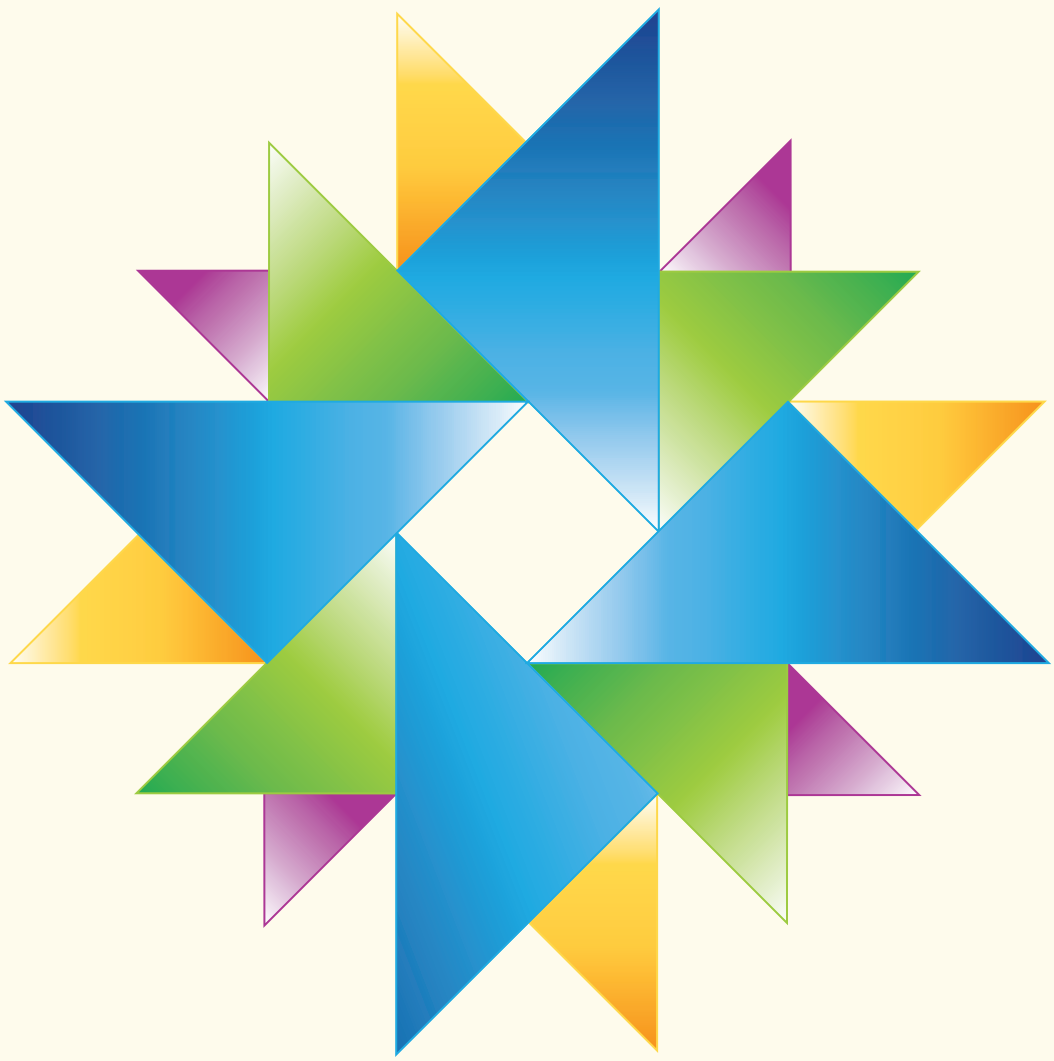
Matemática

Segundo año de bachillerato



Libro de Texto

ESMATE

Matemática

Segundo año de bachillerato

Libro de Texto

ESMATE

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos

Revisión técnica
José Nerys Funes Torres

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

Revisión a nivel nacional por especialistas formados dentro del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio.
Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición, 2019.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra una figura formada por triángulos rectángulos cuyas áreas disminuyen a razón de dos, y se puede calcular su área a partir de ello. La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510
M425 Matemática : segundo año de bachillerato : libro de texto / equipo técnico autoral Ana Ester Argueta, César Omar Gómez, Diana Marcela Herrera, Francisco Antonio Mejía ; revisión técnica José Nerys Funes ; diseño y revisión de diagramación Francisco René Burgos, Judith Samanta Romero ; corrección de estilo Mónica Marlene Martínez, Marlene Elizabeth Rodas. -- 1ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
218 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-74-4 (impreso)
1. Matemáticas-Problemas, ejercicios, etc. 2. Matemáticas Libros de texto. 3. Matemáticas-Enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991-, coaut. II. Título.
BINA/jmh

Estimados jóvenes:

Es grato dirigirnos a ustedes con el propósito de felicitarlos por iniciar un nuevo año escolar con mucho entusiasmo, voluntad y entrega.

Desde “El proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media” (ESMATE), hemos trabajado este libro de texto, el cual presenta una nueva propuesta para el abordaje de la matemática.

Estamos convencidos que saber matemática significa tener una excelente herramienta para el desarrollo de sus capacidades productivas y ciudadanas; ya que ayuda a ser más eficiente, a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Tenemos la seguridad que su encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología constructiva, retadora y exigente, con el único fin de que los conocimientos matemáticos les enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en sus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Recuerden que en nuestro país todos los jóvenes son capaces de aprender y desarrollarse. Mantengan la confianza en sus capacidades, porque todos pueden alcanzar el éxito con esfuerzo, disciplina y dedicación.

Mucho ánimo, ya que contamos con lo mejor de ustedes para desarrollar un mejor El Salvador.

Atentamente,

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Presentación del libro

Partes de una clase

Problema inicial En el primer momento de cada clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática la cual permite introducir el contenido que se va a desarrollar.

Solución En este segundo momento, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión En la Conclusión se llega a la explicación del contenido. Aquí se relacionan el Problema inicial y la Solución para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Ejemplo A veces es necesario presentar un problema adicional, que permita consolidar el contenido de la clase.

Problemas Es la sección de problemas y ejercicios.

El ícono de la calculadora indica los únicos ejercicios en donde es indispensable usarla.

Información complementaria

En el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional como historia de la matemática, esto se representa con diferentes colores:

Presaberes | Pista | Información adicional

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 7 de la lección 1 de la unidad 1 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

1.7 Ecuaciones racionales

Indica el número de clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta verde en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 1

Además al finalizar cada unidad siempre aparecen algunos problemas sobre todas las temáticas abordadas, y en ocasiones también se desarrollan algunas prácticas en GeoGebra, como recurso tecnológico de la matemática.

Índice

Índice

Unidad 1

Ecuaciones

El trabajo con ecuaciones se ha realizado desde culturas antiguas. Detallar su origen es complicado, pero junto con las ecuaciones estudiadas en grados anteriores, históricamente, se ha llevado el estudio de ecuaciones con particularidades, tal es el caso de las ecuaciones cuárticas (de grado 4) que tienen estructura de ecuación cuadrática, de ecuaciones expresadas con radicales, de ecuaciones racionales que se reducen a ecuaciones de primer grado, entre otras, que utilizan y cumplen las mismas propiedades de las igualdades y de los sistemas de ecuaciones.

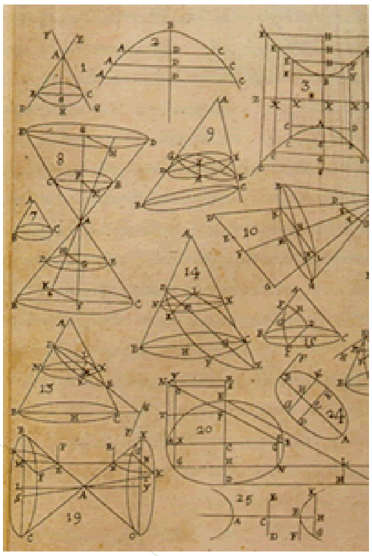


Imagen de las cónicas de Apolonio. La deducción de las ecuaciones de estas figuras necesita la resolución de ecuaciones con radicales.

En el modelamiento de situaciones de la naturaleza existen fenómenos que son complicados de modelar con ecuaciones de primer grado o ecuaciones cuadráticas, por lo que se hace necesario resolver otros tipos de expresiones. Para ello deben aplicarse los conocimientos adquiridos en la solución de las ecuaciones básicas (primer grado, cuadráticas y sistemas de ecuaciones de primer grado) a otros tipos de ecuaciones.

Se comenzará abordando los contenidos de ecuación bicuadrática, como aplicación de lo aprendido en ecuación cuadrática, y luego se pasará a resolver ecuaciones expresadas con signo de radical, para finalmente abordar las ecuaciones racionales, partiendo del concepto de mínimo común múltiplo para polinomios.

1.1 Ecuaciones bicuadráticas, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, haciendo los siguientes pasos:

1. Realiza el cambio de variable $y = x^2$.
2. Resuelve la ecuación de grado dos que resulta en 1.
3. Encuentra las soluciones de la ecuación original.

Solución

1. Si se observa la ecuación, puede escribirse como $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$, por lo que al hacer el cambio de variable $y = x^2$ se tiene
$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0.$$

2. Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando, por lo que se buscan dos números que multiplicados den 144 y sumados den 25,
$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0.$$
De aquí se tiene que $y - 16 = 0$ o bien $y - 9 = 0$. Es decir, $y = 16$ o bien $y = 9$.

3. De 1 se tiene que $y = x^2$ y de 2 se sabe que $y = 16$ o $y = 9$. Entonces
$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ o bien } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$
Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ son $x = -4, -3, 3, 4$.

Definición

Las ecuaciones de la forma $\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C} = 0$, donde A es distinto de cero, se llaman ecuaciones **bicuadráticas**.

Las ecuaciones bicuadráticas pueden resolverse haciendo el cambio de variable $y = x^2$ y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta. Las ecuaciones bicuadráticas tienen cuatro soluciones, ya sean todas reales, todas imaginarias o dos reales y dos imaginarias.

Ejemplo

Determina todas las soluciones complejas de la ecuación $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$, la ecuación resultante es $y^2 - 24y - 25 = 0$. Al factorizar se tiene
$$y^2 - 24y - 25 = (y - 25)(y + 1) = 0.$$

Luego, $y - 25 = 0$ o bien $y + 1 = 0$.

- Si $y - 25 = 0$ entonces $y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y + 1 = 0$ entonces $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

De la Unidad 2 de Primer año de bachillerato se sabe que
$$\sqrt{-1} = i$$

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ son $x = -5, 5, i, -i$.

Problemas

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

1.2 Ecuaciones bicuadráticas, parte 2

Problema inicial

Resuelve la ecuación $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$.

Solución

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$ resulta $2y^2 - 15y + 27 = 0$. Al resolver la ecuación por factorización, se obtiene con el método de la tijera que $2y^2 - 15y + 27 = (2y - 9)(y - 3) = 0$.

$$\begin{array}{llll} 2y^2 - 15y + 27 & & & \\ 2y & & -9 & \rightarrow -9y \\ y & & -3 & \rightarrow -6y \\ \hline 2y^2 & & 27 & -15y \end{array}$$

De aquí resulta

- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. Es decir, $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. Es decir, $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, las soluciones de $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ son $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Conclusión

Una expresión de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C$ puede factorizarse en la forma $(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ mediante el método de la tijera. Con este recurso puede evitarse el cambio de variable $y = x^2$ para resolver las ecuaciones bicuadráticas.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$.

Al factorizar $2x^4 + 33x^2 + 16$ con el método de la tijera se obtiene

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0.$$

De aquí resulta

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. Es decir,

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. Es decir, $x = \pm 4i$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$ son $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

Problemas

Resuelve:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

1.3 Ecuaciones radicales, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $\sqrt{x} - 3 = 5$.

Solución

Para resolver una ecuación de esta forma, donde aparecen radicales, se despeja el radical para luego elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 5 + 3 && \text{se despeja el radical,} \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= 8^2 && \text{se eleva al cuadrado,} \\ x &= 64. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución, se tiene que $\sqrt{64} - 3 = 8 - 3 = 5$. Luego, $x = 64$ satisface la ecuación original, por lo tanto, $x = 64$ es la solución.

Definición

Una **ecuación radical** es aquella donde la incógnita o incógnitas aparecen bajo el signo radical.

Una ecuación radical puede convertirse a una ecuación donde no aparezcan radicales, despejando el radical y elevando al cuadrado.

Al haber resuelto la ecuación radical, hay que comprobar que los valores encontrados satisfacen la ecuación, sustituyéndolos en la ecuación original y comprobando la igualdad.

No se considerarán como soluciones aquellos valores que al comprobarlos en la ecuación original resulten números complejos.

Ejemplo

Resuelve $2\sqrt{2x + 1} - 6 = 0$.

Al despejar el radical y elevar al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x + 1} - 6 &= 0 \\ 2\sqrt{2x + 1} &= 6 \\ \sqrt{2x + 1} &= 3 && \text{se despeja el radical,} \\ 2x + 1 &= 9 && \text{se obtiene una ecuación lineal la cual hay que resolver,} \\ 2x &= 8 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución se tiene: $2\sqrt{2(4) + 1} - 6 = 2\sqrt{9} - 6 = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$. Por lo tanto, $x = 4$ es la solución de la ecuación.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x + 3} = 4$

b) $\sqrt{x - 8} = 2$

c) $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8$

e) $7 - \sqrt{x + 2} = 3$

f) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1}$

1.4 Ecuaciones radicales, parte 2

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$ b) $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$

Solución

a) De la misma forma que en la clase anterior, se despeja el radical y luego se eleva al cuadrado.

$$\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$$
$$\sqrt{4x^2 - 15} = 2x - 1$$
$$4x^2 - 15 = 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando,}$$
$$\cancel{4x^2} - 15 = \cancel{4x^2} - 4x + 1$$
$$4x = 16$$
$$x = 4.$$

Se comprueba que 4 sea solución de la ecuación sustituyendo en la ecuación original

$$\sqrt{4(4)^2 - 15} - 2(4) = \sqrt{64 - 15} - 8 = \sqrt{49} - 8 = 7 - 8 = -1$$

Por lo tanto, $x = 4$ es solución de la ecuación $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$.

b) Esta ecuación tiene dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos.

$$\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$$
$$\left(\sqrt{x^2 + 6x}\right)^2 = \left(x + \sqrt{2x}\right)^2$$
$$x^2 + 6x = x^2 + 2x\sqrt{2x} + 2x \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando,}$$
$$\cancel{x^2} + 6x - 2x = \cancel{x^2} + 2x\sqrt{2x}$$
$$(4x)^2 = \left(2x\sqrt{2x}\right)^2$$
$$16x^2 = 4x^2(2x)$$
$$16x^2 - 4x^2(2x) = 0$$
$$4x^2(4 - 2x) = 0.$$

Es recomendable no dividir entre $4x^2$ ya que no se sabe si puede ser cero.

De aquí se tiene que $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, o bien $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$. Comprobando ambos valores en la ecuación original,

$x = 0$: $\sqrt{0^2 + 6(0)} - \sqrt{2(0)} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$x = 2$: $\sqrt{2^2 + 6(2)} - \sqrt{2(2)} \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow \sqrt{4 + 12} - \sqrt{4} \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow 4 - 2 \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow 2 = 2$ ✓

Luego, $x = 0$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$.

Conclusión

Al resolver ecuaciones radicales pueden resultar ecuaciones de grado mayor a 1 que pueden resolverse mediante factorización o mediante la fórmula general, cuando la ecuación resultante es una cuadrática que no pueda resolverse por factorización.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1}$
b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x$
c) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$
d) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$
e) $\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$
f) $\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$

1.5 Ecuaciones con radicales, parte 3

Problema inicial

Resuelve $x + \sqrt{4x+1} = 5$.

Solución

Se despeja el radical y se eleva al cuadrado

$$x + \sqrt{4x+1} = 5$$
$$\sqrt{4x+1} = 5 - x$$
$$\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 = (5-x)^2$$
$$4x + 1 = 25 - 10x + x^2$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación cuadrática resultante,}$$
$$(x-2)(x-12) = 0.$$

Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 12 = 0$. Así, $x = 2$ o $x = 12$. Al comprobar las soluciones en la ecuación original se tiene:

$x = 2$: $2 + \sqrt{4(2)+1} = 2 + \sqrt{8+1} = 2 + 3 = 5$ ✓

$x = 12$: $12 + \sqrt{4(12)+1} = 12 + \sqrt{48+1} = 12 + 7 = 19 \neq 5$ ✗

Por lo tanto, $x = 2$ es la solución de $x + \sqrt{4x+1} = 5$.

La razón por la cual las soluciones de la ecuación obtenida al elevar al cuadrado no necesariamente son las soluciones de la ecuación original es porque si $A^2 = B^2$ no significa que $A = B$.

Por ejemplo, $3^2 = (-3)^2$ pero $3 \neq -3$.

Conclusión

No hay una forma de determinar el número de soluciones de una ecuación radical, por lo que cada valor encontrado al resolver la ecuación debe comprobarse sustituyéndolo en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

En esta ocasión hay dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos de la ecuación.

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$2x^2 - 1 = x$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización y puede comprobarse que

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0.$$

Entonces, o bien $x = 1$ o bien $x = -\frac{1}{2}$. Lo primero que puede observarse es que x no puede ser $-\frac{1}{2}$, ya que el radical $\sqrt{x}$ no sería un número real.

Comprobando para $x = 1$, se tiene $\sqrt{2(1)^2 - 1} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$, $\sqrt{1} = 1$. ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución de $\sqrt{2x^2-1} = \sqrt{x}$.

Problemas

Resuelve cada ecuación radical.

a) $3x + \sqrt{x-1} = 2x + 7$

b) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1} = 2$

c) $2 - \sqrt{2x+3} = 2x - 1$

d) $x = 2\sqrt{x+2} + 1$

e) $\sqrt{3x+10} = 5 - 3\sqrt{x+3}$

f) $\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{13-3x}$

1.6 Mínimo común múltiplo de polinomios*

Problema inicial

Calcula el mínimo común múltiplo en cada caso.

a) 4, 6, 15 b) $6x$, $3x + 1$, $6x + 2$ c) $2m + 3$, $2m - 3$, $4m^2 - 9$

Factorizar polinomios es análogo a descomponer números en sus factores primos.

Solución

a) Para calcular el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15, se descompone cada número en sus factores primos.

$$4 = 2^2, \qquad 6 = 2(3), \qquad 15 = 3(5).$$

Luego, el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15 es $2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$.

b) Para calcular el mínimo común múltiplo se hace de manera análoga que con números. Primero se factoriza cada expresión.

$6x = 2(3)x$, $3x + 1$ ya no puede factorizarse, $6x + 2 = 2(3x + 1)$.

Luego, el mínimo común múltiplo de $6x$, $3x + 1$ y $6x + 2$ es $2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$.

c) De igual manera que en b), se factoriza cada expresión y el mínimo común múltiplo será el producto de cada factor común y no común que aparece en cada factorización, con la mayor potencia que aparezca entre las tres expresiones.

$2m + 3$ y $2m - 3$ no pueden factorizarse y $4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$, por diferencia de cuadrados.

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de $2m + 3$, $2m - 3$ y $4m^2 - 9$ es $(2m - 3)(2m + 3)$.

Conclusión

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor número entre sus múltiplos comunes, y se denota por mcm.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números, se descompone cada número en sus factores primos y se toma el producto de cada factor común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

También puede calcularse el mcm de expresiones algebraicas de manera análoga: se factoriza completamente cada expresión y el mcm será el producto de todos los factores, común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

Ejemplo

Calcula el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$.

Se factoriza cada una de las expresiones anteriores:

$x + y$, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Observación: No es necesario desarrollar $(x + y)^2(x - y)$.

Por lo tanto, el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$ es $(x + y)^2(x - y)$.

Problemas

Calcula el mcm para cada caso.

a) x^2, y^2, xy
b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$
c) $3a + 6$, $a^2 - 4$
d) 2, $x - 3$, $2x - 6$
e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$
f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

1.7 Ecuaciones racionales

Problema inicial

Resuelve cada ecuación.

a) $\frac{x+1}{x-2} = 4$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} = \frac{5}{2x^2+5x-3}$

Solución

a) Cuando se tienen ecuaciones de esta forma, lo primero que hay que hacer es restringir los valores que puede tomar x, ya que pueden resultar divisiones entre cero, que no están definidas. Por lo tanto, en este caso, x no puede ser 2 ya que $x-2$ se vuelve cero. Luego, hay que eliminar el denominador, y para ello se multiplica toda la ecuación por $x-2$,

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right) = 4(x-2)$$

$$x+1 = 4x-8 \qquad \text{se resuelve la ecuación lineal,}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Si $x = 3$ el denominador $x-2$ no se anula: $3-2 = 1$.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación.

b) De nuevo, el objetivo es eliminar los denominadores. En este caso, como los tres denominadores son distintos, se debe multiplicar la ecuación por el mcm de estos.

Las expresiones $x+3$ y $2x-1$ no pueden factorizarse y $2x^2+5x-3 = (2x-1)(x+3)$, por lo que el mcm de los tres denominadores es $(2x-1)(x+3)$. Además, x no puede ser -3 y $\frac{1}{2}$ ya que en ese caso algún denominador se vuelve cero. Entonces,

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1}\right) = (2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\,\frac{1}{\cancel{x+3}} - \cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right) = \cancel{(2x-1)(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x-1-3(x+3) = 5$$

$$2x-1-3x-9-5 = 0$$

$$-x-15 = 0$$

$$x = -15$$

Si $x = -15$, ningún denominador se anula al evaluar -15 en cada uno de ellos. Por lo tanto, $x = -15$ es la solución de la ecuación.

Definición

Una ecuación que contiene fracciones y tal que la incógnita aparece en algún denominador se llama **ecuación racional**. Como en una ecuación racional la incógnita aparece en el denominador, se deben considerar valores de la incógnita que no hagan cero a algún denominador.

Para resolver una ecuación racional, primero debe analizarse qué valores de la incógnita hacen cero a algún denominador. Luego se multiplica toda la ecuación por el mcm de ellos y luego se resuelve la ecuación resultante. Se descartan aquellos valores de la incógnita que hagan cero a algún denominador en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

En este caso, x no puede tomar los valores de 0 y 1. Además, el mcm de $x-1$ y x^2-x es $x(x-1)$, entonces,

$$x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) = x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right) + x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x\cancel{(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right) = \cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right) + x\cancel{(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$4x = 3 + x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

Entonces, $x = 3$ o $x = 1$. Pero $x \neq 1$, por lo que esa solución queda descartada.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x(x-1)} + \frac{x}{x-1}$.

No es necesario comprobar que la solución es $x = 3$ sustituyendo en la ecuación original, porque si $x \neq 1$ y $x \neq 0$, entonces multiplicar por $x(x-1)$ es una operación reversible.

$$\begin{tikzcd}
\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} \arrow[d, bend right, "\times x(x-1)"'] \\
4x = 3 + x^2 \arrow[u, bend right, "\div x(x-1)"']
\end{tikzcd}$$

Problemas

Resuelve cada ecuación racional.

a) $\frac{1}{x} = 3$

b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x} - 3 = 0$

d) $\frac{1}{2x+1} = 3$

e) $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$

h) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$

1.8 Sistemas de ecuaciones

Problema inicial

Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y luego se sustituye en la otra ecuación.

En este caso, resulta más fácil si se despeja y de la ecuación lineal,
$$y = 2 - x \qquad \text{------------------ (1)}$$
Luego, al sustituir y en la otra ecuación se tiene
$$x^2 - 3x - y + 2 = x^2 - 3x - (2 - x) + 2 = x^2 - 3x - 2 + x + 2 = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0.$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o $x = 2$.

Para determinar el valor de y se sustituye el valor de x en (1). Así, cuando $x = 0$, $y = 2$ y cuando $x = 2$, $y = 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 0$, $y = 2$ y $x = 2$, $y = 0$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado 2, se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, para luego resolver la ecuación en una variable resultante.

Es recomendable despejar en la ecuación lineal aquella variable que tiene menor grado en la ecuación de grado 2.

Ejemplo

Resuelve el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y de la ecuación lineal se tiene que $y = x - 2$. Sustituyendo en la otra ecuación
$$x^2 + x + y - 1 = x^2 + x + (x - 2) - 1 = x^2 + x + x - 2 - 1 = x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Al resolver por factorización se tiene que $(x - 1)(x + 3) = 0$, por lo que $x = 1$ o $x = -3$.

Para $x = 1$ se tiene que $y = -1$ y para $x = -3$ se tiene que $y = -5$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = -1$ y $x = -3$, $y = -5$.

