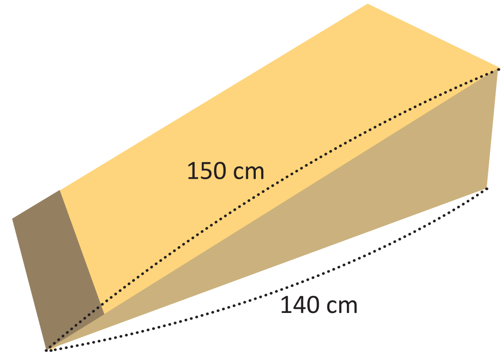
   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de x.

Unidad 5

1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

P

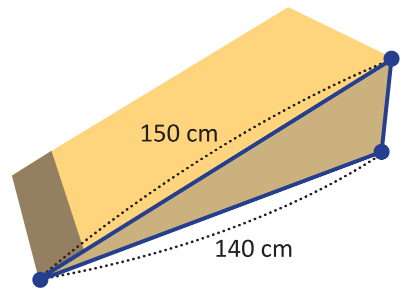
Carlos participará en una competencia de patinaje que se realizará los próximos días y ya tiene lista su rampa para practicar; su primo José, se ha motivado y quiere construir una rampa similar a la de Carlos, pues también quiere participar en la competencia. Carlos le envía una fotografía con la información que se muestra en la figura y le comenta que la medida del ángulo entre los dos lados proporcionados es 13°.



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

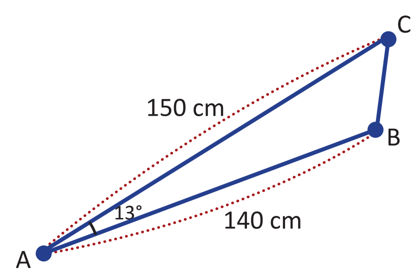
S

1. Recordar las condiciones del problema:
   - Identificar los lados conocidos que se indican en la figura.
   - Indicar el ángulo entre los lados conocidos; es decir, 13°.
   - Observar que en el costado se forma un triángulo.



2. Aplicar un criterio de congruencia de triángulos.
   Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

3. Extraer los datos y construir la rampa.
   - Medir y cortar las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.
   - Colocar las piezas cortadas la primera como base y la segunda de tal manera que en la intersección de ambas formen un ángulo de 13°.

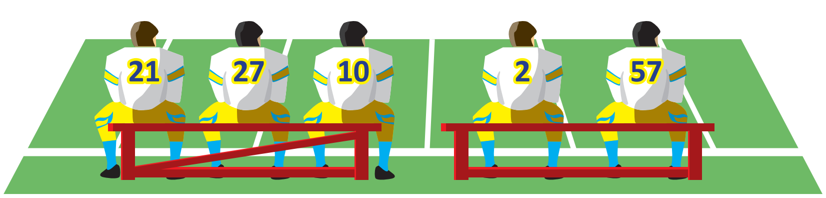


Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. Se necesita reemplazar unas piezas en la pasarela cuyo diseño se muestra en la figura. Antonio está a cargo de construir las piezas a reemplazar; para ello necesita elaborar una réplica, tomando como referencia las piezas que están colocadas.

a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar Antonio como mínimo para replicar exactamente las piezas que se indican en la figura?

b) ¿Las medidas indicadas en el numeral anterior son una manera única de replicar las piezas? Justifica tu respuesta.



2. Observa la imagen y responde. ¿Por qué la banca con el apoyo diagonal es más estable que la otra? Justifica tu respuesta.

6 Unidad

Características de los triángulos y cuadriláteros

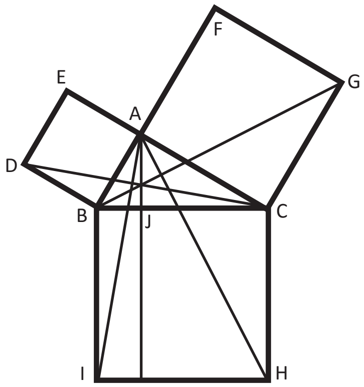
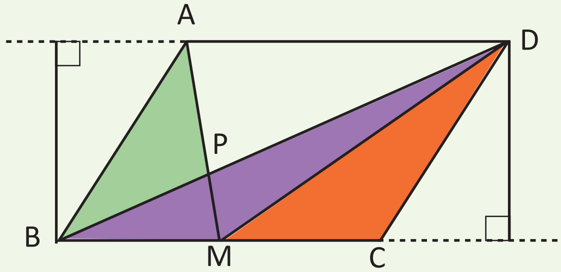


Ilustración de la proposición I. 47, texto Los Elementos *de Euclides.*

El matemático y geómetra griego Euclides, estableció relaciones entre paralelogramos y triángulos con la misma base, que se forman entre rectas paralelas; estas relaciones fueron utilizadas para demostrar otras como la mostrada en la imagen, que corresponde a la proposición I. 47 del libro *Los Elementos*.

Los triángulos son utilizados como base para construir puentes, ventanas, puertas, veleros, señales de tránsito, ganchos para colgar la ropa, etc. Esto debido a que el triángulo es la única figura que no se puede deformar, se haga lo que se haga, seguirá siendo un triángulo.


Pasarela del Redondel Masferrer, San Salvador.



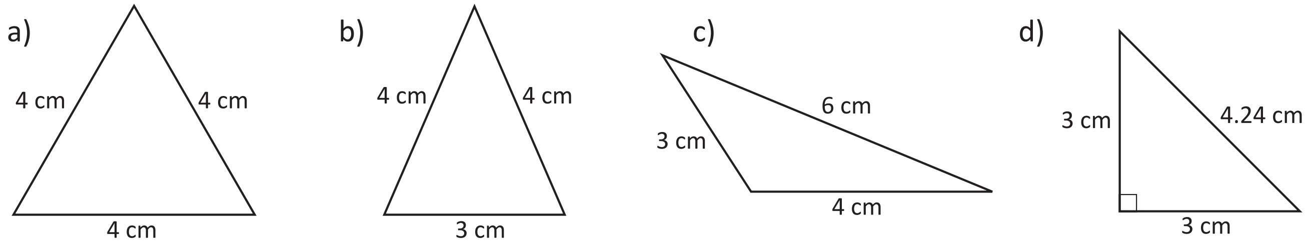
Triángulos de igual base e igual altura.

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad, conocerás y demostrarás propiedades de triángulos y cuadriláteros, mediante el uso de los criterios de congruencia de triángulos, así como la relación entre las áreas de triángulos y cuadriláteros.

1.1 Triángulos isósceles

P

Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



S

a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

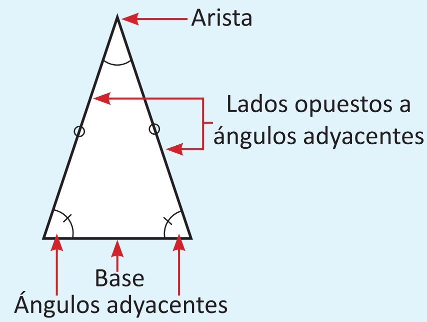
Observa que también cada triángulo se puede clasificar por sus ángulos:

a) Es acutángulo (3 ángulos agudos).
b) También es acutángulo.
c) Es obtusángulo (un ángulo es obtuso).
d) Es rectángulo (un ángulo recto).

C

La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.

Las partes de un triángulo isósceles son:
Arista: Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
Base: Es el lado opuesto a la arista.
Ángulos adyacentes: Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
Lados opuestos a ángulos adyacentes: Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.



E

Verifica la construcción de un triángulo isósceles utilizando papel y comprueba que dos de sus lados y ángulos son iguales. Realiza los siguientes pasos:
1. Toma una hoja de papel y dóblala formando un rectángulo tal como se muestra en la figura 1.
2. Señala la diagonal de ese rectángulo y corta con la tijera exactamente en la diagonal (figura 2).
3. El triángulo que queda en medio, divídelo por la mitad tomando punta a punta y comprueba que es isósceles viendo que sus ángulos y lados coinciden (figura 3).

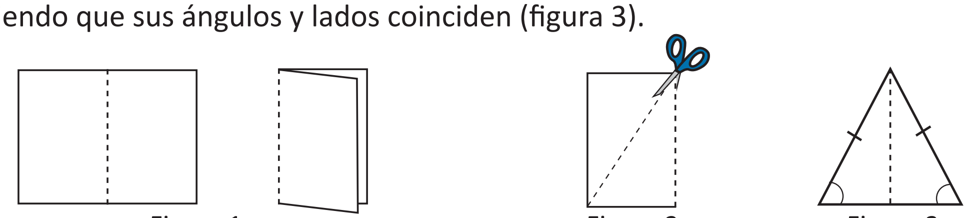
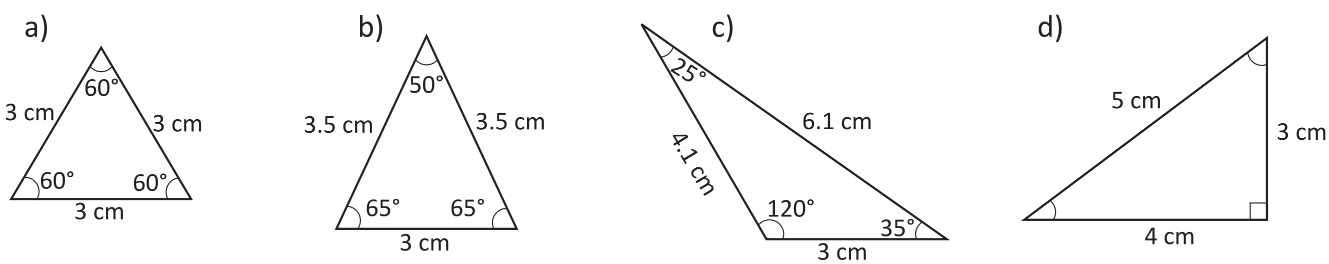


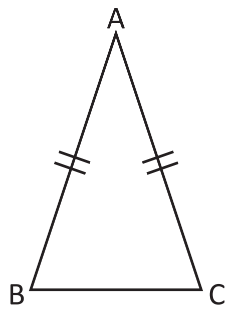
Figura 1 Figura 2 Figura 3

Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.



1.2 Teorema del triángulo isósceles

Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



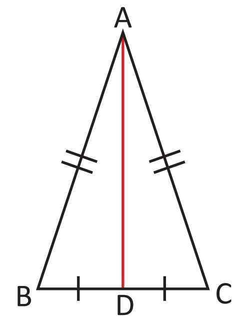
Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se tiene la demostración de un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros, que establece que "En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes" (un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes y el tercer lado se le llama base). Pinasco, J. (2009). *Las Geometrías*.

Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

DB = DC (por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

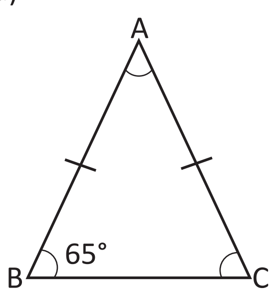
Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB (por la congruencia de los triángulos).



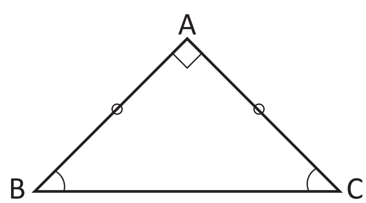
En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema demostrado.

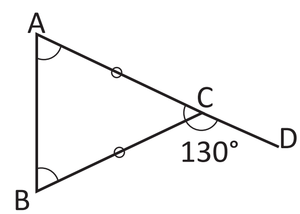
a)



b)



c)



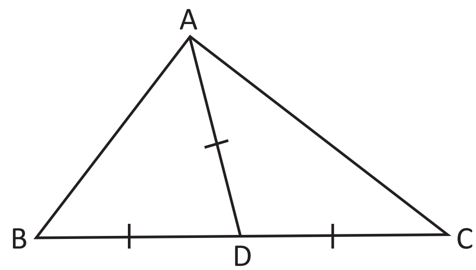
2. En la siguiente figura considera que BD = CD = AD. Justifica las igualdades planteadas en cada literal dejando constancia de lo realizado.

a) ∢DAB = ∢DBA

b) ∢DAC = ∢DCA

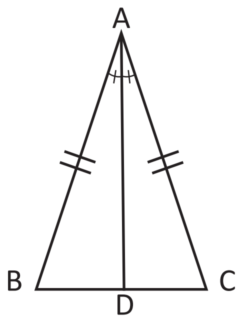
c) ∢DBA + ∢ACB = 90°

d) ∢CAB = 90°



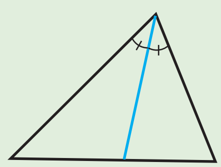
1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

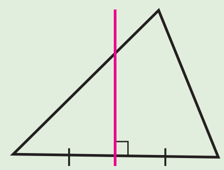
Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.



La bisectriz de un triángulo: es el segmento que divide a cualquiera de sus tres ángulos en dos partes iguales y termina en el correspondiente lado opuesto.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento y que lo divide a la mitad.


Bisectriz


Mediatriz

En la figura $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (por criterio LAL, $AB = AC$, AD es compartido y $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ por hipótesis).

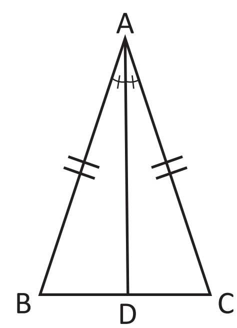
Entonces $DB = DC$ (por la congruencia de triángulos).

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC$ (por la congruencia de triángulos) . . . (1)

$\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 180°$ (por ser ángulos suplementarios) . . . (2)

Entonces, $2\sphericalangle ADB = 180°$ (por (1) y (2)).

Y $\sphericalangle ADB = 90°$, y entonces $AD \perp BC$.

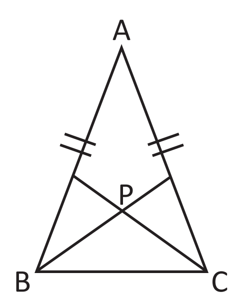


Por lo tanto, AD es mediatriz de BC ($DB = DC$ y $AD \perp BC$).

En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud, también es altura y mediana del triángulo isósceles.

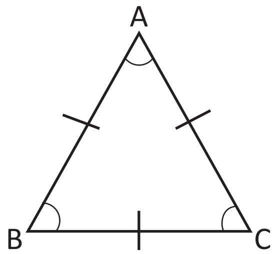
Demuestra que si el ΔABC es isósceles y si se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes, siendo P el punto de intersección entre las dos bisectrices, entonces el ΔPBC es isósceles.



1.4 Triángulos equiláteros

P

Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.



Un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados tienen igual longitud.

S

∢ABC = ∢BCA (ya que AB = AC) . . . (1)

∢BCA = ∢CAB (ya que BC = BA) . . . (2)

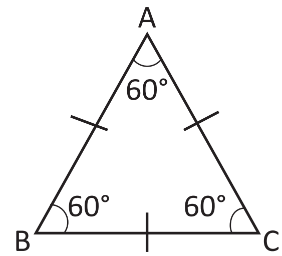
Por lo tanto, ∢ABC = ∢BCA = ∢CAB (por (1) y (2)).

Sea x la medida del ángulo:

$3x$ = 180° (por la suma de los ángulos internos de un triángulo).

Entonces, x = 60° (resolviendo la ecuación).

Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60°.

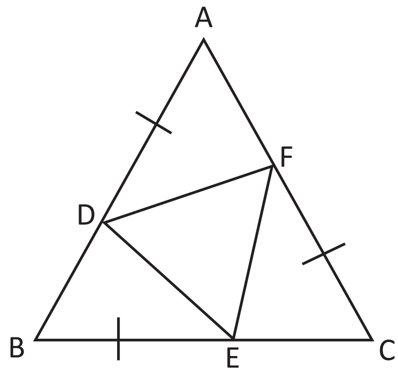


A un triángulo que posee sus tres ángulos de igual medida se le puede llamar **equiangular**.

C

En un triángulo equilátero cada uno de los ángulos internos mide 60°.

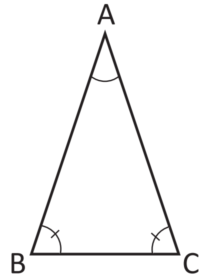
Sea el ΔABC equilátero, y además BE = CF = AD. Demuestra que el ΔDEF es equilátero.



Unidad 6

1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

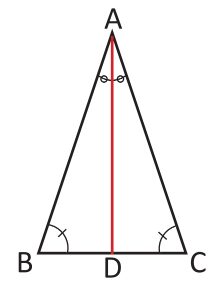
Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



Este resultado se suele enunciar como "a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud".

Trazando la bisectriz de $\measuredangle CAB$, se tiene que

$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (por hipótesis) . . . (1)
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$ (por construcción de la bisectriz) . . . (2)
$\measuredangle BDA = 180° - (\measuredangle DBA + \measuredangle DAB)$ (teorema de ángulos internos de triángulos).
$= 180° - (\measuredangle DCA + \measuredangle DAC)$ (por 1 y 2).
$= \measuredangle CDA$



Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (por criterio ALA, AD es común, $\measuredangle BDA = \measuredangle CDA$ y $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$).

Por lo tanto, AB = AC (por la congruencia).

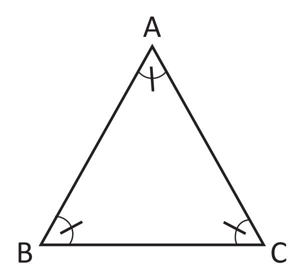
En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

Demuestra que si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces es un triángulo equilátero.

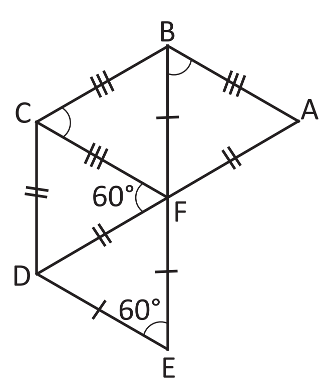
AB = AC (por $\measuredangle BCA = \measuredangle ABC$, aplicando el resultado demostrado). . . (1)

CA = BC (por $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB$, aplicando el resultado demostrado). . . (2)

Por lo tanto, AB = BC = CA, y el triángulo es equilátero (por (1) y (2)).



Utilizando los datos en la siguiente figura, demuestra que ΔFAB, ΔFBC, ΔFCD y ΔFDE son equiláteros.



1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

P

Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

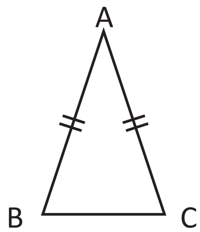
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

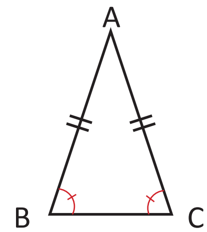
S

Analizando el primer teorema: "Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida".

Condición cierta (hipótesis): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud).

Condición a demostrar (conclusión): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

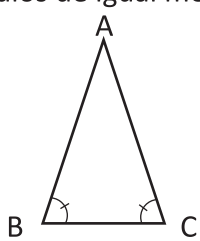


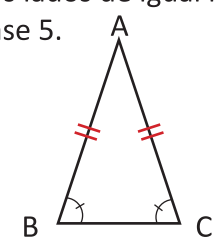


Analizando el segundo teorema: "Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles".

Condición cierta (hipótesis): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida.

Condición a demostrar (conclusión): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). Demostrado en la clase 5.





El primer teorema es diferente del segundo, pues la condición que se cumple en el primero es la que hay que demostrar en el segundo, y la condición que se cumple en el segundo es la que hay que demostrar en el primero.

C

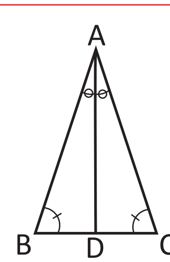
El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**. El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

E

Escribe el recíproco del siguiente enunciado, en el caso de no ser cierto, dar un contraejemplo que lo justifique: "Todo triángulo equilátero es isósceles".
Recíproco: "Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo: El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

1. Determina el recíproco: "Si los 3 ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.

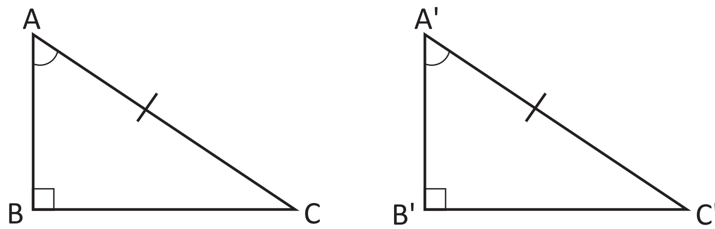
2. Determina el recíproco: "En el triángulo ABC, si AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB, entonces AD es mediatriz de BC". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.



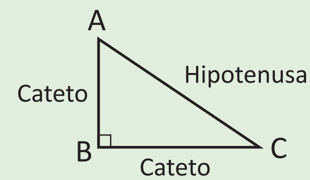
1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que
∢CAB = ∢C'A'B', ∢ABC = ∢A'B'C' = 90° y AC = A'C'; entonces, ΔABC ≅ ΔA'B'C'.



Recuerda que los lados de un triángulo rectángulo tienen los siguientes nombres:

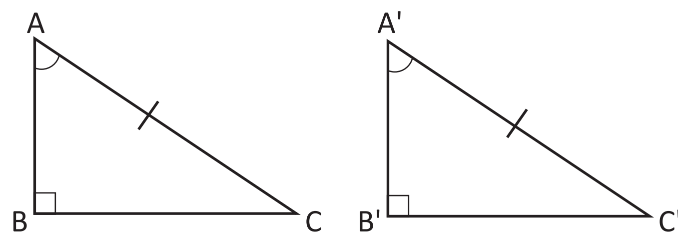


S

Los triángulos tienen los tres ángulos de igual medida porque son rectángulos.

Además, ∢CAB = ∢ C'A'B'.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA'B'C' (por criterio ALA).

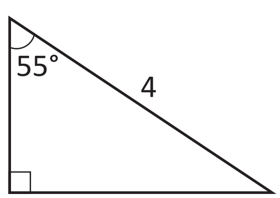


C

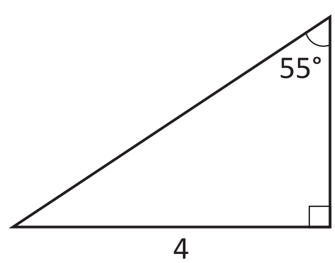
Si en un triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En los siguientes triángulos rectángulos, identifica los congruentes entre sí. Justifica tu respuesta.

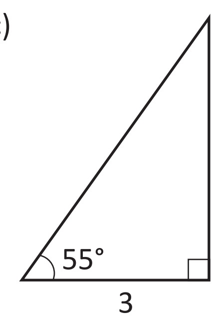
a)



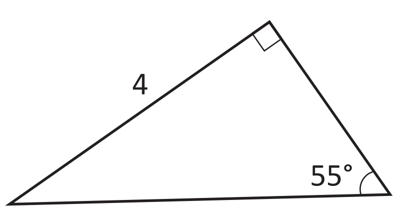
b)



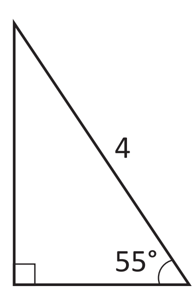
c)



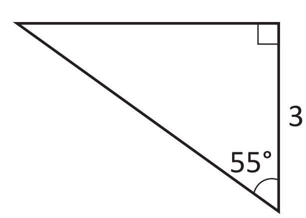
d)



e)



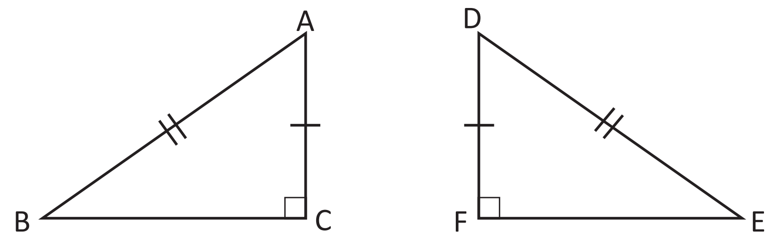
f)



1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

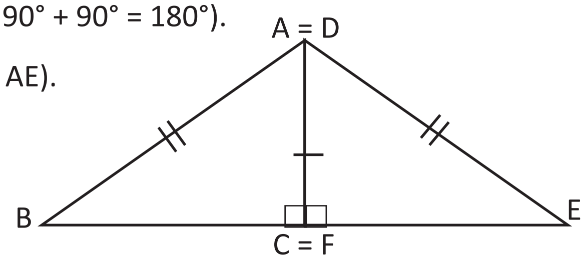
P

Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



S

Haciendo coincidir los lados AC y DF.



Los puntos B, C, E están alineados (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°).

Entonces, ΔABE es isósceles (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

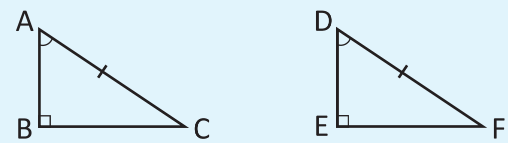
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

C

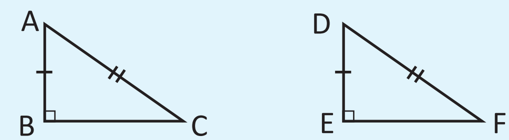
Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.