Problemas

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $2x^4 + 9 = 11x^2$

i) $3x^4 + 64 = 52x^2$

j) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{5x+9} = 2x + 3$

b) $\sqrt{2x+1} = x - 1$

c) $\sqrt{2x+16} = 2x + 4$

d) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x + x^2}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x} = 2$

g) $\sqrt{3x+12} - 1 = \sqrt{5x+9}$

h) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{3x-4}{3-x} = 2$

b) $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x}$

c) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2}{x+3}$

d) $\dfrac{2x+3}{5x-1} = \dfrac{6x+4}{15x+2}$

e) $\dfrac{4x-7}{12x+3} = \dfrac{x-16}{3x+5}$

f) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x-2} = 3$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + x - y + 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 - x - y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x^2 + x + y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ x^2 + 2x + y = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x - y - 20 = 0 \\ 3x^2 - 7x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x - y - 12 = 0 \\ x^2 + 2x - y = 8 \end{cases}$

1.10 Problemas de la unidad

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{7 - 5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x + 19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

d) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

f) $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

g) $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

h) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 9}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{5x + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x} = 2$

b) $\frac{2x}{x + 6} + \frac{3x}{x + 4} = x$

4. Determina todas las soluciones complejas de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$

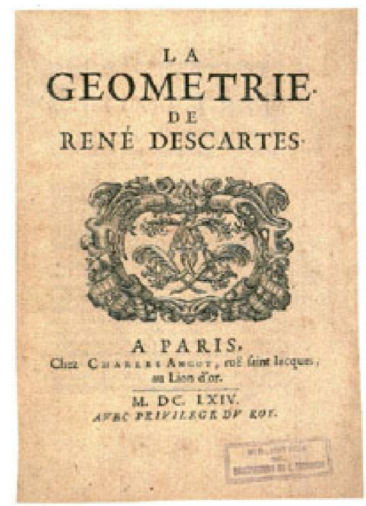
d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

5. En un mismo plano cartesiano:
   a) Grafica las ecuaciones $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.
   b) Encuentra los valores x y y que satisfacen ambas ecuaciones mostradas en a).
   c) Ubica en el mismo plano cartesiano los pares ordenados (x, y), donde x y y son los calculados en b).
   d) ¿Qué sucede con los puntos ubicados en c) y las gráficas de las ecuaciones en a)?
   e) ¿Qué se puede concluir sobre resolver sistemas de ecuaciones donde una es una ecuación lineal y la otra es una ecuación cuadrática?

Unidad 2

Línea recta

La aritmética y el álgebra son ramas de la matemática que, históricamente, siempre se han encontrado relacionadas; la segunda, por ejemplo, surge de la necesidad de generalizar la primera. El reto era representar figuras geométricas con el mismo lenguaje algebraico que, en un principio, se utilizaba únicamente para expresiones numéricas. El primer momento en que se acuña la expresión "geometría analítica" es con el matemático francés René Descartes en el año 1637 aproximadamente. Aunque es posible que los métodos hayan sido utilizados por otros matemáticos anteriormente, fue Descartes quien hizo la primera publicación al respecto, y cuyo fundamento está en el descubrimiento del plano cartesiano.


LA
GEOMETRIE
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë saint Iacques, au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Publicación del libro "La geometría" de René Descartes.

El avance en las telecomunicaciones se debe en gran medida a la aplicación de la geometría analítica.

A partir del descubrimiento de la geometría analítica se expande el campo de la matemática, y se pudo hacer trascender a la geometría de las limitaciones de lo representable por medio de figuras. Con la geometría analítica se han podido desarrollar otras áreas de la matemática como la geometría diferencial, la geometría algebraica y otras más complejas cuya contribución ha sido especialmente en diversas áreas relacionadas con el progreso tecnológico y computacional, haciendo de la matemática una base esencial para el mundo que se conoce actualmente.

Los contenidos sobre geometría analítica comprendidos en esta unidad son línea recta, ecuaciones de la línea recta, posición relativa entre dos rectas, ángulo de inclinación de una recta, ángulo entre rectas y distancia de un punto a una recta. Al final de la unidad hay prácticas en GeoGebra que enriquecerán los contenidos abordados.

1.1 Distancia entre dos puntos

Problema inicial

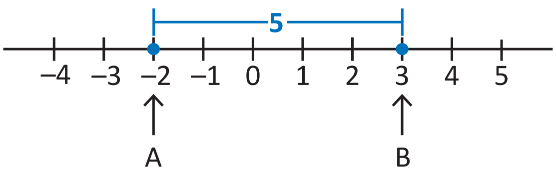
Calcula la distancia entre los puntos A y B si:

a) A(–2) y B(3) están sobre la recta numérica.
b) A(3, 4) y B(–1, 1) están sobre el plano cartesiano.

Dado p un número real, la notación P(p) indica que el punto P se encuentra en el valor p sobre la recta numérica.

Solución

a) Sobre la recta numérica se colocan los puntos A y B, cuyos valores son –2 y 3 respectivamente (ver figura); de acuerdo a esto la distancia entre ambos es 5:

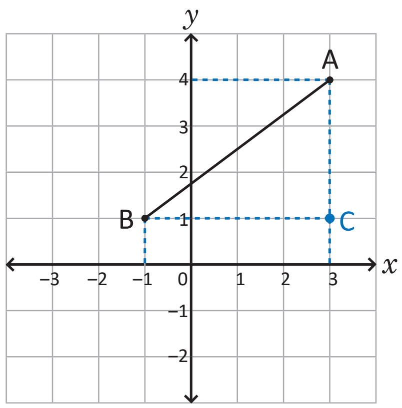


Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5. Sin necesidad de la recta numérica, lo anterior también puede calcularse restando del valor de B el valor de A:

$$\begin{aligned} AB &= 3 - (-2) \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) Sobre el plano cartesiano se colocan los puntos A y B cuyas coordenadas son (3, 4) y (–1, 1) respectivamente (ver figura); la distancia entre A y B es igual a la longitud del segmento AB.

Para ubicar un punto P(x_1, y_1) en el plano cartesiano se sitúa la coordenada x_1 sobre el eje x; a partir de esta se cuentan las unidades correspondientes a la coordenada y_1, hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa (en ambos casos en forma vertical).



Al formar el triángulo rectángulo ABC y utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}.$$

Por hablar de distancia, AB siempre será mayor que cero.

La longitud del segmento BC es igual a calcular la distancia de –1 a 3 en el eje x, es decir:

$$BC = 3 - (-1) = 4.$$

De igual forma, la longitud del segmento CA es igual a calcular la distancia de 1 a 4 en el eje y, es decir:

$$CA = 4 - 1 = 3.$$

Se sustituyen BC y CA en $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ y se calcula el resultado:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5.

Conclusión

La distancia entre dos puntos A y B se simboliza como d(A, B) y se define de la siguiente forma:

a) Si A(a) y B(b) están sobre la recta numérica, entonces:

$$d(\text{A, B}) = |a - b|.$$

$|a - b|$ indica el valor absoluto de la resta $a - b$.

b) Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano, entonces:

$$d(\text{A, B}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Esta fórmula para calcular d(A, B) cuando A y B son puntos sobre el plano cartesiano también se utiliza si el segmento AB es paralelo a uno de los ejes de coordenadas.

Ejemplo

Para cada caso, calcula d(A, B) si:

a) A(–10) y B(6) b) A(–2, –1) y B(3, 2)

a) Como A y B están sobre la recta numérica:

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= |-10 - 6| \\ &= |-16| \\ &= -(-16) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, d(A, B) = 16.

Si x es un número real entonces el valor absoluto de x, denotado por $|x|$ se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) A y B están sobre el plano cartesiano, luego:

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, d(A, B) = $\sqrt{34}$.

Problemas

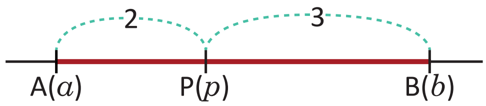
Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B, es decir, d(A, B):

a) A(3) y B(7)	b) A(0) y B(6)	c) A(–1) y B(1)	d)A(–3) y B(–1)
e) A(–8) y B(0)	f) A(–3) y B(–10)	g) A(7) y B(2)	h) A(5) y B(–4)
i) A(5, 6) y B(2, 3)	j) A(3, 2) y B(–2, 1)	k) A(4, 6) y B(–5, –3)	l) A(7, 2) y B(1, –4)
m) A(–3, 4) y B(1, 3)	n) A(0, 0) y B(4, –5)	ñ) A(–5, 4) y B(2, –1)	o) A(6, –2) y B(6, –5)

1.2 División de un segmento en una razón dada: recta numérica

Problema inicial

Sobre la recta numérica se han colocado dos puntos A(a) y B(b) como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el valor del punto P que divide al segmento AB en razón 2:3?



$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

Solución

Si P divide al segmento AB en razón 2:3 entonces:

$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

De la figura se deduce $d(\text{A, P}) = |a - p| = p - a$ y $d(\text{P, B}) = |p - b| = b - p$, pues $p > a$ y $b > p$ respectivamente. Se sustituyen en lo anterior y se utiliza la propiedad fundamental de la proporciones:

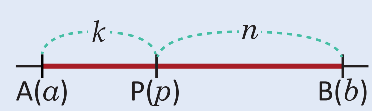
$$\begin{aligned}
\frac{p-a}{b-p} &= \frac{2}{3}\\
3(p-a) &= 2(b-p)\\
3p - 3a &= 2b - 2p\\
2p + 3p &= 3a + 2b\\
(2+3)p &= 3a + 2b\\
p &= \frac{3a+2b}{2+3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es $\frac{3a+2b}{5}$.

En general

Dados dos puntos A(a) y B(b) sobre la recta numérica, el valor del punto P(p) que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón k:n es:

$$p = \frac{na+kb}{k+n}.$$



Ejemplo

Dados A(–3) y B(5), encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en razón 3:1.

Para este caso, $a = -3$, $b = 5$, $k = 3$ y $n = 1$. Luego:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1(-3)+3(5)}{3+1}\\
&= \frac{-3+15}{4}\\
&= \frac{12}{4}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 3.

Problemas

1. Para cada caso encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en la razón dada:

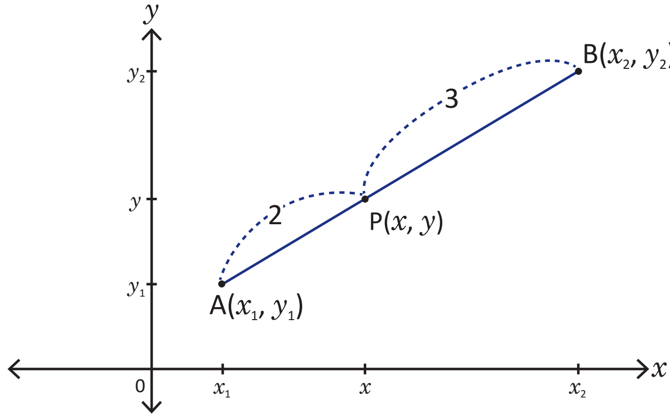
   a) Razón 3:2, A(1) y B(6)
   b) Razón 2:5, A(– 4) y B(3)
   c) Razón 1:4, A(0) y B(5)
   d) Razón 2:3, A(– 10) y B(0)
   e) Razón 3:4, A(–16) y B(–2)
   f) Razón 1:3, A(–1) y B(7)

2. Sean A(–1) y B(b) dos puntos sobre la recta numérica. Si P(1) divide al segmento AB en razón 4:5, ¿cuál es el valor de b?

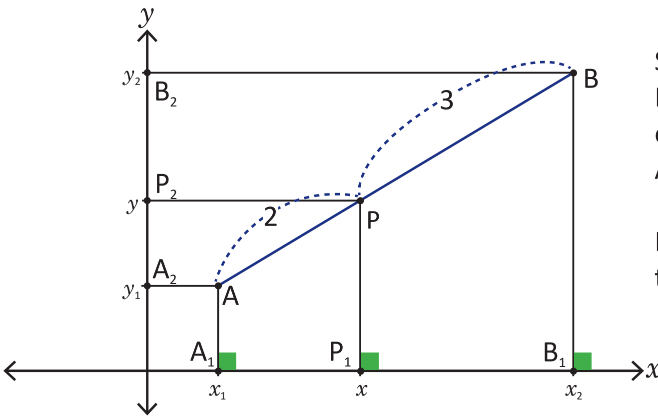
1.3 División de un segmento en una razón dada: plano cartesiano*

Problema inicial

Dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se colocan en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cómo encontrarías las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está sobre el segmento AB y lo divide en razón 2:3?



Solución



Se colocan sobre los ejes los puntos $A_1(x_1, 0)$, $P_1(x, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $A_2(0, y_1)$, $P_2(0, y)$ y $B_2(0, y_2)$ como se muestra en la figura de la izquierda y se trazan los segmentos AA_1, PP_1, BB_1, AA_2, PP_2 y BB_2.

Los segmentos AA_1, PP_1 y BB_1 son paralelos; por el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo:

$$\frac{d(A_1, P_1)}{d(P_1, B_1)} = \frac{d(A, P)}{d(P, B)} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando lo visto en la clase anterior, la coordenada x del punto P es:

$$x = \frac{3x_1 + 2x_2}{2 + 3}.$$

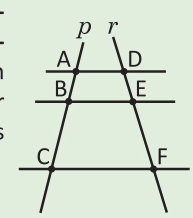
De manera similar se llega a que la coordenada y del punto P es:

$$y = \frac{3y_1 + 2y_2}{2 + 3}.$$

Por lo tanto, $P\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}, \frac{3y_1 + 2y_2}{5}\right)$.

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo: si p y r son rectas cortadas por tres rectas paralelas (ver figura) entonces:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



En general

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ sobre el plano cartesiano, las coordenadas del punto $P(x, y)$ que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón $k{:}n$ son:

$$\left(\frac{nx_1 + kx_2}{k + n}, \frac{ny_1 + ky_2}{k + n}\right).$$

Problemas

Para cada caso encuentra las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB en la razón dada:

a) Razón 1:3, A(– 5, 1) y B(3, –3)

b) Razón 3:4, A(–2, –10) y B(5, 4)

c) Razón 3:2, A(1, 8) y B(6, –2)

d) Razón 4:5, A(–2, –9) y B(7, 0)

1.4 Punto medio de un segmento

Problema inicial

Encuentra el valor o coordenadas del punto medio del segmento AB si:

1. A(a) y B(b) están sobre la recta numérica.
2. A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano.

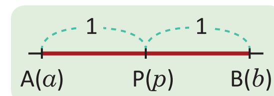
El punto medio divide al segmento AB en razón 1:1.

Solución

Encontrar el punto medio equivale a encontrar el punto que divide al segmento AB en razón 1:1, es decir, $k = 1$ y $n = 1$.

1. El valor p del punto medio P se calcula:

$$p = \frac{1a + 1b}{1 + 1} = \frac{a + b}{2}.$$



Por lo tanto, el valor del punto medio P es $\frac{a+b}{2}$.

2. Las coordenadas (x, y) del punto medio P se calculan:

$$x = \frac{1x_1 + 1x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{1y_1 + 1y_2}{1 + 1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio P son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Conclusión

1. Si A(a) y B(b) son puntos sobre la recta numérica, entonces el valor del punto medio P(p) del segmento AB es:

$$p = \frac{a + b}{2}.$$

2. Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) son puntos sobre la recta numérica, entonces las coordenadas del punto medio P del segmento AB son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula el valor del punto medio P del segmento AB:

a) A(1) y B(7) b) A(0) y B(8) c) A(–2) y B(4) d) A(–4) y B(2)
e) A(–6) y B(–2) f) A(–7) y B(–3) g) A$\left(\sqrt{2}\right)$ y B$\left(3\sqrt{2}\right)$ h) A$\left(-\sqrt{3}\right)$ y B$\left(\sqrt{2}\right)$

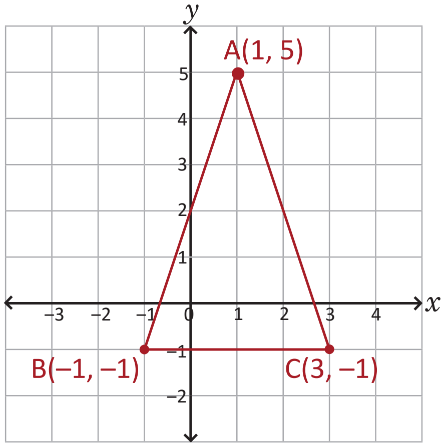
2. Para cada caso, calcula las coordenadas del punto medio P del segmento AB:

a) A(1, 2) y B(3, 6) b) A(–6, 4) y B(0, –2) c) A(–4, –5) y B(2, 1)
d) A(1, 6) y B(4, 0) e) A(–5, –1) y B(3, 1) f) A$\left(0, \sqrt{2}\right)$ y B$\left(0, 6\sqrt{2}\right)$

1.5 Aplicaciones

Problema inicial

Se colocan tres puntos A, B y C en el plano cartesiano cuyas coordenadas se presentan en la figura:



Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Solución

Para que el ΔABC sea isósceles debe tener dos lados de igual longitud. A simple vista los lados AB y CA parecen cumplir esa condición. Se calcula la longitud del lado AB, que es igual a la distancia entre A y B:

$$
\begin{aligned}
d(\text{A, B}) &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [5-(-1)]^2}\\
&= \sqrt{4+36}\\
&= \sqrt{40}\\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

De manera similar se calcula la longitud del lado CA, es decir, la distancia entre C y A:

$$
\begin{aligned}
d(\text{C, A}) &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-5)^2}\\
&= \sqrt{4+36}\\
&= \sqrt{40}\\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

Luego, d(A, B) = d(C, A), es decir, el triángulo ABC tiene dos lados de igual longitud: AB y CA. Por lo tanto, el ΔABC es isósceles.

Problemas

1. Demuestra que el triángulo formado por los puntos A(3, 3), B(–3, –3) y C$\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ es equilátero.
2. Demuestra que el triángulo formado por los puntos D(1, 4), E(–3, –2) y F(5, 1) es escaleno.
3. Demuestra que los puntos A(3, 7), B(–3, –1) y C(3, –1) forman un triángulo rectángulo.

Si los lados a, b y c de un triángulo cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

1.6 Practica lo aprendido

1. Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B:

a) A(–9) y B(–1)

b) A(0) y B(5)

c) A$\left(-\frac{3}{2}\right)$ y B$\left(\frac{7}{2}\right)$

d) A$\left(\sqrt{5}\right)$ y B$\left(3\sqrt{5}\right)$

e) A(–4, 0) y B (5, –2)

f) A(–1, 6) y B(3, –2)

g) A$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y B$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

h) A$\left(-\sqrt{2}, -3\right)$ y B(0, 2)

2. La distancia entre dos puntos A y B es d(A, B) = $2\sqrt{13}$. Si las coordenadas de A son (–2, 5) y las de B son (x, 1), ¿cuál es el valor de x?

3. La distancia entre dos puntos A y B es d(A, B) = $2\sqrt{34}$. Si las coordenadas de A son (–6, y) y las de B son (4, 4), ¿cuál es el valor de y?

4. Para cada caso, encuentra el valor del punto sobre el segmento AB que lo divide en la razón dada:

a) Razón 6:5, A(–10) y B(1)

b) Razón 3:1, A(–2) y B(2)

c) Razón 1:3, A(–6, 7) y B(2, 3)

d) Razón 1:2, A(–4, 0) y B(11, 6)

5. Para cada caso, encuentra el punto medio del segmento AB:

a) A(–1) y B(3)

b) A$\left(-2\sqrt{10}\right)$ y B$\left(\sqrt{10}\right)$

c) A(0, 7) y B(4, –11)

d) A(–5, –1.5) y B(3, 5.5)

6. ¿Cuál es la distancia entre un punto P(x_1, y_1) y el origen (0, 0)?

7. Encuentra las coordenadas del punto B, si el punto medio entre A(–1, 3) y B es P$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8. Los vértices de un triángulo son A(2, 4), B(–2, –2) y C(4, 0). Si D y E son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente, demuestra que DE = $\frac{1}{2}$AC.

9. El vértice A de un triángulo ABC tiene coordenadas (–2, 4). Si los puntos medios de los lados AB y BC son (–3, 1) y (1, 0) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices B y C?

10. El vértice A de un cuadrado ABCD tiene coordenadas (–4, 4). Si los puntos medios de los lados AB, BC, y CD son (–2, 0), (4, –2) y (6, 4) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de B, C y D?

2.1 Pendiente y definición de línea recta

Problema inicial

Con los puntos A(–2, –3), B(0, 1), C(1, 3) realiza lo siguiente:

1. Verifica que para cualquier pareja de puntos, el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.
2. Ubica los puntos en el plano cartesiano. ¿Están todos sobre una misma línea recta?
3. Dado un punto P(2, y), ¿cuál debe ser el valor de y para que P se encuentre sobre la misma línea recta que A y B?

Solución

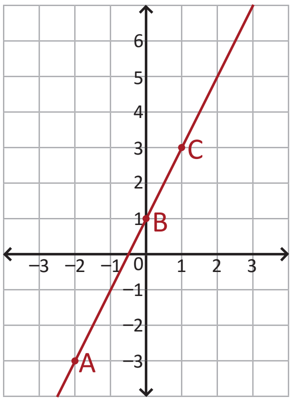
1. Las parejas posibles son A y B, A y C, B y C. Para cada pareja se calcula el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

A(–2, –3) y B(0, 1):
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

A(–2, –3) y C(1, 3):
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

B(0, 1) y C(1, 3):
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Por lo tanto, para cualquier pareja de puntos el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.



2. Se ubican los puntos en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. Utilizando una regla se verifica que, en efecto, los tres se encuentran sobre una misma línea recta.

3. De acuerdo a los numerales anteriores, para que P(2, y) se encuentre sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1), el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ debe ser igual a 2 para cualesquiera pareja de puntos A, B o P. Basta con comprobar que se cumple para B y P:
$$\frac{y-1}{2-0} = 2$$
$$y = 5$$

También puede utilizarse la gráfica de 2 y deducir que el valor de y debe ser igual a 5 para que P(2, 5) esté sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1).

Definición

Una **línea recta** es un conjunto de puntos tales que, al tomar dos de ellos cualesquiera y diferentes A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), el valor del cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es siempre constante. A dicho cociente se le llama **pendiente de la recta** y se denota por la letra m, es decir:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observa que
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Problemas

1. Para cada caso muestra que los puntos A, B y C están sobre la misma línea recta:
   a) A(0, –3), B(3, 0) y C(5, 2)
   b) A(–4, 1), B(0, 3) y C(6, 6)
   c) A(–3, 5), B(–1, –1) y C$\left(\frac{1}{3}, -5\right)$
   d) A(–3, 4), B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)
2. Sin graficar, justifica por qué los puntos D(–3, 1), E(1, –1) y F$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ no están sobre la misma línea recta.

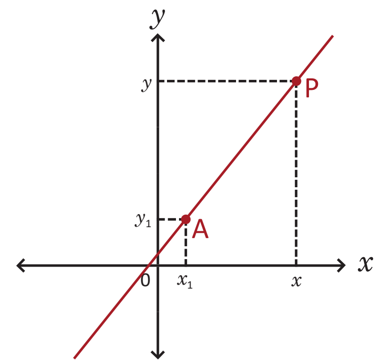
2.2 Ecuación de una recta: forma punto – pendiente*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta l que pasa por un punto A(x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Solución



Sea P(x, y) un punto cualquiera sobre la recta l diferente del punto A(x_1, y_1).
Por definición de línea recta, m es constante; entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Luego,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta l es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Definición

La ecuación de una recta l con pendiente conocida m y un punto A(x_1, y_1) perteneciente a la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A esta ecuación se le llama **forma punto – pendiente de la ecuación de la recta**; al despejar la variable y en lo anterior se obtiene:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

donde el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y el valor de $-mx_1 + y_1$ es constante. Para graficar la recta l conociendo el punto A(x_1, y_1) sobre ella y su ecuación punto – pendiente se hace lo siguiente:

1. Sustituir un valor particular para x y encontrar el correspondiente valor en y.
2. Colocar sobre el plano cartesiano los puntos A(x_1, y_1) y el punto obtenido en el numeral 1; luego trazar la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta l cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto A(–3, 2).

Se sustituyen los valores de m y (x_1, y_1) en la forma punto – pendiente:

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

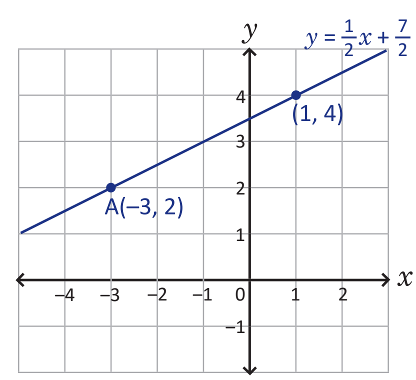
$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Para graficar la recta, se sustituye un valor particular para x en la ecuación anterior, por ejemplo $x = 1$, y se encuentra su correspondiente valor y:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Se colocan los puntos A(–3, 2) y (1, 4) en el plano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, como muestra la figura de la derecha.



Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por A; grafica la recta para cada caso:

a) Pendiente $m = 2$, A(6, 7)

b) Pendiente $m = 1$, A(–1, 0)

c) Pendiente $m = -1$, A(–2, 6)

d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$, A(1, 8)

2.3 Ecuación de una recta dados dos puntos

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) y grafícala.

Solución

Para utilizar la ecuación punto – pendiente es necesario encontrar la pendiente de la recta. Por definición,

$$m = \frac{9-(-3)}{2-(-1)} = 4.$$

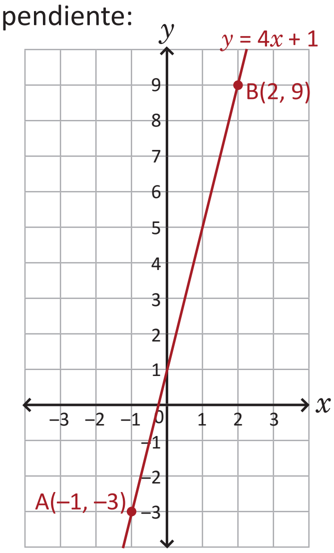
Se toman $x_1 = -1$, $y_1 = -3$ y se sustituyen los valores en la ecuación punto – pendiente:

También puedes utilizar las coordenadas de B en la forma punto – pendiente y verificar que la ecuación es la misma.

$$y - (-3) = 4[x - (-1)]$$

$$y + 3 = 4(x + 1)$$

$$y = 4x + 1$$



Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) es $y = 4x + 1$. Para graficarla basta con colocar dos puntos pertenecientes a la recta (estos pueden ser los puntos A y B dados en el enunciado del problema) y trazar la línea como lo muestra la figura de la derecha:

Conclusión

La ecuación de una recta l que pasa por dos puntos conocidos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Para graficar la recta l se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano, luego se traza la recta que pasa por ambos puntos. En general, para trazar la gráfica de una línea recta l basta con ubicar dos puntos pertenecientes a l y trazar la recta que pasa por ambos.

Ejemplo

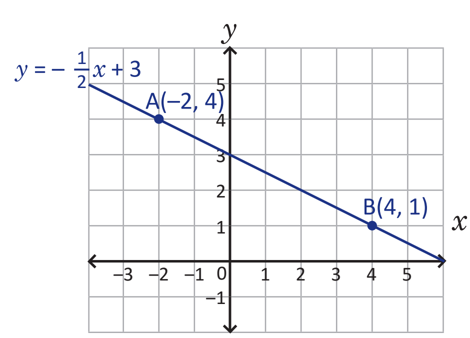
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–2, 4) y B(4, 1) y grafícala.

Se sustituyen los valores de x_1, y_1, x_2 y y_2:

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}[x - (-2)]$$

$$y = \frac{-3}{6}(x + 2) + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$



La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$ se muestra en la figura de la derecha.

Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafica la recta para cada caso:

a) A(–3, –1) y B(1, –5)

b) A(2, –2) y B(3, 1)

c) A(0, –5) y B(6, 4)

d) A(0, 4) y B(12, –6)

2.4 Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

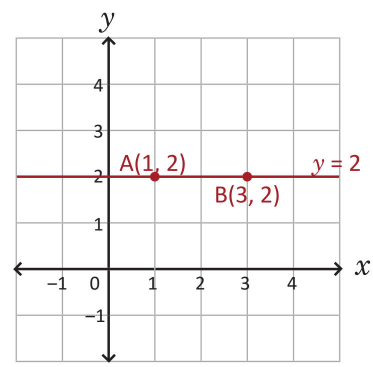
Problema inicial

Para cada caso, grafica la recta que pasa por los puntos A y B, y deduce su ecuación:

a) A(1, 2) y B(3, 2) b) A(1, –1) y B(1, 3)

Solución

a) Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano y se traza la línea recta como lo muestra la figura de la derecha; el resultado es una recta horizontal, o sea, paralela al eje x. Su ecuación se encuentra utilizando lo visto en la clase anterior:



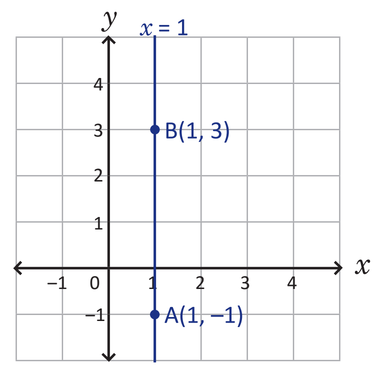
$$y - 2 = \frac{2-2}{3-1}(x-1)$$

$$y = \frac{0}{2}(x-1) + 2$$

$$y = 2$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2$.

b) Al colocar los puntos A(1, –1) y B(1, 3) en el plano cartesiano y trazar la línea recta se obtiene una recta vertical, es decir, paralela al eje y. Si se calcula la pendiente de la misma se obtiene lo siguiente:



$$m = \frac{3-(-1)}{1-1} = \frac{4}{0}$$

Esto indica que la pendiente es indefinida. La primera coordenada de los puntos sobre la recta es siempre constante e igual a 1 (no así la segunda coordenada), por lo tanto, la ecuación de la recta es: $x = 1$.

Conclusión

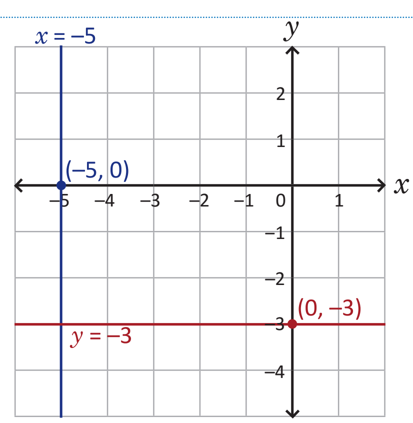
La ecuación de una recta l paralela a uno de los ejes de coordenadas es:

a) $y = k$, si la recta es paralela al eje x. El punto (0, k) pertenece a la recta l.

b) $x = k$, si la recta es paralela al eje y. El punto (k, 0) pertenece a la recta l.

Ejemplo

Grafica las rectas $y = -3$ y $x = -5$.



Se ubican los puntos (0, –3) y (–5, 0). Luego, se traza la recta:

1. Paralela al eje x que pasa por (0, –3) en el caso de $y = -3$;
2. Paralela al eje y que pasa por (–5, 0) en el caso de $x = -5$.

Ambas rectas se presentan en la figura de la derecha.

Problemas

1. Encuentra la ecuación y grafica la recta que pasa por el punto A y es paralela a uno de los ejes de coordenadas:

   a) A(0, 4) y es paralela al eje x. b) A$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es paralela al eje x.

   c) A(5, 0) y es paralela al eje y. d) A(3, –1) y es paralela al eje y.

2. Demuestra que la pendiente de cualquier recta horizontal es igual a cero.

2.5 Forma general de la ecuación de una recta

Problema inicial

Grafica en un mismo plano cartesiano las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3y + 6 = 0$ b) $y + 2 = 0$ c) $4x - 24 = 0$

Despeja y en los literales a) y b), y x en el literal c).

Solución

a) Se despeja la variable y:

$$3y = 2x + 6$$
$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Esta última es la ecuación de una línea recta, que pasa por los puntos (0, 2) y (3, 4).

b) Se despeja la variable y:

$$y = -2$$

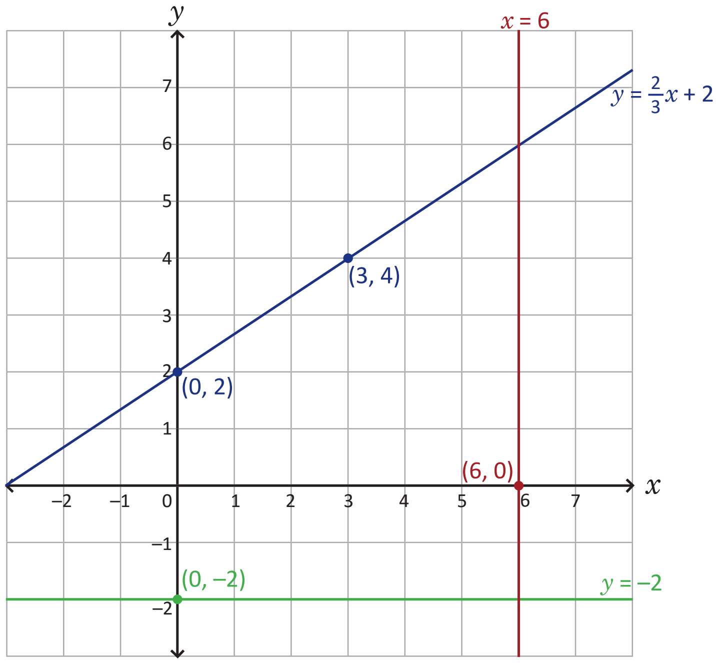
Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, –2).

c) Se despeja la variable x:

$$4x = 24$$
$$x = 6$$

Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje y que pasa por el punto (6, 0).

En el literal a), para encontrar los puntos (0, 2) y (3, 4) se sustituyeron los valores $x = 0$ y $x = 3$ en la ecuación de la recta y se encontraron sus respectivos valores $y = 2$ y $y = 4$.



Definición

La ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales (a y b no pueden ser cero al mismo tiempo), tiene por gráfica una línea recta.

A esta ecuación se le llama **forma general de la ecuación de una recta**.

La forma general de la ecuación de una recta no es única. Por ejemplo, las ecuaciones $2x - y + 1 = 0$, $-2x + y - 1 = 0$ y $4x - 2y + 2 = 0$ representan la misma recta. Los coeficientes de la segunda son los opuestos de los de la primera, y los coeficientes de la tercera son el doble de los de la primera.

Problemas

1. Grafica, en un mismo plano cartesiano, las rectas representadas por las siguientes ecuaciones:

   a) $3x + y - 5 = 0$ b) $x - 2y - 9 = 0$ c) $5y - 5 = 0$ d) $2x + 3 = 0$

2. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

   a) $y = -2x + \frac{5}{4}$ b) $y = \frac{3}{5}x + 2$ c) $y = -\frac{5}{6}$ d) $x = \frac{8}{3}$

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal, determina (sin graficar) si los puntos A, B y C se encuentran sobre la misma línea recta:

   a) A(0, 7), B(2, 3) y C(3, 1)

   b) A(–3, 5), B(1, 2) y C(5, –1)

   c) A(–1, –6), B(0, –2) y C(1, 3)

   d) A(–4, 8), B(2, 4) y C(20, –8)

2. Dados los puntos A(0, –3) y B(6, 4), ¿cuál debe ser el valor de x en C(x, 25) para que los puntos A, B y C estén sobre la misma línea recta?

3. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano:

   a) Pendiente $m = -4$, A(–3, 5)

   b) Pendiente $m = 10$, A(1, –1)

   c) Pendiente $m = \frac{1}{5}$, A(0, 4)

   d) Pendiente $m = \frac{2}{5}$, A$\left(-2, -\frac{4}{5}\right)$

4. Demuestra que la ecuación de la recta que tiene pendiente conocida m y pasa por el punto (0, b) es $y = mx + b$.

A la ecuación de la recta escrita en la forma $y = mx + b$ se le conoce como forma punto – intercepto.

5. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafícalas en un solo plano cartesiano:

   a) A(5, 1) y B(6, –2)

   b) A(–4, –4) y B(2, 5)

   c) A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

   d) A(0, 0) y B$\left(2, -\frac{13}{4}\right)$

6. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta paralela a uno de los ejes de coordenadas y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano cartesiano:

   a) A(9, 0) y es paralela al eje y

   b) A(–5, 2) y es paralela al eje x

   c) A$\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y es paralela al eje y

   d) A$\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$ y es paralela al eje x

7. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

   a) $y = 4x + 3$

   b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

   c) $y = 4x - \frac{2}{3}$

   d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

8. Encuentra los valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$ si la recta pasa por los puntos (–1, 0) y (3, 2).

3.1 Intersección de una recta con el eje x

Problema inicial

En cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x:

a) $y = 3x + 3$ b) $x + 2y - 2 = 0$

Punto de intersección se refiere al punto donde se cortan la recta y el eje x en este caso.

Unidad 2

Solución

Sea A(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje x. En ambos casos, A se encuentra sobre el eje x, por tanto su segunda coordenada (y_1) es igual a cero y A(x_1, 0).

a) Si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación:

$$y = 3x + 3$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$0 = 3x_1 + 3$$
$$3x_1 = -3$$
$$x_1 = -1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje x son A(–1, 0).

b) De forma similar al literal anterior, si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación:

$$x + 2y - 2 = 0$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$x_1 + 2(0) - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje x son A(2, 0).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son (x_1, 0) donde el valor de x_1 se calcula sustituyendo $y = 0$ y $x = x_1$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de x_1.

Problemas

1. Para cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x.

a) $y = 2x - 2$ b) $y = -\frac{x}{2} + 2$ c) $2x - 3y + 6 = 0$

d) $8x + 3y + 6 = 0$ e) $x = \sqrt{2}$ f) $y = \sqrt{3}$

2. Dada una recta con ecuación $ax + by + c = 0$ que no es paralela a ningún eje de coordenadas. Demuestra que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

3. Sea l una recta con ecuación $x = k$. Demuestra que las coordenadas del punto de intersercción de l con el eje x son (k, 0).

4. Sea l una recta paralela al eje x. ¿Existe un punto de intersección entre la recta l y el eje x? Justifica tu respuesta.

3.2 Intersección de una recta con el eje y

Problema inicial

Utilizando las ecuaciones de las rectas del Problema inicial de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

Solución

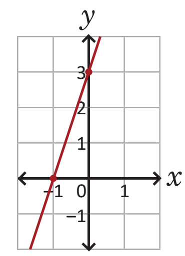
Sea B(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje y. En ambos casos, B se encuentra sobre el eje y, por tanto su primera coordenada (x_1) es igual a cero y B(0, y_1).

a) Si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación: $y = 3x + 3$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se encuentra y_1:

$$y_1 = 3(0) + 3$$
$$y_1 = 3$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje y son B(0, 3).

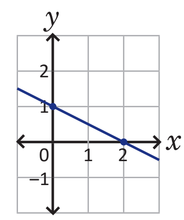
Gráficamente, la recta $y = 3x + 3$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (–1, 0) y (0, 3).



b) De manera similar al literal anterior, si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación: $x + 2y - 2 = 0$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se despeja y_1:

$$0 + 2y_1 - 2 = 0$$
$$2y_1 = 2$$
$$y_1 = 1$$

Gráficamente, la recta $x + 2y - 2 = 0$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (2, 0) y (0, 1).



Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje y son B(0, 1).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje y son (0, y_1), donde el valor de y_1 se calcula sustituyendo $y = y_1$ y $x = 0$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de y_1.

Si l es paralela al eje x entonces su ecuación es de la forma $y = k$ y el punto de intersección de la recta con el eje y es (0, k). Si l es paralela al eje y entonces no hay intersección entre la recta y el eje y.

En general, a los puntos donde una línea recta corta a los ejes de coordenadas se les llaman **interceptos con los ejes**. La línea recta puede tener a lo sumo dos interceptos (uno en cada eje).

Problemas

1. Con las ecuaciones de las rectas dadas en el problema 1 de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

2. Para cada literal encuentra las coordenadas de los interceptos con los ejes:
   a) $2x - 3y - 6 = 0$ b) $4x + y + 2 = 0$

3. Sean p y q números reales diferentes de cero. Demuestra que los interceptos con los ejes de la recta con ecuación $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ son (p, 0) y (0, q). A esta ecuación se le llama **forma simétrica de la ecuación de una recta**.

3.3 Intersección entre rectas

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas con ecuaciones $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$.

El punto de intersección entre las rectas satisface ambas ecuaciones.

Solución

Sea P(x, y) el punto de intersección entre ambas rectas. Esto indica que las coordenadas de P satisfacen tanto la primera como la segunda ecuación, y encontrar sus coordenadas equivale a resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 3 & \text{--------- (1)} \\ 2x - 3y + 4 = 0 & \text{--------- (2)} \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y de la ecuación (1) en la ecuación (2) y se despeja la variable x:

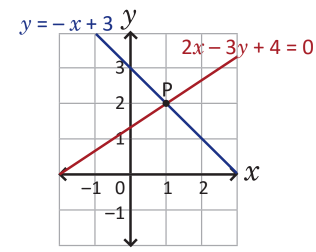
$$\begin{aligned} 2x - 3(-x + 3) + 4 &= 0 \\ 2x + 3x &= 9 - 4 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de x en la ecuación (1):

$$y = -1 + 3 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección entre las rectas es P(1, 2).

El punto donde se cortan las rectas de $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$ es P(1, 2).



Conclusión

Dadas dos líneas rectas, las coordenadas del punto de intersección entre ambas (es decir, donde se cortan las líneas) se encuentra resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas formadas por las ecuaciones de dichas rectas.

Si dos rectas diferentes se intersecan en un punto P este es único, es decir, no existe otro punto R diferente a P donde las rectas se crucen o se corten.

Problemas

1. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas cuyas ecuaciones son:

   a) $y = -3x - 8$ y $4x - 3y + 15 = 0$
   b) $x + y - 2 = 0$ y $2x - y + 2 = 0$
   c) $x + 2y + 6 = 0$ y $4x + 3y + 4 = 0$
   d) $2x + 3y = 4$ y $4x - y = 8$
   e) $y = x + 1$ y $x = -2$
   f) $3x - 2y - 5 = 0$ y $y = 2$

2. Dadas dos rectas con ecuaciones $y = k_1$ y $x = k_2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas?

3. Dadas dos rectas con ecuaciones $10x - 5y = 10$ y $10x - 5y = -25$, ¿se cortan estas en algún punto? Verifica gráficamente tu respuesta.

3.4 Rectas paralelas

Problema inicial

Dadas las rectas con ecuaciones $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 5$:

1. ¿Cuál es el valor de la pendiente en cada recta?
2. ¿Se cortan las rectas en algún punto? Justifica tu respuesta.
3. Grafica ambas rectas en un mismo plano cartesiano. ¿Cómo son, una con respecto a la otra?

Si la ecuación de una recta está escrita en la forma $y = mx + b$ entonces el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta.

Solución

1. Las ecuaciones de las rectas están escritas en la forma $y = mx + b$, por tanto la pendiente de ambas rectas es igual a 2.

2. Para saber si se cortan las rectas debe resolverse el sistema:

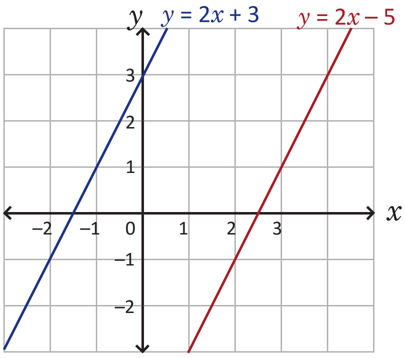
$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \text{----------} \ (1) \\ y = 2x - 5 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$

Pero este sistema no tiene solución, ya que al sustituir (1) en (2) resulta:

$$2x + 3 = 2x - 5$$
$$2x - 2x = -3 - 5$$
$$0 = -8$$

Esto indica que las rectas NO se cortan en ningún punto.

3. Las gráficas de ambas rectas se presentan en la figura de la derecha. Como las rectas no se cortan en ningún punto, esto indica entonces que son paralelas.



Dos rectas son paralelas si, aunque se prolonguen, guardan la misma distancia entre sí.

Teorema

Dos (o más) líneas rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. Esto quiere decir que si dos (o más) rectas son paralelas entonces tienen la misma pendiente y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$.

Se despeja y en $2x + y - 1 = 0$ para encontrar el valor de la pendiente: $y = -2x + 1$; luego, $m = -2$. Como la recta pasa por A(1, 3), se utiliza la forma punto – pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$ es $y = -2x + 5$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son paralelas:

a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$ b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$ c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

2. Para cada literal, encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto A:

a) $2x - y = 0$; A(4, 0) b) $x + 3y - 5 = 0$; A(3, 4)

c) $y = 5$; A(0, –1) d) $x = 1$; A(3, –2)

3.5 Rectas perpendiculares*

Problema inicial

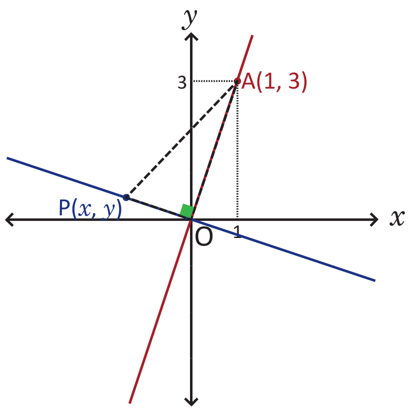
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y además es perpendicular a la recta con ecuación:

$$y = 3x.$$

¿Cuál es la relación entre las pendientes de ambas rectas?

Solución

La ecuación buscada es de la forma $y = mx$, ya que pasa por el origen; sea P(x, y) un punto cualquiera sobre ella. El punto A(1, 3) pertenece a $y = 3x$ pues sus coordenadas satisfacen la ecuación.



Si O es el origen entonces el triángulo POA es rectángulo (las rectas son perpendiculares). Por el teorema de Pitágoras:

$$d(\text{P, A})^2 = d(\text{P, O})^2 + d(\text{O, A})^2$$

En la ecuación anterior: $d(\text{P, A})^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$, $d(\text{P, O})^2 = x^2 + y^2$ y $d(\text{O, A})^2 = 1^2 + 3^2$. Se sustituyen los valores y se despeja y en términos de x:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + y^2) + (1 + 9)$$

$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + \cancel{9}$$

$$-2x - 6y = 0$$

$$y = -\frac{1}{3}x$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x$ que pasa por el origen es: $y = -\frac{1}{3}x$. Al comparar las pendientes de ambas rectas, que son 3 y $-\frac{1}{3}$ respectivamente, se observa que el resultado del producto de ellas es igual a –1.

Teorema

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendiente es igual a –1, o sea:

$$m_1 m_2 = -1$$

Esto quiere decir que, si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es igual a –1 y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es perpendicular a $2x + y - 1 = 0$.

Al despejar y en $2x + y - 1 = 0$ se obtiene $y = -2x + 1$; luego, $m_1 = -2$. Si m_2 es la pendiente de la recta buscada entonces debe cumplir $m_1 m_2 = -1$; se sustituye m_1 y se despeja m_2:

$$-2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $2x + y - 1 = 0$ que pasa por A(1, 3) es $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

   a) $y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$
   b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$
   c) $x - y + 2 = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$
   d) $x - 2y + 2 = 0$ y $2x + y - 6 = 0$

2. Para cada caso encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto P:

   a) $y = x$; P(3, 3)
   b) $y = -2x + 5$; P(–4, 3)
   c) $x - 4y + 4 = 0$; P(–1, 5)
   d) $y = 1$; P(1, –1)

Unidad 2

3.6 Distancia de un punto a una recta

Teorema

Dada una recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ y $P(x_1, y_1)$ un punto que no pertenece a l, la distancia desde P a la recta l se denota por $d(P, l)$ y:

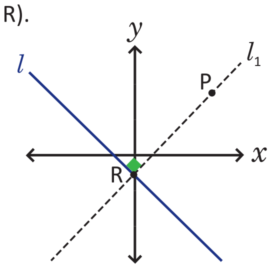
$$d(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo

Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) l: $2x - y + 1 = 0$ y P(2, 0) b) l: $3x + 2y - 9 = 0$ y P(2, –2) c) l: $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ y P(0, 5)

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1 entonces, calcular $d(P, l)$ equivale a encontrar $d(P, R)$.



a) Se sustituyen los valores: $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $x_1 = 2$ y $y_1 = 0$:

$$d(P, l) = \frac{|2(2) + (-1)(0) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{|4 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{5}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\sqrt{5}$.

b) Se sustituyen los valores: $a = 3$, $b = 2$, $c = -9$, $x_1 = 2$ y $y_1 = -2$:

$$d(P, l) = \frac{|3(2) + (2)(-2) + (-9)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{|6 - 4 - 9|}{\sqrt{9 + 4}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

c) Primero debe escribirse la ecuación de la recta en la forma $ax + by + c = 0$. Al multiplicar toda la ecuación por 3 resulta:

$$3y = x + 8$$
$$x - 3y + 8 = 0$$

Luego se sustituyen los valores: $a = 1$, $b = -3$, $c = 8$, $x_1 = 0$ y $y_1 = 5$:

$$d(P, l) = \frac{|1(0) + (-3)(5) + 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$$
$$= \frac{|0 - 15 + 8|}{\sqrt{1 + 9}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

Problemas

1. Encuentra la distancia del punto P a la recta l:
   a) l: $x + 3y - 3 = 0$ y P(1, –1) b) l: $2x + y - 4 = 0$ y P(0, 3)
   c) l: $y = \frac{3}{4}x$ y P(1, –2) d) l: $y = \frac{x}{5} + 1$ y P(3, –3)

2. Demuestra que la distancia del origen a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3.7 Practica lo aprendido

1. Encuentra las coordenadas de los interceptos de cada recta con los ejes:

a) $y = 2x$

b) $5x + 2y + 10 = 0$

c) $y = \frac{x}{6} - 1$

d) $y = -8x + 4$

e) $y = 3$

f) $x = -4$

2. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas:

a) $x + y - 2 = 0$; $4x - y + 7 = 0$

b) $y = -x$; $3x + y - 6 = 0$

c) $x + 2y + 2 = 0$; $y = 2x + 9$

d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$

e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$

f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

3. Determina si cada pareja de rectas son paralelas o perpendiculares:

a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$

b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$

c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$

d) $y = -2$; $x = 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -2x + 5$; A(–2, –3)

b) l: $y = 3x + 4$; A(5, –1)

5. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1)

b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(–6 , 0)

6. Dos rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto (–4, 4). Si l_1 pasa por (0, 12) y es perpendicular a l_2, ¿cuáles son las ecuaciones de ambas rectas?

7. Sea l la recta con ecuación $5x - 2y = 0$. Determina los valores de a y b para que la recta $ax + by + c = 0$:

a) Sea paralela a la recta l.

b) Sea perpendicular a la recta l.

Existen infinitas rectas paralelas y perpendiculares a l: $5x - 2y = 0$; basta con encontrar un par de valores para a y b en cada literal.

8. Sea l la recta con ecuación $x - 3y - 6 = 0$. Determina el valor de a en la recta con ecuación $ax + (a - 4)y + c = 0$ para que:

a) Sea paralela a la recta l.

b) Sea perpendicular a la recta l.

9. Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) P(4, –9); l: $x + 4y - 2 = 0$

b) P(8, 5); l: $y = x$

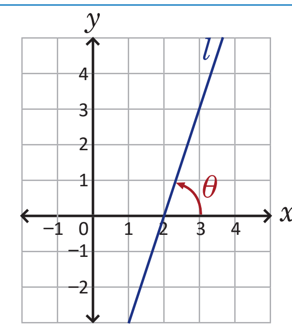
c) P(0, –3); l: $y = -2x$

d) P(3, 1); l: $x = -3$

3.8 Ángulo de inclinación de una recta

Problema inicial

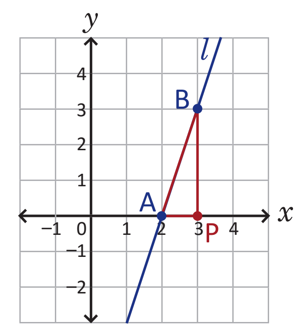
Dada la recta l: $y = 3x - 6$, ¿cuál es la medida del ángulo θ que va desde el eje x positivo hacia la recta? Aproxima hasta las décimas.