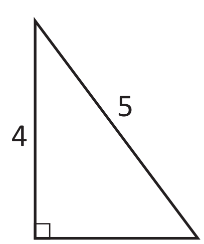
2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.



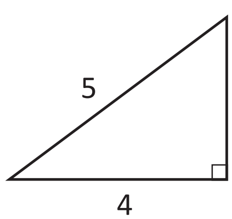
1. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

Observa que si dos catetos tienen igual medida también los triángulos son congruentes por criterio LAL.

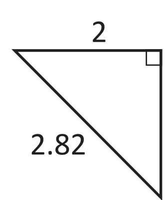
a)



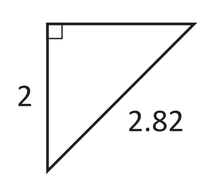
b)



c)



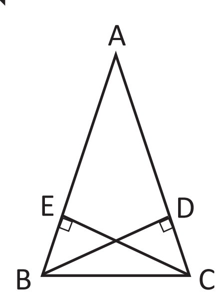
d)



2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que

   a) ΔBCD ≅ ΔCBE

   b) AE = AD



Unidad 6

1.9 Condiciones necesarias y suficientes

P

Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero   B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

S

a) Si un triángulo ABC cumple la condición A, también cumple B; pues los triángulos equiláteros tienen los 3 lados iguales y para ser isósceles únicamente necesita 2 lados iguales; por tanto si se cumple A también se cumple B.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero; porque la medida del tercer lado (base), puede ser igual o distinta a la medida de los otros 2 lados.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

C

Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

Escribe N si A es necesaria para B y escribe S, si A es suficiente para B, para cada una de las situaciones siguientes:

a) Para un triángulo DEF:	A: DEF es isósceles,	B: DEF es equilátero.
b) Para un triángulo DEF:	A: DEF es rectángulo,	B: DEF es isósceles.
c) Para un triángulo DEF:	A: DEF tiene 3 ángulos iguales,	B: DEF es isósceles.
d) Para un cuadrilátero DEFG:	A: DEFG es cuadrado,	B: DEFG es rectángulo.

1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

P

Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $AC = A'C'$.

B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

S

La condición A($\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A($\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria para B; pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, la condición A($\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria y suficiente para B($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$).

C

Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición "si A entonces B" y la recíproca "si B entonces A".

Para el ejemplo presentado, la proposición "si A entonces B", corresponde que para los dos triángulos rectángulos dados se cumple que $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $AC = A'C'$, entonces los triángulos son congruentes; mientras que la recíproca "si B entonces A" corresponde a que si dos triángulos son congruentes, entonces tienen iguales sus lados y ángulos correspondientes.

1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

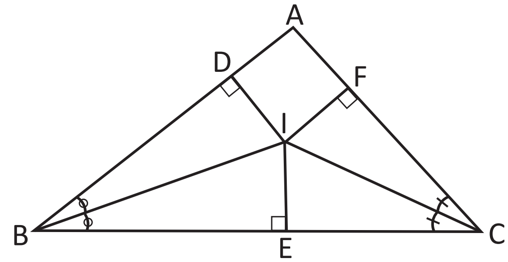
a) A: Isósceles	B: Tiene dos ángulos de igual medida
b) A: Equilátero	B: Tiene tres ángulos de igual medida
c) A: Isósceles	B: Equilátero
d) A: Rectángulo	B: Equilátero

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:

a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.



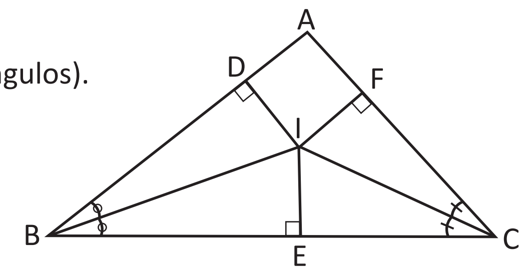
a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ID = IE (por la congruencia) . . . (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

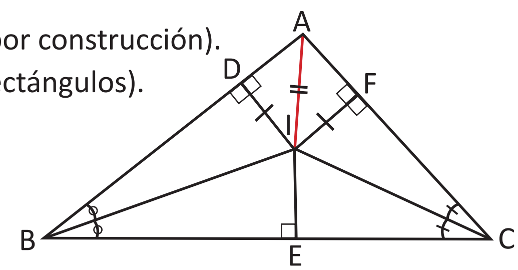
Entonces, IE = IF (por la congruencia) . . . (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por (1) y (2))



> En b) para demostrar que ∢IAF = ∢IAD se necesita demostrar que ΔFIA ≅ ΔDIA.

b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido (por el literal **a** y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).

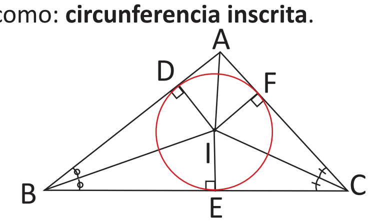


Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.

El punto “I” donde se intersecan dos bisectrices de un triángulo se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto “I” perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto “I”; es decir, las 3 bisectrices se intersecan en el incentro.

> Observa que si el incentro equidista de los tres lados, es posible trazar una circunferencia cuyo radio sea igual a la distancia del incentro a alguno de los lados. Dicha circunferencia se conoce como: **circunferencia inscrita**.

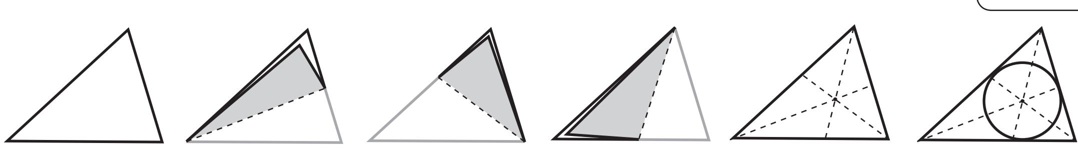


Comprueba utilizando un triángulo de papel que las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **incentro**.

a) Dobla cada ángulo del triángulo por la mitad.

b) Marca el punto donde se intersecan las 3 bisectrices.

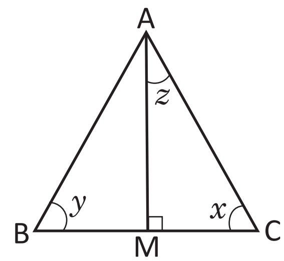
c) Dibuja la circunferencia inscrita.

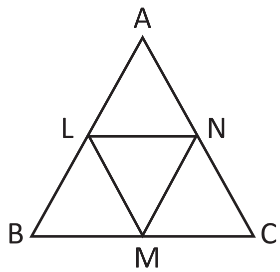


1.12 Practica lo aprendido

1. En el triángulo equilátero ABC, AM ⊥ BC, responde:

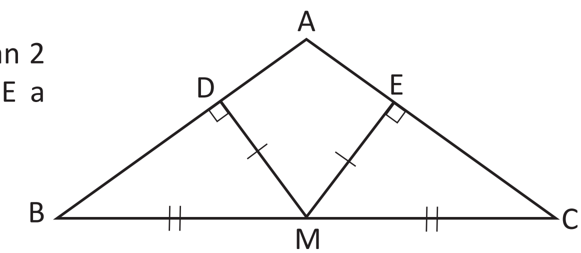
   a) ¿Cómo se llama el segmento AM?
   b) Determina el valor de los ángulos x, y, z.





2. En la siguiente figura L, M, N son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuestra que el ΔLMN es equilátero.

3. En el ΔABC, desde el punto medio M del lado BC se trazan 2 segmentos perpendiculares a AB y AC, e intersecan en D y E a AB y AC respectivamente, Si MD = ME, demuestra:
   a) ΔBDM ≅ ΔCEM
   b) ΔADM ≅ ΔAEM
   c) El ΔABC es isósceles.
   d) Si se traza el segmento DE, entonces DE ∥ BC.

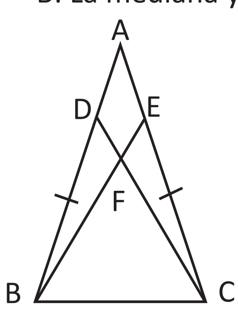


4. En los siguientes enunciados sobre triángulos determina si la condición A es necesaria y/o suficiente para B.
   a) A: Dos triángulos son congruentes.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

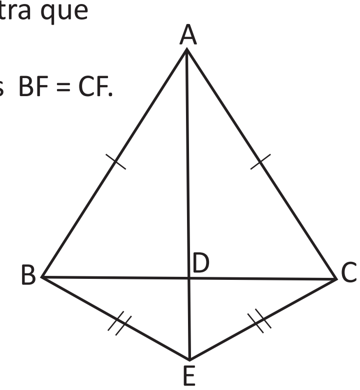
   b) En dos triángulos rectángulos:
      A: La hipotenusa y un ángulo agudo tienen igual medida.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

1.13 Practica lo aprendido

1. En los siguientes enunciados acerca de triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.
   a) A: Equilátero; B: La mediana y la altura coinciden en cada vértice.
   b) A: La mediana y la bisectriz coinciden en cada vértice.
      B: La mediana y la mediatriz coinciden en cada vértice.



2. En un triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados de igual medida AB y AC. Si BD = CE. Demuestra que
   a) BE = CD
   b) Si F es el punto donde se cortan BE y CD entonces BF = CF.



3. En los triángulos isósceles ΔABC y ΔEBC, demuestra que AE ⊥ BC.
   Sugerencia: considera la mediatriz del segmento BC.

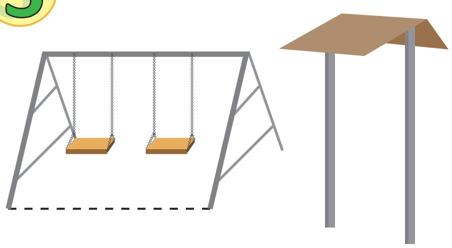
4. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

2.1 El paralelogramo

P

a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos de tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

S



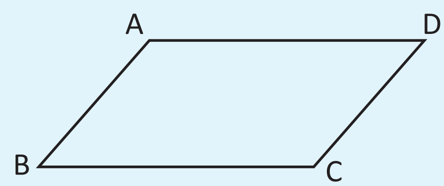
a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros, tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos; al igual que el techo del deslizadero.

b) Ejemplo 1. La pizarra es un paralelogramo.
Ejemplo 2. Los vidrios de las ventanas.
Ejemplo 3. El escritorio de la profesora o algunos pupitres.

C

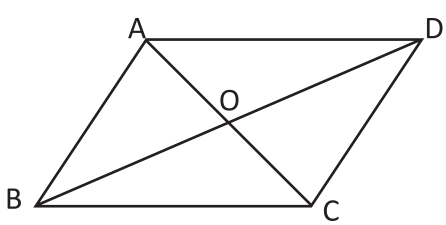
Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumple la condición de ser un paralelogramo.



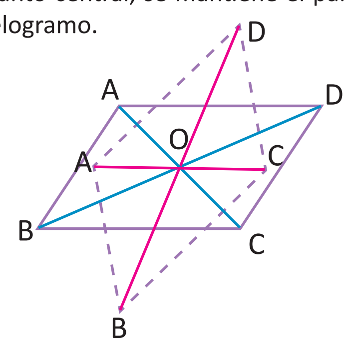
E

En el paralelogramo ABCD mostrado a continuación, tomando la intersección de las diagonales en el punto O, ¿cuáles pares de segmentos y ángulos son iguales?



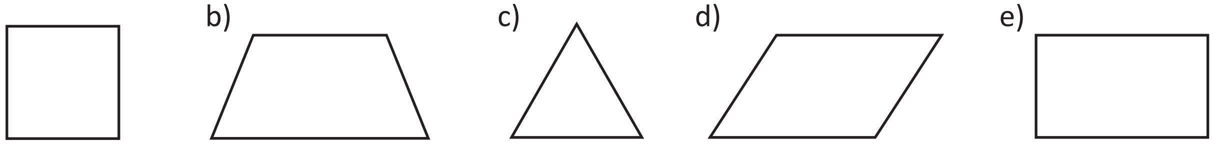
a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Aunque se gire un ángulo cualquiera con respecto al punto O como punto central, se mantiene el paralelogramo.



Identifica, en las siguientes figuras, cuáles son paralelogramos. Justifica cada caso.

a) b) c) d) e)

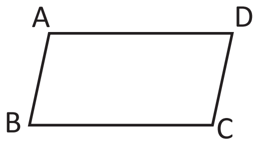


2.2 Características de los paralelogramos

P

Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.

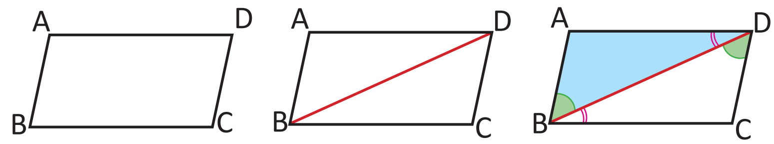


Observa que para demostrar que
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA
Es suficiente demostrar que ΔDBA ≅ ΔBDC, trazando la diagonal BD.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:



∢ABD =∢ CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de (1), (2) y BD es común).

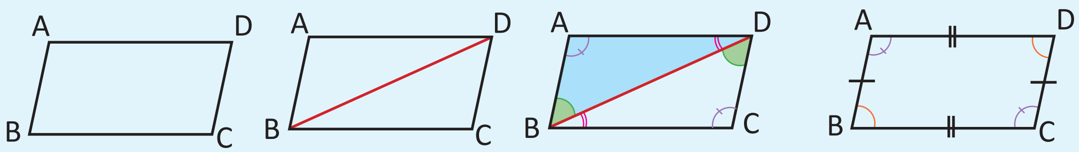
Entonces, AB = DC, AD = BC, ∢DAB =∢ BCD, ∢ABC =∢ CDA.

Observa que ∢ABC = ∢CDA porque en el paralelogramo se cumple que ∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADB.

Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180° (mitad de la suma de los ángulos interno de un cuadrilátero).

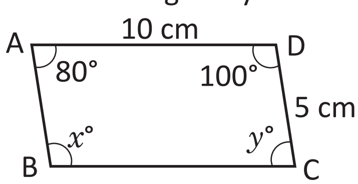
C

En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.



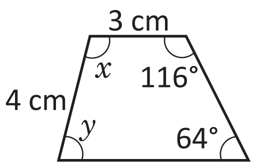
E

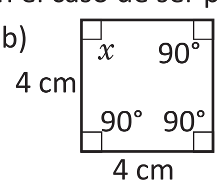
Encuentra los ángulos y lados según las características de los paralelogramos:

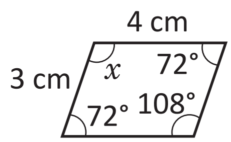


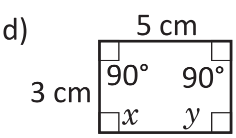
∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

1. Dadas las siguientes figuras, explica si son paralelogramos según sus lados y ángulos, encuentra las medidas de lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.

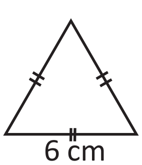
a) 

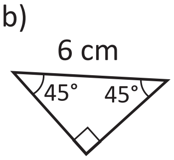
b) 

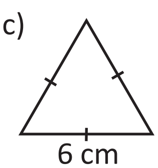
c) 

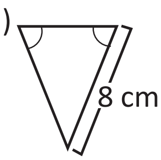
d) 

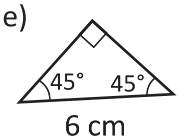
2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirse forman un paralelogramo y explica por qué son paralelogramos.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Unidad 6

2.3 Diagonales de un paralelogramo

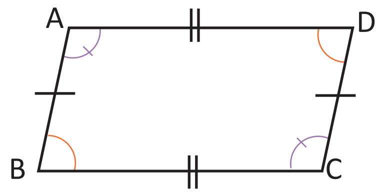
P

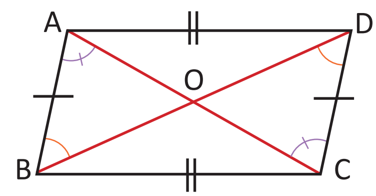
Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

> Recuerda que un cuadrilátero tiene 2 diagonales.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.





Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)

∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(2)

∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(3)

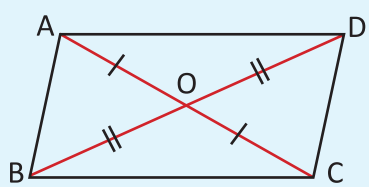
> Para demostrar que OA = OC y OB = OD es suficiente demostrar que ΔOAB ≅ ΔOCD.

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de (1), (2) y (3)).

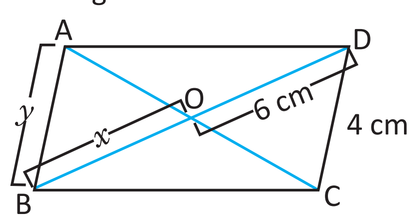
Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

C

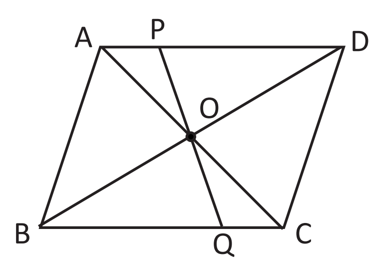
En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



1. Escribe qué característica del paralelogramo ABCD se debe utilizar para determinar el valor de x y y.



2. En el siguiente dibujo las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en el punto O y el segmento PQ pasa por el punto O. Completa la demostración de que PO = QO colocando en los espacios en blanco lo que corresponde:



☐ = ☐ (por propiedad de los paralelogramos) . . .(1)

☐ = ☐ (por ser ángulos alternos internos entre las paralelas) . . .(2)

☐ = ☐ (son ángulos opuestos por el vértice) . . . (3)

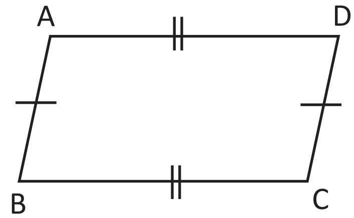
ΔAOP ≅ ΔCOQ (por criterio de congruencia ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, PO = QO (☐).

2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Para demostrar que AD∥BC y AB∥DC es suficiente, demostrar que ΔABD ≅ ΔCDB, trazando la diagonal BD.

S

Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD≅ ΔCDB (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común).

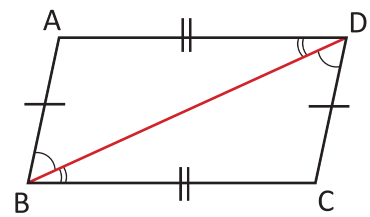
Entonces, ∢ABD = ∢CDB (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

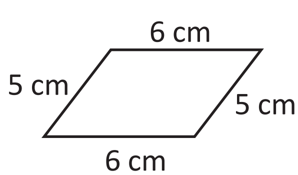


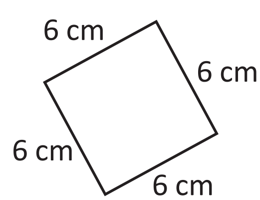
C

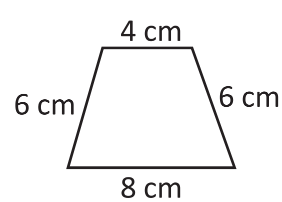
Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de "en un paralelogramo los pares de lados opuestos son de igual medida".

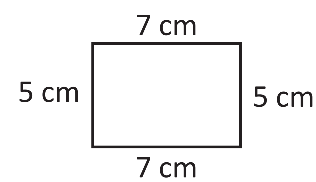
Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

1. En los siguientes cuadriláteros describe los que cumplen la condición de paralelogramos.

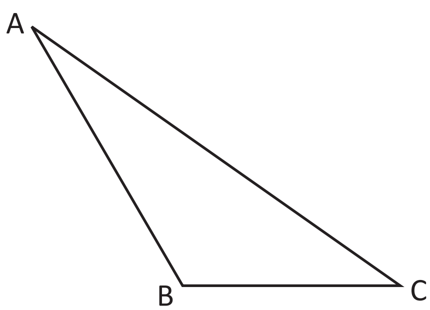


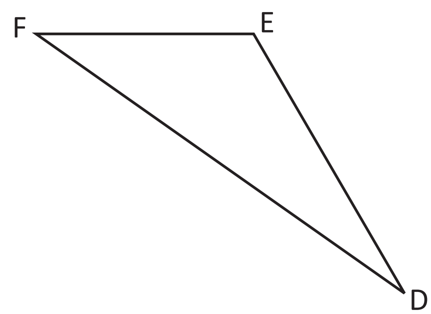






2. ΔABC y ΔDEF son congruentes. Explica por qué al unir estos triángulos se forma un paralelogramo.





2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.

Estableciendo los puntos E y F sobre la prolongación de los lados BC y CD respectivamente. Para demostrar que AB ∥ DC y BC ∥ AD es suficiente, demostrar que ∢ABC = ∢DCE, ∢BCD = ∢ADF.

S

Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;

2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA).

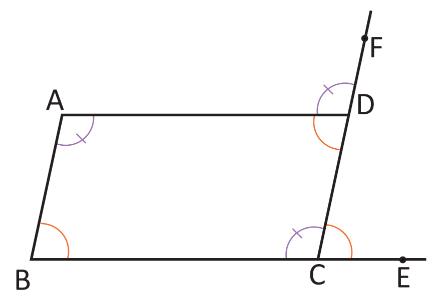
Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) . . . (1)

También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) . . . (2)

Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando (2) de (1)).

Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).

De la misma manera se procede para demostrar que BC ∥ AD.



Una vez se realiza la demostración se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

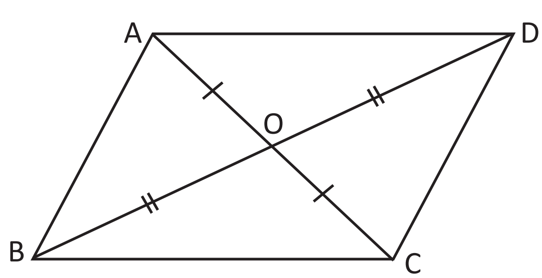
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C

Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero entonces es un paralelogramo, este es el recíproco del teorema: "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

Ser paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio es un paralelogramo.



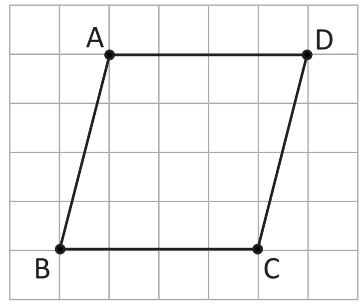
Es suficiente comprobar que los lados opuestos son de igual medida para demostrar que ABCD es paralelogramo. Para ello, se puede pensar en los cuatro triángulos que se forman dentro del paralelogramo.

2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

P

Dibuja en tu cuaderno la figura, para ello realiza los siguientes pasos; luego responde:

1. Traza un segmento AD utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud.
2. Traza otro segmento BC utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud, 4 líneas más abajo de la primera.
3. Traza los segmentos AB y CD.



¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.

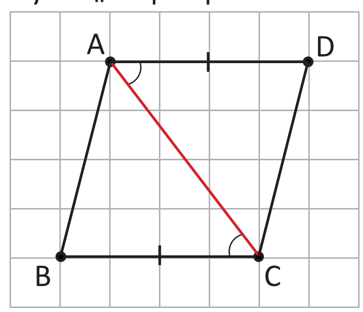
S

Por los pasos que se siguieron para construir la figura AD = BC = 4 cm y AD∥BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.

Trazando la diagonal AC.

Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).

Luego, AB = CD (por la congruencia).



Por lo tanto, ABCD es paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).

C

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

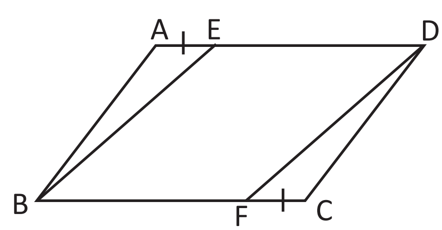
Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

E

Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestra que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

ED ∥ BF

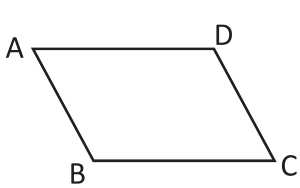
ED = AD – AE = BC – FC = BF



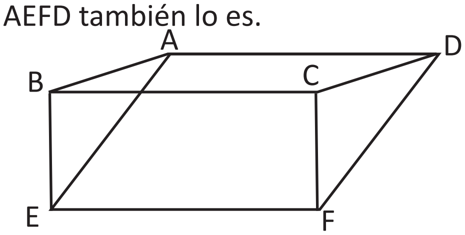
Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

1. En el cuadrilátero ABCD determina cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

   a) BA = AD, BC = CD
   b) AB = DC, AD = BC
   c) $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$

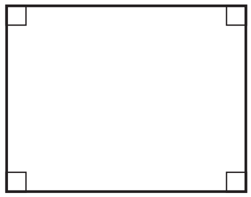


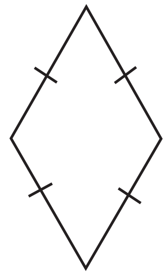
2. En el dibujo los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestra que el cuadrilátero AEFD también lo es.



2.7 Características del rectángulo y el rombo

Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.





Definición de un rectángulo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos congruentes.