Forma el triángulo rectángulo APB con los puntos A(2, 0), P(3, 0) y B(3, 3) y utiliza razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Solución

Los puntos A(2, 0) y B(3, 3) pertenecen a la recta l; se toma también el punto P(3, 0) sobre el eje x formándose el triángulo rectángulo APB como se muestra en la figura. Utilizando las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo:



$$\tan A = \frac{PB}{AP}$$

Nótese que la medida del ángulo θ es igual a la medida del ángulo cuyo vértice es A y el cociente $\frac{PB}{AP}$ corresponde al valor de la pendiente de la recta l, o sea 3. Luego:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= 3\\ \theta &= \tan^{-1}(3)\\ &\approx 71.6°\end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida del ángulo θ es aproximadamente 71.6°.

Definición

Dada una recta l, se llama **ángulo de inclinación** de la recta l al formado por el eje x positivo y la recta (en sentido antihorario). Si m es la pendiente de la recta l y θ su ángulo de inclinación entonces:

$$0° \leq \theta < 180° \text{ y } \tan\theta = m.$$

Ejemplo

Calcula el ángulo de inclinación de la recta l: $x + 2y + 1 = 0$ (aproxima hasta las décimas).

Se escribe la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$ para encontrar la pendiente:

$$\begin{aligned}2y &= -x - 1\\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Luego, $m = -\frac{1}{2}$ y:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= -\frac{1}{2}\\ \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &\approx 153.4°\end{aligned}$$

Si al calcular $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste −26.6°, este es el ángulo medido desde el eje x positivo hacia la recta en sentido horario. Como el ángulo de inclinación debe ser en sentido antihorario basta con sumar al resultado anterior 180° ya que $\tan\theta = \tan(\theta + 180°)$.

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de l: $x + 2y + 1 = 0$ es aproximadamente 153.4°.

Problemas

Calcula el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (aproxima hasta las décimas):

a) $y = 2x + 7$
b) $y = -x + 1$
c) $x - 2y + 4 = 0$
d) $5x + 3y - 20 = 0$
e) $x + 1 = 0$
f) $y - 1 = 0$

3.9 Ángulo entre rectas

Teorema

Sean l_1 y l_2 dos rectas cualesquiera no perpendiculares con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si α es el ángulo formado entre ambas rectas y medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario, entonces:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

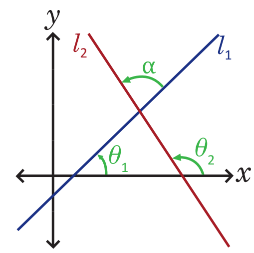
para $m_1 m_2 \neq -1$.

Si θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 respectivamente entonces:

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

De lo anterior,

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

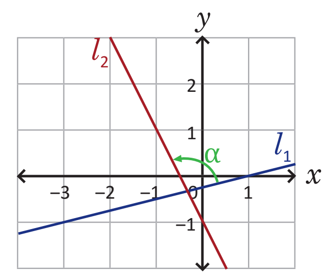


Ejemplo

¿Cuál es la medida del ángulo formado por las rectas l_1: $x - 4y - 1 = 0$ y l_2: $y = -2x - 1$ medido de l_1 a l_2? Aproxima hasta las décimas.

Primero deben determinarse las pendientes m_1 y m_2 de las rectas l_1 y l_2 respectivamente. Para el caso de l_1 se escribe su ecuación en la forma $y = m_1 x + b$:

$$4y = x - 1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



Luego, $m_1 = \frac{1}{4}$ y $m_2 = -2$. Sea α el ángulo entre las rectas, medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario (ver figura). Entonces:

$$\tan\alpha = \frac{-2 - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)(-2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{9}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$\approx 102.5°$$

Si al calcular $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste como resultado –77.5° (aproximadamente) entonces este valor corresponde al ángulo medido desde l_1 hasta l_2 pero en sentido horario. Basta con sumar al resultado 180° pues:

$$\tan\theta = \tan(180° + \theta)$$

Por lo tanto, la medida del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2 es 102.5°.

Problemas

1. Calcula el ángulo formado entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2), aproxima hasta las décimas:
   a) l_1: $y = 5x$, l_2: $y = -5x$
   b) l_1: $y = x - 1$, l_2: $y = -2x + 7$
   c) l_1: $y = 4x - 4$, l_2: $y = -5x$
   d) l_1: $5x + 2y + 12 = 0$, l_2: $2x + 3y + 6 = 0$
   e) l_1: $2x - 7y - 2 = 0$, l_2: $2x + y + 2 = 0$
   f) l_1: $6x - y - 2 = 0$, l_2: $3x + 5y + 20 = 0$

2. Calcula la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos A(–1, 6), B(–5, 3) y C(4, 1), aproxima hasta las décimas.

3. Dadas dos rectas l_1: $y = k$ y l_2: $y = mx + b$, con m y k números reales diferentes de cero. Demuestra que el ángulo entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2) es igual al ángulo de inclinación de la recta l_2.

3.10 Aplicaciones

Problema inicial

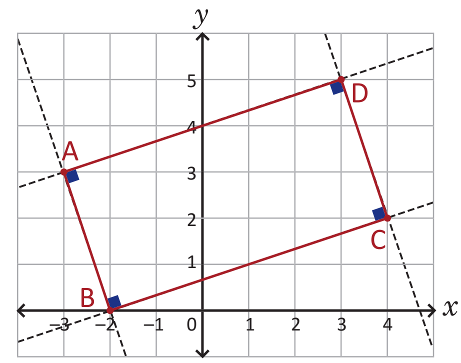
Demuestra que los puntos A(–3, 3), B(–2, 0), C(4, 2) y D(3, 5) forman un rectángulo.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene 4 ángulos rectos.

Solución

Para que ABCD sea rectángulo debe cumplirse lo siguiente:

a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ b) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ c) $\overline{CD} \perp \overline{DA}$



Si se cumplen estas tres condiciones entonces también el lado DA será perpendicular al lado AB.

a) Para demostrar que el lado AB es perpendicular al lado BC debe verificarse que la recta que pasa por A y B es perpendicular a la que pasa por B y C.

Pendiente de la recta que pasa por A(–3, 3) y B(–2, 0): $m_1 = \frac{0-3}{-2-(-3)} = -3$.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{2-0}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

b) De forma similar al literal anterior se resuelve para este caso.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{1}{3}$.

Pendiente de la recta que pasa por C(4, 2) y D(3, 5): $m_3 = \frac{5-2}{3-4} = -3$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_2 m_3 = \frac{1}{3}(-3) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.

c) Al realizar un procedimiento similar a los literales anteriores se obtiene la pendiente de la recta que pasa por D y A, cuyo valor es $\frac{1}{3}$. El producto de las pendientes es igual a –1, luego: $\overline{CD} \perp \overline{DA}$.
Por lo tanto, ABCD es rectángulo.

Problemas

1. Demuestra que los puntos A(2, 3), B(0, –3), C(5, –2) y D(7, 4) forman un paralelogramo.

2. Demuestra que los puntos A(–4, 0), B(1, –1), C(6, 0) y D(1, 1) forman un rombo.

Un rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados de igual longitud.

3.11 Practica lo aprendido

1. Demuestra que los puntos A(0, 3), B(4, –1), C(7, 2) y D(5, 4) forman un trapecio rectángulo.

Un cuadrilátero es trapecio rectángulo si tiene un par de lados opuestos paralelos y un ángulo recto.

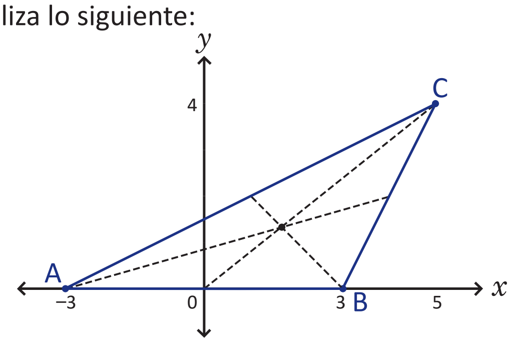
2. Con los puntos A(–3, 3), B(–5, –1), C(5, 1) y D(3, 5) se forma un cuadrilátero. Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de ABCD es paralelogramo.

3. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(–1, 6) y B(7, 4).

La mediatriz de un segmento es la recta que corta al segmento en su punto medio y forma con él un ángulo recto.

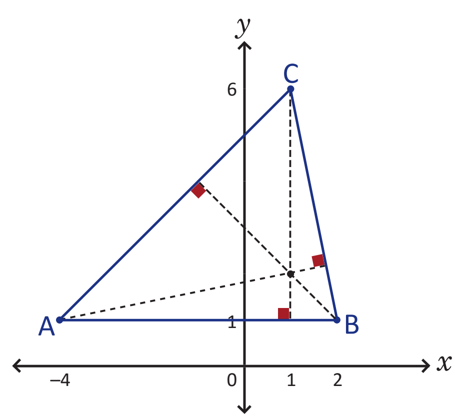
4. La **mediana** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y termina en el punto medio del lado opuesto al vértice; en un triángulo pueden trazarse tres medianas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–3, 0), B(3, 0) y C(5, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–3, 0) y por el punto medio del lado BC);
   c) verifica que las medianas se intersecan en un punto.



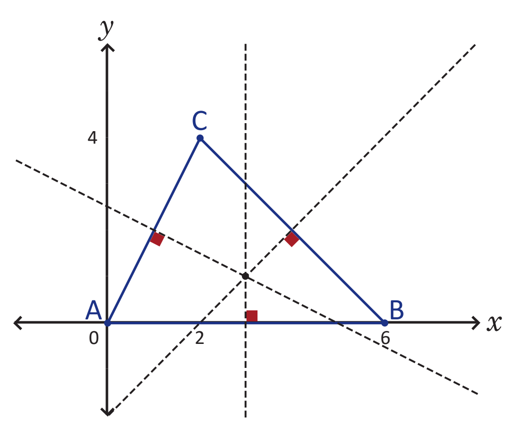
5. La **altura** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y forma con el lado opuesto un ángulo recto; en un triángulo pueden trazarse tres alturas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–4, 1), B(2, 1) y C(1, 6); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las pendientes de las rectas que pasan por los puntos A y B, B y C, y C y A;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres alturas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–4, 1) y es perpendicular al lado BC);
   c) verifica que las alturas se intersecan en un punto.



6. Se forma un triángulo con los puntos A(0, 0), B(6, 0) y C(2, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las mediatrices del triángulo (por ejemplo, una de ellas pasa por el punto medio del lado AB y es perpendicular a este);
   c) verifica que las mediatrices se intersecan en un punto.



3.12 Problemas de la unidad

1. Dados los puntos A(–5, 3) y B(4, –3), encuentra las coordenadas de los puntos C y D que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

El punto C divide al segmento AB en razón 1:2.

2. Determina el valor de a para que el punto $P\left(a + 1, \frac{1}{a}\right)$ se encuentre sobre la recta con ecuación $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Tres de los vértices de un paralelogramo ABCD son A(–5, 0), B(–2, –1) y C(5, 2). Encuentra las coordenadas del cuarto vértice.

4. Con el triángulo ABC cuyos vértices son A(0, 8), B(–4, 0) y C(10, 4) realiza lo siguiente:

   a) encuentra los puntos medios de los lados AB, BC y CA, y denótalos por D, E y F respectivamente;
   b) encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento AE en razón 2:1;
   c) encuentra las coordenadas de los puntos que dividen a los segmentos BF y CD en razón 2:1. ¿Qué relación hay con el literal anterior?
   d) ¿Qué puedes concluir de este problema y el problema 4 de la clase 3.11?

5. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(–3, –1) y B(2, 2). Si la intersección de sus diagonales está en el punto P(3, 0), ¿cuáles son las coordenadas de sus otros dos vértices?

6. Los puntos medios de los lados AB, BC y CA de un triángulo son D(–1, –1), E(4, 2) y F(2, 3) respectivamente. Encuentra las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

7. Demuestra que si dos rectas con ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ son perpendiculares entonces $aa_1 + bb_1 = 0$.

8. Demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y que además es paralela a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

9. Las rectas l_1 y l_2 se cortan formando un ángulo de 135° (medido de l_1 a l_2). Si la pendiente de l_2 es igual a –3, ¿cuál es el valor de la pendiente de l_1?

10. Encuentra las coordenadas de los vértices B y C de un triángulo ABC, si las coordenadas de A son (–4, 0) y las ecuaciones de la altura y mediana trazadas desde B son $4x + y - 7 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$ respectivamente.

4.1 Práctica en GeoGebra: segmentos y ecuaciones de líneas rectas

En el año anterior aprendiste cómo graficar funciones en GeoGebra, realizar desplazamientos horizontales y verticales de funciones cuadráticas, graficar vectores y realizar operaciones con ellos. En esta práctica se utilizará el software para graficar segmentos y líneas rectas a partir de su ecuación.

Debes verificar si tu computadora cuenta con GeoGebra, para ello busca el ícono de la aplicación (es el que se encuentra en la esquina superior derecha de esta página). Caso contrario puedes descargar el software siguiendo el enlace: GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

Descarga (instala) "GeoGebra Clásico 5". También puedes descargar la app para el celular o trabajar "GeoGebra en línea" en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

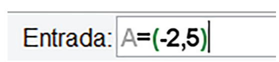
Práctica

Puntos y segmentos en el plano cartesiano

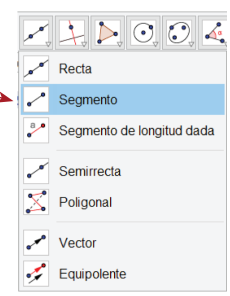
1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic (o doble clic) al ícono del software.

2. Para crear el segmento AB con A(–2, 5) y B(3, –4):

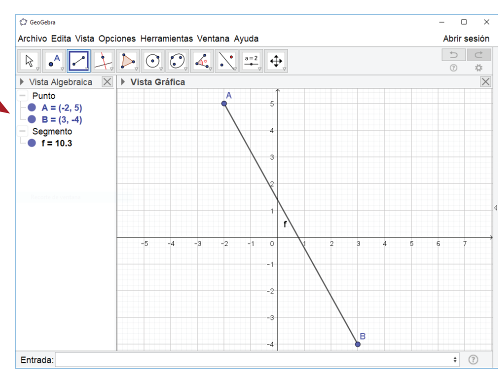
a) Ubica primero los puntos en el plano, ya sea utilizando la herramienta Punto o la barra de entrada.



En GeoGebra los puntos se nombran con letras mayúsculas; si escribes "a=(-2,5)" obtendrás por resultado un vector.

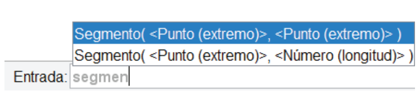


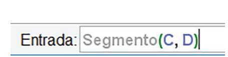
b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Recta y selecciona Segmento.

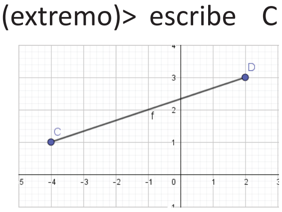


c) En la Vista Gráfica selecciona los puntos A y B. En la Vista Algebraica aparecerá el nombre del segmento y la longitud del mismo. Recuerda que la longitud del segmento AB es igual a la distancia entre los puntos A y B, que en este caso particular es 10.3 aproximadamente.

d) También puedes crear segmentos usando la barra de entrada en lugar de la herramienta Segmento. Crea los puntos C(–4, 1) y D(2, 3); en la barra de entrada escribe la palabra segmento y elige la opción "Segmento(<Punto(extremo)>, <Punto(extremo)>)". En lugar de <Punto(extremo)> escribe C y D respectivamente.

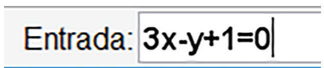


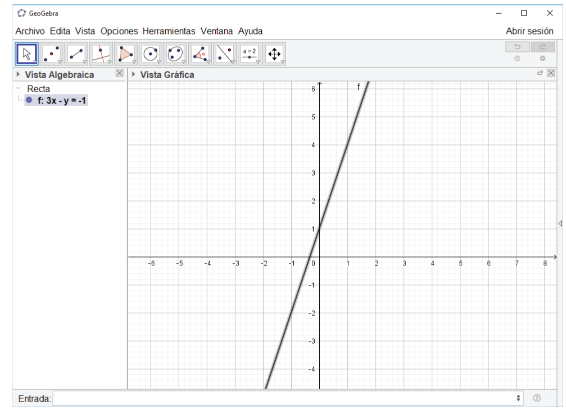




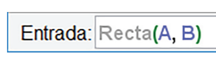
Líneas rectas:

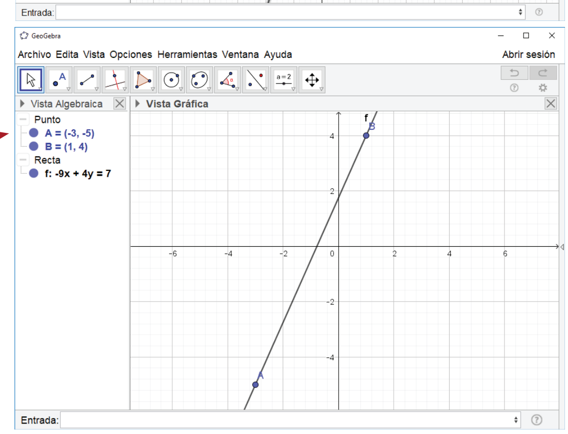
3. Para trazar la gráfica de una línea recta cuya ecuación es conocida, simplemente se escribe dicha ecuación en la barra de entrada. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $3x - y + 1 = 0$ se escribe 3x-y+1=0 y presionas enter:





4. Para encontrar la ecuación y trazar la gráfica de una recta que pasa por dos puntos dados, se utiliza el comando Recta(<Punto>, <Punto>) en la barra de entrada. Por ejemplo, para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–3, –5) y B(1, 4) creas primero los puntos A y B; luego escribe Recta(A,B) y presionas enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la recta y en la Vista Gráfica la línea.



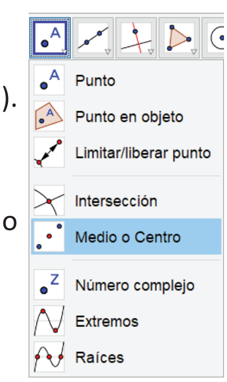


También puedes usar el comando anterior digitando Recta((-3,-5),(1,4)).

Actividades

1. **Punto medio de un segmento:**
   a) Abre una nueva ventana de GeoGebra y crea el segmento AB con A(–4, –3) y B(6, 1).

   b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta "Punto" y selecciona "Medio o Centro".



   c) En la Vista Gráfica (o en la Vista Algebraica) da clic sobre los puntos A y B, aparecerá un nuevo punto C con coordenadas (1, –1) que corresponde al punto medio del segmento AB.
   d) Verifica las soluciones de los problemas 7, 8, 9 y 10 de la clase 1.6 (Practica lo aprendido).

2. **Pendiente de una recta:**
   a) En la barra de entrada escribe "pendiente" y automáticamente aparecerá la opción "Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>)".
   b) En lugar de <Recta, semirrecta o segmento> escribe la ecuación de la recta y presiona enter.
   c) ¿Qué ocurre si calculas la pendiente de las rectas $y = -2$ y $x = 3$? ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta vertical y de una horizontal?

3. Verifica las soluciones de los problemas desde la clase 2.2 hasta la 2.5 de esta unidad.

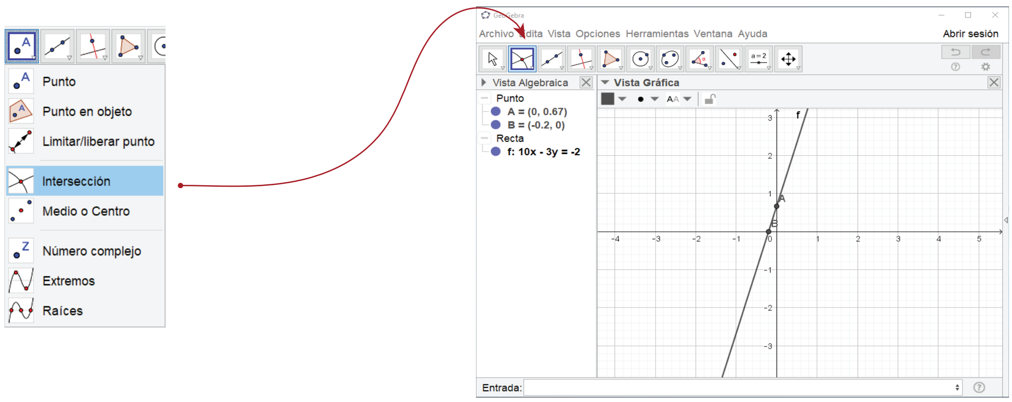
4.2 Práctica en GeoGebra: posiciones relativas entre rectas

En esta práctica aprenderás a encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, trazar rectas paralelas y perpendiculares y calcular el ángulo de inclinación de una recta.

Práctica

Intersecciones con los ejes de coordenadas y rectas:

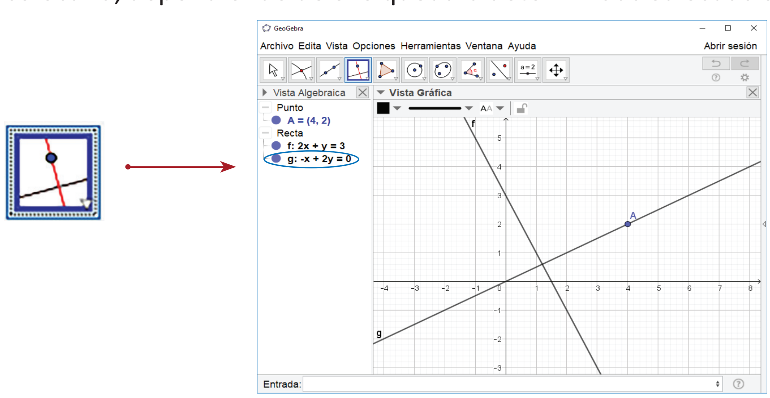
1. Traza la recta $10x - 3y + 2 = 0$ (acerca la Vista Gráfica si lo crees necesario).
2. Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Punto y selecciona Intersección. En la Vista Gráfica da clic sobre el eje x (o el eje y) y después sobre la línea recta; en la Vista Algebraica aparecerán las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x (o el eje y).



3. Para encontrar la intersección entre dos rectas se utiliza la misma herramienta; en este caso, en lugar de seleccionar alguno de los ejes de coordenadas se seleccionan ambas rectas.

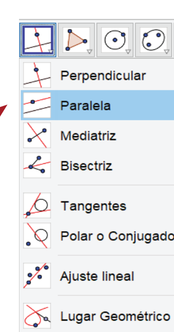
Rectas paralelas y perpendiculares

4. Abre una nueva ventana y traza la recta $2x + y - 3 = 0$.
   a) Para trazar una recta perpendicular a la anterior da clic sobre la herramienta Perpendicular; en la Vista Gráfica selecciona la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta perpendicular) y luego el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.



En la ventana, la recta perpendicular se colocó en el punto (4, 2), por tanto su ecuación es $-x + 2y = 0$.

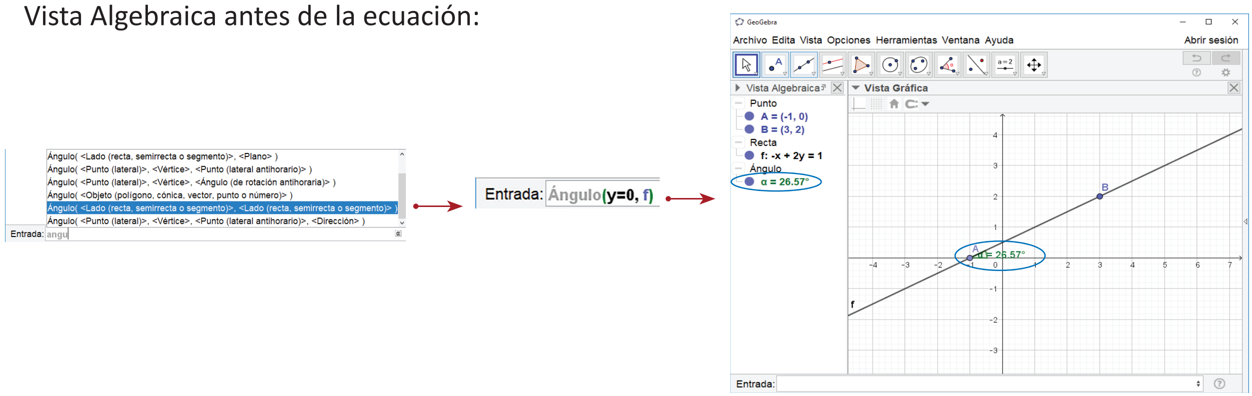
   b) Para trazar una recta paralela a $2x + y - 3 = 0$ da clic sobre la esquina inferior derecha de la herramienta Perpendicular y selecciona Paralela; en la Vista Gráfica da clic sobre la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta paralela) y luego selecciona el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.