Definición de rombo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

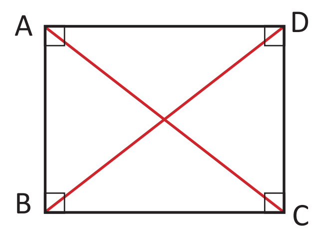
- Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.
- Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

El rectángulo es un paralelogramo por sus ángulos y por sus lados, el rombo también lo es.

Demuestra los siguientes resultados sobre las diagonales del rombo y el rectángulo.

a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Para demostrar que AC = DB, es suficiente demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.



1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.

   Entonces $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (por criterio LAL, AB = DC, BC es común y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 90°$).

   Por lo tanto, AC = BD (por la congruencia).

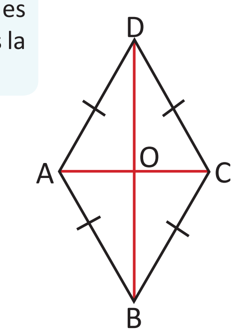
2. Trazando las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y llamando O al punto donde se intersecan.

   Entonces, ΔACD es isósceles (por ser rombo DA = DC).

   Para demostrar que $BD \perp AC$, es suficiente demostrar que DO es la altura de ΔACD.

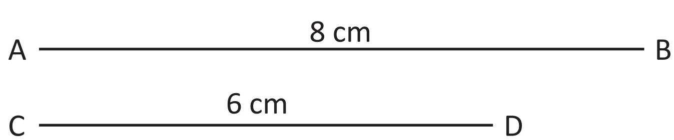
   Luego, DO es mediana de ΔACD (por ser paralelogramo las diagonales se intersecan en el punto medio).

   Por lo tanto, $DB \perp AC$ (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediana).



1. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

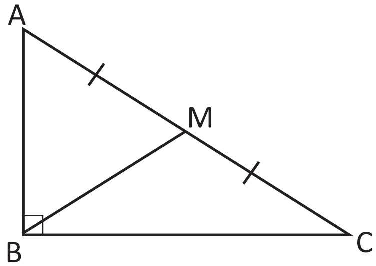
2. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con los segmentos AB y CD.



2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

P

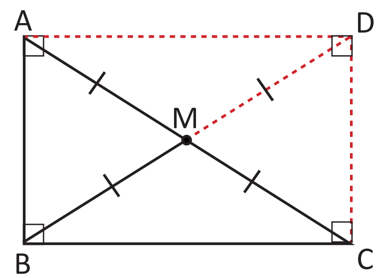
Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Recuerda que en un rectángulo las diagonales se intersecan en su punto medio.

S

Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD, que se intersecan en el punto medio, por ser paralelogramo M.



BM = $\frac{1}{2}$ BD (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (2)

Además AC = BD (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC (de (1), (2) y (3)).

C

En todo triángulo rectángulo, el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, tiene una longitud congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

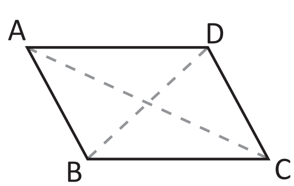
E

¿El cuadrado es un paralelogramo?
Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes entonces, los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

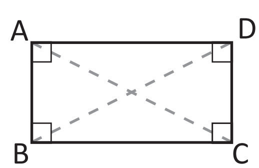
Recuerda que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y 4 lados congruentes.

1. ¿Cuáles son las condiciones que se deben adicionar para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado? Escoge del literal **a** al literal **d** las condiciones correspondientes.

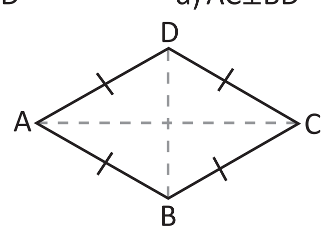
a) $\measuredangle A = 90°$ b) AB = BC c) AC = BD d) $AC \perp BD$



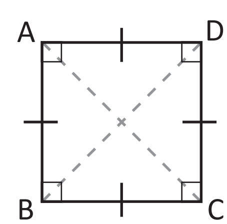
Paralelogramo



Rectángulo

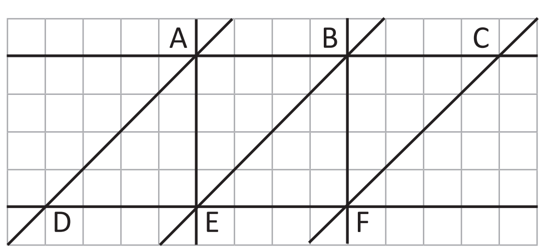


Rombo



Cuadrado

2. En la siguiente figura identifica los paralelogramos que se forman, luego clasificalos según sean rectángulos, cuadrados, rombos, o solamente paralelogramos.

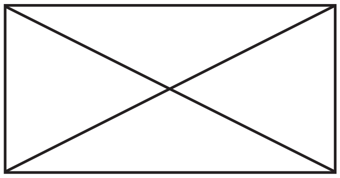


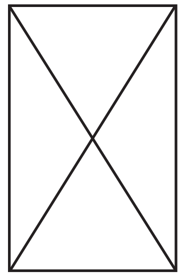
Unidad 6

2.9 Recíproco de características de rectángulos

P

¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero no sean rectángulos?



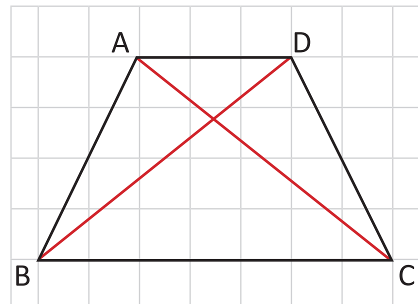


Piensa en el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales".

El trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

S

Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB para determinar que AC = DB.



Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, no significa que el cuadrilátero es rectángulo, puede ser otro tipo de cuadrilátero.

C

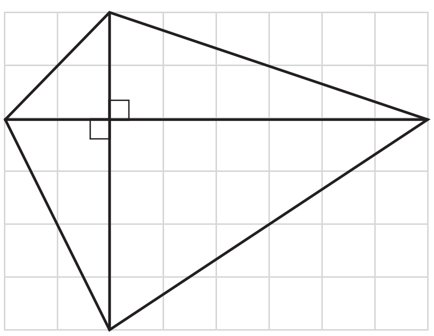
El recíproco del enunciado "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo propuesto.

Para demostrar la veracidad del recíproco del teorema, en este caso, se utilizó un **contraejemplo**.

En este caso como no se cumple, también se puede decir que ser rectángulo es una condición **suficiente** para que las diagonales sean congruentes, pero **no es necesaria.**

E

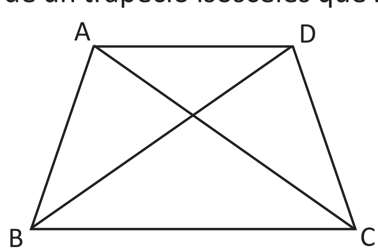
¿Un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan perperdicularmente, es un rombo?



Esto no es cierto ya que el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, pero no es un rombo, ya que sus lados son desiguales.

Este enunciado es el recíproco de "en un rombo las diagonales se intersecan perperdicularmente".

1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles que no es un paralelogramo son congruentes.

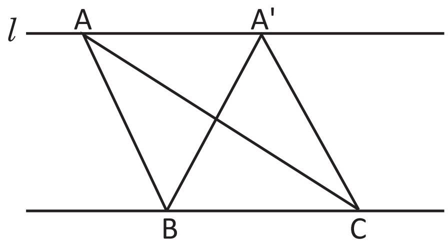


2. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

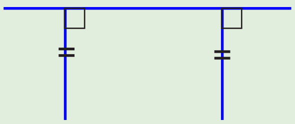
2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

P

En la siguiente figura, la línea l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.



En un par de líneas paralelas, las líneas perpendiculares trazadas desde dos puntos de una línea paralela a la otra, tienen la misma longitud.

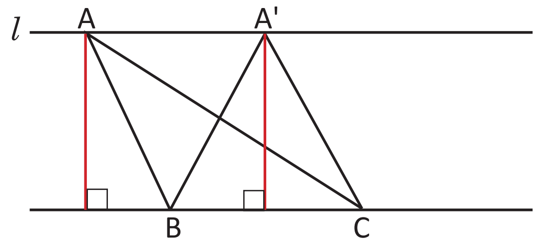


S

Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.

Estos triángulos tienen la misma base y al determinar la altura a cada uno de ellos, las dos son congruentes, dado que están entre dos rectas paralelas.

Por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

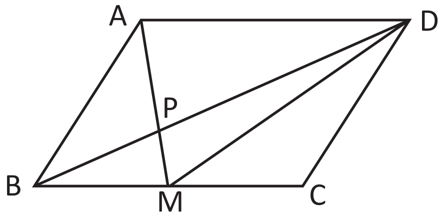


C

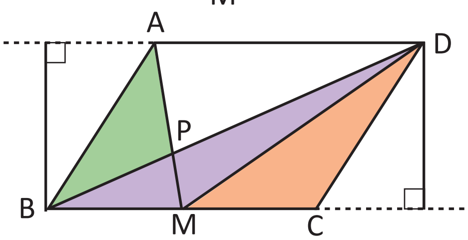
Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra, tienen igual longitud.

E

ABCD es un paralelogramo; M es el punto medio del segmento BC, P el punto de intersección del segmento BD y AM. Establece cuáles son los triángulos que tienen la misma área.

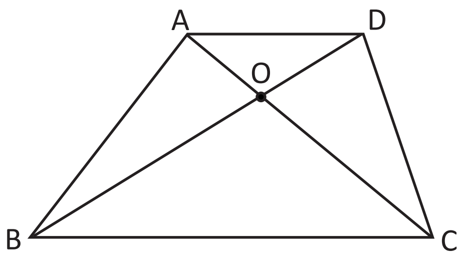


Los triángulos ABM, DBM y DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD y BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura, dada la propiedad que entre líneas paralelas los segmentos perpendiculares tienen la misma longitud.



También se puede decir que las áreas de los triángulos ABP y DMP son iguales, puesto que las áreas de ABM y DBM son iguales y se les está restando la misma porción de área a ambos (MPB).

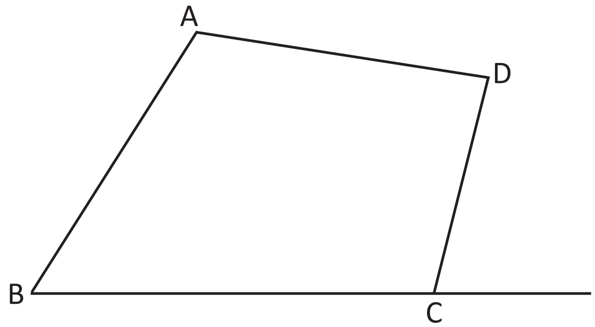
Si se establece como punto O la intersección de diagonales en el trapecio ABCD con AD||BC, demuestra que las áreas de los triángulos AOB y DOC son iguales.



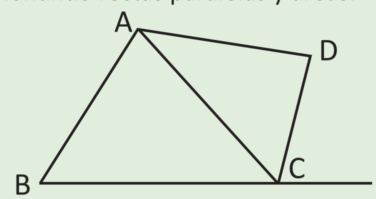
Unidad 6

2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

En el cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?



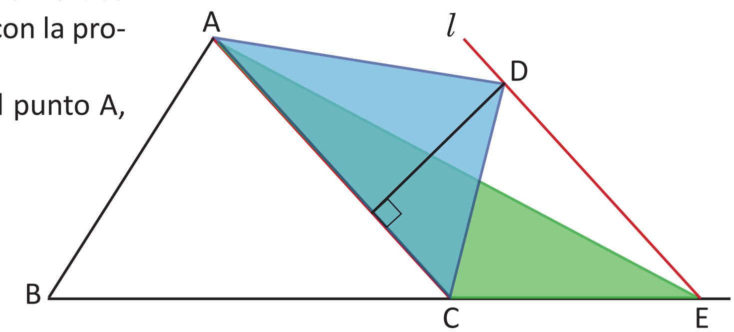
Puedes intentar encontrar el triángulo que tenga la misma área que el triángulo ACD, relacionando rectas paralelas y áreas.



Para elaborar el ΔABE que tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, puedes seguir los pasos:

1. Trazar la diagonal AC.
2. Trazar la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se intersecta con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.

Con esta construcción se tiene que área de ΔDAC = área de ΔEAC (por estar entre paralelas y tener base común).



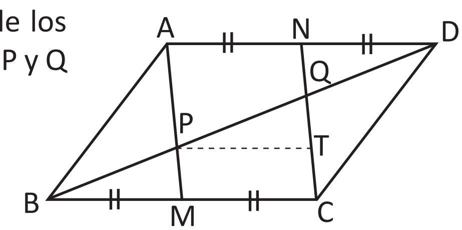
Área del cuadrilátero ABCD = área de ΔABC + área de ΔDAC.
Área de ΔABE = área de ΔABC + área de ΔEAC.

Por lo tanto, área de ΔABE = área del cuadrilátero ABCD (área de ΔDAC = área de ΔEAC).

Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

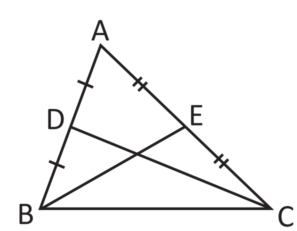
1. En un paralelogramo ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados BC y AD, el segmento BD intersecta a AM y CN en los puntos P y Q respectivamente, si BQ = 12, calcula la longitud de QD.

Puedes establecer el punto T de modo que PT sea paralelo a MC.



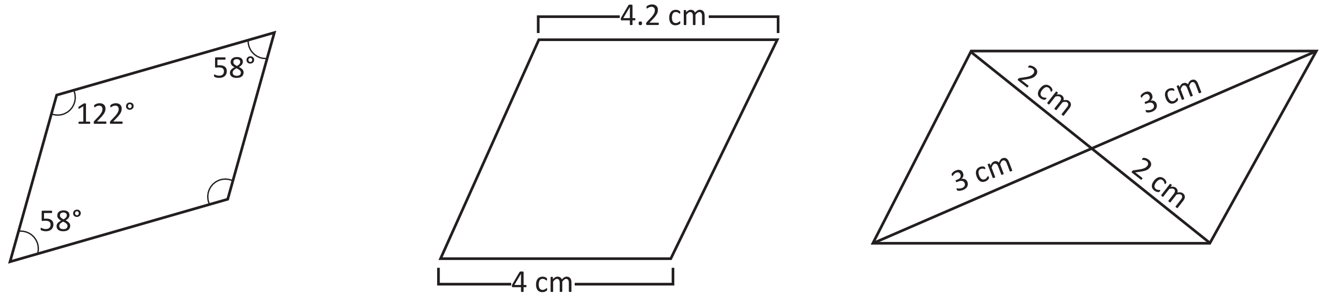
2. En el triángulo ABC los puntos medios de los lados AB y AC se establecen como D y E respectivamente, se traza el segmento DE. Demuestra:

   a) El área de los triángulos DBE, ADE, DCE es igual.
   b) Dos veces el área del triángulo DBE es igual al área del triángulo ABE e igual al triángulo EBC.

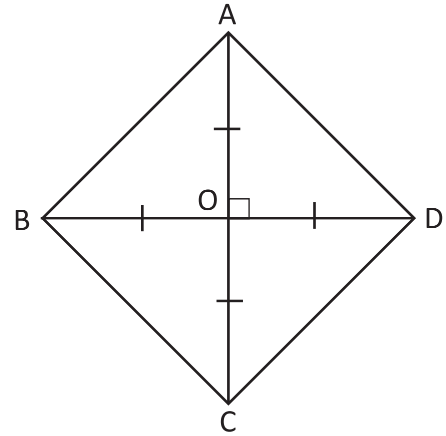


2.12 Practica lo aprendido

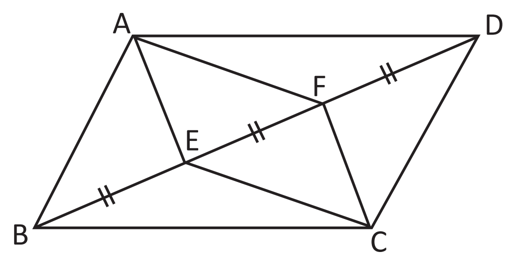
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden ser paralelogramos? Menciona qué condición aprendida en la clase 6 de esta lección se aplica.



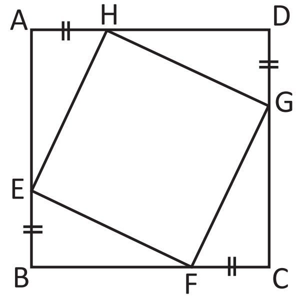
2. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado.



3. En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y BE = EF = FD. Demuestra que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



4. ABCD es un cuadrado y los lados señalados son congruentes. Demuestra que EFGH también es un cuadrado.

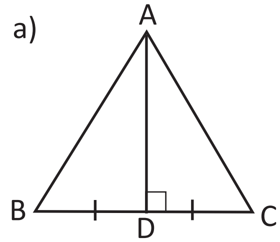


Unidad 6

2.13 Practica lo aprendido

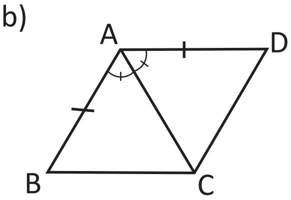
1. Según la información mostrada, determina si los triángulos indicados son congruentes o no. Explica tu respuesta.

a)



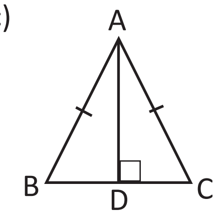
ΔABD y ΔACD

b)



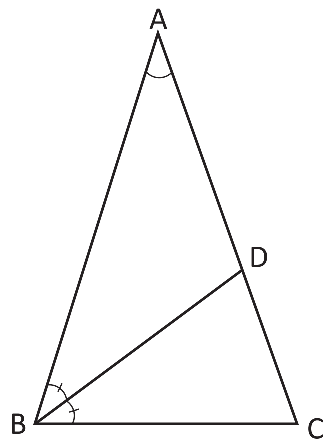
ΔABC y ΔACD

c)

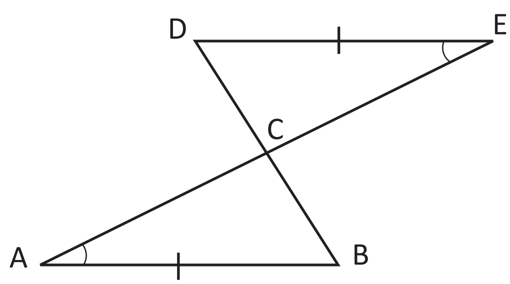


ΔABD y ΔACD

2. En el ΔABC, AB = AC y ∢CAB=36°. DB es la bisectriz del ∢ABC que corta el lado AC en el punto D. Demuestra que BC = BD = DA.

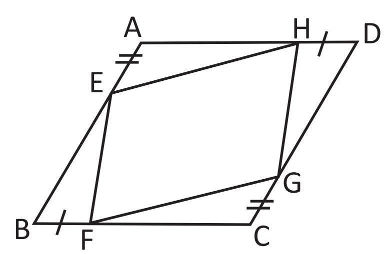


3. En la siguiente figura DE = AB y ∢DEC= ∢BAC, demuestra que AD = BE.



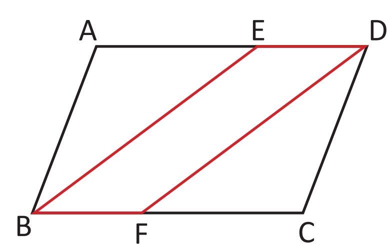
4. Se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

[Sugerencia: Observa que AH = CF, deduce que ΔAEH ≅ ΔCGF]



5. En la figura el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, se tiene que BE y DF son bisectrices de ∢ABC y ∢CDA, respectivamente.

Demuestra que BE ∥ DF. Utiliza la condición 3 de los paralelogramos.



Unidad 7

Área y volumen de sólidos geométricos

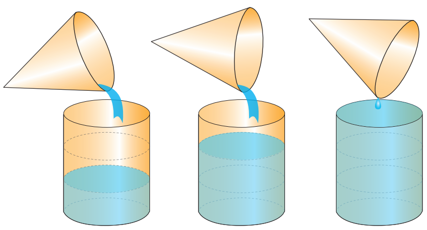
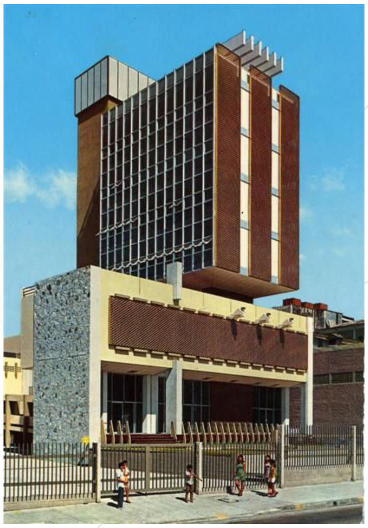


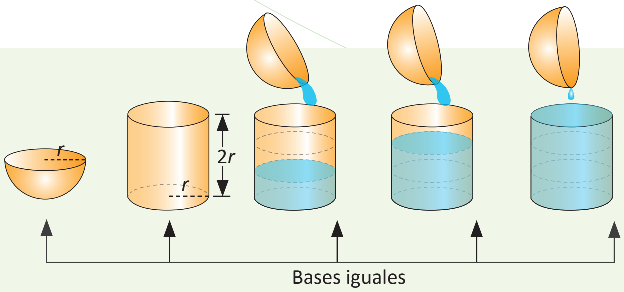
Ilustración de la relación entre volumen del cono y del cilindro.

El matemático y geómetra Euclides, relacionó los volúmenes de los prismas y pirámides, estableciendo en la proposición 10 del libro XII del texto ***Los Elementos***, que el volumen del cono es un tercio comparado con el volumen del cilindro que tiene la misma base y altura; aunque es importante mencionar que él no fue el primero en dedicarse al estudio de los sólidos, pues ya Platón había estudiado los sólidos regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro conocidos en la actualidad como sólidos platónicos.



Edificio de la Lotería Nacional (1970)

En la vida cotidiana, los sólidos son utilizados como base para construir objetos decorativos, diseño de edificios, materiales deportivos, educativos, depósitos para almacenar diferentes productos medicinales, cosméticos, industriales, etc.



Deducción del volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro.

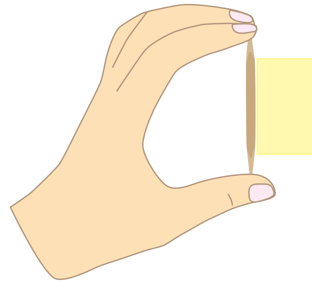
En esta unidad conocerás el origen de los sólidos más comunes, sus características, cálculo de áreas, volúmenes y relaciones que existen entre el volumen del cilindro, cono y esfera; así como su uso en diferentes contextos del entorno.

1.1 Sólidos de revolución

P

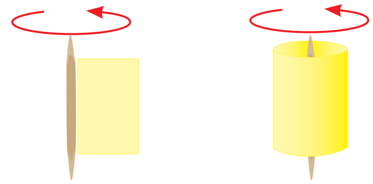
Se tiene un trozo de cartulina en forma de rectángulo, como muestra la figura.

Si se gira alrededor de un palillo de dientes, ¿qué se puede observar? ¿Se forma algún sólido geométrico que ya conoces?



S

Al doblar el rectángulo a modo que gire, se puede ver que el sólido que se forma es un cilindro.



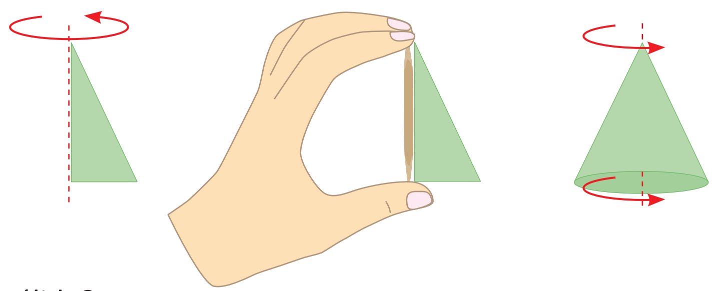
C

A los sólidos geométricos que pueden generarse girando una figura plana alrededor de un eje se les llama **sólidos de revolución**.

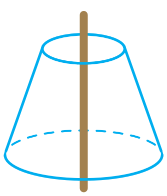
E

1. ¿Qué sólido se genera si se gira un triángulo rectángulo alrededor de un cateto?

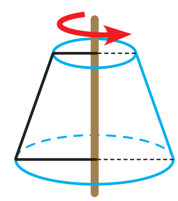
   El sólido que se forma es un cono.



2. ¿Con qué figura se ha generado el siguiente sólido?

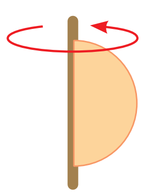


Para generar el sólido, la figura plana que se ha rotado es la mitad de un trapecio isósceles, como se puede ver a la derecha.