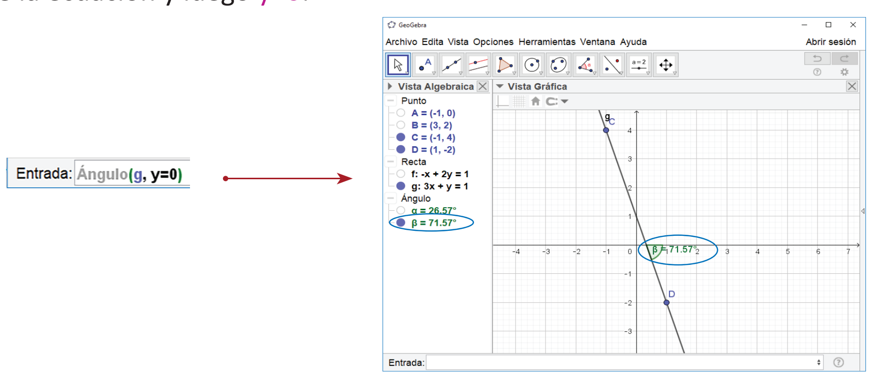
Ángulo de inclinación de una recta:

5. Para calcular el ángulo de inclinación debe tenerse en consideración la pendiente de la recta:

a) Pendiente positiva: traza la gráfica de $x - 2y + 1 = 0$; en la barra de entrada escribe ángulo y en la lista selecciona Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>). En lugar de <Lado(recta, semirrecta o segmento)> escribe primero y=0 y luego la letra que aparece en la Vista Algebraica antes de la ecuación:



b) Pendiente negativa: traza la gráfica de $3x + y - 1 = 0$; usando el comando Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>) escribe primero la letra que aparece en Vista Algebraica de la ecuación y luego y=0:



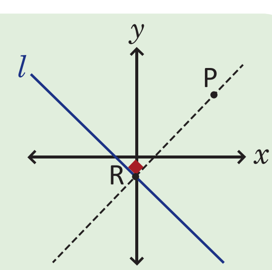
Observa que GeoGebra devuelve el ángulo medido desde la recta $3x + y - 1 = 0$ hacia el eje positivo x. Entonces el ángulo de inclinación de la recta será igual a la diferencia de 180° menos el obtenido con el comando.

Actividades

1. Verifica tus soluciones de los problemas desde la clase 3.1 hasta la clase 3.5 sobre intersecciones con los ejes de coordenadas, intersecciones entre rectas, rectas paralelas y perpendiculares.

2. Utilizando la recta l: $y = -3x + 2$ y el punto P(–2, –1), determina el procedimiento con GeoGebra para calcular la distancia desde el punto P hasta la recta l.

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1 entonces, calcular d(P, l) equivale a encontrar d(P, R).



3. Dadas las rectas f: $x - y - 5 = 0$ y g: $6x - y - 21 = 0$, determina el procedimiento con GeoGebra para calcular el ángulo formado entre ambas rectas.

Secciones cónicas

3 Unidad

Las secciones cónicas ha sido un tema que se ha estudiado desde la antigua Grecia, fueron descubiertas por el matemático griego Menecmo hacia el año 350 a.C. aproximadamente. Este trabajo fue retomado y ampliado por el matemático turco Apolonio de Perge, quién clasificó las cónicas según el tipo de corte que se hace en el cono de doble hoja, y cuyo aporte más importante se encuentra en el descubrimiento de las propiedades reflectivas que tienen; a partir de lo cual la física retoma estos aportes para el diseño de sólidos geométricos cuyas propiedades se aplican en óptica, diseño de radares, antenas, sistemas de navegación, señales, etc.

El telescopio Maksutov - Cassegrain tiene como principio el uso de lentes con forma parabólica e hiperbólica.

Las trayectorias de cuerpos celestes pueden describir elipses (como el sistema solar), parábolas o hipérbolas (como los cometas).

Por otra parte, la aplicación de las secciones cónicas resultó mucho más interesante conforme el estudio del universo retomó auge, hasta el punto en que el astrónomo alemán Johannes Kepler, descubre que la trayectoria de los planetas en el sistema solar describe una curva elíptica y cuyo resultado fue generalizado por el matemático y físico inglés Isaac Newton, quien demostró que la trayectoria de un cuerpo celeste (cometa, planeta, estrella, etc.) alrededor de una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

En la unidad se abordan los contenidos de parábola, circunferencia, elipse e hipérbola, vistos desde la geometría analítica. Además se incluyen las clases sobre aplicaciones de las secciones cónicas, en las cuales se utilizan las propiedades reflectivas de estas en la elaboración de instrumentos científicos y tecnológicos. Posteriormente se trabajan algunas prácticas en GeoGebra para consolidar los contenidos abordados.

1.1 Lugar geométrico de una ecuación

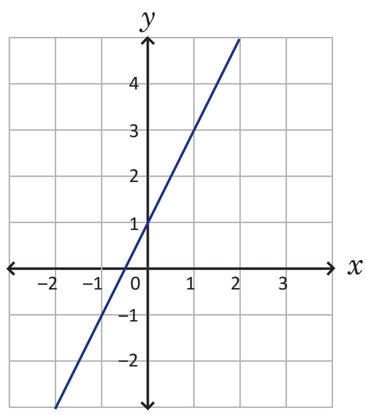
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 1$

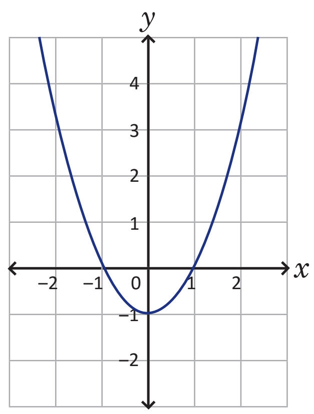
Solución

a) La ecuación es una función lineal y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ es una línea recta.

b) La ecuación es una función cuadrática y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = x^2 - 1$ es una parábola.

Definición

El **lugar geométrico** determinado por una ecuación es el conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación; en casos particulares pueden ser figuras conocidas como un punto, una línea recta, una circunferencia, una parábola, etc.

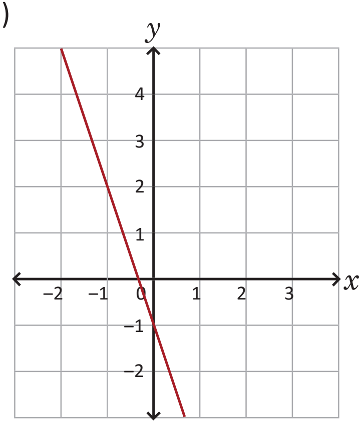
Problemas

1. Grafica en el plano cartesiano el lugar geométrico determinado por cada ecuación.

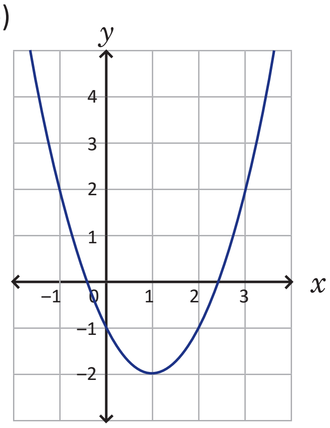
a) $y = x - 4$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = x^2 - 3$

2. Determina las ecuaciones cuyo lugar geométrico corresponda a cada gráfica.

a)



b)



1.2 Ecuación de un lugar geométrico*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A (0, 2) es igual a la distancia al punto B(4, 0).

Solución

Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano.

En particular un punto que cumple es el punto medio del segmento AB.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

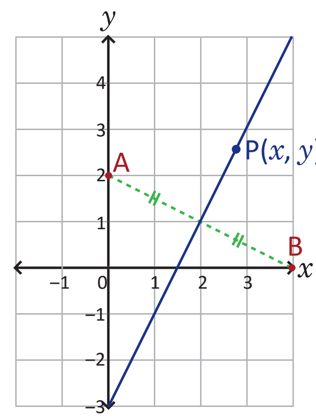
$$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, \mathrm{B})$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$8x - 4y - 12 = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $2x - y - 3 = 0$, y gráficamente es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio (mediatriz del segmento AB).



Puedes comprobar que las rectas son perpendiculares.

Conclusión

Para deducir la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones específicas, se plantea la ecuación que cumple las condiciones requeridas, aplicando conceptos de distancia entre puntos, entre punto y recta, etc.

Ejemplo

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje x es siempre igual a la distancia al punto A(0, 2).

En particular un punto que cumple es el punto medio de la distancia entre el punto A y el eje x.

Planteando la ecuación para P(x, y) que cumple las condiciones:

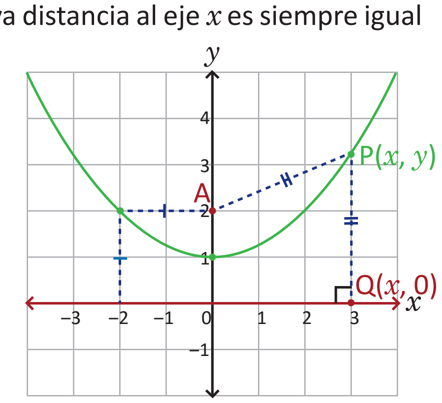
$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = d(\mathrm{A}, \mathrm{P})$$

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 4y + 4 \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$x^2 - 4y + 4 = 0.$$

Y se puede expresar como: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.



Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $x^2 - 4y + 4 = 0$, y es una parábola.

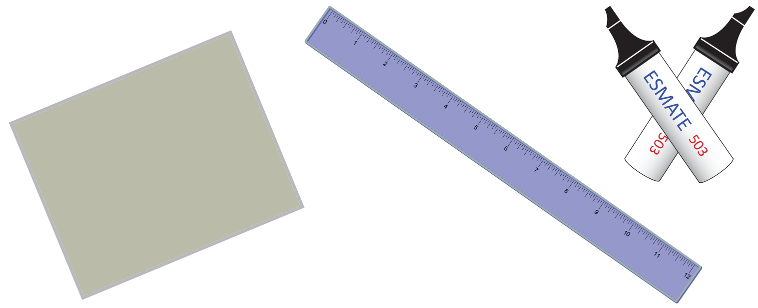
Problemas

1. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A(2, –3) es igual a la distancia al punto B(0, –1).
2. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -1$ es siempre igual a la distancia al punto A(0, 1).
3. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a 2 unidades de distancia del eje y.
4. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del eje x como del eje y.

1.3 Actividad introductoria

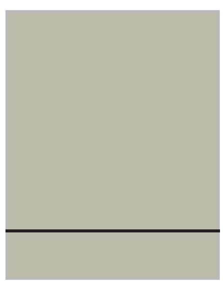
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Plumón
- Regla

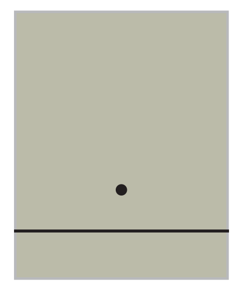


Actividad

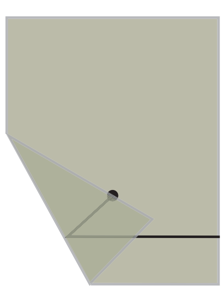
1. Dibuja una recta paralela al lado más angosto de la página, cercana al final de la misma.



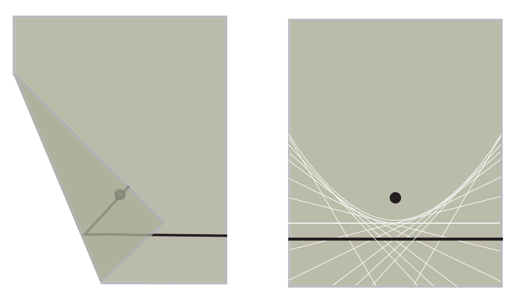
2. Dibuja un punto arriba de la recta, y en medio de la página.



3. Tomando el inicio de la recta, dobla la página hasta hacer coincidir el inicio de esta con el punto dibujado.



4. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la línea recta hasta llegar al final de esta. Analiza la figura formada.



Definición

La figura que queda marcada por los cortes de los dobleces es una **parábola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de estar a igual distancia del punto dibujado como de la recta dibujada.

Preguntas

1. ¿Qué pasaría con la parábola si el punto se separa más de la recta dibujada?
2. ¿Qué pasaría si el punto se dibujara por debajo de la línea?
3. ¿Qué pasaría si la recta se dibujara vertical y con el punto a la derecha o izquierda de ella?
4. Analiza por qué se cumple que los puntos que determinan la parábola están a igual distancia del punto como de la recta.

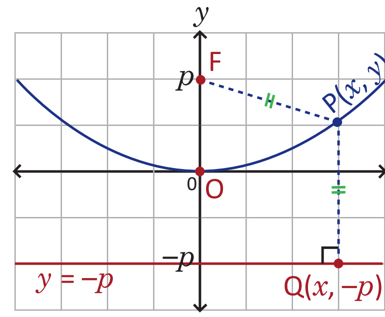
1.4 La parábola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -p$ es igual a la distancia al punto F(0, p).

Solución

Se toman en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y se utiliza la distancia de un punto a una recta y la distancia de dos puntos.



Como la recta $y = -p$ es horizontal, d(P, Q) = $|y - (-p)|$.

Expresando la igualdad d(P, Q) = d(P, F):

$$|y - (-p)| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$
$$|y + p|^2 = x^2 + (y-p)^2 \quad \text{desarrollando los cuadrados,}$$
$$y^2 + 2yp + p^2 = x^2 + y^2 - 2yp + p^2 \quad \text{simplificando,}$$
$$4yp = x^2 \quad \text{despejando } y,$$
$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es una parábola de la forma $y = ax^2$, donde $a = \frac{1}{4p}$.

Definición

La ecuación que determina el espacio geométrico de **una parábola** está dada por: $y = \frac{1}{4p}x^2$.

En esta ecuación, **el vértice** de la parábola siempre estará en el origen (0, 0). El valor de p recibe el nombre de **parámetro**.

El punto F(0, p) es conocido como **el foco** de la parábola, la recta $y = -p$ es conocida como **la directriz** de la parábola. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco de la parábola se conoce como **eje**.

Si el parámetro p es negativo, la ecuación determina una parábola abierta hacia abajo.

Además, si la directriz fuera una recta vertical de la forma $x = -p$, la parábola sería horizontal y su ecuación sería:

$$x = -\frac{1}{4p}y^2$$

Ejemplo 1

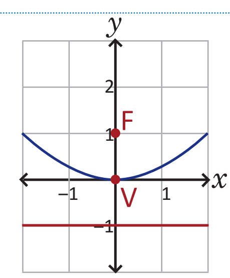
Determina la ecuación de la parábola con foco F(0, −3) y directriz $y = 3$.

El valor de $p = -3$, entonces la ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{4(-3)}x^2$, simplificando queda: $y = -\frac{1}{12}x^2$.

Por lo tanto, la ecuación es $y = -\frac{1}{12}x^2$, y es una parábola abierta hacia abajo.

Ejemplo 2

Determina el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, luego localiza cada uno en el plano cartesiano y grafica la parábola.



Se tiene que $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = 1$.

Foco: F(0, 1)   Directriz: $y = -1$ Vértice: V(0, 0)

Problemas

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

   a) F(0, 2), $y = -2$ b) F(0, −1), $y = 1$ c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y = -\frac{1}{8}$ d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y = \frac{1}{16}$ e) F(2, 0), $x = -2$

2. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz, luego localízalos en el plano cartesiano y grafica la parábola.

   a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = \frac{1}{8}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ e) $x = 2y^2$

1.5 Desplazamientos paralelos

Problema inicial

Aplica desplazamientos verticales y horizontales para graficar el lugar geométrico que determina la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ en el plano cartesiano. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz.

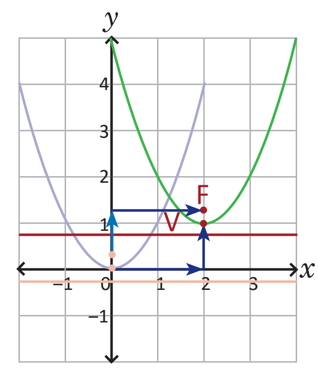
La gráfica de la función $f(x - h) + k$, es la gráfica de la función $f(x)$ desplazada h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba.

Solución

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2 + 1$, es la gráfica de la función $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p de $y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = \frac{1}{4}$.

Además las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz se desplazan de igual manera.



Ecuación	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0 + 2, \frac{1}{4} + 1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
Vértice	$V(0, 0)$	$V(0 + 2, 0 + 1) = V(2, 1)$
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$

En general

Para desplazar una gráfica horizontalmente h unidades, se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y para desplazar una gráfica verticalmente k unidades se cambia la variable y por la expresión $y - k$.

Entonces la ecuación de una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente es: $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$.

En una parábola desplazada con ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, se cumple que: $V(h, k)$ $F(h, p + k)$ Directriz: $y = -p + k$

Ejemplo

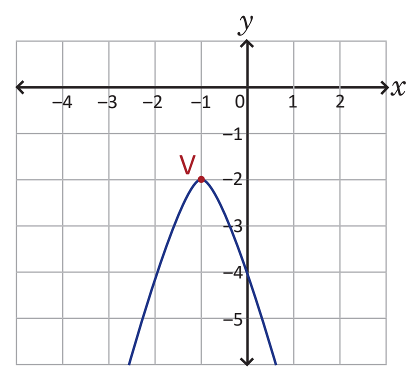
a) Determina la ecuación que resuta al desplazar la parábola $y = 2x^2$, -3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Sustituyendo x por la expresión $x - (-3)$, y por la expresión $y - 1$:

$$y - 1 = 2(x + 3)^2, \text{ o bien } y = 2(x + 3)^2 + 1$$

b) Grafica la parábola determinada por la ecuación $y + 2 = -2(x + 1)^2$.

Es la ecuación de la parábola $y = -2x^2$ desplazada -1 unidad horizontalmente y -2 unidades verticalmente, como muestra la figura.



Problemas

1. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

a) $y = x^2$, $h = 3$, $k = 2$ b) $y = 3x^2$, $h = -1$, $k = 3$ c) $y = -x^2$, $h = 1$, $k = -1$

d) $y = -2x^2$, $h = -2$, $k = -1$ e) $y = 2x^2$, $h = 0$, $k = 3$ f) $y = -3x^2$, $h = -2$, $k = 0$

2. Grafica en el plano cartesiano la parábola determinada por las siguientes ecuaciones. Luego determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz de cada una.

a) $y - 1 = (x - 4)^2$ b) $y + 2 = 2(x - 3)^2$ c) $y - 3 = -(x + 1)^2$ d) $y + 1 = -2(x + 1)^2$

1.6 Procedimiento para completar cuadrados perfectos

Problema inicial

Escribe el polinomio $x^2 + 4x$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Solución

Para completar el cuadrado perfecto en la expresión se suma y resta la misma cantidad para no alterar la expresión:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

Por lo tanto, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se cumple que:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Conclusión

El método en el cual se suma y resta una cantidad adecuada para que una expresión se convierta en cuadrado perfecto se conoce como **completar cuadrados perfectos**, y es una estrategia muy útil para la resolución de problemas en matemática.

Ejemplo

Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 - 8x$　b) $x^2 - 4x + 2$　c) $2x^2 + 12x + 10$　d) $3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

Problemas

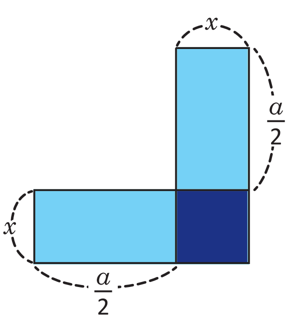
1. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 2x$　b) $x^2 + 6x$　c) $x^2 + 8x$　d) $x^2 - 4x$　e) $x^2 + 10x + 1$
f) $x^2 - 2x - 1$　g) $2x^2 + 8x + 6$　h) $3x^2 - 6x - 2$　i) $-x^2 - 4x - 4$　j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. Utilizando la figura de la derecha:

a) Determina cuánto es el área de la figura mostrada.

b) Determina el área del rectángulo que debe agregarse para formar un cuadrado.



1.7 Ecuación general de la parábola

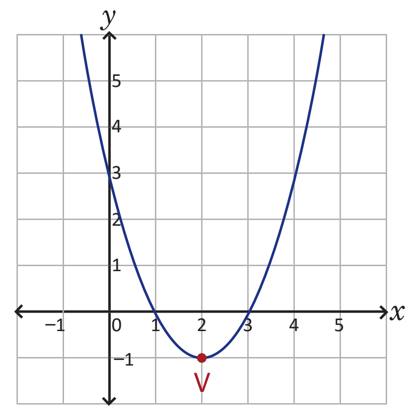
Problema inicial

Grafica el lugar geométrico determinado por la ecuación $-x^2 + 4x - 3 + y = 0$.

Solución

Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$



Expresando de otra manera: $y - (-1) = (x - 2)^2$.

Por lo tanto la ecuación $y - x^2 + 4x - 3 = 0$ es la gráfica de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.

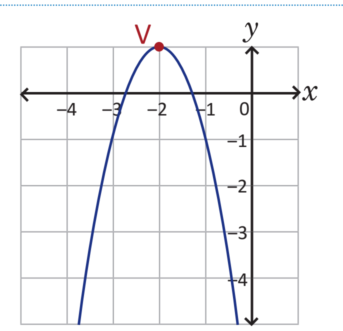
Conclusión

Una parábola puede ser representada desarrollando los cuadrados perfectos de la ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar los desplazamientos verticales y horizontales en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$, se completan cuadrados perfectos y se expresa en la forma $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$. A la ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$ se le llama **ecuación general de la parábola**.

Ejemplo

Grafica la parábola determinada por la ecuación $2x^2 + 8x + 7 + y = 0$. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz.



Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

Por lo tanto, es la parábola $y = -2x^2$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p: $-2 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = -\frac{1}{8}$.

Entonces:

Ecuación	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
Foco	F$\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	F$\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
Vértice	V (0, 0)	V (–2, 1)
Directriz	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

Problemas

Para cada literal determina el vértice y grafica la parábola correspondiente.

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$ c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$ d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$

e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$ f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$ g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$ h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

1.8 Líneas rectas y parábolas

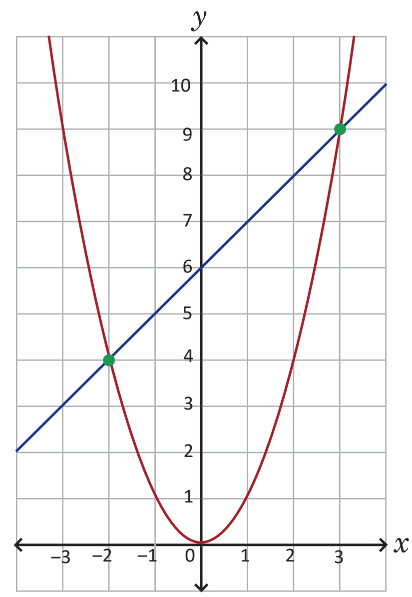
Problema inicial

Determina las coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Solución

Si un punto está en la intersección de las dos gráficas, dicho punto debe cumplir tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola. Así, determinar los puntos de intersección equivale a encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{---------- (1)} \\ y = x + 6 & \text{---------- (2)} \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución y solucionando:

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 6 && \text{igualando a cero,} \\ x^2 - x - 6 &= 0 && \text{factorizando,} \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 && \text{solucionando la ecuación cuadrática,} \\ x = 3 &\text{ o } x = -2. \end{aligned}$$

Determinando el valor de y para cada valor de x:

Si $x = 3$, entonces: $y = 3 + 6 = 9$.

Si $x = -2$, entonces: $y = -2 + 6 = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son (3, 9) y (–2, 4).

Conclusión

Las coordenadas de los puntos de intersección entre una parábola y una línea recta, corresponden a las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones.

Al resolver el sistema pueden tenerse 3 casos:

1. La recta corta a la parábola en 2 puntos diferentes (es secante).
2. La recta corta a la parábola en 1 punto (es tangente o vertical).
3. La recta no corta a la parábola.

Problemas

Determina los puntos de intersección entre la parábola y la línea recta de cada literal. Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Unidad 3

1.9 Determinación de parámetros

Problema inicial

Determina el valor de m en la recta $y = 4x + m$, para que esta sea tangente a la parábola $y = x^2$.

Solución

Para determinar los puntos de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{----------- (1)} \\ y = 4x + m & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

Para que $x^2 + 2ax + b$ sea cuadrado perfecto se debe cumplir:

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = b$$

Porque: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

O bien en el discriminante de $ax^2 + bx + c$: $b^2 - 4ac = 0$.

Resolviendo:

$$x^2 = 4x + m$$
$$x^2 - 4x - m = 0$$

Para que la recta toque en un punto a la parábola, la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - m = 0$ debería tener solamente una solución, para ello, la expresión $x^2 - 4x - m$ debería ser un cuadrado perfecto.

Forma 1

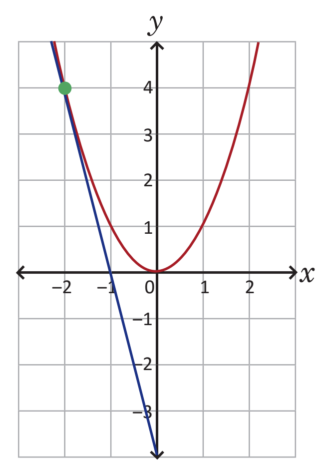
Utilizando la forma del cuadrado perfecto:

$$-m = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$m = -4$$

Forma 2

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4)^2 - 4(1)(-m) = 0$$
$$16 = -4m$$
$$m = -4$$



Por lo tanto, el valor de m para que la recta $y = 4x + m$ sea tangente a la parábola $y = x^2$ es $m = -4$.

Conclusión

La constante cuyo valor se desconoce, y se adecúa para que la figura cumpla ciertas condiciones se conoce como **parámetro**.

Para determinar el parámetro en una ecuación de recta para que esta sea tangente a una parábola, es necesario aplicar el análisis del discriminante o bien la forma del desarrollo de un cuadrado perfecto, de modo que la ecuación cuadrática tenga una sola solución.

Problemas

Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - p \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x + p \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x \\ y = -x - p \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x - 5 \\ y = 3x + p \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 4x - p \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = -3x^2 + 2x - 3 \\ y = -10x + p \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = px - 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = px + 16 \end{cases}$

1.10 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

a) $F(0, -2)$, $y = 2$ b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $y = -\frac{1}{12}$

2. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

a) $y = 4x^2$, $h = -2$, $k = 4$ b) $y = -2x^2$, $h = -3$, $k = -3$

3. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 - 10x$ b) $x^2 - 4x - 9$ c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. Grafica las siguientes parábolas en el plano cartesiano.

a) $y = -2x^2$ b) $y - 1 = -(x + 2)^2$ c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

a) $y = \frac{1}{8}x^2$ b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$ c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. Determina los puntos de intersección entre la parábola y la recta de cada literal. Grafica en el plano cartesiano.