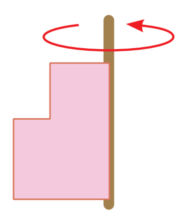


1. Dibuja el sólido que se forma al girar:

   a) Un semicírculo

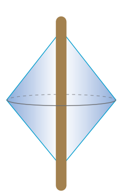


   b) Dos rectángulos

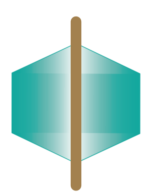


2. ¿Cuál es la figura plana que se ha girado para obtener los siguientes cuerpos geométricos?

   a)



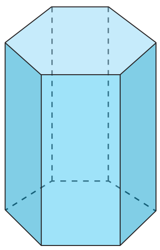
   b)

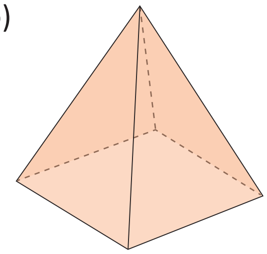


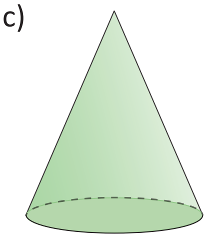
1.2 Características y elementos del cono y la esfera

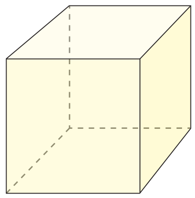
P

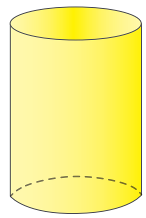
Escribe las características de los siguientes cuerpos geométricos:

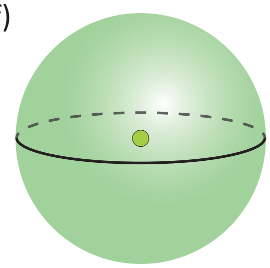
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

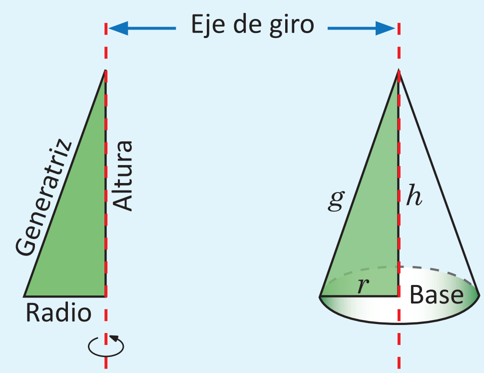
S

a) Tiene dos bases poligonales y sus caras son planas.
b) Tiene una sola base y una cúspide, además sus caras son planas.
c) Está formado por una sola cara plana círcular, un vértice y su cara lateral es curva.
d) Todas sus caras son planas y cuadradas.
e) Tiene dos bases circulares y su cara lateral es curva.
f) Es una superficie totalmente curva, no tiene caras laterales ni bases.

C

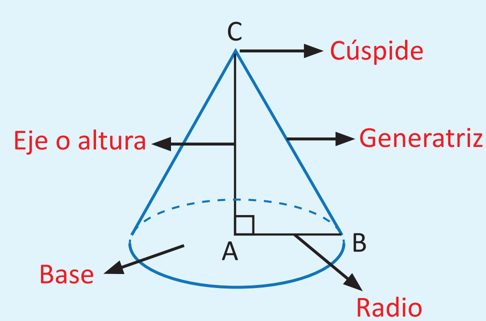
El **cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.

El cono puede verse como una superficie de revolución. La figura plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.

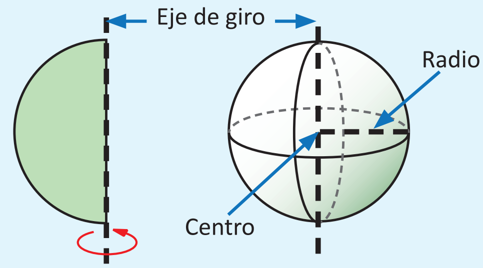


Los elementos que componen un cono son:

- Generatriz (g): es la línea que mediante la rotación genera el cono.
- Base: cara circular sobre la cual se apoya el cono.
- Radio (r): radio de la base.
- Vértice o cúspide.
- Altura (h): segmento que une el vértice y el centro de la base. La altura está contenida en el eje de giro.



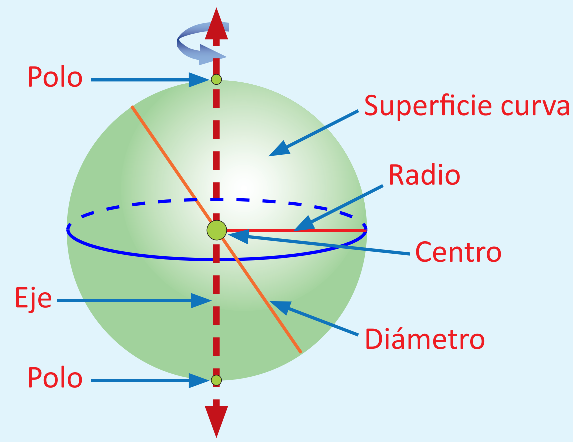
Una **esfera** es un cuerpo redondo formado por una sola superficie curva. Puede verse también como un sólido de revolución, haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.



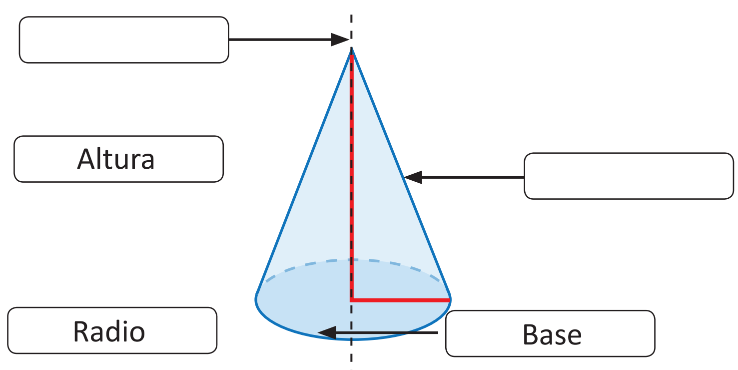
Todo punto sobre la superficie curva equidista de un punto llamado **centro**.

Los elementos de una esfera son:

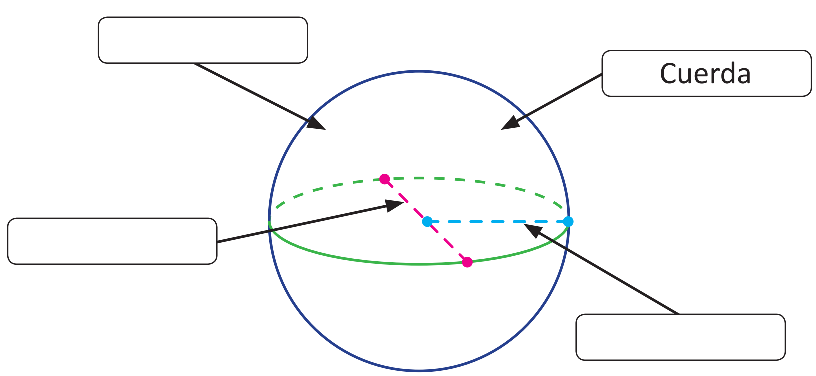
- Centro: punto interior de la esfera que equidista de cualquier punto de la esfera.
- Radio: distancia del centro a un punto cualquiera de la esfera.
- Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la esfera.
- Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- Polos: puntos donde la esfera corta al eje de rotación.



1. Dibuja en tu cuaderno los siguientes sólidos, luego escribe el nombre a los elementos que se indican con los espacios en blanco y donde sea necesario, traza una flecha para relacionar el nombre con el respectivo elemento.



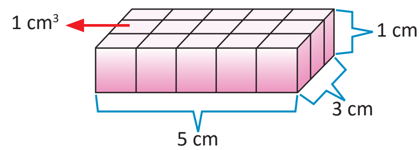
2. Completa colocando los nombres de los elementos de la esfera o dibujando lo que falte, donde corresponda.



2.1 Volumen del prisma y del cilindro

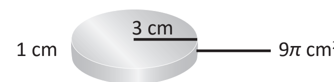
P

Observa las siguientes situaciones, luego contesta:



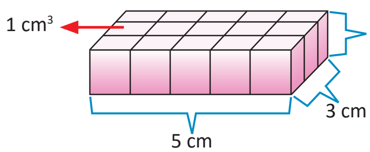
1) Con cubitos de 1 cm^3 se forma una base como se muestra:
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 4 bloques?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.

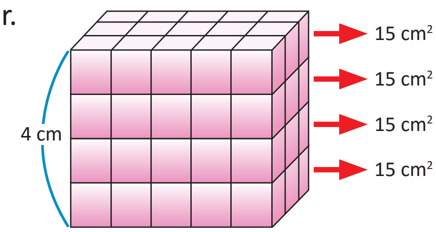
2) Se tiene un disco de radio 3 cm y altura 1 cm
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 5 discos?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.



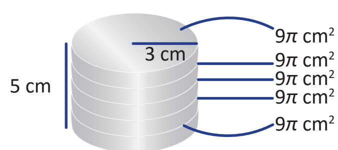
S

1. a) Se obtiene un prisma rectangular.
   b) V = 15 cm^2 × 4 cm





2. a) Se obtiene un cilindro.
   b) V = 9π cm^2 × 5 cm



Un cilindro es un sólido limitado por dos caras circulares y por una superficie curva. La superficie curva se llama cara lateral y las dos caras circulares se llaman bases.

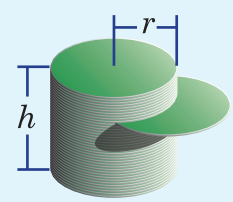
El volumen de un prima es:
V_{Prisma} = Área de base × altura

El área de un círculo de radio r está dado por la fórmula:
$A_{círculo} = \pi r^2$

C

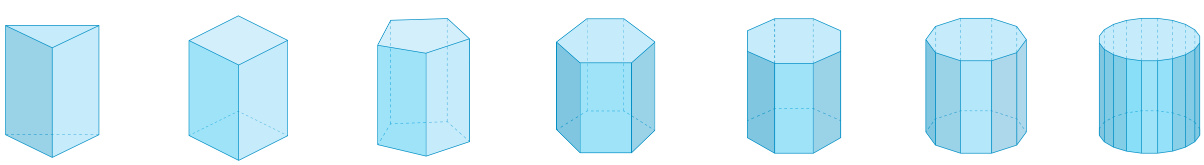
Se deduce entonces, que el volumen del cilindro se obtiene de una manera análoga al volumen de un prisma, es decir, el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base ($A_B = \pi r^2$) por la altura (h).

$$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$$



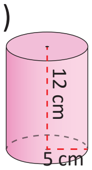
E

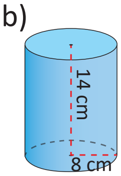
Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos, ¿a qué figura plana se aproxima la base del prisma cuando se aumenta el número de lados?

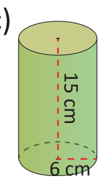


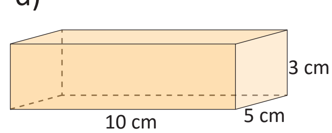
La base se aproxima a un círculo. Por tanto, el volumen del prisma se aproxima al volumen del cilindro cuando el número de lados de la base aumenta.

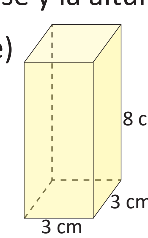
Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y la altura.

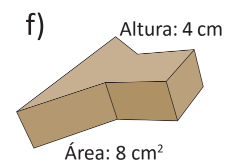
a)


b)


c)


d)


e)


f)


2.2 Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular

P

Si se tiene un prisma y una pirámide que tienen una base cuadrangular congruente e igual altura, ¿cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el prisma?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras planas y que encierran un volumen.

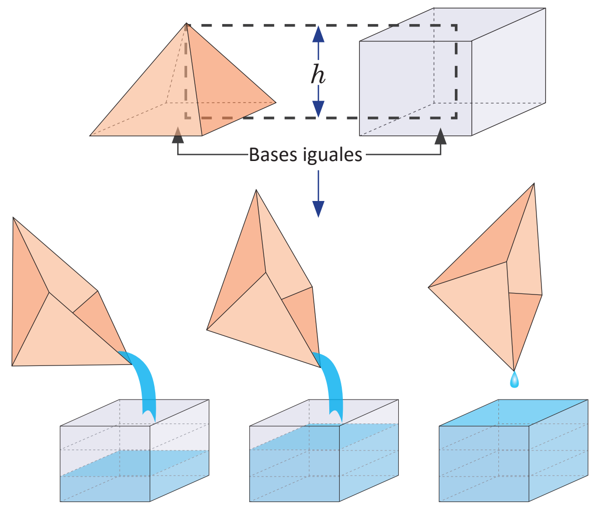
Una pirámide es un poliedro limitado por una sola base poligonal y por varias caras laterales, con forma triangular, que tienen un vértice común.

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la pirámide como el prisma, están hechos de un material resistente al agua.

Para determinar cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el del prisma, se llena de agua la pirámide y se vierte en el prisma, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.

A partir de este resultado se concluye que el prisma tiene tres veces el volumen de la pirámide. Es decir, el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

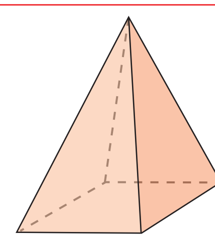


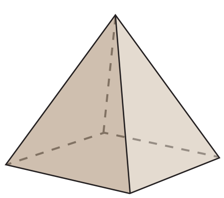
C

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base (A_B) por su altura (h):

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

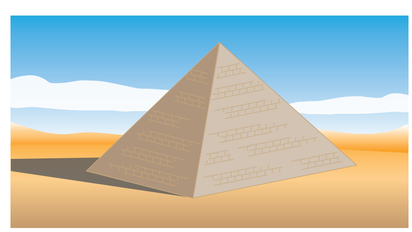
1. ¿Cuál es el volumen de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 4 cm y tiene una altura de 9 cm?





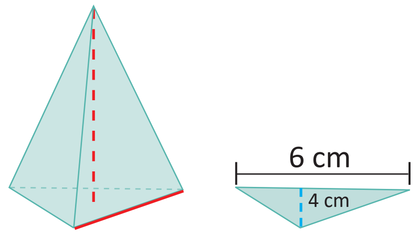
2. ¿Cuál es la altura de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y tiene por volumen 16 m^3?

3. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?



2.3 Volumen de la pirámide triangular

Calcula el volumen de una pirámide de base triangular, si su base tiene las dimensiones mostradas en la figura y la altura de la pirámide es 7 cm.



Observa que la base en este ejemplo es triangular.

Se sabe que el volumen de una pirámide es igual a $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_B \times h$ y como en este caso la base es un triángulo, entonces el área de la base es:

$$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Luego, el volumen de la pirámide es: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$.

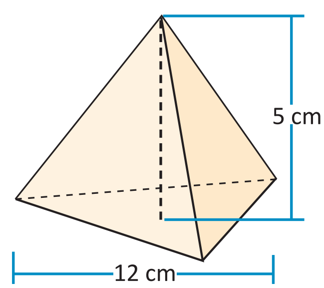
El volumen de la pirámide triangular, se determina de manera similar al de la pirámide cuadrangular $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$. En general, para una pirámide de base cualquiera el volumen se calcula de manera similar.

¿Cuál es el volumen de la pirámide mostrada si la altura del triángulo de la base es de 6 cm?

El área de la base es $A_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$.

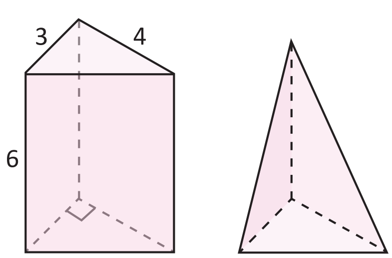
Por tanto, el volumen de la pirámide es:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3.$$

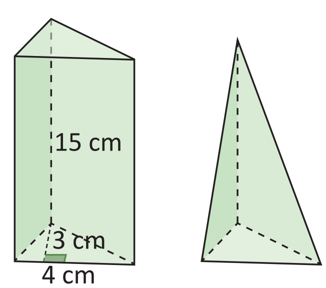


1. Para cada uno de los casos, calcula el volumen del prisma y luego el volumen de la respectiva pirámide:

a)

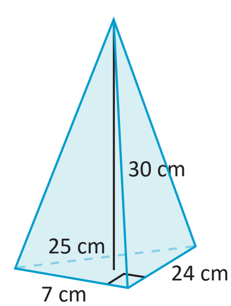


b)



2. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es 25 cm^2 y su altura es 9 cm.

3. Encuentra el volumen de una pirámide cuyos lados del triángulo rectángulo, se muestran en la figura, y la altura de la pirámide mide 30 cm.



Unidad 7

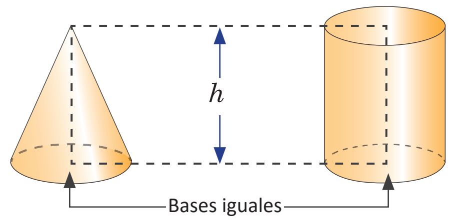
2.4 Volumen del cono

P

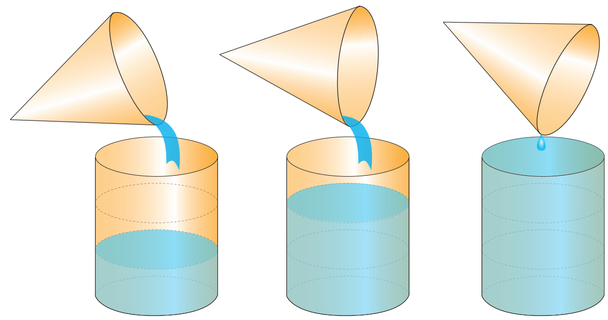
Se tiene un cilindro y un cono de bases congruentes, ¿cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que tanto el cono como el cilindro están hechos de un material resistente al agua.



Para determinar cuántas veces cabe el volumen del cono en el del cilindro, se llena de agua el cono y se vierte en el cilindro, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.



A partir de este resultado se puede concluir que el cilindro tiene tres veces el volumen del cono. Es decir, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

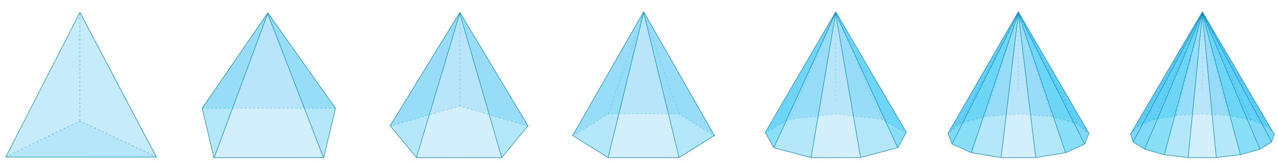
C

El volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro; es decir, es un tercio del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{cono} = \frac{1}{3}A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

E

El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de su base por su altura. Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos:

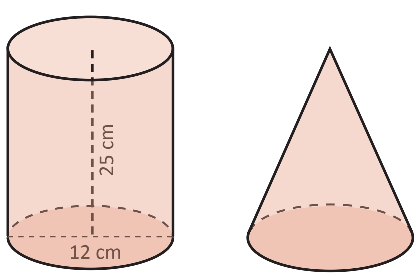


¿A qué figura se aproxima la base de la pirámide cuando aumentas su número de lados?

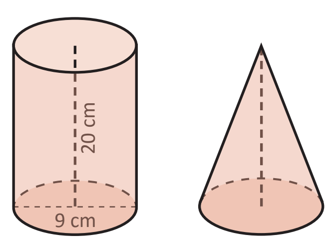
Solución.
La base se aproxima a un círculo. Así, cuando el número de lados de la base de una pirámide aumenta más y más, esta se aproxima a un cono.

Calcula el volumen del cilindro, luego encuentra el volumen del cono de igual base y altura que el cilindro.

a)



b)



2.5 Volumen de la esfera

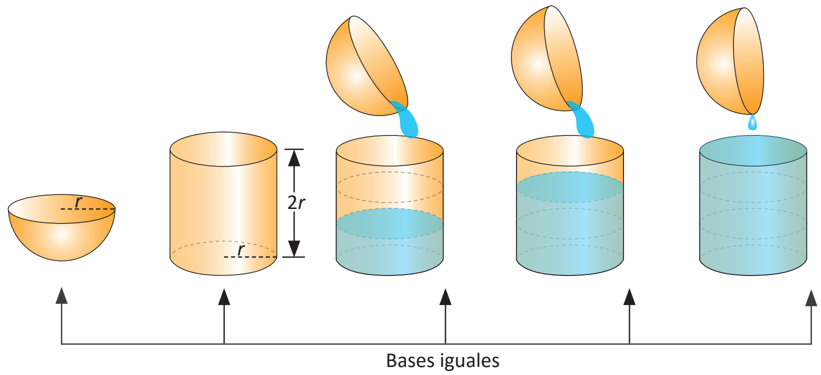
P

Se tiene una esfera y un cilindro con el mismo radio, la altura del cilindro es el diámetro de la esfera, ¿cuántas veces cabe el volumen de la esfera en el cilindro?, ¿qué puedes concluir con el resultado obtenido?

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la esfera como el cilindro, están hechos de un material resistente al agua.

Se considera la mitad de una esfera hueca. Se llena de agua la mitad de la esfera y se vierte en el cilindro. Para llenar el cilindro se necesita hacer este procedimiento tres veces.



A partir de este resultado, se puede concluir que el volumen de la semiesfera es la tercera parte del volumen del cilindro; pero la esfera está formada por dos semiesferas. Entonces, el volumen de la esfera es dos terceras partes del volumen del cilindro.

El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera. Es decir,

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{2}{3}\pi r^2 h \text{ (pero } h \text{ del cilindro es } 2r)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

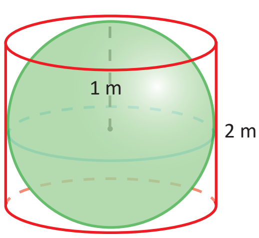
A la mitad de una esfera se le conoce como semiesfera.

C

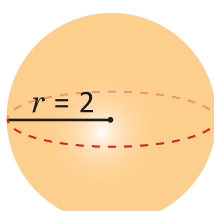
El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro; es decir, es dos tercios del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

1. Calcula el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura.



2. Determina el volumen de la siguiente esfera.



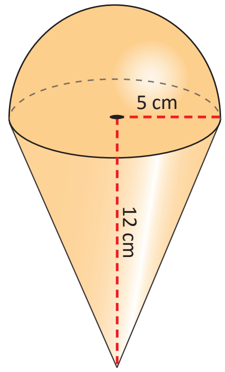
3. Calcula el volumen de una semiesfera de 10 cm de radio.

Unidad 7

3.1 Volumen de sólidos compuestos

P

Calcula el volumen del siguiente sólido:



Puedes descomponer el sólido en cuerpos geométricos conocidos.

S

Primero se encuentra el volumen de la semiesfera:

$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 5^3) = \frac{500}{6}\pi = \frac{250}{3}\pi = 83.3\pi \text{ cm}^3.$$

Luego se encuentra el volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3.$$

Entonces el volumen del sólido es:

$$V = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono} = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3 + 100\pi \text{ cm}^3 = \frac{550}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 183.3\pi \text{ cm}^3.$$

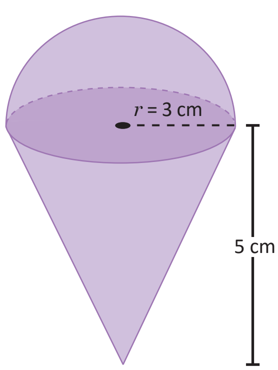
C

Para determinar el volumen de sólidos compuestos, se realiza lo siguiente:

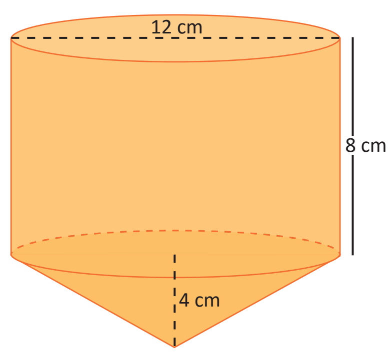
- Se descompone el sólido en cuerpos geométricos conocidos y se calculan sus volúmenes.
- Se suman los volúmenes calculados.

Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

a)

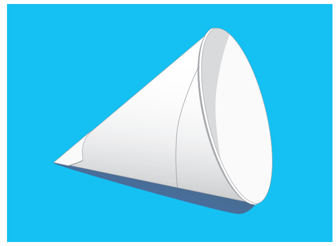


b)



3.2 Practica lo aprendido

1. Un vaso de papel en forma de cono tiene un radio de 3 cm y una altura de 9 cm, ¿cuánta agua puede contener?



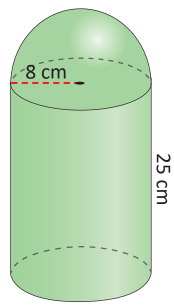
Puedes considerar que

$1\ \text{cm}^3 = 1\ ml = 0.0338135\ \text{f}l\ \text{oz}$
($\text{f}l$ oz: onzas fluidas).

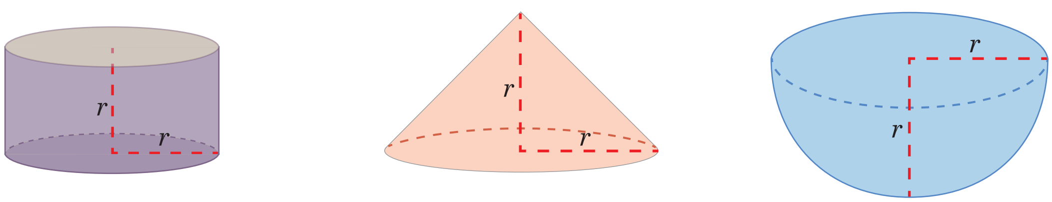
2. ¿Qué cantidad de agua puede almacenar un recipiente esférico con radio igual a 18 cm?

3. Calcula el volumen de una pelota cuyo diámetro mide 16 cm.

4. Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico:



5. Compara los volúmenes de los tres cuerpos, ¿qué relación encuentras entre ellos?



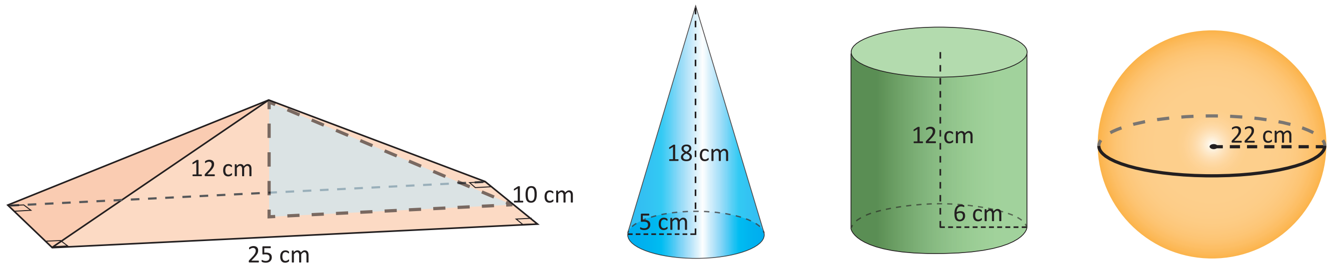
6. Si el radio de la Tierra es de 6 370 km, calcula el volumen de nuestro planeta utilizando distintas aproximaciones del número π:
   a) 3 b) 3.14 c) π

7. Encuentra el volumen de un depósito cilíndrico cuya circunferencia de la base (longitud de la circunferencia) mide 8π m y la altura 6.3 m.

8. Un laboratorio farmacéutico envasa alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calcula la capacidad en litros de cada frasco de alcohol.

3.3 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos.



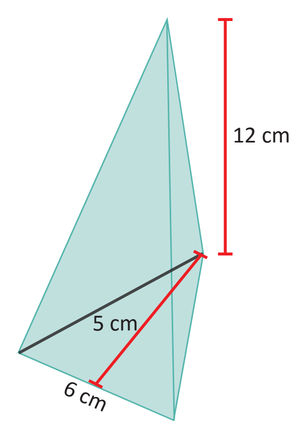
2. Si un cilindro de radio 5 cm tiene un volumen de 300π cm^3, ¿cuál es su altura?

3. Encuentra la altura de un cilindro cuyo volumen es de 60π cm^3 y el radio de la base es de 8 cm.

4. Encuentra el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 8 cm de diámetro.

5. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 cm de lado. Su altura es de 15 cm. Encuentra su volumen.

6. Calcula el volumen de una pirámide triangular que tiene de altura 12 cm y las características del triángulo base son: 5 cm de altura y 6 cm de base.



7. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene un volumen de 135π cm^3 y 9 cm de radio?

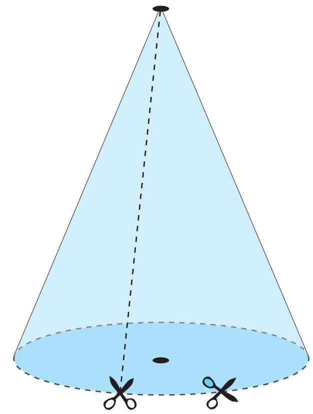
8. Calcula el volumen de un cono de 4 cm de radio de la base y 9 cm de altura.

9. Encuentra el radio de una esfera cuyo volumen es 36π cm^3.

4.1 Desarrollo del cono y longitud de arco

P

Dado un cono de papel, se hace un corte como indica la figura, y además, se corta el círculo por la orilla, pero sin despegarlo del resto del cono:



a) ¿Qué figura se obtiene? Dibújalo en tu cuaderno.

b) ¿Cómo se llama la figura que se obtuvo?

c) Describe qué figuras geométricas que ya conoces aparecen en el cono desplegado.

d) Identifica, sobre tu dibujo, las generatrices y el radio del cono, ¿cuál es la longitud de arco que forma el patrón de un cono?

S

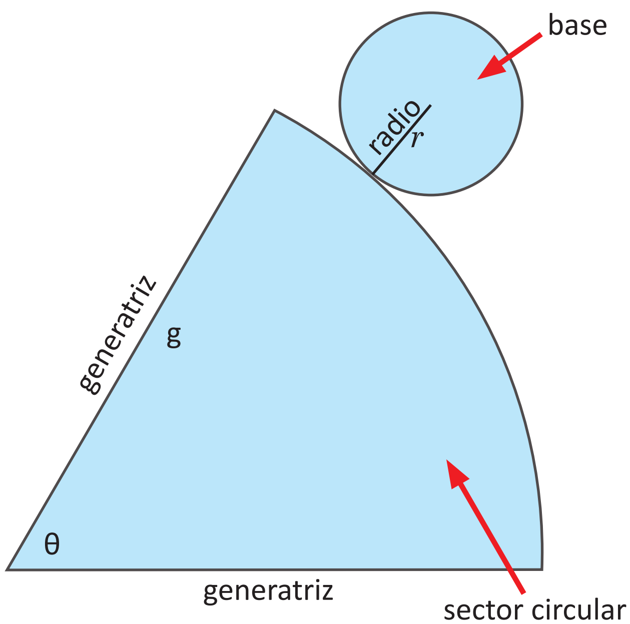
a) Al cortar el cono como sugiere la indicación, se obtiene una figura compuesta, tal como se muestra en la imagen de la derecha.

b) Una figura plana compuesta que describe un sólido geométrico, se conoce como **patrón** o **plano desarrollado** del sólido.

c) En el patrón del cono aparece un círculo con radio r, que corresponde al radio del cono y un sector circular, cuyo radio es la generatriz g del cono.

d) La circunferencia de la base es $2\pi r$, si se vuelve a armar el cono, el arco del sector circular se enrolla en la circunferencia de la base. Así, el arco tiene una longitud de

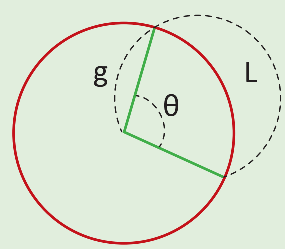
$$L = 2\pi r$$



Otra forma de calcularlo es tomando el radio del sector circular como g, y el ángulo central que es la porción del círculo limitada por dos radios, que son las generatrices del cono; el arco del sector circular es $\frac{\theta}{360}$ veces la circunferencia del círculo que forma el sector, así la longitud del arco del sector es:

$$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360°} = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Un sector circular es la porción de círculo limitada por dos radios, que forman el ángulo central θ.



Unidad 7

El patrón del cono está compuesto por un círculo de radio r, que es el radio del cono; y por un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y el ángulo central θ.

Las fórmulas para calcular la longitud de arco de un sector circular son:

$$L = 2\pi r \text{ ...(1)}$$

$$L = \frac{\theta}{180°}\pi g \text{ ...(2)}$$

Encuentra la longitud de arco en los siguientes casos:

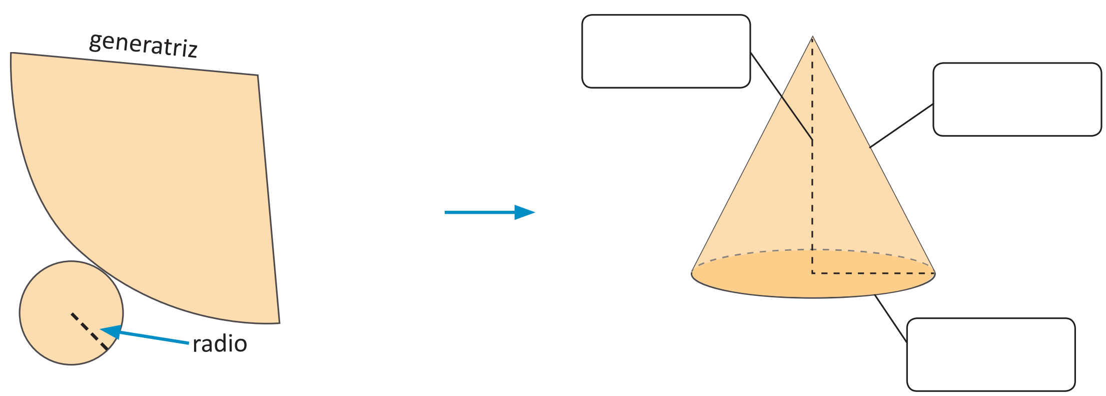
a) El radio de la base es $r = 8$ cm
b) La generatriz g = 12 cm y el ángulo central θ = 240°

Solución.
a) $L = 2\pi r$; entonces, $L = 2\pi \times 8 = 16\pi$; o bien,

b) $L = \frac{\theta}{180°}\pi g$; entonces, $L = \frac{240°}{180°}\pi \times 12 = \frac{4}{3}\pi \times 12 = 4\pi \times 4 = 16\pi$.

Es importante observar que los elementos conocidos son los que determinan la fórmula que se utilizará para calcular la longitud de arco.

1. Dada la siguiente figura del patrón del cono, escribe el nombre a los elementos indicados.



2. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuya generatriz mide 10 cm y el ángulo central es 60°.

3. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuyo radio mide 5 cm.

4.2 Relación entre los elementos del patrón del cono

P

Utilizando las fórmulas de la clase anterior, determina las medidas de los siguientes elementos:

1. El radio r, dado el ángulo central θ del sector circular y la generatriz g del cono.
2. El ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g y el radio r del cono.
3. La generatriz g, dado el ángulo central θ y la longitud de arco del sector circular.
4. La generatriz g dado ángulo central θ y del arco del sector circular L.

S

Se tienen las siguientes fórmulas; encuentra la longitud de arco L:

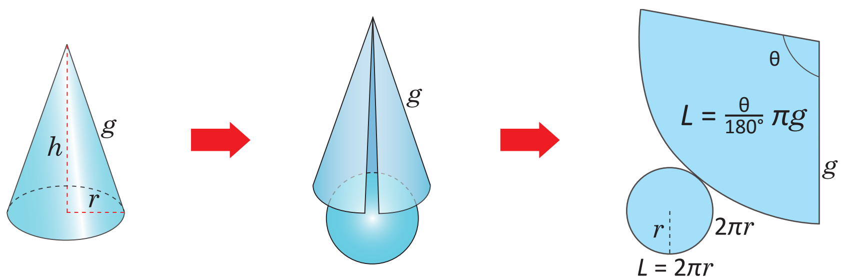
$L = 2\pi r$ ....(1) $\qquad L = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$ ....(2)

1. Por (1) y (2), se obtiene la siguiente relación:

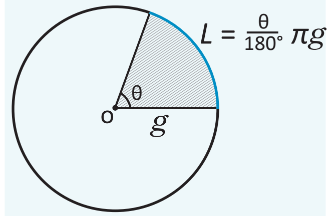
$$2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$$

$$r = \frac{\theta}{360^\circ} g \text{ .... (3)}$$

2. Por (3), $\theta = \frac{360^\circ}{g} r$ .... (4)
3. Por (3), $g = \frac{360^\circ}{\theta} r$ .... (5)
4. Por (2), $g = \frac{180^\circ}{\theta\pi} L$ .... (6)



Longitud de arco de un sector circular.



Con el ángulo central θ y generatriz g.

C

Las medidas del cono se pueden calcular cuando la relación de la circunferencia de la base es igual a la longitud de arco del sector circular, es decir:

$$L = 2\pi r \text{ ....(1)}, \; 2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$$

Radio del cono: r
Ángulo central del sector circular: θ
Generatriz del cono: g
Longitud del arco del sector circular: L

E

Encuentra el ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g = 30 cm y el radio del cono r = 4 cm.

Solución.
Como $2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ} \times \pi g$; luego $\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r$, sustituyendo los valores se tiene:

$$\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r = \frac{360^\circ}{30} \times 4 = 48^\circ; \text{ entonces, } \theta = 48^\circ.$$

1. Encuentra el ángulo θ del sector circular del plano desarrollado del cono, si la generatriz g = 18 cm y el radio del cono es r = 9 cm.
2. Encuentra el radio r de un cono, si su generatriz g = 6 cm y el ángulo del sector circular del desarrollo del cono es θ = 120°.
3. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su radio mide 4 cm y el ángulo central del sector circular mide 60°.
4. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su ángulo es θ = 120° y la longitud de su arco es L = 8π cm.

Unidad 7

4.3 Área superficial del cono

P

El patrón del cono está formado por los siguientes elementos:

a) La cara lateral del cono que es un sector circular con ángulo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, g es la generatriz del cono, el cual es el radio del sector circular,

b) Un círculo de radio r.

Expresa el área de la cara lateral y del círculo del cono. ¿Cuál es su área total?

S

a) El área lateral del cono $A_{Lateral}$, es el área del sector circular en el patrón del cono, el cual es proporcional al área total del círculo con el radio g; πg^2, por el ángulo central θ del sector circular:

$$A_{Lateral} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \quad \dots (1)$$

Luego por (1) y sustituyendo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$ en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} A_{Lateral} &= \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \theta \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \frac{360°}{g} \times r. \\ A_{Lateral} &= \pi r g \end{aligned}$$

b) El área de la base es: $A_{Base} = \pi r^2$.

El área total será la suma del área lateral más el área de la base, es decir:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

C

Se utiliza el plano desarrollado del cono para calcular su área lateral y total, cuando el radio del cono es r y la generatriz es g:

Área lateral $A_{Lateral}$: Es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Su área está dada por:

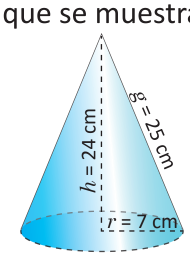
$$A_{Lateral} = \pi r g$$

Área total A_{Total}: Es la suma del área lateral y el área de la base.

Como la base del cono es un círculo, se tiene que el área total es:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

1. Calcula el área lateral y total del cono que se muestra en la figura:



2. Encuentra la generatriz de un cono que tiene las siguientes especificaciones: radio de $r = 6$ cm y una área lateral de $A_{Lateral} = 120\pi$ cm^2.

4.4 Área superficial de la esfera

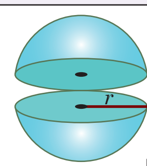
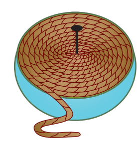
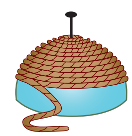
Se tiene una esfera y un círculo de radio r, ¿qué relación existe entre el área de la esfera comparada con la del círculo?, ¿qué se puede concluir sobre el área de la esfera?

Para resolver esta situación, es necesario tomar una esfera que se pueda cortar, un cordel y un clavo. Luego se realiza lo siguiente:

1. Se corta la esfera en 2 partes iguales, formando así dos semiesferas (ver figura A).
2. Se fija el cordel en el centro del círculo de una de las semiesferas, se enrolla hasta cubrir todo el círculo y se corta lo que sobra (ver figura B); luego se desenrolla el cordel utilizado.
3. Se fija el cordel sobre uno de los polos de la esfera y se enrolla (ver figura C), se repite este proceso hasta cubrir la esfera.

Al hacer este procedimiento, debes tomar en cuenta que para recubrir totalmente la esfera, es necesario cortar 3 pedazos de cordel con igual longitud que el primero.

Con este resultado, se tiene que el área superficial de la esfera es cuatro veces el área del círculo de igual radio.

Corta por el medio una esfera (bola) de radio r	Envuelve el cordel alrededor de un alfiler colocado en el centro de la región circular	Envuelve el cordel alrededor del hemisferio
 Figura A	 Figura B	 Figura C

Como el área de un círculo de radio r es igual a πr^2, entonces el área superficial de la esfera es:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

Otra forma de ver el área de la esfera

Al comparar el área de la esfera con el área lateral de un cilindro, cuyo radio sea igual al de la esfera y su altura es el diámetro de la esfera, ¿qué se obtiene?, ¿cuál es la relación entre el área de la esfera y el área lateral del cilindro?

Se puede hacer la misma actividad anterior, pero ahora cubriendo el cilindro con el cordel y luego cubrir la esfera con ese mismo cordel.

Solución.
Se puede concluir que, el área de una esfera de radio r es igual al área lateral de un cilindro de radio r y altura $2r$. Es decir, $A = 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.

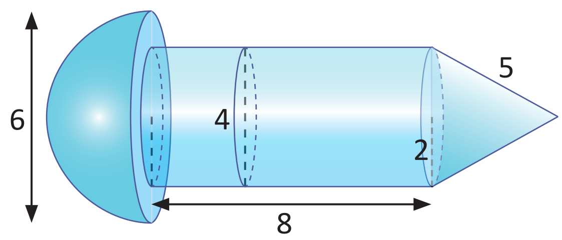
1. ¿Cuál será el área total de una esfera cuyo diámetro es igual a 12 cm?

2. ¿Cuál es el diámetro de una esfera cuya área es igual a 144π cm^2?

5.1 Áreas superficiales en sólidos compuestos

P

Encuentra el área superficial del siguiente sólido:



Área de la semiesfera:	$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
Área lateral del cilindro:	$A_{Lateral} = 2\pi rh$
Área lateral del cono:	$A_{Lcono} = \pi rg$
Área del círculo:	$A_{círculo} = \pi r^2$

S

Primero se encuentra el área de la semiesfera:

$$A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, se calcula el área lateral del cilindro:

$$A_{Lateral} = 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi \text{ cm}^2.$$

El área lateral del cono:

$$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, del área del círculo de la semiesfera se resta el área del círculo de la tapa del cilindro:

$$A_{Círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2.$$

Por tanto, el área de la figura A:

$$A_{Figura} = A_{Semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{Círculos} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi \text{ cm}^2.$$

C

Para encontrar el área superficial de figuras compuestas, se suman o se restan las áreas de cada uno de los sólidos que aparecen en el problema.

1. Encuentra el área del cuerpo geométrico que se muestra en la figura 1.

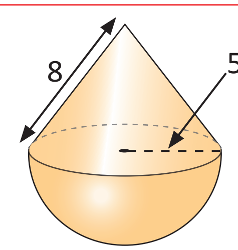


Figura 1

2. Calcula el área superficial de las esferas cuyos radios son: 5 cm, 10 cm y 50 cm. ¿Qué relación hay entre las áreas de las esferas?

3. Se construirá una bodega con la forma de un cilindro para almacenar granos básicos, con un techo semiesférico como se muestra en la figura 2. Si las paredes del cilindro tienen una altura de 10 m y el área lateral del cilindro es de 100π m^2, determina el radio del cilindro.

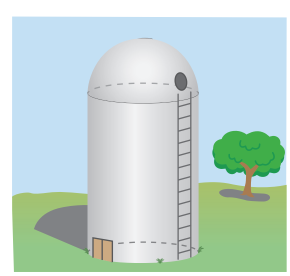
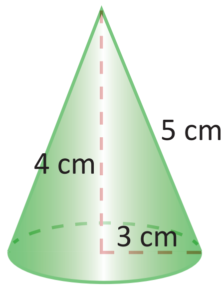


Figura 2

5.2 Practica lo aprendido

1. Calcula el área lateral y total de un cono cuya altura mide 4 cm, la generatriz mide 5 cm y el radio de la base es de 3 cm.



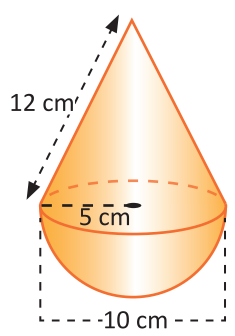
2. Calcula el área de una semiesfera de 10 cm de radio.

3. Encuentra el área de una esfera que tiene un volumen de 144π cm^3.

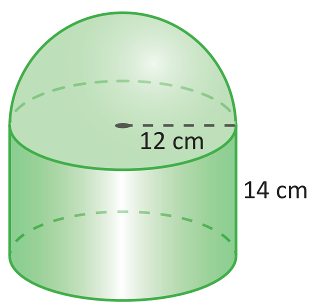
4. Una esfera de radio 4 cm será recubierta con una capa metálica de 1 cm de espesor. Calcula la cantidad de material necesario para recubrir la esfera.

5. Calcula el área superficial de las siguientes figuras:

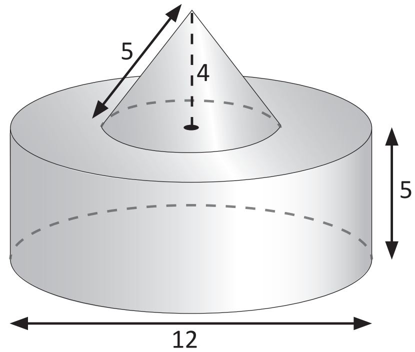
a)



b)



6. Encuentra el volumen de la siguiente figura, si el diámetro del cono es 6 cm.



Unidad 7

5.3 Practica lo aprendido

Volúmenes de sólidos geométricos:

Volumen de un cilindro: $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

Volumen de un cono: $V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de la pirámide: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h$

Volumen de la esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Áreas de sólidos geométricos:

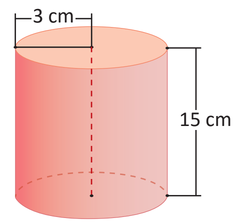
Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi r h$

Área total del cono: $A_{cono} = \pi r(g + r)$

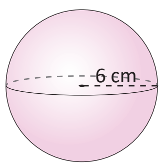
Área total del cilindro: $A_{cilindro} = 2\pi r(h + r)$

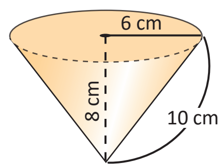
Área de la esfera: $A_{esfera} = 4\pi r^2$

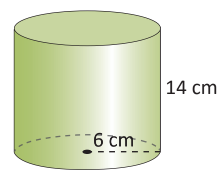
1. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyo radio es de 3 cm y su altura es de 15 cm?



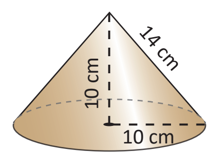
2. Calcula el área y volumen de los siguientes sólidos:

a) 

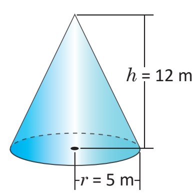
b) 

c) 

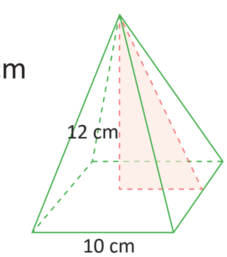
3. Encuentra el área total de un cono rectangular (altura = radio) de radio 10 cm.



4. Calcula el volumen del siguiente cono:

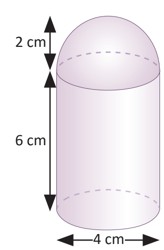


5. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene de lado 10 cm y 12 cm de altura.



6. Calcula el área total y volumen de un cono de 7 cm de radio de la base, 24 cm de altura y generatriz 25 cm.

7. Calcula el área total y volumen de la siguiente figura compuesta:



Unidad 8

Organización y análisis de datos estadísticos

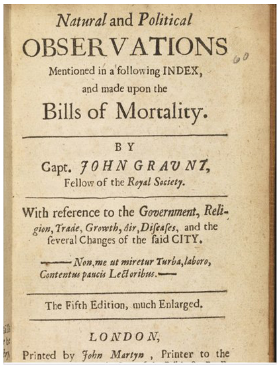
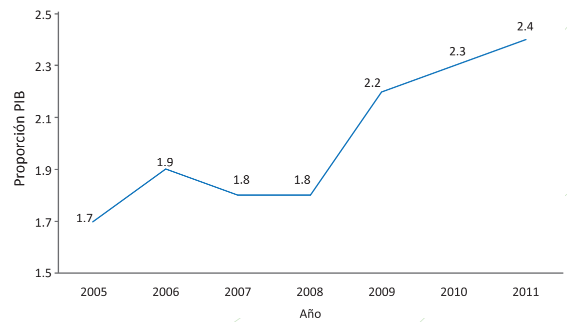


Imagen del trabajo realizado por John Graunt en 1662.

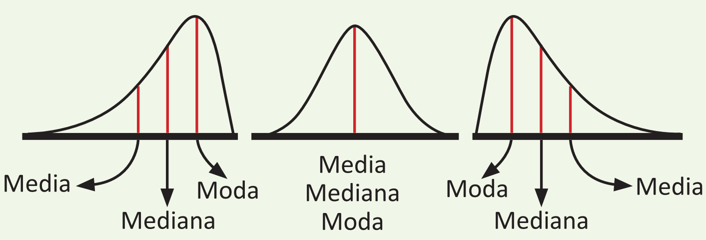
La estadística tuvo sus orígenes en actividades que estaban relacionadas directamente con la organización política, jurídica y administrativa de distintas civilizaciones, entre las que se pueden mencionar los egipcios, los babilónicos y los romanos; para ello, los funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, matrimonios y defunciones, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas que poseían los territorios conquistados; pero John Graunt (1620 - 1674) fue el primero que puso las bases de una estadística científica, realizando un trabajo a partir de las tablas de mortalidad de la ciudad de Londres.