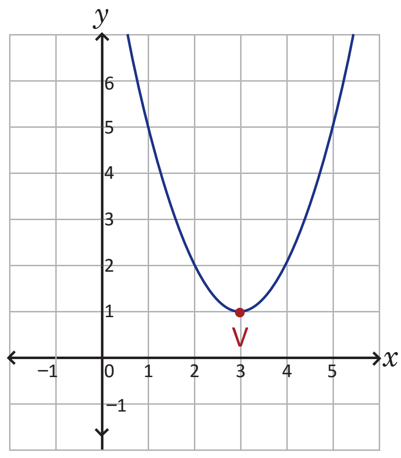
a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

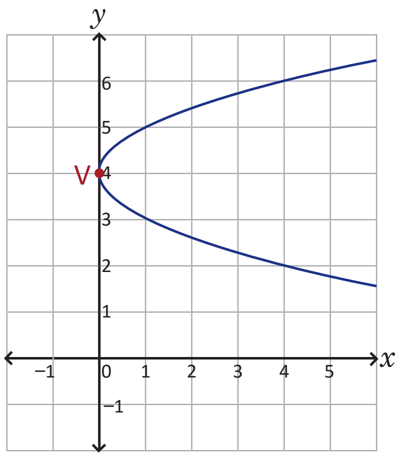
a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. Determina la ecuación que corresponde a la gráfica de cada literal.

a)



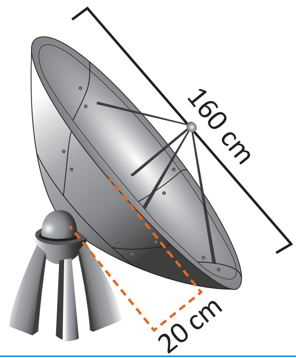
b)



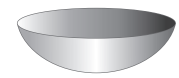
1.11 Aplicaciones de la parábola*

Problema inicial

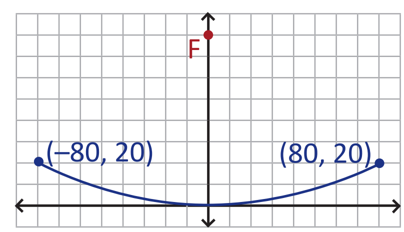
Una antena parabólica de un canal de televisión de cultura de El Salvador tiene 160 centímetros de diámetro y una altura de 20 centímetros, si se desea reparar el foco de la antena que se dañó con la lluvia, ¿a qué distancia del centro del disco debe colocarse el nuevo foco de la antena parabólica?



Una forma parabólica es un cuerpo geométrico, y resulta de girar una parábola alrededor de su eje.



Solución



Modelando la situación en el plano cartesiano, por conveniencia se puede utilizar una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Entonces, como la parábola tiene ancho de 160 cm, se puede considerar la distancia desde el punto –80 hasta el punto 80 sobre el eje x.

Y dado que la altura es 20 cm, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto 20 sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–80, 20) y (80, 20).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (80, 20) en la ecuación, así:

$$20 = \frac{1}{4p}80^2 \quad \text{Resolviendo la ecuación.}$$

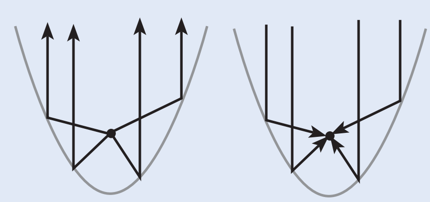
$$p = \frac{80^2}{80} = 80$$

Luego, las coordenadas del foco son F(0, 80).

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 80 cm de distancia del vértice.

Conclusión

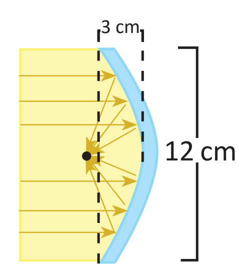
En una parábola, el foco cumple una propiedad reflectora importante: tomando cualquier línea desde el foco, esta será reflejada en una misma dirección, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco. Esto vuelve a la parábola muy útil para su aplicación a objetos de la vida cotidiana, como la antena parabólica.



Problemas

1. Una antena parabólica que emite señal de internet tiene desperfectos, su foco no irradia correctamente la señal, al cambiarlo es necesario saber a qué distancia del centro del disco estaba. Determina dicha distancia si se sabe que el diámetro del disco es de 1 metro y su altura es de 0.5 metros.

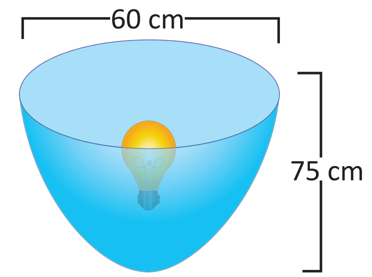
2. Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma parabólica de 12 cm de diámetro y 3 cm de profundidad, ¿a qué distancia del centro del espejo se concentrará la luz entrante?



1.12 Practica lo aprendido

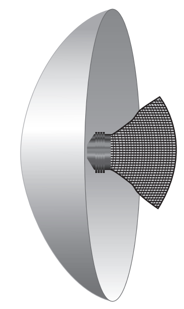
Resuelve los siguientes problemas de aplicación de parábola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. En la escuela de María hay un problema de iluminación por las noches, y para mejorar la situación, María planea construir una lámpara parabólica móvil para el vigilante. Para ello cuenta con un recipiente parabólico de 60 centímetros de diámetro y 75 centímetros de altura. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocar María el foco para que refleje la luz en una sola dirección?

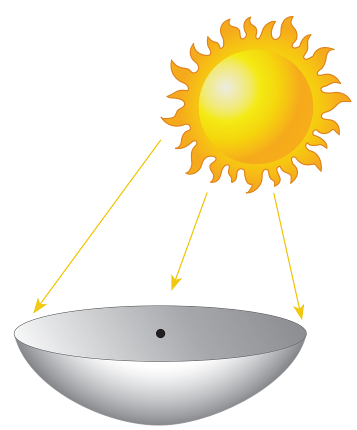


2. El reflector de un proyector tiene forma parabólica, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 12 centímetros de diámetro y 8 centímetros de profundidad, ¿a qué distancia del vértice está el foco?

3. En la comunidad de Antonio se quiere instalar un sistema de alarmas, en caso de cualquier emergencia. Antonio debe construir algunos parlantes parabólicos, si el recipiente parabólico tiene 24 cm de diámetro y 9 cm de profundidad, ¿dónde debe ser colocada la bocina para que emita el sonido en la misma dirección?



4. José va de viaje de campo con su familia al Parque Nacional Montecristo, ya que no desea contaminar, evita utilizar leña para cocinar, en cambio, lleva un recipiente parabólico de metal, de modo que refleje los rayos solares en un punto fijo (el foco). Determina a qué distancia del vértice del recipiente debe colocar José la parrilla para cocinar, si este tiene 1 metro de diámetro y 0.25 metros de altura.



5. Un plato receptor de sonido, que se emplea en eventos sobre la equidad de género, está construido en forma parabólica con su foco a 12 cm del vértice, si en uno de estos eventos se dañó el plato y en los repuestos tienen de todas alturas pero de anchura solo hay de 8 cm, ¿de qué altura debe ser el recipiente parabólico para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente?

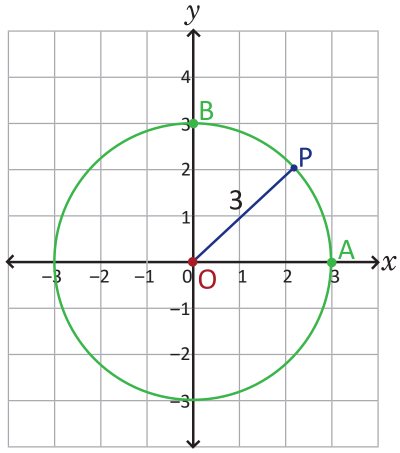
2.1 La circunferencia

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen O(0, 0) es igual a 3.

Solución

Se identifican en particular los puntos A(3, 0), B(0, 3) que cumplen la condición.



Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(\text{P, O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Definición

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia r a un punto fijo llamado **centro** se mantiene constante se conoce como **circunferencia**.

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y con radio r está dada por: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 1

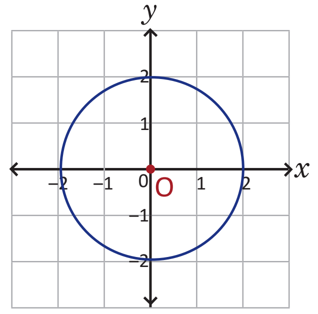
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 4.

La ecuación es, $x^2 + y^2 = 4^2$ o bien, expresado de otra manera, $x^2 + y^2 = 16$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Expresando la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ como $x^2 + y^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Problemas

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado en cada literal.

   a) $r = 1$ b) $r = 6$ c) $r = \frac{1}{2}$ d) $r = \frac{1}{3}$ e) $r = \sqrt{5}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ d) $x^2 + y^2 = 3$

2.2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia*

Problema inicial

Deduce la ecuación de una circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1.

Solución 1

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre un punto P y el punto C(2, 3).

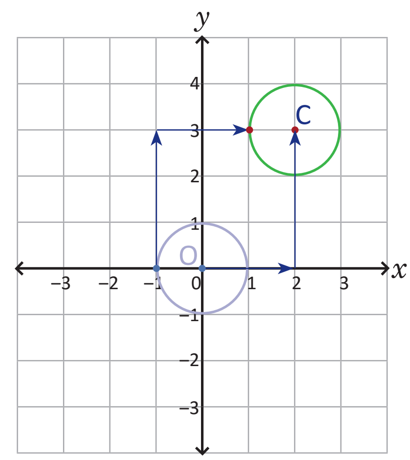
$$d(\text{P, C}) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 1 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

Solución 2

Tomando la ecuación de la circunferencia de radio 1, con centro en el origen, $x^2 + y^2 = 1$.



Entonces, la circunferencia de radio 1 y centro C(2, 3) resulta de desplazar la circunferencia con centro en el origen, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba (como lo muestra la figura).

La ecuación de la circunferencia desplazada 2 unidades a la derecha es: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Ahora, la ecuación de la circunferencia desplazada 3 unidades hacia arriba es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1 es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Conclusión

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro C(h, k) y radio r está dada por:

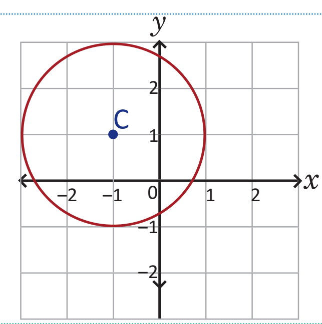
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la circunferencia con centro C(2, –1) y radio 2.
La ecuación es, $(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$ o bien, expresado de otra manera, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinado por la ecuación: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$



Expresando la ecuación $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ como $[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro C(–1, 1) y radio 2.

Problemas

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.
   a) C(4, 1), $r = 3$ b) C(–2, 5), $r = 2$ c) C(3, –4), $r = \frac{2}{3}$ d) C(–2, –2), $r = \sqrt{6}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.
   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

2.3 Ecuación general de la circunferencia

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para expresar la ecuación en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ reordenando y agrupando,

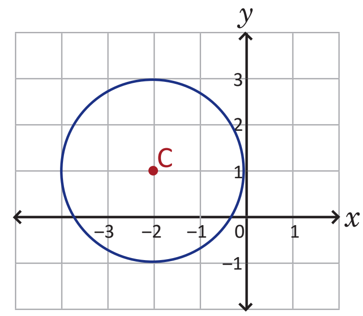
$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 1 = 0$ completando cuadrados,

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 = 0$ simplificando,

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 1 = 0$ transponiendo,

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ expresado de otra manera,

$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 2^2$.



Por lo tanto la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ es una circunferencia con centro C(–2, 1) y radio 2.

Conclusión

Una circunferencia puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar el centro y el radio de una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, se expresa en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. A la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ se le llama **ecuación general de la circunferencia.**

Ejemplo

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$.

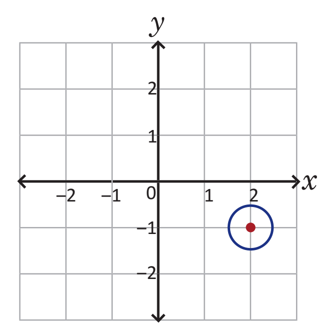
$4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$ dividiendo por 4 cada miembro,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + \frac{19}{4} = 0$ completando cuadrados,

$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + \frac{19}{4} = 0$ simplificando y transponiendo,

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$ expresado de otra manera,

$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.



Es una circunferencia con centro C (2, –1) y radio $\frac{1}{2}$.

Problemas

En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$ e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

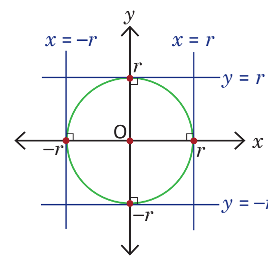
g) $4x^2 + 4y^2 - 32x - 16y + 71 = 0$ h) $9x^2 + 9y^2 + 54x + 18y + 74 = 0$

2.4 Recta tangente a una circunferencia*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por: $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Solución

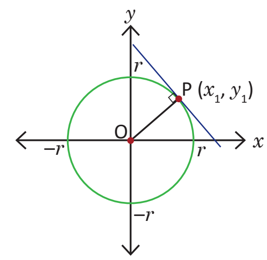


El punto P(x_1, y_1) satisface la ecuación $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Si $x_1 = 0$, entonces $y_1 = r$ o $y_1 = -r$. La recta tangente es: $y = r$ o $y = -r$ y se cumple que: $y_1 y = r^2$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por: $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Si $y_1 = 0$, se procede análogamente.



Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, el radio $\overline{\text{OP}}$ es perpendicular a la tangente en el punto P, además la pendiente de $\overline{\text{OP}}$ es $\frac{y_1}{x_1}$, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es: $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

Aplicando la ecuación punto-pendiente con m y P:

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ multiplicando por y_1 y simplificando: $x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Por lo tanto, la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por la ecuación:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

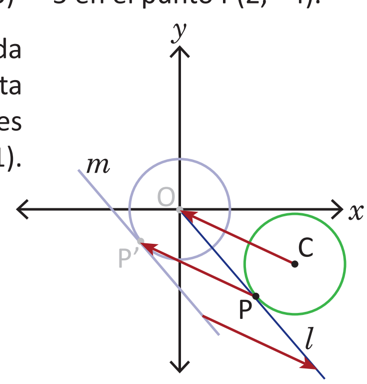
Conclusión

La ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es $x_1 x + y_1 y = r^2$. Por ejemplo, para determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto P(–1, 1), se puede hacer de la siguiente manera:

$$-1x + 1y = 2, \text{ o bien } x - y + 2 = 0.$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4).



La circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ desplazada 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo, entonces se puede calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ pero en el punto P desplazado 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba, es decir, en el punto P'(2 – 4, –4 + 3) = P'(–2, –1).

Ahora aplicando el resultado del Problema inicial, la recta tangente m será:

$$-2x + (-1)y = 5, \text{ o bien } 2x + y + 5 = 0.$$

Y desplazando la recta 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo:

$$2(x - 4) + (y + 3) + 5 = 0, \text{ o bien } 2x + y = 0.$$

Por lo tanto, la recta tangente l a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4) es: $2x + y = 0$.

Problemas

Para cada literal determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

a) $x^2 + y^2 = 25$, P(–3, 4)
b) $x^2 + y^2 = 5$, P(1, 2)
c) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, –3)
d) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, –1)
e) $x^2 + y^2 = 1$, P(–1, 0)
f) $x^2 + y^2 = 9$, P(0, –3)
g) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$, P(–1, 3)
h) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, P(–1, –1)
i) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$, P(3, 1)

2.5 Rectas secantes a una circunferencia

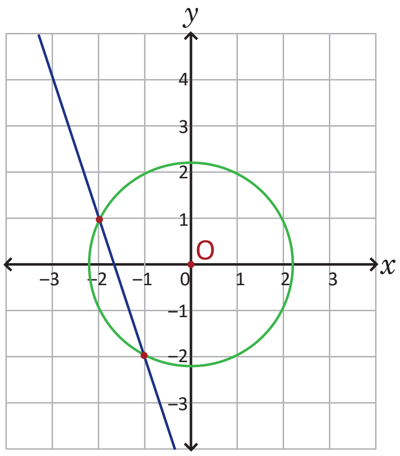
Problema inicial

Determina los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $3x + y + 5 = 0$.

Solución

La intersección es un punto que está en la recta y también en la circunferencia, entonces encontrar los puntos de intersección entre una circunferencia y una recta equivale a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------} (1) \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------} (2) \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución, despejando y en la ecuación (2).

$$y = -3x - 5$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y resolviendo:

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$
$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -1 \text{ o } x = -2$$

Entonces las coordenadas en x de los puntos donde se intersecan la recta $y + 3x + 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ son $x = -1$ y $x = -2$, y la coordenada en y puede determinarse sustituyendo cada valor de x en la ecuación (2):

$$\text{Si } x = -1, \text{ entonces } y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$$
$$\text{Si } x = -2, \text{ entonces } y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $(-1, -2)$ y $(-2, 1)$.

Conclusión

Para determinar los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y otra cuadrática, utilizando el método de sustitución.

Si el sistema tiene dos soluciones reales, significa que la recta es secante a la circunferencia.
Si el sistema tiene una solución real, la recta es tangente a la circunferencia.
Si el sistema no tiene solución real, significa que la recta no corta a la circunferencia.

El valor de y de los puntos (o punto) de intersección se determinan sustituyendo en alguna ecuación los valores de las soluciones al sistema de ecuaciones que se resuelve.

Problemas

Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

a) $x^2 + y^2 = 1$; $x + y = 0$
b) $x^2 + y^2 = 25$; $x + y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 5$; $-x + y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 13$; $x + 5y - 13 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 10$; $x - 2y - 5 = 0$
f) $x^2 + y^2 = 17$; $3x + 5y - 17 = 0$

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y el radio indicado.

   a) $r = 2$ b) $r = \sqrt{7}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y el radio r de cada literal.

   a) C $(3, -2)$, $r = 10$ b) C $(4, -3)$, $r = \frac{2}{3}$

4. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

   a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 10$, P$(-3, 1)$ b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P$(0, -4)$

7. Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$ b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$ cuya pendiente es -3.

9. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ que pasan por el punto P$(2, 0)$.

Puedes graficar para comprender mejor la situación.

10. Demuestra que la tangente en el punto P(x_1, y_1) de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es: $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

Unidad 3

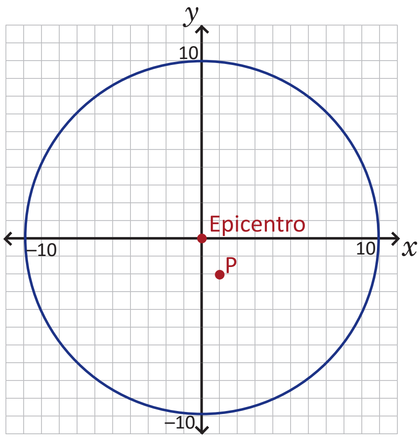
2.7 Aplicaciones de la circunferencia*

Problema inicial

El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si la ciudad de Antiguo Cuscatlán se ubica a 1 km hacia el oriente y 2 km hacia el sur del epicentro, entonces ¿fue afectada por dicho terremoto?

Solución

Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano.



Dado que el terremoto tuvo un alcance de 10 km a la redonda, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Ubicando Antiguo Cuscatlán en el punto P(1, –2).

Con el gráfico se puede observar que si el punto está dentro de la circunferencia entonces es afectado por el terremoto, y si está fuera no.

Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene:

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

El resultado es menor que 100 (5 < 100), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera mayor que 100 entonces estaría fuera de la circunferencia.

Por lo tanto, Antiguo Cuscatlán sí fue afectado por el terremoto con epicentro en el parque bicentenario.

Conclusión

Es posible resolver algunos problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones de circunferencias, para ello es necesario modelar la situación en el plano cartesiano, a partir de ello se puede interpretar la información y dar solución a la situación.

Problemas

1. El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si el volcán del Boquerón se ubica a 7 km hacia el poniente y 8 km hacia el norte del epicentro, entonces ¿fue afectado por dicho terremoto?

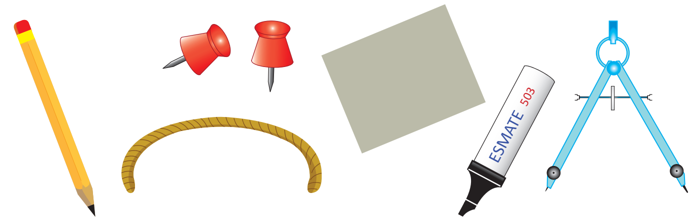
2. Una avioneta de fumigación vuela en círculos, y alcanza a fumigar hasta 13 m a la redonda, considerando como centro la casa de un campesino. El terreno tiene 30 metros de largo por 20 metros de ancho, y la casa del campesino se encuentra justo al centro del terreno. Determina si las plantaciones de frijol ubicadas a 11 metros al poniente de la casa y 5 metros al sur, llegan a ser fumigadas por la avioneta.

3. En las fiestas patronales de San Salvador se coloca el juego mecánico conocido como “la voladora”. Si esta rueda apagada cubre un radio de 2 metros y los asientos cuelgan de cadenas de 1 metro de longitud, determina si al ubicar la caseta de control a un metro al oriente y 3 metros al sur del centro de “la voladora”, dicha caseta no será impactada por la máquina al encenderse.

3.1 Actividad introductoria

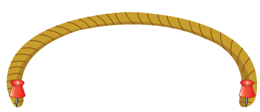
Materiales

- 2 tachuelas
- Trozo de cuerda
- Lapicero
- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón

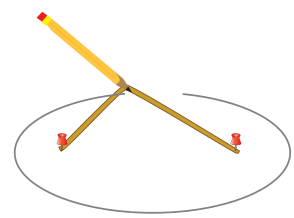


Actividad 1

1. Asegura los extremos de la cuerda con las tachuelas sobre una superficie adecuada.

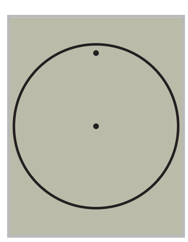


2. Toma la cuerda con la punta del lapicero hasta tensarla, desliza el lapicero manteniendo la cuerda tensada hasta llegar al punto donde iniciaste.

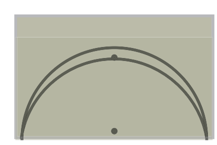


Actividad 2

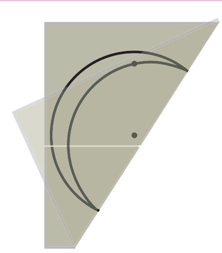
1. Dibuja una circunferencia lo más grande posible sobre el papel vegetal. Y coloca un punto adentro de dicha circunferencia.

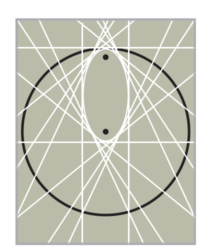


2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta llegar al punto donde se inició. Analiza la figura formada.





Definición

La figura que queda marcada en ambas actividades es una **elipse**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la suma de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

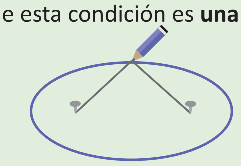
1. ¿Cuánto mide la suma de las distancias de un punto de la figura dibujada a cada tachuela?
2. ¿Cómo es la suma de la distancia de un punto a las dos tachuelas respecto de la longitud de la cuerda?
3. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto está sobre la circunferencia?
4. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto es el centro de la circunferencia?

3.2 La elipse*

Problema inicial

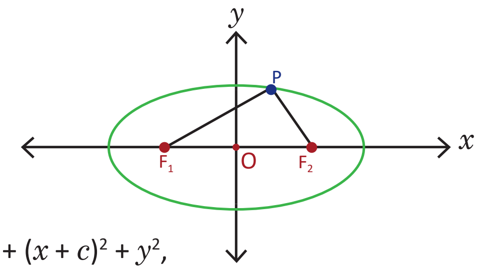
Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que su distancia a un punto fijo $F_1(-c, 0)$ sumada con la distancia a otro punto fijo $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < c < a$.

Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una elipse**.



Solución

Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado: $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$

simplificando: $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$

elevando al cuadrado: $a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$

simplificando: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Dado que $0 < c < a$, se cumple que $a^2 - c^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros de la igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de **una elipse** está dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la elipse, y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

Y la suma de las distancias de un punto de la elipse a cada uno de los focos es $2a$.

En la ecuación de la elipse, si $a = b$, el resultado es una circunferencia. Por lo tanto la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, y cumple que $a = 5$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 3$ y $a = 5$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Problemas

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

a) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 5$ b) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$ c) $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $a = 2$

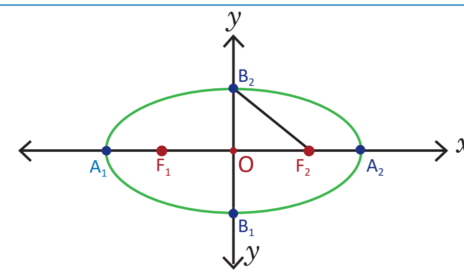
2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

3.3 Elementos y propiedades de la elipse

Problema inicial

En la gráfica de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina las coordenadas de los puntos A_1, A_2, B_1, B_2.