La estadística juega un papel importante en distintas áreas; por ejemplo, en el sector educativo, económico, tecnológico, social y de la salud, proporcionando herramientas metodológicas que facilitan la recolección, comparación y análisis de datos, con el fin de generar modelos para hacer predicciones y facilitar la toma de decisiones. Por ejemplo, las redes sociales, se nutren de un continuo análisis estadístico en el desarrollo de sus aplicaciones internas.

Gráfico 2. Evolución del presupuesto del MINSAL como proporción del PIB, (2005 - 2011)



Ministerio de Salud, Estudio de exclusión social en salud, diciembre 2011.



Relaciones entre las medidas de tendencia central.

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad aprenderás a organizar datos en tablas, representarlos mediante gráficas y determinar valores representativos que se conocen como medidas de tendencia central; así como algunas de sus propiedades y aplicaciones en situaciones cotidianas.

1.1 Agrupación de datos

P

Doña Carmen es la propietaria de la sala de belleza El Buen Gusto, para atender a todos sus clientes ha tenido que abrir dos sucursales A y B. A continuación se muestran los datos del registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A.

24	23	28	30	29	31
27	26	24	30	32	29
21	22	27	33	30	24
24	21	26	24	30	39
24	22	22	24	21	20

1. Clasifica los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicia en 20 y termina en 40.
2. ¿En qué grupo se concentró el mayor número de clientes?
3. ¿Qué cantidad de clientes tiene la mayor edad registrada?
4. ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad inferior a 32 años?

S

1. Para clasificar los datos, primero se crean los grupos, como deben iniciar en 20 e ir de 4 en 4, entonces los grupos serán de 20 a 24, de 24 a 28, de 28 a 32, de 32 a 36 y de 36 a 40. Para facilitar la clasificación de los datos, se van escribiendo en una tabla, siguiendo el orden en que aparecen, tal como se muestra en la tabla de la derecha.
2. En el grupo de edades de 24 a 28 años queda concentrado el mayor número de clientes (igual a 11).
3. La mayor edad de los clientes que se atendieron corresponde a 39 años (que es el dato mayor).
4. Para determinar la cantidad de clientes que se atendió y que tienen una edad inferior a 32 años, se cuentan los que quedan en los primeros 3 grupos: 8 + 11 + 8 = 27, es decir, 27 clientes tienen una edad inferior a 32 años.

	24			
	24			
	24			
20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
De 20 a 24	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

C

Para organizar una serie de datos en grupos, se realiza lo siguiente:

1. Se definen las categorías considerando el número de grupos a crear y los límites a considerar.
2. Se colocan los datos uno a uno, en el grupo al que pertenecen, teniendo cuidado que en cada grupo deben quedar los datos, cuyo valor es igual o mayor al del límite menor, pero que sean menores que el límite mayor, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, por ejemplo: en el grupo 1 de 20 a 24 quedarón todos los datos que son iguales o mayores a 20, pero menores que 24; lo que significa que los datos cuyo valor es 24 quedan en el siguiente grupo.

A continuación se muestran los datos del registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, de doña Carmen.

20	22	24	22	30
27	34	35	29	28
24	21	20	23	26
23	26	20	29	36
28	29	24	23	34
24	21	20	36	24

1. Clasifica los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicia en 20 y termina en 40.
2. ¿En qué grupo se concentró el mayor número de clientes?
3. ¿Qué cantidad de clientes tiene la mayor edad registrada?
4. ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad igual o mayor a 32 años?

1.2 Tabla de frecuencias

P

Retomando los datos de los 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza:

1. Organiza los grupos en una tabla.
2. Determina el total de datos de cada grupo y anota el resultado.

	24			
	24			
	24			
20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
De 20 a 24	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

S

1. Para organizar los datos en grupos, se elabora una tabla y en la primera columna se colocan los grupos.

2. Al realizar el conteo de los datos que quedan en cada grupo y colocar el resultado en la tabla, se obtiene la columna 2.

Edades	Número de clientes
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

C

La tabla en la que se organizan los grupos de datos de una serie, tal como el ejemplo desarrollado, se llama **tabla de distribución de frecuencias** y a cada grupo de datos formado se le llama **clases**, de donde se puede decir que los datos del ejemplo han sido organizados en 5 clases. Además, al total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**.

Por tanto, para organizar una serie de datos en una tabla de distribución de frecuencias, es necesario:

- Organizar los datos en tantas clases como sea necesario.
- Realizar el conteo de los datos que pertenecen a cada clase para determinar la frecuencia.

Mario y Carlos se reúnen todas las tardes para jugar baloncesto, durante el último mes han llevado un registro de los tiempos jugados por cada uno, cuyos datos se muestran a continuación:

Mario

10	13			
11	15		21	
12	14		21	
11	13	16	20	
12	15	17	19	
11	13	16	20	
10	14	17	19	23
12	13	18	20	22
De 10 a 13	**De 13 a 16**	**De 16 a 19**	**De 19 a 22**	**De 22 a 24**

Carlos

				24
			21	22
		17	21	24
	13	18	20	22
11	13	16	19	23
11	14	16	19	22
11	13	18	19	22
10	15	17	20	23
De 10 a 13	**De 13 a 16**	**De 16 a 19**	**De 19 a 22**	**De 22 a 25**

1. Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
2. Completa los resultados y responde, ¿quién es el que ha jugado mayor tiempo?

1.3 Elementos de la tabla de frecuencias

P

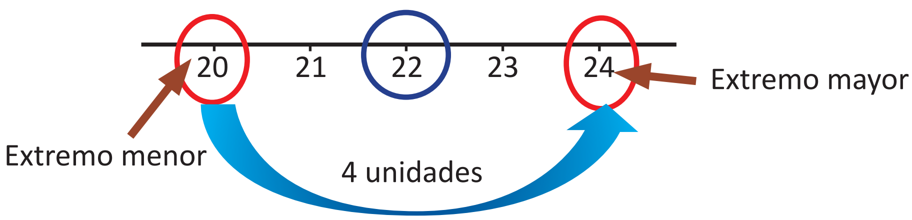
La tabla contiene el registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto de doña Carmen, analiza los datos y responde:

1. Determina el tamaño de cada clase.
2. Calcula el valor del número que está en el centro de cada clase.
3. ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo valor que está en medio es 30?

Edades	Número de clientes f
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

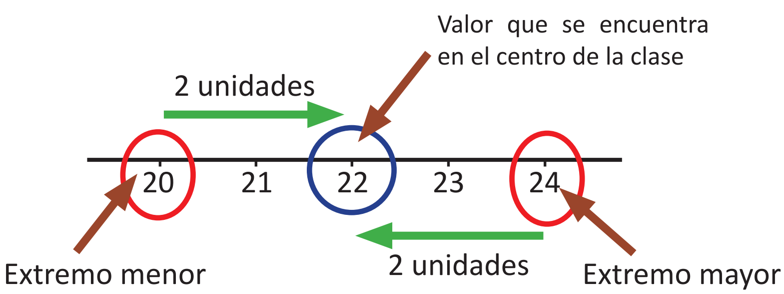
S

1. Al analizar el tamaño de la primera clase, puede observarse que es igual a 4 unidades. Por ejemplo:



Se puede calcular restando los extremos de cada clase: 24 – 20 = 4.

2. Al observar la primera clase, se puede obtener el valor del número que está en el centro de la clase, gráficamente contando igual cantidad de unidades desde cada uno de los extremos, tal como se muestra a continuación:



Edades	Número de clientes f	Valor medio
20 - 24	8	22
24 - 28	11	26
28 - 32	8	30
32 - 36	2	34
36 - 40	1	38
Total	**30**	

Se puede calcular sumando los extremos y dividiendo por dos:

$$\frac{24 + 20}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

3. Al observar la tabla puede verse que la clase, cuyo valor que está en medio es 30, es la clase de 28 a 32, y tiene una frecuencia de 8.

Al tamaño de una clase se le llama **ancho de clases** y a los valores extremos **límite de clases**; por ejemplo, para la primera clase, de 20 a 24, los límites de clase son 20 y 24, se tiene que
Límite inferior = extremo menor = 20
Límite superior = extremo mayor = 24 → Ancho de clase = 24 – 20 = 4.

Para calcular el ancho de una clase cualquiera se utiliza la ecuación:

Ancho de clase = límite superior – límite inferior

El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio** y se determina mediante la ecuación:

$$\text{Punto medio} = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$$

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, de doña Carmen, analiza los datos y responde:

   a) Determina el ancho de las clases.
   b) Calcula el punto medio de cada clase.
   c) ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 26?

Edades	Número de clientes
	f
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

2. La tabla de frecuencia muestra resultados de la toma de presión sanguínea sistólica a 100 hombres adultos saludables, analiza los datos y responde:

   a) Determina el ancho de las clases.
   b) Calcula el punto medio de las clases de la distribución.
   c) ¿Cuántos hombres tienen una presión de 125 mmHg en promedio?

Presión sanguínea (mmHg)	Total de hombres
	f
100 - 110	4
110 - 120	18
120 - 130	38
130 - 140	55
140 - 150	17
150 - 160	6
Total	**138**

3. Investiga la edad de tus compañeras y compañeros de grado, con los datos recopilados realiza lo siguiente:

   a) Identifica el dato menor y el dato mayor, luego organízalos en 5 grupos.
   b) Organiza los datos en una tabla de frecuencias.
   c) Determina los límites de clases y las respectivas frecuencias.
   d) Calcula el punto medio de cada clase.

1.4 Gráficas estadísticas

P

La tabla contiene el registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

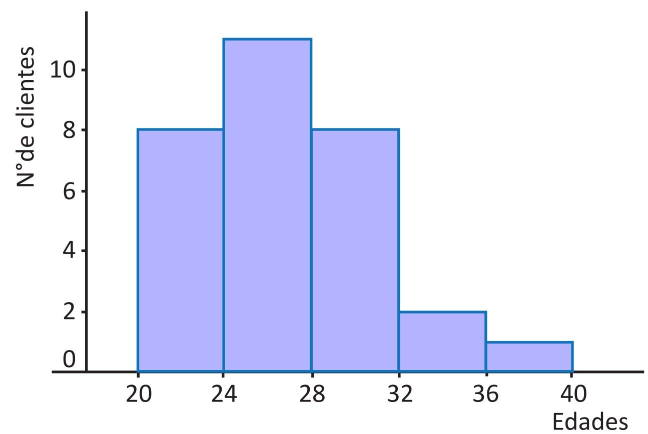
1. Representa mediante rectángulos las clases con las respectivas frecuencias.
2. Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de los clientes atendidos en la sucursal A de la sala de belleza.
3. Grafica el punto medio y la frecuencia de cada clase como pares ordenados.
4. Une con segmentos de recta los puntos graficados en el numeral anterior.

Edades	f
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

S

1. Para representar mediante rectángulos las clases, con las respectivas frecuencias, se realiza lo siguiente:

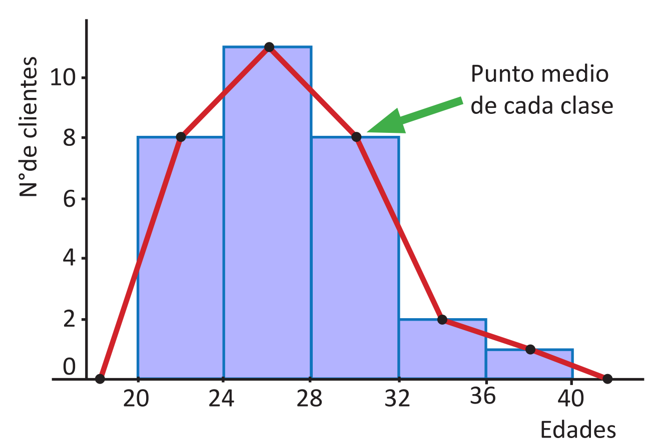
   - Colocar en el eje horizontal los límites de las clases.
   - En el eje vertical se coloca el número de clientes que corresponde a la frecuencia de cada clase.
   - Sobre el ancho de clases, se levantan rectángulos cuya altura coincida con la frecuencia de cada clase.



2. Al observar la gráfica puede verse que los primeros rectángulos son más altos, lo que indica que la mayor cantidad de clientes que se atendió tiene una edad entre 20 y 32 años. Además, como el límite superior de una clase es igual al inferior de la siguiente, los rectágulos quedan pegaditos, uno a continuación del otro.

3. Al ampliar una clase inferior y una superior con frecuencia cero, y graficar como pares ordenados el punto medio con las respectivas frecuencias, se obtienen puntos ubicados en el centro de la parte superior de cada rectángulo.

4. Al unir los puntos se obtiene una línea poligonal abierta que inicia en el punto medio de la primera clase y termina en el punto medio de la última clase, tal como se muestra en la gráfica de la derecha.



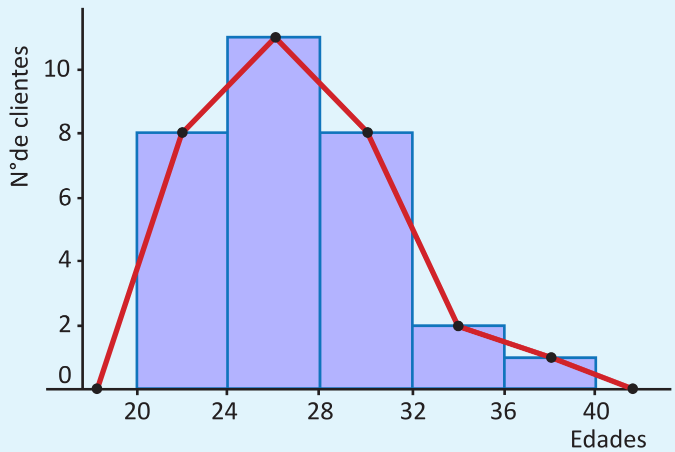
La gráfica que se obtiene al representar las clases con sus respectivas frecuencias se le llama **histograma** y para elaborarlo se realiza lo siguiente:

- Se coloca en el eje horizontal los límites de las clases.
- En el eje vertical se coloca la frecuencia, se busca una escala adecuada, considerando los valores de la frecuencia de la distribución de los datos.
- Se levantan rectángulos cuya base coincide con el ancho de clases y la altura con la frecuencia de la respectiva clase.

Al observar el histograma se puede encontrar que

- Tiene forma parecida a la de una montaña y la parte más alta indica dónde se encuentra concentrado el mayor número de datos.
- Los rectángulos que forman el histograma tienen un área proporcional a la frecuencia de su clase.

En algunos casos es importante resaltar la forma de la distribución de los datos, en ese caso, se coloca un punto en el punto medio del lado superior de cada rectángulo, se unen con segmentos de recta los puntos identificados; luego, el extremo izquierdo se conecta con el punto medio de una clase imaginaria anterior a la menor, con frecuencia cero y el extremo derecho se conecta con el punto medio de una clase imaginaria posterior a la mayor, también con frecuencia cero. A la gráfica que se obtiene se le llama **polígono de frecuencia**.



La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, con este registro realiza lo siguiente:

1. Representa los datos mediante un histograma.
2. ¿Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de las edades de los 30 clientes atendidos en la sucursal B de la sala de belleza?
3. Grafica el polígono de frecuencia a partir del histograma.

Edades	f
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

Unidad 8

1.5 Uso del polígono de frecuencias

P

En el octavo grado de un centro escolar se aplicó una prueba a las dos secciones, los resultados se muestran en la tabla de la derecha. Con la información realiza lo siguiente:

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
	f_A	f_B
0 - 20	3	5
20 - 40	5	8
40 - 60	12	17
60 - 80	6	10
80 - 100	4	5
Total	**30**	**45**

1. ¿Es posible comparar los resultados obtenidos en las dos secciones? En caso de no ser posible, analiza una manera que permita comparar los resultados de las dos secciones.
2. Calcula el porcentaje de alumnos cuyos resultados quedan agrupados en cada clase.
3. Representa los datos en un polígono de frecuencia.

S

1. Como el número de estudiantes de las dos secciones es distinto, no tiene sentido comparar las frecuencias, por ejemplo, en la clase de 40 a 60, quedan comprendidos los resultados de 12/30 estudiantes en la sección A; mientras que en la sección B son 17/45 estudiantes.

   Como no es posible comparar las frecuencias, entonces se puede calcular la razón de la frecuencia de cada clase entre el total de la frecuencia en lugar de utilizar la frecuencia por sí sola; por ejemplo, para la primera clase de 0 a 20 se tiene $\frac{3}{30}$ = 0.10 para la sección A y $\frac{5}{45}$ = 0.11 para la sección B, al calcular para todas las clases se obtienen los datos de la siguiente tabla.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
0 - 20	0.10	0.11
20 - 40	0.17	0.18
40 - 60	0.40	0.38
60 - 80	0.20	0.22
80 - 100	0.13	0.11
Total	**1.00**	**1.00**

2. Llamando x al porcentaje de una clase y considerando que el total de la frecuencia corresponde al 100% de los estudiantes de una sección, entonces para calcular el porcentaje de la primer clase se tiene:

   Para la sección A:
   3/30 = x/100%, de donde se obtiene que $x = \frac{3}{30} \times 100\%$.

   Para la sección B:
   5/45 = x/100%, de donde se obtiene que $x = \frac{5}{45} \times 100\%$.

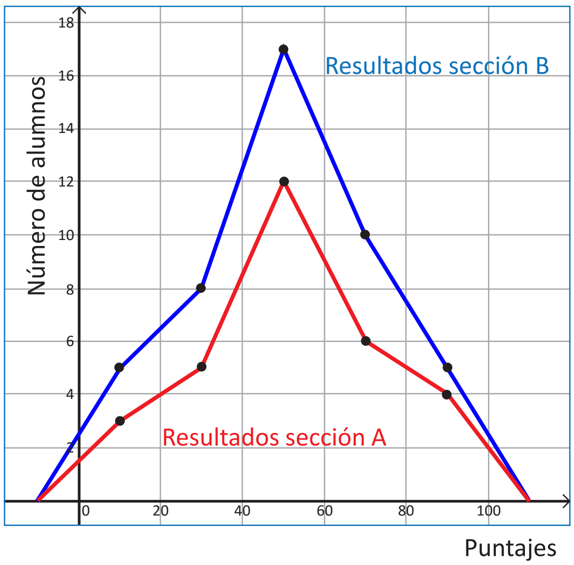
   Al comparar los resultados con el numeral anterior, se observa que el porcentaje de una clase se puede obtener multiplicando por 100% la razón entre la frecuencia y el total de la frecuencia; es decir, se puede calcular los porcentajes multiplicando únicamente por 100% los resultados de la tabla anterior, por ejemplo para la segunda clase de 20 a 40, se tiene:
   Sección A: 0.17 × 100% = 17%.
   Sección B: 0.18 × 100% = 18%.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
0 - 20	10	11
20 - 40	17	18
40 - 60	40	38
60 - 80	20	22
80 - 100	13	11
Total	**100%**	**100%**

Así, sucesivamente, se determinan los porcentajes de las clases restantes, obteniendo los resultados de la tabla.

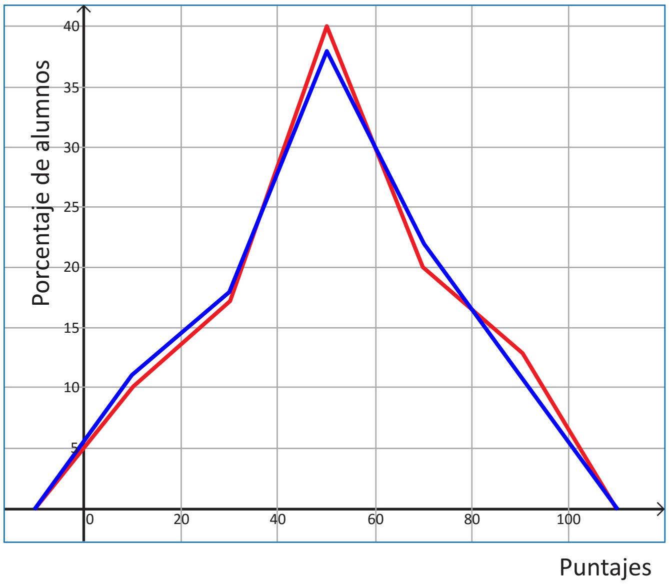
3. Al representar los resultados de cada una de las secciones mediante un polígono de frecuencias en un mismo plano, se obtiene la gráfica 1, en la cual no se pueden realizar comparaciones por tener distinto número de datos, pero si en lugar de las frecuencias se toman los porcentajes, entonces se puede hacer una comparación gráfica entre los resultados de las dos secciones (ver gráfica 2).

1.



Gráfica 1

2.



Gráfica 2

C

La comparación de datos estadísticos generalmente no se puede realizar directamente con las frecuencias de cada clase, en estos casos, es necesario calcular la razón entre la frecuencia de cada clase y el total de la frecuencia; tal como se hizo en el ejemplo anterior, $\frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}}$, a este cociente se le llama **frecuencia relativa(f_r)**. Considerando que el total de las frecuencias es igual al número de datos (n), entonces $f_r = \frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}} = \frac{f}{n}$.

Al producto que se obtiene al multiplicar la frecuencia relativa por 100 se le llama **frecuencia relativa porcentual** (f_r%), es decir que $f_r\% = \frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}} \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$ se utiliza para determinar los porcentajes de datos que corresponden a cada clase de la distribución; para facilitar el análisis y/o comparación de una o más series de datos.

Miguel tiene una finca y para recolectar el café organizó a los trabajadores en dos cuadrillas, en la tabla se muestra el registro de la cantidad de café recolectada en un día específico por cada una de las cuadrillas. Con la información realiza lo siguiente:

1. Calcula las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales.
2. Representa los datos en un polígono de frecuencia relativa porcentual.
3. ¿En cuál cuadrilla los trabajadores tuvieron mejores resultados?

Arrobas de café	Cuadrilla 1	Cuadrilla 2
0 - 3	1	2
3 - 6	2	4
6 - 9	3	7
9 - 12	5	8
12 - 15	6	10
15 - 18	5	7
18 - 21	2	5
21 - 24	1	2
Total	**25**	**45**

1.6 Interpretación de datos estadísticos

P

En el Instituto Nacional Buena Vista realizaron el examen de admisión para el año próximo, los resultados se muestran en la tabla. Analiza y realiza los respectivos cálculos, luego responde:

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo un puntaje inferior a 40?
2. ¿Qué porcentaje de los alumnos obtuvo un puntaje mayor o igual a 70?
3. Si únicamente se aceptarán a los que obtuvieron al menos 50 puntos de la prueba, ¿cuántos de los estudiantes evaluados serán aceptados?

Puntajes	Número de alumnos/as
0 - 10	1
10 - 20	6
20 - 30	10
30 - 40	16
40 - 50	22
50 - 60	25
60 - 70	12
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	2
Total	**110**

S

Primero es necesario calcular los porcentajes de cada clase, por ejemplo:

- Para la clase 1: $f_r\% = \frac{1}{110} \times 100\% = 0.9\%$
- Para la clase 2: $f_r\% = \frac{6}{110} \times 100\% = 5.5\%$

Puntajes	Porcentaje de alumnos/as
0 - 10	0.9
10 - 20	5.5
20 - 30	9.1
30 - 40	14.5
40 - 50	20.0
50 - 60	22.7
60 - 70	10.9
70 - 80	8.2
80 - 90	6.4
90 - 100	1.8
Total	**100%**

1. El porcentaje de estudiantes que obtuvo un puntaje inferior a 40 se determina sumando los porcentajes de las clases que corresponden a los respectivos puntajes: 0.9 + 5.5 + 9.1 + 14.5 = 30%.

2. Para determinar el porcentaje de estudiantes que obtuvo un puntaje mayor o igual a 70, se procede de igual manera que el caso anterior, sumando los respectivos porcentajes: 8.2 + 6.4 + 1.8 = 16.4%, que se puede aproximar a 16%.

3. Si se aceptarán a los estudiantes que hayan obtenido al menos 50 puntos de la prueba, para determinar el total de estudiantes, se suman las frecuencias de las respectivas clases:
   25 + 12 + 9 + 7 + 2 = 55; por tanto, serán aceptados únicamente 55 estudiantes.

En una clase de educación física se ha cronometrado el tiempo, en segundos, que tarda cada estudiante en recorrer la pista de la cancha de fútbol.

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes hizo un tiempo inferior a 10 segundos?
2. ¿Qué porcentaje de estudiantes hizo un tiempo mayor o igual a 12 segundos?
3. Si se seleccionará al 50% de los estudiantes considerando los que tienen mayor velocidad, ¿cuál es el tiempo máximo que se aceptará?

Tiempo en segundos	Número de alumnos/as
8 - 9	11
9 - 10	10
10 - 11	8
11 - 12	5
12 - 13	3
13 - 14	2
14 - 15	1
Total	**40**

1.7 Practica lo aprendido

Realiza de manera ordenada lo que se solicita en cada situación planteada.

1. A continuación se muestran los registros que lleva una unidad de salud, del peso en libras, de los niños que cumplieron 3 años.

28	32	38	25	27	37	19	26	35	23
30	26	18	33	29	21	34	28	31	39
29	35	30	31	22	34	25	16	30	29
24	34	20	26	31	23	35	29	30	27
29	28	27	31	30	31	28	26	29	33

a) Identifica el peso menor y el peso mayor.
b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 clases de ancho 4 libras.
c) Representa la distribución de datos mediante un histograma.
d) Elabora el polígono de frecuencia de la distribución a partir del histograma.

2. Una psicóloga llevó un registro sobre el número de películas que han visto cada uno de sus pacientes, estos datos los clasificó en niños y adultos, considerando la edad.

Niños

8	15	22	19	15	17	18	20	17	12
16	16	17	21	23	18	20	21	20	20
15	18	17	19	20	23	22	10	17	19
19	21	20	18	18	24	11	19	31	16
17	18	19	20	18	18	39	18	19	16

Adultos

10	12	5	8	13	10	12	8	7	9
11	10	9	9	11	15	12	17	14	10
9	8	15	16	10	14	7	16	9	1
4	11	12	7	9	10	3	11	14	8
12	5	10	9	7	11	14	10	15	9

a) Con los datos del número de películas que ven los niños, realiza lo siguiente:

- Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias con 8 clases, con un ancho de clases igual a 4.
- ¿Cuántas películas ve la mayor cantidad de niños?
- Representa la información mediante un histograma.

b) Con los datos sobre el número de películas que ven los adultos, haz lo siguiente:

- Organiza los datos en una tabla de frecuencias con 6 clases (utiliza un ancho de clases igual a 3).
- ¿En cuál clase queda ubicada la mayor cantidad de adultos?
- Representa la información mediante un histograma.

c) ¿Es posible comparar las dos distribuciones mediante la gráfica del polígono de frecuencias? Justifica tu respuesta.

d) Escribe al menos una semejanza y una diferencia de las distribuciones.

1.8 Practica lo aprendido

Realiza de manera ordenada lo que se solicita en cada situación planteada.

1. El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse se denomina tiempo de reacción. En este contexto, la presentación del chiste es un estímulo y la aparición de la risa, la reacción. Se hizo un experimento con un grupo de personas, en el que se midió el tiempo de reacción de sus integrantes ante un chiste y se registraron los siguientes datos en décimas de segundos (ds).

Tiempo en ds	Número de personas
13 - 19	4
19 - 25	9
25 - 31	36
31 - 37	32
37 - 43	12
43 - 49	7
Total	**100**

   a) Representa la distribución mediante un polígono de frecuencias.
   b) ¿Cuántas personas reaccionaron en un tiempo igual o mayor a 19 décimas de segundos, pero menor a 37?
   c) ¿Cuántas personas reaccionaron a un tiempo igual o mayor a 37 décimas de segundos?
   d) Calcula el tiempo promedio de reacción de la clase de personas que reaccionan entre las 25 y 31 décimas de segundos.
   e) Determina el porcentaje de personas que reaccionaron antes de las 25 décimas de segundos.
   f) Determina el porcentaje de personas que reaccionaron en un tiempo igual o mayor a 31 décimas de segundos.

2. En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 tornillos para determinar si la máquina cortadora está ajustada y se han obtenido los siguientes datos:

Longitud en mm	Número de tornillos
67 - 72	5
72 - 77	95
77 - 82	790
82 - 87	100
87 - 92	10
Total	**1 000**

   a) Representa la información mediante un histograma.
   b) Si se consideran aceptables las piezas cuya longitud está en el intervalo de 77 a 87 mm, ¿cuál es el porcentaje de piezas defectuosas?
   c) Calcula el porcentaje de piezas cuya medida es inferior a 77 mm.
   d) Determina el porcentaje de tornillos cuya medida es 87 mm o más.

3. La tabla muestra los tiempos en que han sido anotados los goles en los distintos partidos jugados en una temporada de fútbol, en tu cuaderno completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

Tiempo en minutos	Goles (f)	Punto medio	f_r	$f_r\%$
0 - 15	5			
15 - 30	6			
30 - 45	8			
45 - 60	7			
60 - 75	8			
75 - 90	6			
Total				

   a) Elabora el respectivo histograma.
   b) Representa la información mediante un polígono de frecuencias.
   c) ¿Cuántos goles se han realizado en el primer tiempo (los primeros 45 minutos)?
   d) ¿Qué porcentaje de goles ha sido realizado durante el segundo tiempo de juego?
   e) ¿Qué porcentaje de goles se ha acertado entre el minuto 30 y el 60?

2.1 Sentido de las medidas de tendencia central

P

Los datos corresponden al registro del total de clientes atendidos en las dos sucursales de una panadería.

Sucursal A					
14	23	38	40	19	31
49	26	24	30	32	

Sucursal B					
10	22	24	20	30	57
34	46	29	28	24	21

1. Ordena la cantidad de clientes atendidos en ambas sucursales de menor a mayor.
2. Indentifica la cantidad mínima y la cantidad máxima de clientes atendidos en ambas sucursales.
3. Determina el valor de la mediana de los datos de las dos sucursales.
4. ¿Cuál es el valor de la moda de los datos sobre la cantidad de clientes atendidos en las dos sucursales de la panadería?
5. Calcula la media aritmética de los datos de las dos sucursales de la panadería.

S

1. Al ordenar los datos de los clientes atendidos en las dos sucursales de la panadería, se tiene:

   Sucursal A: 14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 38, 40, 49.
   Sucursal B: 10, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57.

2. La cantidad menor y la cantidad mayor de clientes atendidos en ambas sucursales es:

   Sucursal A
   Cantidad menor: 14
   Cantidad mayor: 49
   La cantidad de clientes atendidos en sucursal A oscila entre 14 y 49.

   Sucursal B
   Cantidad menor: 10
   Cantidad mayor: 57
   La cantidad de clientes atendidos en la sucursal B oscila entre 10 y 57.

3. Como la mediana es el dato que ocupa la posición central en la serie de datos, entonces, para cada una de las series se tiene:

   Sucursal A
   14, 19, 23, 24, 26, **30**, 31, 32, 38, 40, 49

   Como son 11 datos, entonces la mediana es el dato que ocupa la posición central, es decir, la posición 6, por tanto: mediana = 30.

   Sucursal B
   10, 20, 21, 22, 24, **24**, **28**, 29, 30, 34, 46, 57

   Como tiene 12 datos, entonces se toman los dos valores centrales y se calcula el punto medio entre ambos, es decir: mediana = $\frac{24+28}{2}$ = 26.

4. Al observar las dos series de datos se puede concluir que

   • En la sucursal A, todos los datos aparecen una sola vez, por tanto, no tiene moda.
   • En la sucursal B, el número 24 aparece 2 veces, entonces: moda = 24.

5. Para calcular la media aritmética es necesario sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número de datos, tal como se aprendió en educación básica; *Media aritmética* = $\frac{\textit{Suma de todos los datos}}{\textit{número de datos}}$ entonces, para los datos de las dos sucursales, se tiene:

Unidad 8

Sucursal A: 14, 23, 38, 40, 19, 31, 49, 26, 24, 30, 32.

$$\text{Media aritmética} = \frac{14 + 23 + 38 + 40 + 19 + 31 + 49 + 26 + 24 + 30 + 32}{11} = \frac{326}{11} = 29.6.$$

Sucursal B: 10, 22, 24, 20, 30, 57, 34, 46, 29, 28, 24, 21.

$$\text{Media aritmética} = \frac{10 + 22 + 24 + 20 + 30 + 57 + 34 + 46 + 29 + 28 + 24 + 21}{12} = \frac{345}{12} = 28.8.$$

C

Tal como se aprendió en eduación básica, se pueden calcular valores representativos que pueden describir una serie de datos, los cuales se han calculado en el ejemplo anterior y se detallan a continuación:

La mediana es el valor que ocupa la posición central en una serie de datos, cuando ya han sido ordenados de menor a mayor. Para determinar el valor de la mediana, se consideran los siguientes casos:

a) Cuando el número de datos n es impar, la mediana es el dato x que ocupa la posición central. En este caso, para determinar la posición central se utiliza la fórmula $\frac{n+1}{2}$, para el ejemplo anterior de la sucursal A, $n = 11$, entonces la posición de la mediana es: $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

b) Cuando el número de datos n es par, la mediana es el número que se encuentra entre los datos centrales, pues al determinar la posición de la mediana, se obtiene un valor que no corresponde a la posición de ningún dato de la serie, por ejemplo, para el caso de la sucursal B, $n = 12$, entonces, al determinar la posición de la mediana, $\frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$, lo que indica que la mediana es el número que está entre el dato 6 y el dato 7. En este caso, la mediana = *Punto medio de los dos datos centrales*.

La moda es el valor que aparece la mayor cantidad de veces en una serie, es decir, la moda es el dato que tiene la mayor frecuencia. En casos en que todos los datos aparecen igual cantidad de veces, se dice que la serie no tiene moda o que carece de moda.

La media aritmética (μ) es el número que resulta de dividir la suma de todos lo datos x entre el número de datos n y que se conoce también como **promedio**. Media aritmética = $\frac{\textit{Suma de todos los } x}{n}$.

Las siguientes series de datos corresponden a las ventas expresadas en dólares, de los últimos 15 días, de las dos sucursales de la minitienda La Esquina:

Sucursal 1: 125, 35, 50, 40, 80, 100, 70, 50, 125, 75, 80, 90, 80, 80, 35.
Sucursal 2: 100, 75, 50, 80, 60, 40, 70, 75, 140, 90, 75, 70, 150, 50, 90.

Con los datos de cada sucursal realiza lo siguiente:

1. Ordena los datos de menor a mayor.
2. Identifica el mínimo y el máximo.
3. Determina la mediana.
4. Identifica el valor de la moda.
5. Calcula la media aritmética.
6. ¿Es posible determinar cuál sucursal genera mayores ingresos?

2.2 Media aritmética

P

¿Cómo se puede determinar la media aritmética de una serie de datos organizada en una distribución de frecuencias?
La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto.
Realiza lo siguiente:

1. Calcula el punto medio de cada clase.
2. Multiplica cada punto medio por la respectiva frecuencia.
3. Suma los resultados obtenidos en el numeral dos, luego divide el total obtenido entre el número de datos.
4. Compara el resultado obtenido en el numeral 3, con la media aritmética de los datos de la clase 1 de esta unidad.

Edades	Número de clientes f
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

Revisa la clase 1 de la unidad.

S

1. Como ya se aprendió a calcular el punto medio en una distribución de frecuencias en clases anteriores, entonces para calcularlos se aplica la fórmula: *punto medio* = $\frac{\textit{Límite superior + límite inferior}}{2}$, y se le agrega otra columna a la tabla anterior para escribir los resultados. Por ejemplo, para la clase 1:

$$Pm = \frac{24 + 20}{2} = 22$$

Edades	Número de clientes f	Punto medio (Pm)
20 - 24	8	22
24 - 28	11	26
28 - 32	8	30
32 - 36	2	34
36 - 40	1	38
Total	**30**	

2. Se multiplica el punto medio de cada clase por la respectiva frecuencia, y se le agrega una nueva columna a la tabla para agregar los resultados, por ejemplo para la clase 1 se tiene:

$$\textit{Punto medio} \times \textit{frecuencia} = Pm \times f = 22 \times 8 = 176$$

Edades	Número de clientes f	Punto medio (Pm)	$Pm \times f$
20 - 24	8	22	176
24 - 28	11	26	286
28 - 32	8	30	240
32 - 36	2	34	68
36 - 40	1	38	38
Total	**30**		**808**

3. Se suman los resultados obtenidos en el numeral anterior, luego se divide el resultado entre el número de datos.

$$\frac{\textit{Suma de todos los productos de } Pm \times f}{\textit{Número de datos}} = \frac{808}{30} = 26.9$$

Generalmente, en las empresas, cuando el objetivo no es el cálculo, sino el análisis de datos, el promedio o media aritmética se puede determinar mediante el uso de un programa informático como Excel, Calc o GeoGebra.

Por ejemplo, se puede determinar el promedio de la edad de clientes atendidos en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto.

Se digitan los datos que corresponden a la edad de los 30 clientes de la sucursal A de la sala de belleza "El Buen Gusto", y se calcula la media aritmética, obteniéndose $\mu = 26.2$.

24	23	28	30	29	31
27	26	24	30	32	29
21	22	27	33	30	24
24	21	26	24	30	39
24	22	22	24	21	20

4. El resultado del numeral 3 es 26.9 y la media aritmética de los datos sin organizar en distribución de frecuencias calculado mediante el uso de un programa informático es 26.2, tal como se muestra arriba, la diferencia entre los dos valores es pequeña, por lo que se puede utilizar cualquiera de las dos formas para calcular el promedio de las edades.

C

Para determinar la media aritmética de una serie de datos organizados en una distribución de frecuencias, se utiliza la ecuación: *Media aritmética* = $\frac{\textit{Suma de todos los productos de } Pm \times f}{\textit{Número de datos}}$, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

   a) Completa la tabla.
   b) Calcula la media aritmética.

2. Compara la media aritmética de las dos sucursales, ¿en cuál de las dos es mayor la edad promedio de los clientes atendidos?

Edades	Número de clientes (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
20 - 24	11		
24 - 28	8		
28 - 32	6		
32 - 36	3		
36 - 40	2		
Total	**30**		

2.3 Propiedades de la media aritmética

P

Analiza la siguiente situación, luego realiza lo que se pide en cada caso.

La empresa A tiene 25 empleados y les paga un salario promedio de 350 dólares, mientras que la empresa B tiene únicamente 15 empleados con un salario promedio de 600 dólares.

1. Calcula el monto mensual que invierte cada una de las empresas en el pago de los empleados.
2. Si la empresa B realiza un aumento general de 50 dólares, ¿cuál es el nuevo salario promedio?
3. Los empleados de la empresa A piden un aumento para el próximo año, el dueño de la empresa les presenta dos opciones, ¿calcula el nuevo salario promedio en cada caso?, ¿cuál opción recomendarías a los empleados?, ¿por qué?
   a) Un aumento general de 65 dólares.
   b) Un aumento del 20% sobre el salario actual.

S

Para resolver las situaciones planteadas se considerará la información proporcionada en el problema.

EMPRESA A	EMPRESA B
Salario promedio = media aritmética = \$350	*Salario promedio = media aritmética* = \$600

1. El monto mensual se determina multiplicando el salario promedio por la cantidad de empleados que tiene cada empresa.

Monto mensual = 350 × 25 = 8 750	*Monto mensual* = 600 × 15 = 9 000

2. Si la empresa aumenta 50 dólares en el salario a todos los empleados, entonces estará invirtiendo cada mes un total de

   9 000 + 15(50) = 9 000 + 750 = 9 750, al dividir el total entre el número de empleados se tiene: $\frac{9\,750}{15}$ = 650; por tanto, el nuevo salario mensual será de 650 dólares; observa que es la media que se tenía más los 50 dólares.

3. Al determinar el nuevo salario considerando las dos propuestas, se tiene:

Opción 1: aumento general de 65 dólares	Opción 2: aumento del 20% sobre el salario actual
Salario promedio actual: 350	Salario promedio actual: 350
Monto mensual: 8 750	Monto mensual: 8 750
Nuevo gasto mensual: 8 750 + 65 × 25 = 10 375	Nuevo gasto mensual: 8 750 + 20%(8 750) = 10 500
Nuevo salario promedio: $\frac{10\,375}{25}$ = 415	Nuevo salario promedio: $\frac{10\,500}{25}$ = 420

Justificación:

- Recomendaría la primera opción, pues aunque el salario promedio es 5 dólares menos que la segunda opción, todos recibirán igual cantidad y es más justo, ya que en el caso de la segunda opción recibirán mayor aumento los que tengan el salario más alto, mientras que los que ganan menos tendrán un menor aumento.

A partir de la definición de la media aritmética $\mu = \frac{\textit{Suma de todos los datos } (x)}{n}$, se obtiene que la suma de los datos de una serie es igual a n veces la media aritmética; es decir, $n\mu$ = *Suma de todos los datos* x. La media aritmética posee algunas propiedades, entre las cuales se tienen:

- Si a todos los valores de la variable se les suma una misma cantidad, la media aritmética queda aumentada en dicha cantidad. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9; tiene $\mu = 5$, si a cada dato se le suma 2, se obtiene la serie 5, 6, 7, 6, 11; cuya media es $\mu = 5 + 2 = 7$.

- Si todos los valores de la variable se multiplican por una misma constante, la media aritmética queda multiplicada por dicha constante. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9; tiene $\mu = 5$, si cada dato se multiplica por 2, se obtiene la serie 6, 8, 10, 8, 18 cuya media es $\mu = 5(2) = 10$.

Analiza la siguiente situación, luego realiza lo que se pide en cada caso.

1. Durante un mes, el Dr. Martínez llevó un registro del pago realizado por sus pacientes en cada cita a la que asistieron, al final realizó el cálculo y obtuvo un pago promedio de 75 dólares; para el próximo mes ha pensado poner una promoción y tiene las dos propuestas siguientes:

   a) Descuento del 10% sobre el costo total al momento de realizar el pago.
   b) Descuento de 10 dólares sobre el monto a pagar.

   Calcula el valor medio de pago en cada caso, ¿cuál opción crees que beneficia más a los pacientes?, ¿por qué?

2. En un supermercado, cada cajera/o al final del turno entrega una venta promedio de $3,500.00. Con el objetivo de mejorar las ventas, el administrador propone a todos los cajeros las siguientes opciones:

   a) Aumentar las ventas en un 10% sobre el total que entregan en este momento.
   b) Aumentar 300 dólares más de la meta establecida en ese momento.

   Calcula el valor medio de venta en cada caso, ¿cuál opción crees que beneficia a la empresa? Justifica tu respuesta.

3. El salario promedio de 3 técnicos es de $900.00, y el salario promedio de otros 7 técnicos es de $1,050.00. ¿Cuál es el salario promedio de los 10 técnicos?

4. Un conductor estuvo yendo dos horas a una velocidad promedio de 120 km/hora, la hora siguiente viajó a una velocidad de 90 km/hora. Calcula la velocidad media a la que viajó durante toda la carrera.

2.4 Mediana y moda

P

¿Cómo se puede determinar la mediana y la moda de una serie de datos organizada en una distribución de frecuencias?

La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

1. Identifica la clase donde se encuentra la mediana.
2. Calcula el punto medio de la clase donde se encuentra la mediana.
3. Identifica la clase donde se encuentra la mayor frecuencia.
4. Calcula el punto medio de la clase que tiene la mayor frecuencia.

Edades	Número de clientes
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

S

1. Como la mediana es el dato que ocupa la posición central, entonces es necesario identificar la clase en la que se encuentra el dato central, para ello se suman las frecuencias hasta obtener la mitad del total. Como el total de datos es 30, la mitad es 15, entonces la clase en que se encuentra la mediana es la segunda; pues 8 + 11 = 19.
2. El punto medio de la segunda clase es $Pm = \frac{24 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$.
3. La clase que tiene la mayor frecuencia, para esta distribución es la segunda, de 24 a 28.
4. El punto medio de la clase que tiene la mayor frecuencia es 26.

Edades	Número de clientes	Datos acumulados
20 - 24	8	8
24 - 28	11	19
28 - 32	8	27
32 - 36	2	29
36 - 40	1	30
Total	**30**	

El punto medio de la clase donde se encuentra la mediana corresponde aproximadamente al dato que ocupa la posición central de la serie, es decir corresponde al valor de la mediana; mientras que el punto medio de la clase de mayor frecuencia corresponde aproximadamente al valor de la moda.

C

Cuando se tiene una distribución de frecuencias, existen distintos métodos para determinar el valor de la mediana y la moda, en este caso se ha considerado únicamente el método que se conoce como **aproximado**, donde

Para determinar la mediana:

- Se identifica la clase donde queda ubicado el dato que ocupa la posición central $\frac{n}{2}$ **clase mediana**.
- El valor aproximado de la mediana será el punto medio de la clase mediana.

Para determinar la moda:

- Se identifica la clase cuya frecuencia sea mayor **clase modal**.
- El valor aproximado de la moda es el valor medio de la clase modal.

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo iguiente:
   a) Determina la moda.
   b) Determina la mediana.

2. Construye el polígono de frecuencia de la distribución de datos e identifica el valor de la moda.

Edades	Número de clientes
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

2.5 Propiedades de las medidas de tendencia central

P

Compara las siguientes series de datos A, B y C.

A: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10 B: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20 C: 9, 12, 15, 15, 21, 24, 30

1. Determina la moda, mediana y media aritmética para cada serie.
2. Al cambiar el número 10 de la serie A por el 20 en la serie B, ¿qué sucede con el valor de cada una de las siguientes medidas de tendencia central?
3. Al multiplicar por 3 los datos de la serie A, se genera la serie de datos C, ¿qué sucede con los valores de cada una de las siguientes medidas de tendencia central?

S

1. Para determinar las medidas de tendencia central de cada serie, se trabajan por separado:

Para la serie A: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10 Moda = 5 Mediana = 5 $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+10}{7} = 6$

Para la serie B: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20 Moda = 5 Mediana = 5 $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+20}{7} = 7.4$

Para la serie C: 9, 12, 15, 15, 21, 24, 30 Moda = 15 Mediana = 15 $\mu = \frac{9+12+15+15+21+24+30}{7} = 18$

2. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética de la serie A con los de la serie B, se puede observar que el valor de la moda y de la mediana, se mantienen, pero el de la media arimética aumenta.

3. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética de la serie A con la serie C, se puede observar que quedan multiplicados por 3. Por ejemplo la moda y la mediana para la serie A es 5 y para la serie C es 15, la media para la serie A es 6 y para la serie C es 18.

C

Características y usos de las medidas de tendencia central:

La moda, mediana y media aritmética son llamadas medidas de tendencia central, debido a que cuando los datos se ordenan de menor a mayor o viceversa, estas tienden a quedar ubicadas en el centro de la serie.

- **La moda y la mediana** se pueden utilizar para series de datos cualitativos (no numéricos) y cuantitativos (numéricos), además no se ven afectadas por los valores extremos de una serie de datos; tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo anterior.

- **La media aritmética** se utiliza únicamente para series de datos cuantitativos (numéricos); aunque la media es confiable en el sentido de que toma en cuenta todos los valores del conjunto de datos, puede verse afectada por valores extremos que no son representativos del resto de los datos, tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo anterior.

Determina la moda, mediana y media arimética para cada una de las siguientes series de datos:

A) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5
B) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9
C) 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10
D) 0, 5, 5, 10, 10, 15, 15, 15, 20, 25

1. Compara los resultados obtenidos, ¿qué concluyes?
2. ¿Qué sucedería con las tres medidas de tendencia central si a cada dato de la serie A se le suma 6?

2.6 Practica lo aprendido

En tu cuaderno, realiza de manera ordenada lo que se pide en cada caso.

1. El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse, se denomina tiempo de reacción; en este contexto, la presentación del chiste es un estímulo y la aparición de la risa, la reacción. Se hizo un experimento con un grupo de personas, en el que se midió el tiempo de reacción de sus integrantes ante un chiste y se registraron los siguientes datos en décimas de segundos (ds).

   a) Calcula el tiempo promedio de reacción.
   b) Calcula la moda del tiempo de reacción.
   c) Calcula la mediana del tiempo.

Tiempo en ds	Número de personas
13 - 19	4
19 - 25	9
25 - 31	36
31 - 37	32
37 - 43	12
43 - 49	7
Total	**100**

2. En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 tornillos para determinar si la máquina cortadora está ajustada y se han obtenido los siguientes datos:

   a) Calcula la longitud promedio de los tornillos.
   b) Determina la moda de las longitudes.
   c) Calcula el valor de la mediana de la serie.

Longitud en mm	Número de tornillos
67 - 72	5
72 - 77	95
77 - 82	790
82 - 87	100
87 - 92	10
Total	**1 000**

3. La tabla muestra los tiempos en que han sido anotados los goles en los distintos partidos de una temporada de fútbol. Completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

   a) Calcula el tiempo promedio.
   b) Determina la moda del tiempo.
   c) Calcula el valor de la mediana.

Tiempo en minutos	Goles (*f*)
0 - 15	5
15 - 30	6
30 - 45	7
45 - 60	8
60 - 75	7
75 - 90	6
Total	**39**

4. La tabla detalla los pesos en kilogramos de una muestra de 30 jóvenes. Completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

   a) Calcula el peso promedio.
   b) Determina la moda de los pesos.
   c) Calcula el valor de la mediana.

Peso (kg)	Nº de niños
24.5 - 27.5	3
27.5 - 30.5	7
30.5 - 33.5	10
33.5 - 36.5	6
36.5 - 39.5	3
39.5 - 42.5	1
Total	**30**

2.7 Practica lo aprendido

En tu cuaderno, realiza de manera ordenada lo que se pide en cada caso.

1. Se han exprimido 30 naranjas y se ha medido la cantidad de jugo obtenido, expresada en centilitros(cl). Los resultados fueron:
   35, 60, 48, 39, 40, 39, 45, 38, 46, 50, 51, 59, 56, 55, 49, 47, 48, 49, 56, 53, 47, 50, 52, 57, 58, 52, 60, 65, 46, 51.
   a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 8 cl, comenzando por la clase de 30 a 38.
   b) Realiza la tabla de frecuencias y represéntala en un polígono de frecuencias.
   c) Encuentra el valor de la mediana, media y moda.