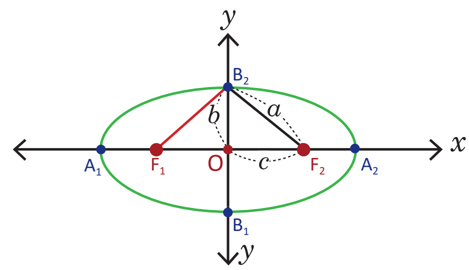


Solución

Dado que A_1, A_2 están sobre el eje x, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $y = 0$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ y resolviendo.

$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$



Análogamente, como B_1, B_2 están sobre el eje y, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $x = 0$ y se tiene que:

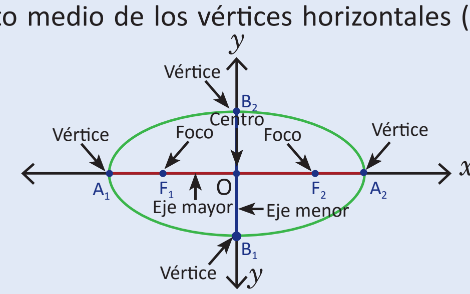
$$y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son:

$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.

Conclusión

Los puntos extremos de la elipse que se encuentran sobre el eje x y sobre el eje y se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$. El punto medio de los vértices horizontales (o verticales) se llama **centro** de la elipse.



El segmento de recta que pasa por los focos de la elipse y cuyos extremos son vértices de la misma, se llama **eje mayor** de la elipse, y su longitud mide $2a$.

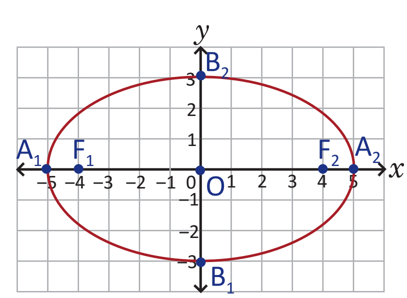
El segmento de recta cuyos extremos son vértices de la misma y es perpendicular al eje mayor se llama **eje menor** de la elipse, y su longitud mide $2b$.

Para graficar la elipse, coloca los vértices A_1, A_2, B_1 y B_2; o bien traza los ejes mayor y menor.

Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.



Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$ Longitud del eje mayor = 2(5) = 10
Longitud del eje menor = 2(3) = 6

Focos $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

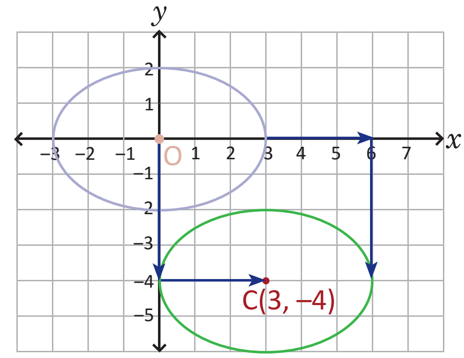
Unidad 3

3.4 Desplazamientos paralelos de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$.

Solución



Considerando la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ y desplazándola 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

Por lo tanto, la gráfica es la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ con centro (3, –4).

Conclusión

La ecuación de una elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x-h$; y la variable y por la expresión $y-k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ desplazada –3 unidades horizontalmente y 2 unidades verticalmente.

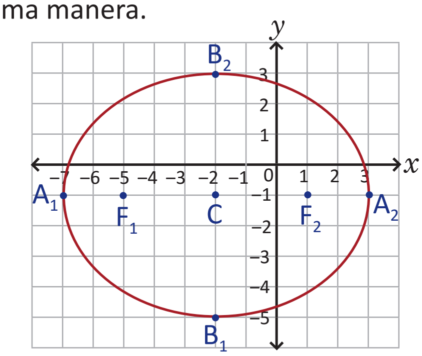
Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x-(-3)]$, y y por $(y-2)$: $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor de la elipse $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente. Nota que los vértices y los focos se desplazan de la misma manera.

Ecuación	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$	$A_1(-7, -1)$, $A_2(3, -1)$ $B_1(-2, -5)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$	$F_1(-5, -1)$, $F_2(1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 8$	$2a = 10$, $2b = 8$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $h=-1$, $k=2$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $h=3$, $k=-1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $h=-2$, $k=-2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

   a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ c) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

3.5 Ecuación general de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$.

Expresa la ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

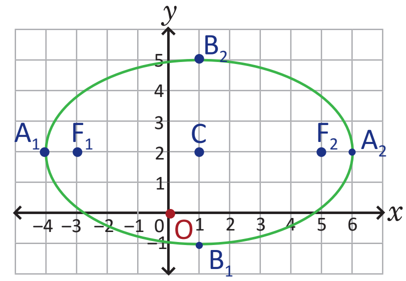
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1 \quad \text{simplificando y dividiendo por 225,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$



Por lo tanto, la gráfica es la elipse con centro (1, 2) y vértices $A_1(-4, 2)$, $A_2(6, 2)$, $B_1(1, -1)$, $B_2(1, 5)$.

Conclusión

Una elipse puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general para determinar el centro y los vértices (eje mayor y menor) de una elipse cuya ecuación sea de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresarla en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A la ecuación de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ se le llama **ecuación general de la elipse.**

Ejemplo

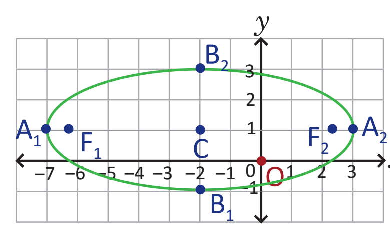
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de la elipse: $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ y grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



Entonces el centro de la elipse es el punto C(−2, 1).

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ desplazada −2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
Longitudes de los ejes	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$
c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$
d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$
f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

3.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$

b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

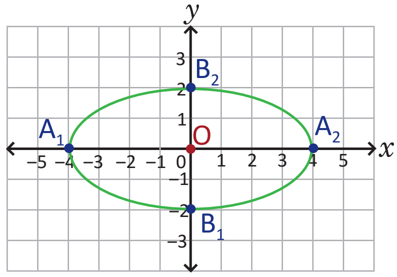
6. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

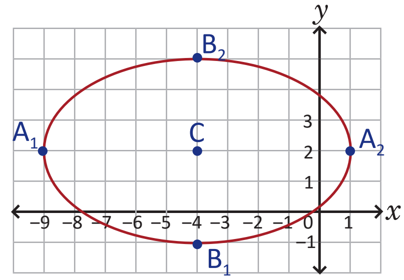
b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes elipses.

a)



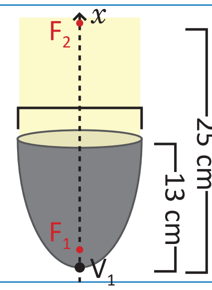
b)



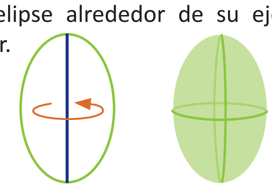
3.7 Aplicaciones de la elipse*

Problema inicial

Se diseña una lámpara con forma semi-elíptica (la mitad de una forma elíptica) de 13 cm de altura de modo que proyecta la luz emanada desde un foco hacia el otro que está a 25 cm de distancia del vértice de la lámpara. Determina de cuánto debería ser el diámetro de la lámpara para que funcione correctamente.



Una forma elíptica es un cuerpo geométrico que resulta de girar una elipse alrededor de su eje mayor.



Solución

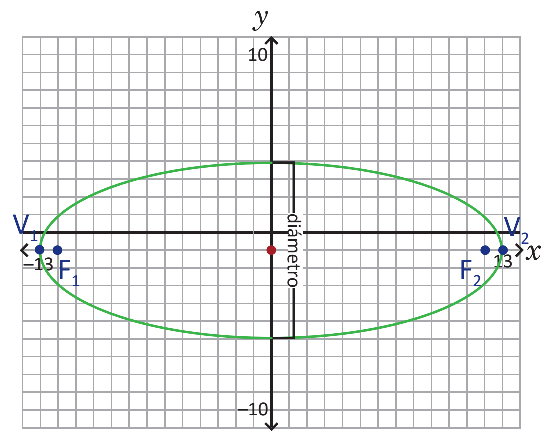
Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los focos (12, 0), por lo tanto $a = 13$, $c = 12$, entonces:

$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$a^2 = 13^2$

Y la ecuación de dicha elipse será: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

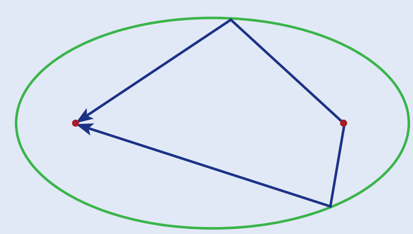
Entonces el diámetro estará dado por la medida del eje menor de la elipse, es decir, $2b = 2(5) = 10$.
Por lo tanto, el diámetro de la lámpara debe ser 10 cm.



Conclusión

En una elipse, los focos cumplen una propiedad reflectora importante: una línea tomada desde un foco de la elipse, será reflejada por esta exactamente sobre el otro foco.

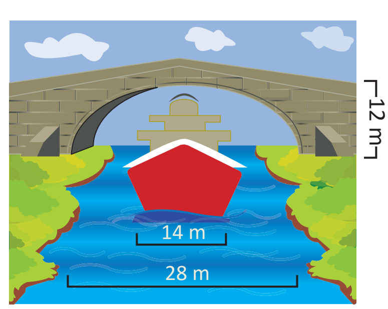
Esta propiedad reflectora parecida a la de la parábola hace que la elipse o las formas elípticas posean gran aplicación en ámbitos científicos, arquitectónicos, acústicos o artísticos.



Problemas

1. Una ingeniera eléctrica diseña un reflector de luz semi-elíptico para un teatro, dicho reflector tiene 13 centímetros de altura y 10 centímetros de diámetro. Determina a qué distancia del vértice del reflector concentrará la luz dicho reflector.

2. Un puente cuya abertura tiene forma semi-elíptica sobre un río tiene 28 metros de largo y una altura de 12 metros sobre el nivel del río. Determina la altura máxima que debe tener un barco de 14 metros de ancho para que pase con total seguridad bajo el puente.



Asume que el barco es simétrico respecto el eje vertical, y que pasa justo en medio del puente. Además piensa que el barco tiene la misma altura en todo punto.

Unidad 3

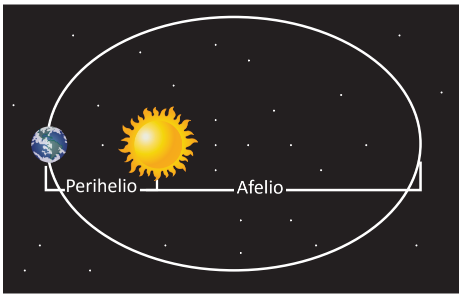
3.8 Aplicaciones de la elipse

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de elipse. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. Un paso a desnivel construido en forma semi-elíptica tiene 12 metros de largo y una altura máxima de 3 metros a partir del centro. Determina la altura máxima que debe tener un camión para pasar por debajo del paso a desnivel, si la anchura de este camión es de 3 metros del centro de la calle hacia cada lado.

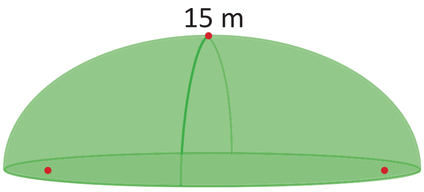
2. Una arquitecta y un ingeniero trabajan en el diseño de un puente con forma semi-elíptica para un río de 30 metros de ancho. El puente debe ser tal que un barco de a lo sumo 20 metros de ancho y 3 metros de alto pueda cruzar debajo de este con total seguridad. Determina la altura que debe tener el puente.

3. La Tierra cumple con recorrer una órbita elíptica en exactamente un año, dicha elipse tiene como uno de sus focos el Sol. El instante en el que la Tierra se ubica más cerca del Sol se conoce como perihelio y son aproximadamente 147 millones de kilómetros de distancia; mientras que el instante en el que está más alejada del Sol se conoce como afelio y se ubica a una distancia aproximada de 153 millones de kilómetros. Determina la ecuación de la órbita de la Tierra.



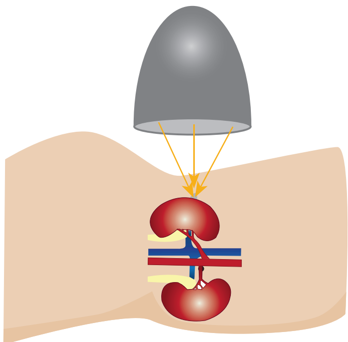
El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, estudió y descubrió **las tres leyes del movimiento de los planetas**, la primera de las cuales se enuncia: *"Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los dos focos que contiene la elipse"*.

4. Una estructura arquitectónica fue diseñada para poder enviar secretos a otra persona sin que los demás los escuchen. La forma de su diseño es semi-elíptico(aprovechando las propiedades focales de la elipse), la altura de dicha estructura en el punto más alto es de 15 metros y la distancia entre los vértices del salón es de 34 metros. Determina la ubicación que deben tener dos personas para que uno pueda escuchar al otro aunque se hablen por susurros.



Si dos personas están sobre los focos de la elipse, las ondas de sonido que salgan de un foco serán reflejadas directamente hacia el otro foco.

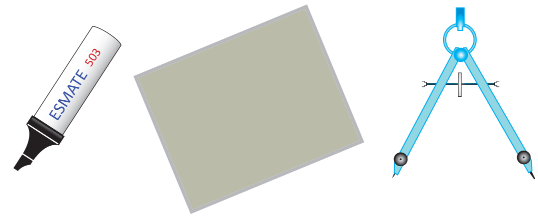
5. Para curar los cálculos renales en una persona, en ocasiones se utiliza un procedimiento conocido como litotripcia. Este procedimiento utiliza una cubierta semi-elíptica, y se fundamenta en la propiedad de los focos de una elipse: se localiza un aparato generador de ondas de choque en el foco de la elipse y estas tendrán efecto sobre el otro foco, lugar donde se encuentra el cálculo renal. Si el aparato tiene 13 cm de altura y 10 cm de diámetro, determina a qué distancia podría estar el cálculo para poder pulverizarlo utilizando este aparato.



4.1 Actividad introductoria

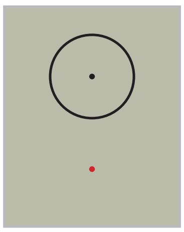
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón

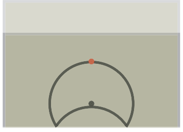


Actividad

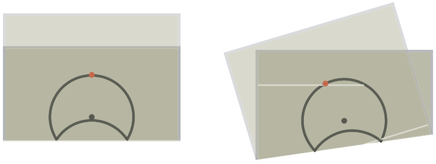
1. Dibuja una circunferencia no demasiado grande sobre el papel vegetal, coloca un punto en su centro y otro afuera un poco lejos de dicha circunferencia y alineados verticalmente.



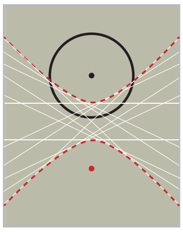
2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta volver al punto con el que se inició. Analiza la figura formada.



4. La figura que se forma tiene dos ramas y el centro de la circunferencia está dentro de una rama y el punto dibujado fuera de la circunferencia está dentro de la otra.



Definición

La figura de las dos ramas que queda marcada en la actividad es una **hipérbola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la diferencia de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

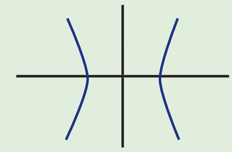
1. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está más lejos de ella?
2. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está muy cerca de la circunferencia?
3. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia no está alineado verticalmente con su centro?
4. ¿Cuánto es la diferencia de un punto de la hipérbola hacia los dos puntos fijos dibujados?
5. Explica por qué se cumple que la diferencia de un punto de la hipérbola a dos puntos fijos se mantiene constante.

4.2 La hipérbola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < a < c$.

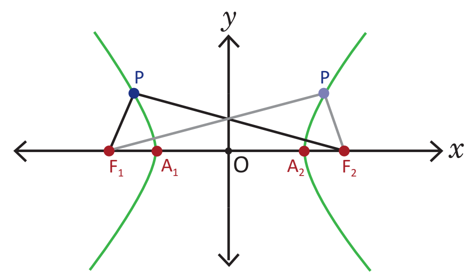
Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una hipérbola**.



Solución

Si el punto P está en la rama izquierda: $d(P, F_2) - d(P,F_1) = 2a$.

Si el punto P está en la rama derecha: $d(P, F_1) - d(P,F_2) = 2a$.



Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(P, F_2) - d(P,F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \text{ transponiendo,}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ elevando al cuadrado,}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \text{ simplificando,}$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \text{ elevando al cuadrado,}$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \text{ simplificando,}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Dado que $0 < a < c$, se cumple que $c^2 - a^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Esta igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros).

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de una hipérbola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la hipérbola y tienen coordenadas:

$$F_1\left(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right) \text{ y } F_2\left(\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right).$$

La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a cada uno de los focos siempre es $2a$.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y $a = 3$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 5$ y $a = 3$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$ c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

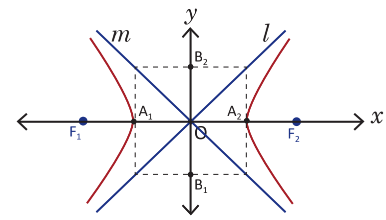
   a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

4.3 Elementos y propiedades de la hipérbola

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Determina las coordenadas de los puntos A_1 y A_2.
b) Determina la ecuación de las diagonales del rectángulo que muestra la figura, si $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.



Solución

a) Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, y pertenecen a la hipérbola, se puede evaluar la ecuación de la hipérbola en $y = 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$ y resolviendo:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

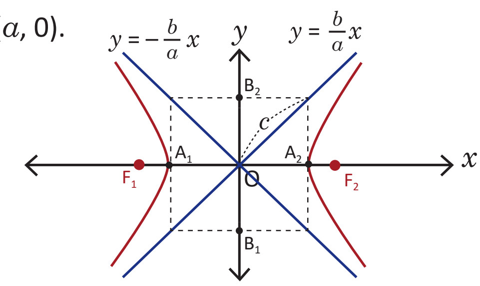
Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$.

b) Para la recta l, dado que pasa por los puntos (a, b) y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = \frac{b}{a}x$.

Para la recta m, dado que pasa por los puntos $(-a, b)$ y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = -\frac{b}{a}x$.

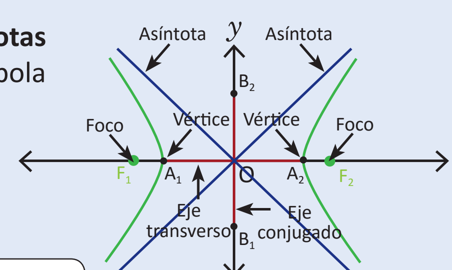


Conclusión

Los puntos A_1 y A_2 de la hipérbola se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. Además, el punto medio del segmento A_1A_2 se conoce como **centro** de la hipérbola.

Las rectas que tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola, y cumplen que sus gráficas se aproximan a la hipérbola pero nunca la tocan.

El segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola se conoce como **eje transverso**, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se conoce como **eje conjugado**.



Para graficar la hipérbola, primero traza las asíntotas y los vértices.

Ejemplo

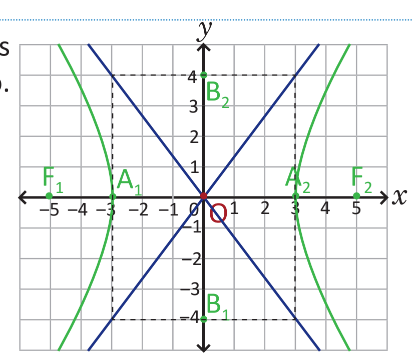
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices: $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ Focos: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$

Al rectángulo formado entre los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 en ocasiones se le llama **rectángulo asintótico**, y puede utilizarse para trazar las asíntotas de la hipérbola a partir de las diagonales de dicho rectángulo.



Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

4.4 Desplazamientos paralelos de la hipérbola

Problema inicial

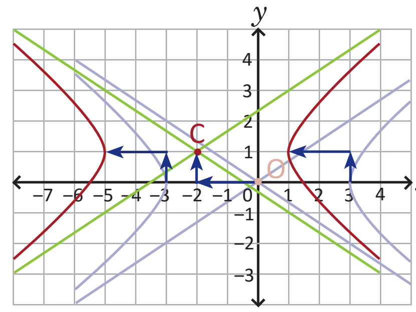
Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Solución

Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica es la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (–2, 1).



Conclusión

La ecuación de una hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y la variable y por la expresión $y - k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada –4 unidades horizontalmente y –3 unidades verticalmente.

Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x - (-4)]$, y y por $[y - (-3)]$.

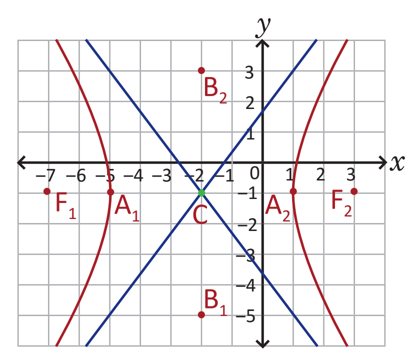
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego gráficala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta hipérbola es equivalente a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente, es decir, tiene centro C(–2, –1).

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1)$, $A_2(1, -1)$
Focos	$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1)$, $F_2(3, -1)$
Asíntotas	$y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$	$y + 1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y + 1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = 1$
   b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $h = 2$, $k = -4$
   c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$, $h = -3$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafica en el plano cartesiano.

   a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
   b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
   c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

4.5 Ecuación general de la hipérbola

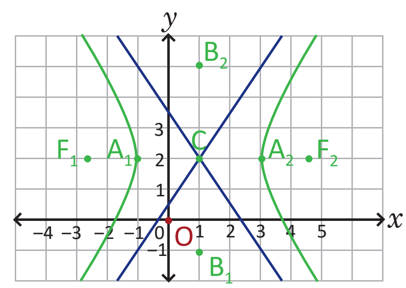
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$
$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$
$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$
$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{simplificando,}$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$



Por lo tanto, la gráfica es una hipérbola con centro (1, 2), vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(3, 2)$ y asíntotas

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Conclusión

Una hipérbola puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejándola igualada a 0.

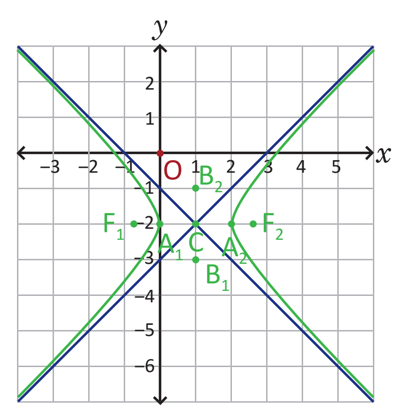
En general, para determinar el centro, los vértices y asíntotas de una hipérbola cuya ecuación sea de la forma $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresar en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, luego gráficala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$



Esta hipérbola es equivalente a $x^2 - y^2 = 1$ desplazada 1 unidad horizontalmente y −2 unidades verticalmente, es decir, tiene centro C(1, −2).

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2)$, $A_2(2, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2} + 1, -2)$, $F_2(\sqrt{2} + 1, -2)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y = x - 3$, $y = -x - 1$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego gráficala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$
e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$
f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

Unidad 3

4.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$

b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, y vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

b) $(x + 1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

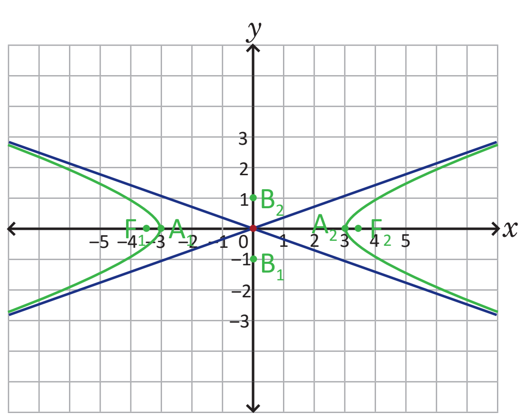
6. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

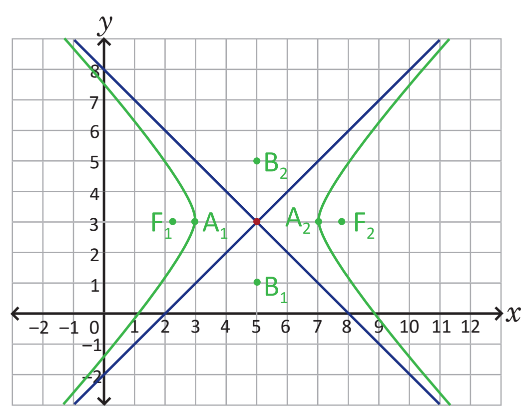
b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes gráficas.

a)



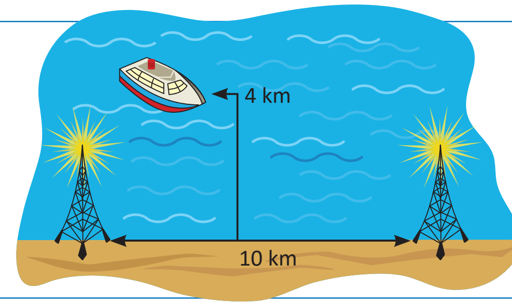
b)



4.7 Aplicaciones de la hipérbola*

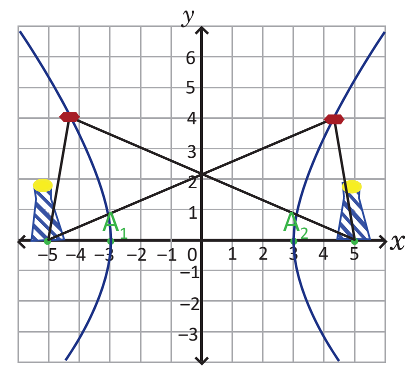
Problema inicial

Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa.