2. Los agricultores de cierta cooperativa han llevado un registro de la cantidad de quintales de maíz recogidos por manzana. Los resultados fueron:
   32, 37, 54, 70, 74, 75, 76, 109 , 66, 77, 90, 96, 30, 41, 42, 69, 36 , 59, 60, 55, 70, 47, 32, 99, 48.
   a) Ordena los datos de menor a mayor.
   b) Agrupa los datos en cinco intervalos de amplitud 16, comenzando por la clase de 30 a 46.
   c) Encuentra la moda, media y mediana.
   d) Al haber calculado los valores representativos, ¿qué conclusiones puedes sacar?

3. En una cooperativa dedicada a la agricultura, el salario medio es de 160 dólares. A partir del 2017 el nuevo salario promedio será de 200 dólares. Si la cooperativa tiene 50 empleados:
   a) ¿Cuánto pagaba mensualmente en concepto de planilla de salarios durante 2016?
   b) ¿Cuánto deberá pagar mensualmente en concepto de planilla de salarios durante 2017?
   c) Determina el incremento mensual en concepto de planilla.

4. Pregunta la edad a cada uno de tus compañeras/os, luego determina:
   a) La edad media, moda y mediana.
   b) Si para el próximo año se mantienen exactamente los mismos compañeros, ¿cuál será la edad media, moda y mediana.
   c) Si en 10 años todos estuviesen juntos, ¿cuál sería la edad promedio?

5. Don Carlos tiene una tienda y mensualmente lleva el registro de las ganancias, al final del año descubrió que tuvo una ganancia mensual promedio de 300 dólares.
   a) Determina el total de ganancias obtenidas durante todo el año.
   b) Si para el 2017, espera un aumento del 10% en las ganacias, ¿cuál sería el nuevo promedio mensual de las ganacias?

6. Don Antonio paga un promedio de 14 dólares mensualmente en concepto de energía eléctrica, determina el gasto total anual en energía eléctrica.

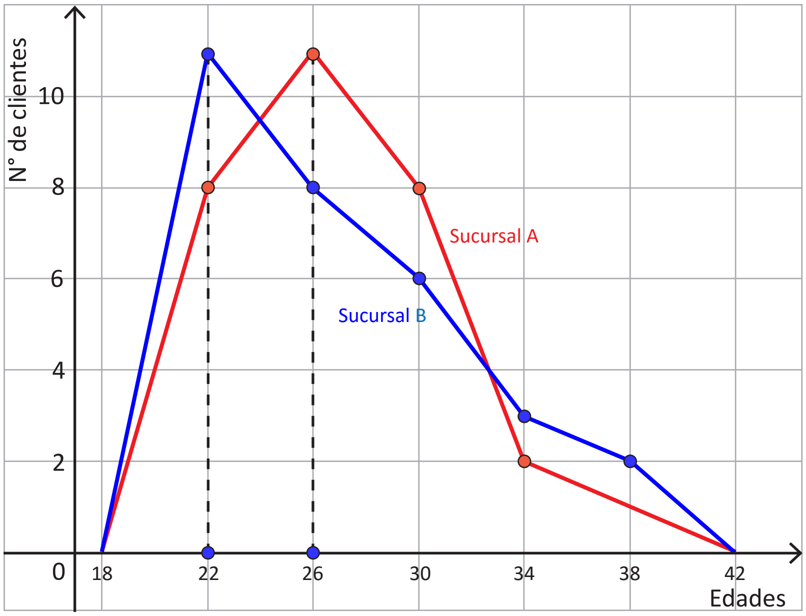
7. Carmen estudia ingeniería electrónica y gasta mensualmente un promedio de 200 dólares.
   a) Determina el gasto total anual que invertirá en sus estudios.
   b) Si la carrera tiene una duración aproximada de 6 años, determina la inversión total.

2.8 Relación entre media, moda y mediana

P

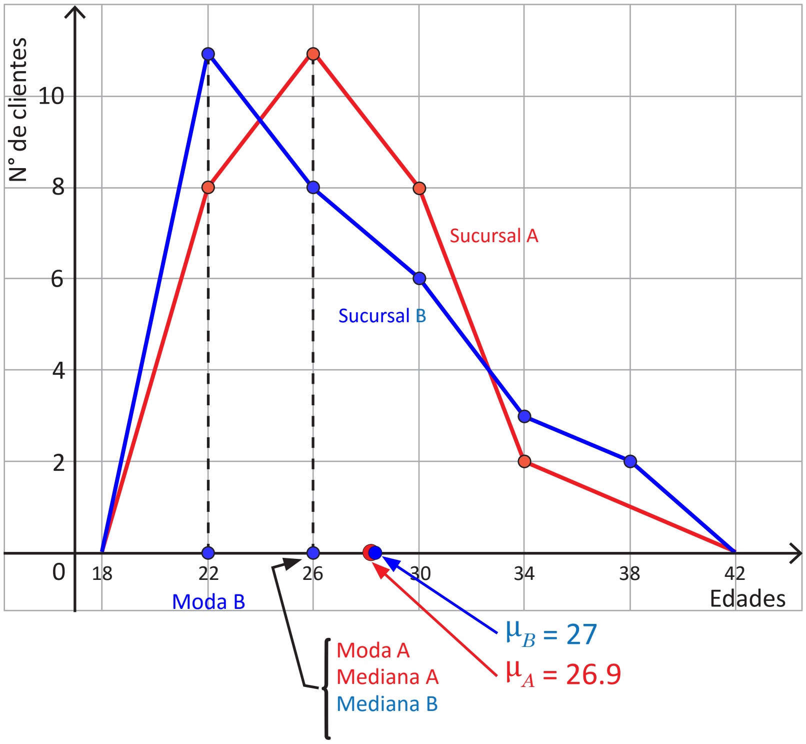
La gráfica corresponde al registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria en cada una de las dos sucursales A y B de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

1. Traza una línea vertical para identificar el valor de la moda.
2. Compara los valores de la moda, mediana y media aritmética, luego identifica qué posición le corresponde a la media y la mediana respecto a la moda, para cada distribución (estos valores han sido calculados en clases anteriores).



S

1. En la gráfica se muestra la línea vertical que se traza desde el punto más alto del polígono hacia la recta horizontal o eje x, el punto donde corta al eje x, es el valor aproximado de la moda. Para la sucursal A es 26 y para la sucursal B es 22.



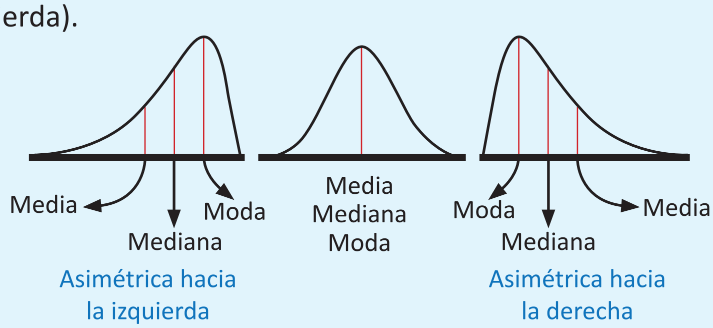
2. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética, se tiene:

- Para la distribución correspondiente a la sucursal A, moda = 26, mediana = 26 y μ = 26.9, es decir que la moda y la mediana tienen igual valor y la media aritmética es mayor.
- Para la distribución correspondiente a la sucursal B, moda = 22, mediana = 26 y μ = 27, es decir que la moda es menor que la mediana y esta a su vez es menor que la media aritmética.

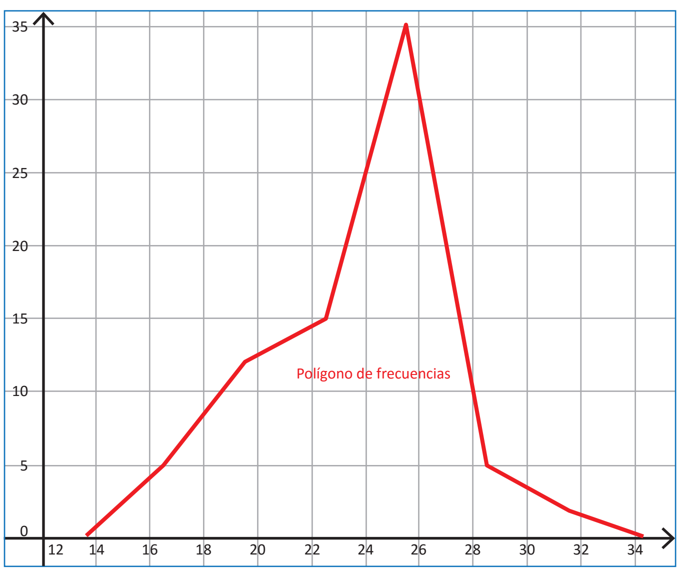
Unidad 8

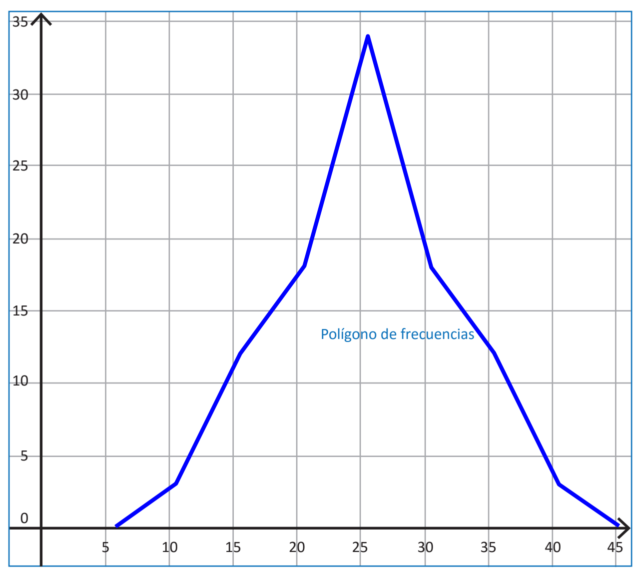
Para una distribución de frecuencias, la forma del gráfico depende de la relación que existe entre el valor de la moda, mediana y media aritmética, es decir:

- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen igual valor, se dice que es una distribución simétrica.
- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen la siguiente relación media > mediana > moda, se dice que la distribución es asimétrica o con cola a la derecha (sesgada a la derecha).
- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen la siguiente relación: media < mediana < moda, se dice que la distribución es asimétrica o con cola a la izquierda (sesgada a la izquierda).



1. Observa la forma de las siguientes gráficas, las cuales corresponden a una distribución de datos, luego realiza lo siguiente para cada caso:
   a) Identifica el valor aproximado de la moda.
   b) Determina la relación entre media, moda y mediana a partir de la forma del gráfico.





2. La distribución de los resultados de la PAES 2016 en un complejo educativo tiene los siguientes valores representativos: media aritmética 7.7, moda 6.5 y mediana 7 puntos.
   a) A partir de la relación entre los tres valores representantivos, describe el tipo de distribución que corresponde a los resultados de la PAES, para ese complejo educactivo.
   b) Elabora un boceto de la distribución representando lo valores dados.

PAES, es la Prueba de Aprendizaje y Aptitudes que el Ministerio de Educación aplica a estudiantes egresados de Educación Media del sector público y privado.

3.1 Valor aproximado

P

Calcula el valor de 33 ÷ 7 y realiza lo siguiente:

1. Redondea el resultado hasta las centésimas.
2. Diferencia entre el valor real y el valor redondeado.
3. Calcula el rango del valor real.

> En ciencias se usan dos clases de números: los que se cuentan o definen y los que resultan de una medición.
>
> Del número contado o definido se puede especificar su valor exacto, pero el valor exacto de un número medido no puede conocerse.

S

Al calcular el cociente de 33 ÷ 7 se obtiene 4.714, con un residuo de 2, si se encuentra el cociente con calculadora se obtiene 4.714285714285714...

```
33 |7
 50  4.714
  10
   30
    2
```

1. Al redondear el resultado hasta las centécimas, se obtiene 4.71.
2. Al aproximar a las centésimas, se genera un margen de error que su valor absoluto puede ser a lo sumo de 0.005, esto debido a que si el dígito que sigue a 1 en el número 4.71 fuese 5 o mayor a cinco, entonces se aproximará a 4.72.

$$(4.714285714285714...) - (4.71) = 0.004285714...$$

3. Considerando el margen de error, se puede encontrar el rango del valor real; es decir que al redondear 4.71, este puede representar muchos valores, por ejemplo:
   4.705, 4.706, 4.707, 4.708, 4.709, 4.710, 4.711, 4.712; al llegar a 4.715, este puede ser redondeado a 4.72. Entonces, 4.71 puede estar comprendido entre 4.705 y 4.715, pero sin incluir el 4.715; es decir, $4.705 \leq 4.71 < 4.715$.

C

Cuando se calcula un cociente aplicando un proceso de división o mediante el uso de una calculadora, se pueden obtener hasta ocho o más dígitos. Para redondear a 2 o 3 cifras significativas se aplican las reglas de redondeo aprendidas en educación básica.

- Si el primer dígito que se eliminará es menor que 5, ese dígito y todos los dígitos que le siguen, simplemente se eliminan.
- Si el primer dígito que se eliminará es mayor de 5 o si es 5 seguido de dígitos diferentes de cero, todos los dígitos siguientes se suprimen y el valor del último dígito que se conserva se aumenta en una unidad.

El número obtenido después de aplicar redondeo se llama **valor aproximado** y al resultado con todos los dígitos se le llama **valor real o valor exacto**. A la diferencia entre el valor real y el aproximado se le llama **margen de error**.

El valor absoluto del margen de error, puede ser como máximo la mitad de la unidad a la que se aproxima un número, por ejemplo: si se tiene como resultado 12 redondeado hasta las unidades, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.5, por tanto el valor real puede estar entre 11.5 y 12.5; es decir:

$$11.5 \leq 12 < 12.5$$

Si el resultado fuese 8.4 redondeado hasta las décimas, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.05, por tanto el valor real puede estar entre 8.35 y 8.45; es decir, $8.35 \leq 8.4 < 8.45$.

Para cada uno de los siguientes literales:

1. Determina el valor aproximado según se indica en cada caso.
2. Calcula el valor absoluto del margen de error.
3. Determina el rango del valor absoluto del valor real.

Redondear a las décimas:

a) 3.5465 b) 5.23178 c) 2.4751

Calcular y redondear a las centésimas:

d) 18 ÷ 7 e) 10 ÷ 3 f) 26 ÷ 11

3.2 Dígitos significativos

P

En el 2007 se realizó un censo poblacional en el que se refleja la población por departamento; por ejemplo, Cuscatlán tenía una población de 231 480 y Ahuachapán tenía 319 503 habitantes.

1. Redondea a la unidad de millar más próxima, la población de los dos departamentos.
2. Escribe la población aproximada con un número igual o mayor que 1 multiplicado por la mayor potencia de 10 que sea posible.

Las potencias de 10 son:
$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1\,000 = 10^3$, etc.

S

1. Al redondear el dato la población de los dos departamentos a las unidades de millar más próxima, se tiene:

Cuscatlán

El dígito que ocupa la posición de las unidades de millar es 1, al redondear es necesario considerar la regla y como el número que sigue es 4, simplemente se eliminan los dígitos siguientes, así se obtiene que $231\,480 \approx 231\,000$.

En este caso, 231 000 oscila entre 230 500 y 231 499, es decir, $230\,500 \leq 231\,000 < 231\,500$. Entonces, el 2, 3 y 1 son dígitos significativos.

Ahuachapán

El dígito que ocupa la posición de las unidad de millar es el 9, al redondear es necesario considerar la regla y como el dígito que ocupa la posición siguientes es 5, se le suma una unidad, así se obtiene que $319\,503 \approx 320\,000$.

En este caso, 320 000 oscila entre 319 500 y 320 499, es decir, $319\,500 \leq 320\,000 < 320\,500$. Entonces el 3, 2 y 0 son dígitos significativos.

2. Al expresar como el producto de un número por la mayor potencia de 10, se tiene:

$231\,000 = 2.31 \times 10^5$
Se deja el 2 en la parte entera y los otros dígitos se cuentan para colocar el exponente de la potencia de 10, sin olvidar colocar los otros dos dígitos significativos (3 y 1), después del punto decimal.

$320\,000 = 3.20 \times 10^5$
Se deja el 3 en la parte entera y los otros dígitos se cuentan para colocar el exponente de la potencia de 10, sin olvidar colocar los otros dos dígitos significativos (2 y 0), después del punto decimal.

C

Cuando se aproxima una cantidad o cuando se realiza cualquier medición o cálculo, los dígitos que tienen un significado real y que por tanto aportan alguna información para determinar el valor real, se les llama **dígitos significativos** o **cifras significativas**. Para determinar la cantidad de dígitos significativos se consideran ciertas reglas, entre las que se tienen:

1. En números que no contienen ceros, todos los dígitos son significativos; por ejemplo, 345 tiene 3 dígitos significativos.

2. Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos; por ejemplo, 2 109 tiene 4 cifras significativas.

3. Los ceros a la izquierda del primer dígito, que no es cero, sirven solamente para fijar la posición del punto decimal y no son significativos, por ejemplo 0.048, tiene solamente 2 cifras significativas.

4. En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último número diferente de cero son significativos; por ejemplo, 3.20000×10^5, tiene 6 cifras significativas.

5. En un número que no tiene punto decimal y que termina con uno o más ceros (como 4 700), los ceros con los cuales termina el número pueden ser o no significativos. El número es ambiguo en términos de cifras significativas. Para especificar el número de cifras significativas, se requiere información adicional acerca de cómo se obtuvo el número. Si el número es resultado de una medición, los ceros probablemente no son significativos. Si el número ha sido contado o definido, todos los dígitos son significativos (suponiendo que el recuento haya sido perfecto).

   Para evitar la ambigüedad sobre el número de cifras significativas de un número, se expresan como el producto de un número por una potencia de 10 (un número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (potencia de 10) de la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$, tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo desarrollado. Cuando un número está expresado de esta forma, se dice que está en **notación científica**.

   La notación científica se utiliza para expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños, en este grado se trabajará únicamente para números muy grandes.

E

La extensión territorial de América Central o Centroamérica es de **507 900** kilómetros cuadrados.

1. Expresa la extensión territorial de Centroamérica como notación científica, considera los casos siguientes:
   a) 2 cifras significativas.
   b) 3 cifras significativas.
   c) 4 cifras significativas.

2. Analiza cada caso y determina el rango del valor real.

Solución.
1. Al expresar en notación científica, se tiene:
   a) $507\,900 \approx 5.1\ 10^5$ b) $507\,900 \approx 5.08 \times 10^5$ c) $507\,900 = 5.079 \times 10^5$

2. Al analizar cada caso, se tiene:
   a) $5.05 \leq 5.1 < 5.15$ b) $5.075 \leq 5.08 < 5.085$ c) $5.0785 \leq 5.079 < 5.0795$

Por tanto, la cantidad de dígitos significativos que se deben tomar, depende de qué tan pequeño se desee el margen de error de los datos con los que se está trabajando.

Expresa las siguientes cantidades en notación científica con 4 cifras significativas, para tal efecto, hay que redondear hasta el cuarto dígito desde la izquierda.

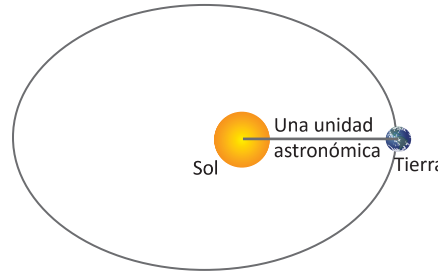
a) 504.70 b) 257 800 c) 3 400 587 d) 72 130 000 000

3.3 Cantidades en notación científica

P

Lee la siguiente situación y realiza lo que se pide en cada numeral.
*"La unidad astronómica (ua) es una unidad de longitud y es aproximadamente igual a la distancia media entre la Tierra y el Sol. Su valor, medido experimentalmente, dado en el Sistema Internacional de Unidades es **149 597 870.7 km**".*

1. Redondea la cantidad a la unidad de millón más próxima.
2. Identifica cuáles son los dígitos significativos.
3. Expresa la cantidad redondeada en notación científica.



S

1. Al redondear 149 597 870.7 a la unidad de millón más próxima, se obtiene 150 000 000.

2. 150 000 tiene 3 dígitos significativos: 1, 5 y 0, pues los otros ceros se obtienen de la aproximación.

3. Para expresar en notación científica 150 000 000, se coloca el punto después del 1, luego se cuentan los dígitos que quedan a la derecha del punto; es decir, 150 000 000 = 1.50000000×10^8, como solo los primeros 3 dígitos son significativos, se dejan únicamente dos dígitos después del punto; entonces, 1.50×10^8.

En cada una de las situaciones siguientes, realiza lo que se indica en cada literal, sobre los datos que aparecen en negrilla.

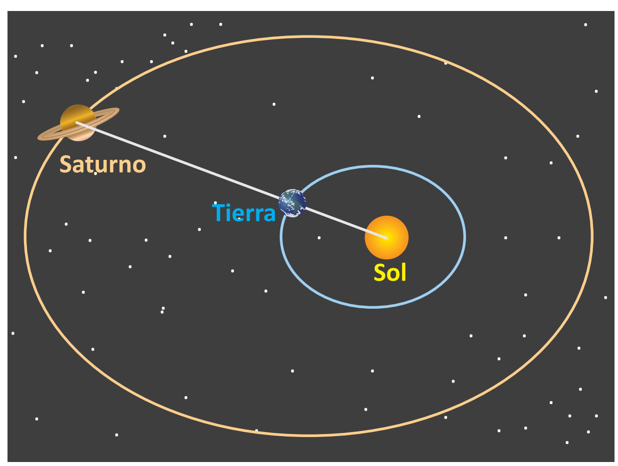
a) Redondea cada una a 4 cifras significativas.
b) Exprésala en notación científica (número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (potencia de 10).

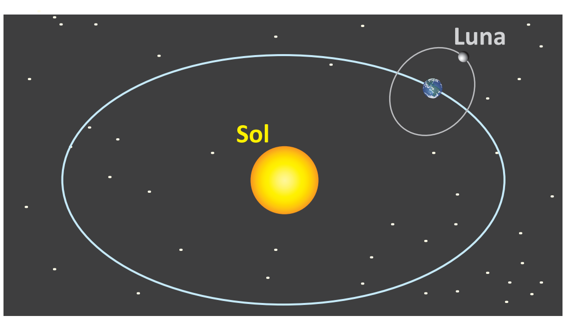
1. La velocidad de la luz en el vacío es de **299 792 458** m/s.

2. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. Equivale aproximadamente a **9 460 800 000 000** km.

3. Saturno es el segundo planeta más grande del Sistema Solar y el único con anillos visibles desde la Tierra, tiene una distancia media al sol de **1 429 400 000** kilómetros aproximadamente.

4. Urano fue descubierto por William Herschel en 1781 y tiene un radio ecuatorial de **25 559** kilómetros.

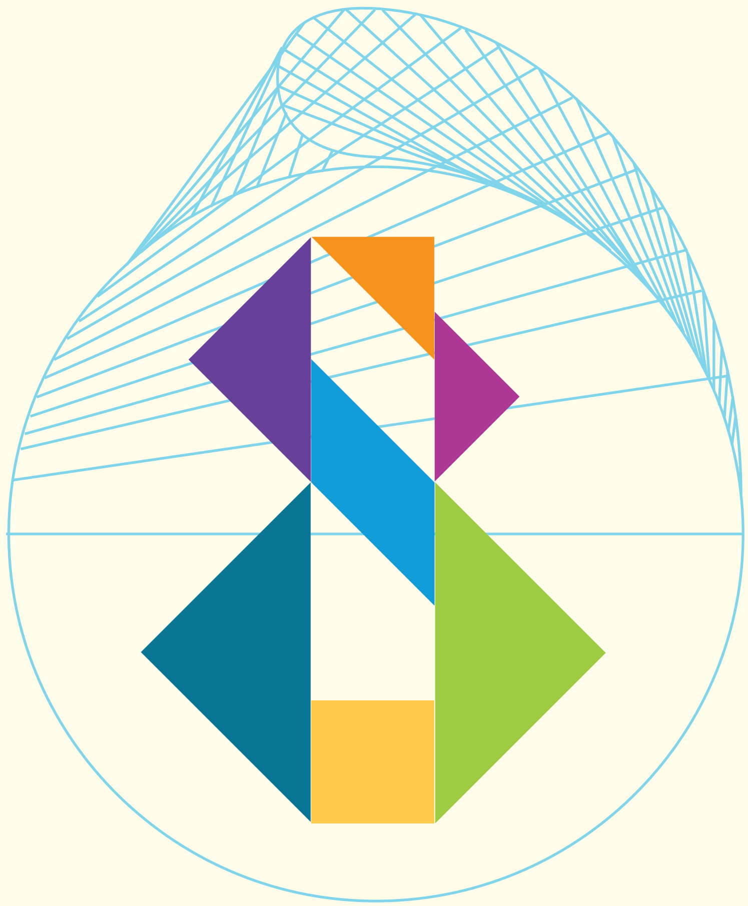




5. La Luna orbita la Tierra a una distancia media de **384 403** km.

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN



Libro de Texto Matemática Segunda Edición

EL SALVADOR

Grande como su gente

JICA