Solución

Considerando la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 6 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce la distancia entre las dos torres (focos), es posible conocer el valor de c, así:



$$|d_2 - d_1| = 2a = 6, \text{ entonces } a = 3,$$
$$2c = 10, \text{ entonces } c = 5,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará encontrar la coordenada en x cuando $y = 4$:

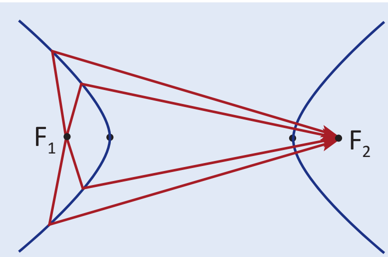
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1 \quad \text{Despejando } x^2.$$
$$x^2 = 2(3^2)$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

El sistema de navegación ruso CHAYKA y el sistema LORAN utilizan este principio para la localización de navíos, sin embargo poco a poco este tipo de sistemas está siendo reemplazado por la localización GPS.

Conclusión

En una hipérbola los focos cumplen una propiedad reflectora importante: si se toma una línea desde un foco esta, será reflejada por la hipérbola exactamente sobre el otro foco.

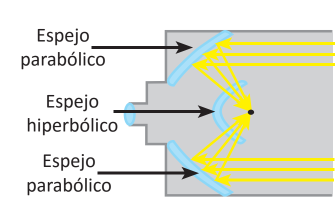
Esta propiedad reflectora parecida a la de la elipse y la parábola hace de las formas hiperbólicas herramientas de aplicación en diversos ámbitos científicos.



Problemas

1. Las señales de un barco recibidas por un sistema CHAYKA cuyas torres están ubicadas sobre la costa a 26 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 10 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 12 km de distancia de la costa.

2. Un telescopio Maksutov-Cassegrain funciona de modo que recibe las señales de luz, y son reflejadas por un espejo parabólico (cortado) hacia el foco, el cual es foco de otro espejo, pero este es hiperbólico como lo muestra la figura. Determina la función del espejo hiperbólico y explica el funcionamiento del telescopio Maksutov-Cassegrain.



Unidad 3

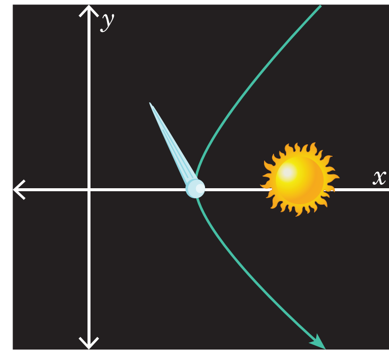
4.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de hipérbola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

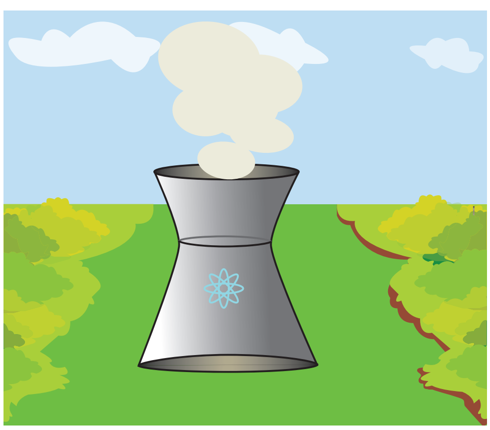
1. En el universo las trayectorias de un cometa pueden tener diversas formas, desde elípticas, parabólicas o hiperbólicas, siempre teniendo al Sol como foco de dichas figuras. Tomando un cometa cuya trayectoria es hiperbólica (solo será visto una vez en la historia), cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

   Donde los números 20 y 21 representan cuatrillones de metros. Determina la distancia mínima en que pasará el cometa con dicha trayectoria del sol.

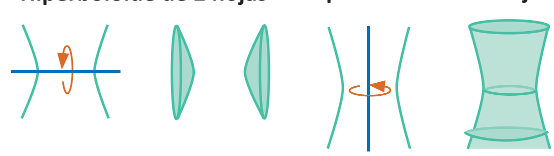


2. Las torres de enfriamiento de las plantas nucleares de energía se diseñan con forma de hiperboloide de una hoja, si el diámetro de la parte más alta es 3.75 m y se ubica a 9 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 3 m y se ubica a 6 m de altura, determina aproximadamente el diámetro de la base de la torre.



Una forma de hiperboloide es un cuerpo geométrico que resulta de girar una hipérbola alrededor de alguno de sus ejes. Si se gira alrededor del **eje transverso** se conoce como **hiperboloide de 2 hojas** y si se gira alrededor del **eje conjugado** se conoce como **hiperboloide de 1 hoja**.

Hiperboloide de 2 hojas **Hiperboloide de 1 hoja**

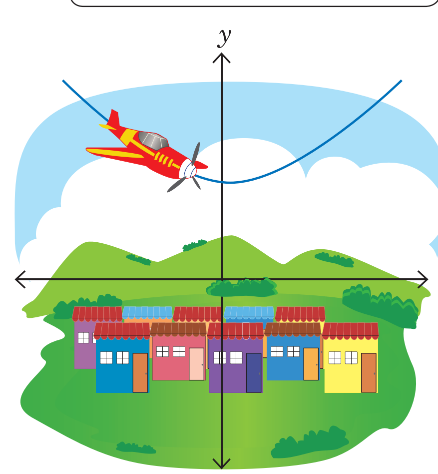


3. La torre de Polibino fue la primera estructura diseñada con forma de hiperboloide. Si el diámetro de la parte más alta de una torre hiperboloide es $4\sqrt{5}$ m y se ubica a 32 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 4 m y se ubica a 16 m de altura, determina el diámetro de la base de la torre.

La torre de Polibino fue construida por el ingeniero ruso Vladimir Shújov, y la construcción de torres hiperboloides fue patentada por el mismo Shújov en el año 1896.

4. Una avioneta vuela sobre la ciudad de San Vicente y describe una trayectoria hiperbólica dada por la ecuación $4y^2 - x^2 = 2\,500$.

   Determina cuál es la menor distancia sobre el nivel del suelo a la que estará dicha avioneta.



4.9 Problemas de la unidad

Piensa cómo sería la ecuación de una parábola horizontal.

1. Grafica la parábola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $x = 2y^2$ b) $x = -3y^2$ c) $x + 1 = (y - 2)^2$ d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

Piensa cómo sería la ecuación de una elipse horizontal.

2. Grafica la elipse determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Piensa cómo sería la ecuación de una hipérbola horizontal.

3. Grafica la hipérbola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. Clasifica las siguientes ecuaciones según el tipo de figura que determinan en el plano cartesiano, parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$ b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ c) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ g) $y = \frac{1}{4p}x^2$ h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$

5. Determina qué tipo de figura (parábola, circunferencia, elipse o hipérbola) corresponde a cada ecuación.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$ e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$ h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$ l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

En resumen

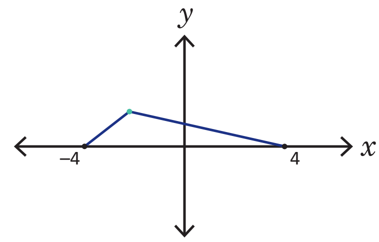
Las cuatro figuras estudiadas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) reciben el nombre de **cónicas**, y están dadas por los siguientes tipos de ecuaciones:

$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	**Circunferencia**	**Elipse**	**Hipérbola**

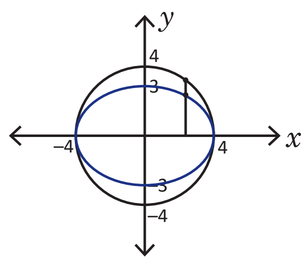
Estas figuras pueden tener variantes, como estar en posición horizontal, desplazadas o expresadas con todas las operaciones desarrolladas e igualadas a cero. En general, las ecuaciones presentadas arriba se conocen como: **ecuaciones canónicas** de dichas figuras.

4.10 Problemas de la unidad

1. La base de un triángulo tiene longitud fija y sus vértices se ubican en los puntos (–4, 0) y (4, 0), determina el lugar geométrico que describe el otro vértices si se cumple que el producto de las pendientes de los lados variables siempre es igual a 4.

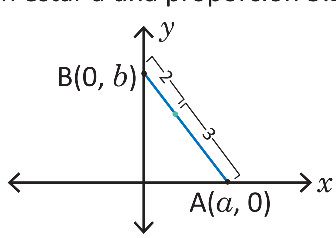


2. Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.



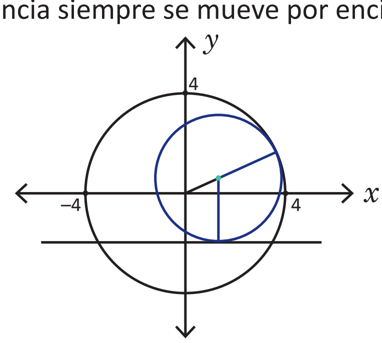
En este ejercicio se puede observar cómo una elipse puede ser vista como una circunferencia reducida respecto a una dirección a una razón constante.

3. Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.



Puedes asumir las coordenadas de A(a, 0) y las de B(0, b), utiliza el Teorema de Pitágoras para establecer una ecuación. Luego puedes calcular las coordenadas de un punto sobre un segmento dividido a una razón dada.

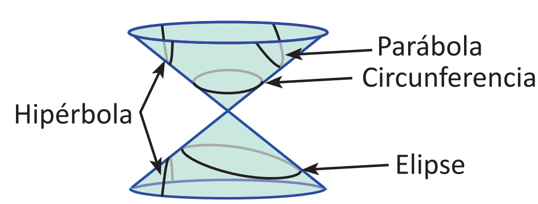
4. Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.



Determina la relación que existe entre las distancias del centro de la circunferencia variable a la recta y al centro de la circunferencia fija.

En resumen

Todas las figuras cónicas son llamadas de esta manera porque todas se pueden obtener de realizar cortes por un plano sobre un cono de doble hoja como lo muestra la figura.



Puedes encontrar información acerca de las cónicas en el video oficial del Ministerio de Educación de El Salvador (MINED) titulado "Cónicas", en la dirección https://goo.gl/Lq3dGW.

5.1 Práctica en GeoGebra: construcción de secciones cónicas

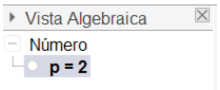
En esta práctica se construirán gráficas de secciones cónicas a partir del uso de variables, de modo que, al dar valores diferentes del centro, parámetro, longitudes de los ejes, etc., se puedan construir secciones cónicas de la misma familia (parábolas, circunferencias, elipses o hipérbolas). Sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" para construir la cónica. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

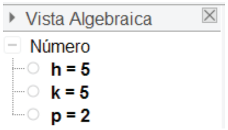
Construcción de una parábola de parámetro p y vértice (h, k).

1. Ingresa en la barra de entrada la variable p con valor de 2 digitando p = 2.

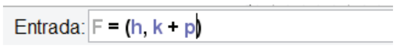
2. Presiona "enter" para obtener en la Vista Algebraica (panel izquierdo) la expresión de la derecha.



3. De la misma manera introduce las variables h y k, con valor de 5 para ambas variables, en la Vista Algebraica se tendrá un resultado como el que muestra la imagen de la derecha.

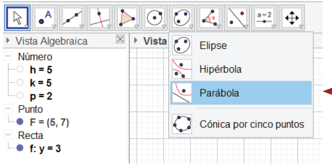


4. Grafica el foco, digitando en la barra de entrada F = (h, k + p), el punto F (foco) aparecerá en la vista gráfica.

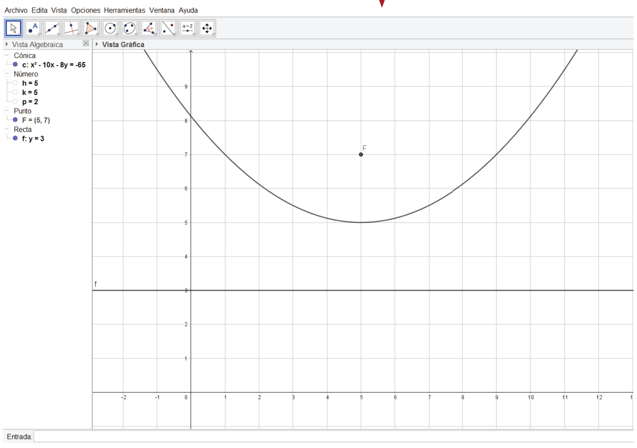


5. Grafica la directriz, digitando en la barra de entrada y = k – p, la recta directriz aparecerá en la vista gráfica.

6. En el botón de cónicas, selecciona la opción Parábola.



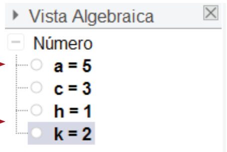
7. A continuación selecciona el punto F (ya sea en la Vista Gráfica o en la Algebraica) y luego selecciona la recta directriz. Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



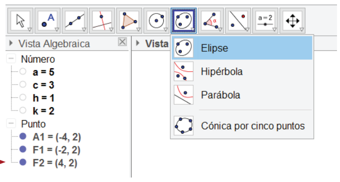
8. Puedes cambiar los valores de las variables p, h, k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 1. También puedes ver las formas de la ecuación de la parábola dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

Construcción de una elipse conocidos los valores de a, c y centro (h, k).

1. Ingresa las variables a, c, h y k desde la barra de entrada con valores de 5, 3, 1 y 2 respectivamente. En la Vista Algebraica se obtendrá un resultado como el que muestra la figura de la derecha.

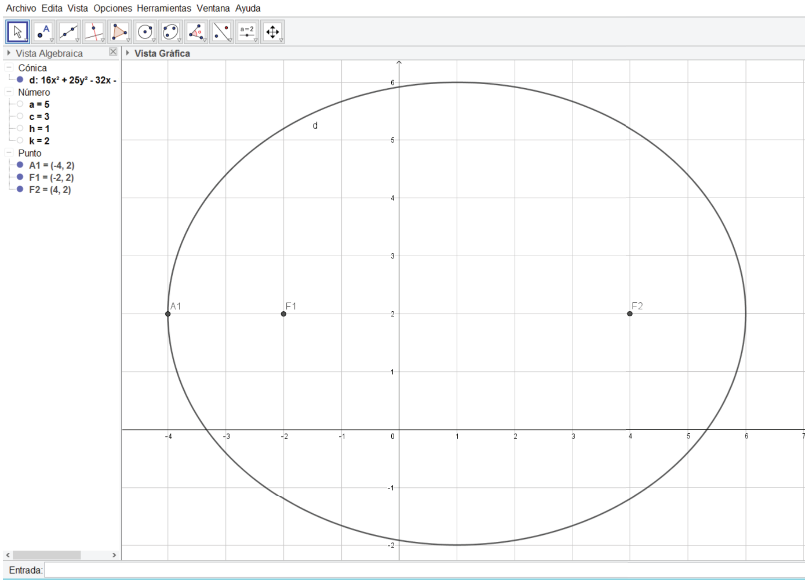


2. Grafica los focos y un vértice, digitando las coordenadas de los puntos F_1, F_2 y A_1 de la forma F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k). Los puntos aparecerán en la vista gráfica.



3. En el botón de cónicas, selecciona la opción Elipse.

4. A continuación selecciona el punto F1 luego selecciona el punto F2 y finalmente el punto A1 (vértice). Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



5. Puedes cambiar los valores de las variables a, b, h y k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 3. También puedes ver las formas de la ecuación de la elipse dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

Actividades

1. Construye una circunferencia con los valores del centro (h, k) y el radio r.
2. Construye una hipérbola con valores de a, c y centro (h, k).
3. Verifica las respuestas de los problemas que resolviste durante las clases de toda la unidad y corrobora que están correctos.
4. Contruye una parábola horizontal.
5. Contruye una elipse vertical.
6. Contruye una hipérbola vertical.

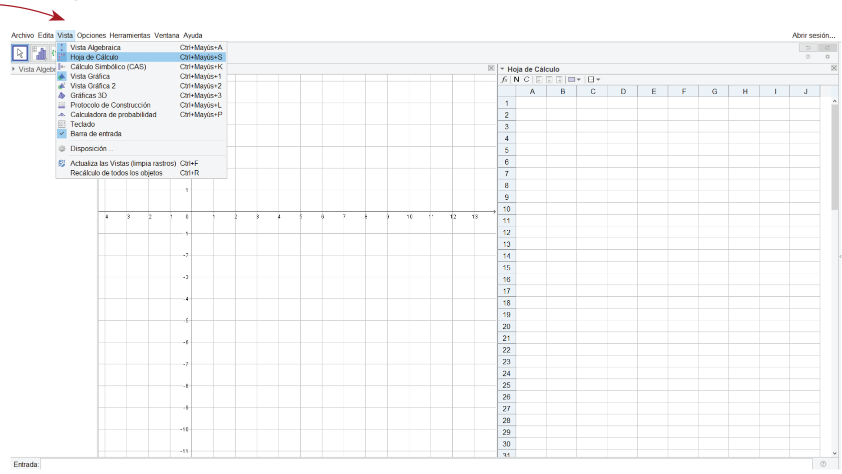
5.2 Práctica en GeoGebra: gráfica de la ecuación general de cónicas

En esta práctica se utilizará la Hoja de Cálculo de GeoGebra para graficar cónicas dada una ecuación en forma general, así será más sencillo identificar el tipo de cónica que está expresada, e incluso se puede utilizar la Vista Algebraica para obtener la ecuación en forma canónica. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye la ecuación general para graficar la cónica correspondiente. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

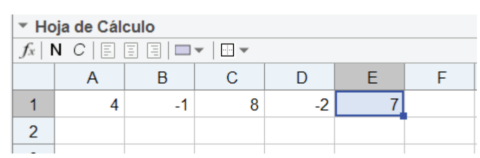
Práctica

Gráfica de la cónica dada por su ecuación general.

1. Abre el menú Vista y selecciona la opción Hoja de Cálculo.



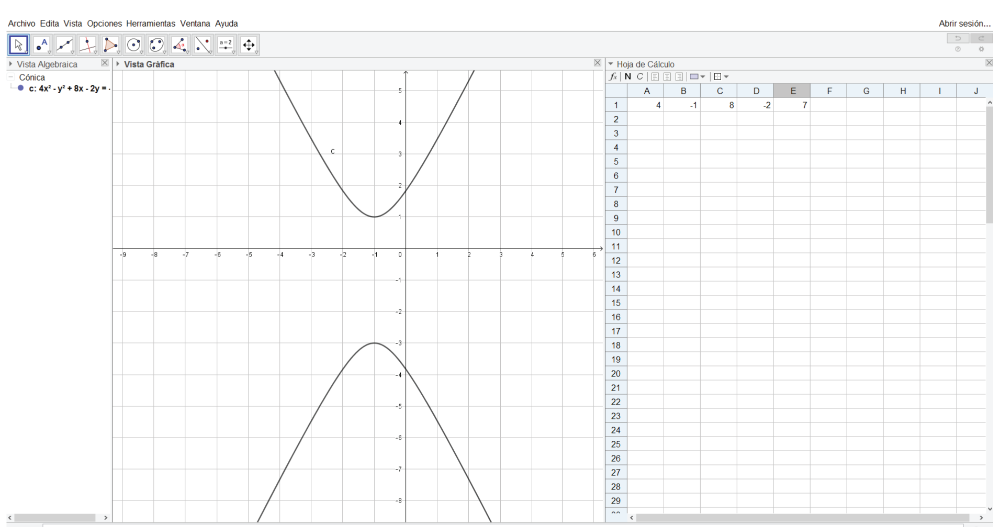
2. Ubícate en la fila 1 y digita los valores 4, –1, 8, –2, 7, uno en cada columna, como lo muestra la figura de la derecha.



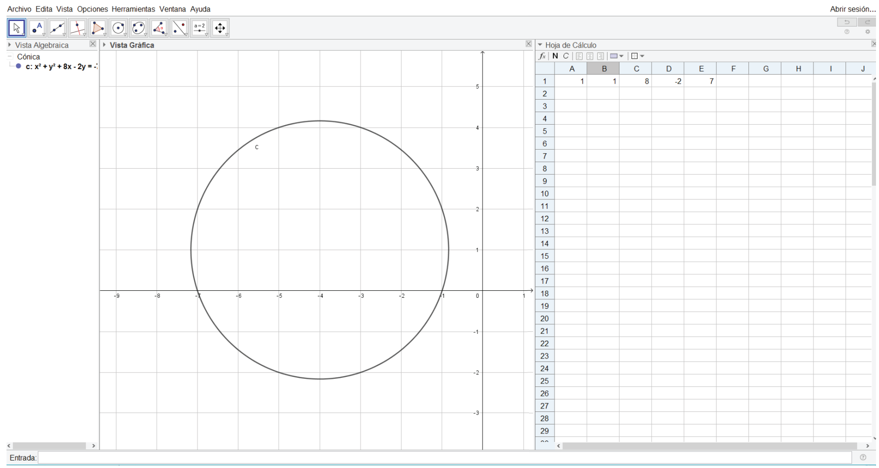
3. Ahora digita en la barra de entrada la ecuación general, tomando como coeficiente de x^2, y^2, x, y y la constante, los valores de la celda A1, B1, C1, D1 y E1 respectivamente, de la siguiente manera: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0.

Entrada: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0

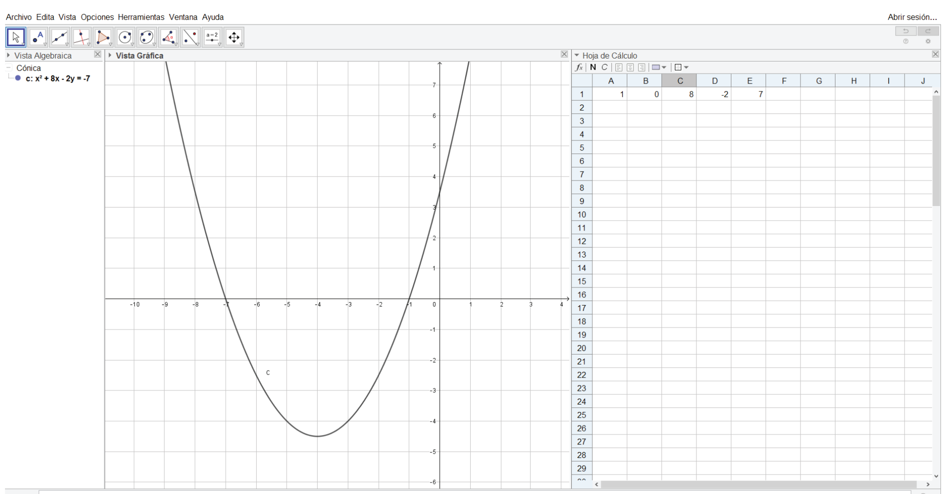
4. Al introducir la ecuación se muestra la gráfica de una hipérbola en la Vista Gráfica, como lo muestra la imagen de abajo.



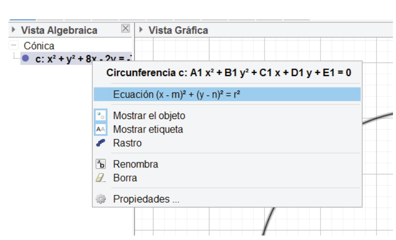
5. Cambiando el valor de las celdas A1 y B1 a 1, se obtiene la gráfica de una circunferencia.



6. Cambiando el valor de la celda B1 a 0, se obtiene una parábola.



7. Cambia la ecuación a la forma canónica, dando clic derecho sobre la ecuación y seleccionándola. Como muestra la figura.



Actividades

Identifica qué tipo de cónica es cada una de las siguientes ecuaciones, verifica si tu respuesta del problema 5 de la clase 4.9 es correcta, si no, determina cuál fue el error.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$

e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$

h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$

l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

5.3 Práctica en GeoGebra: propiedades de las secciones cónicas

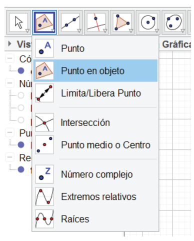
En esta practica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las propiedades de los focos de las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) que se utilizaron en las aplicaciones de estos contenidos. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de “Práctica” y construye la propiedad. Luego trabaja en GeoGebra la parte “Actividades” que está al final de esta práctica.

Práctica

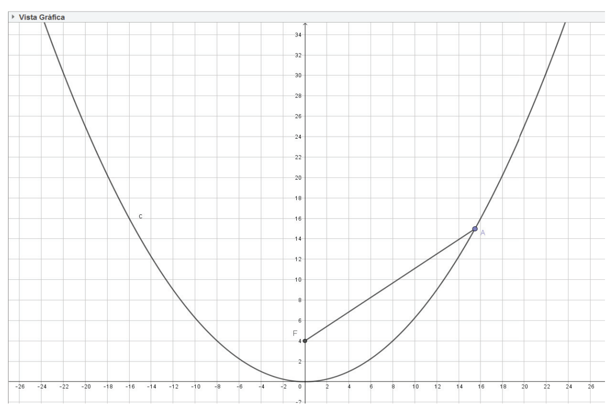
Verificación de la propiedad del foco de una parábola.

Cualquier línea desde el foco será reflejada en una misma dirección paralela al eje, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco.

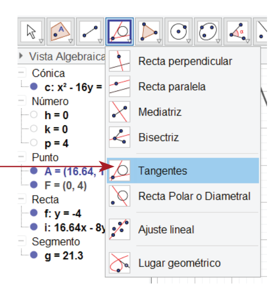
1. Utilizando el archivo creado en la práctica 5.1, grafica una parábola con vértice (0, 0) y parámetro $p = 4$.
2. En el botón Punto, selecciona la opción Punto sobre objeto y localiza un punto en la parábola, de tal modo que pueda moverse alrededor de toda la parábola.



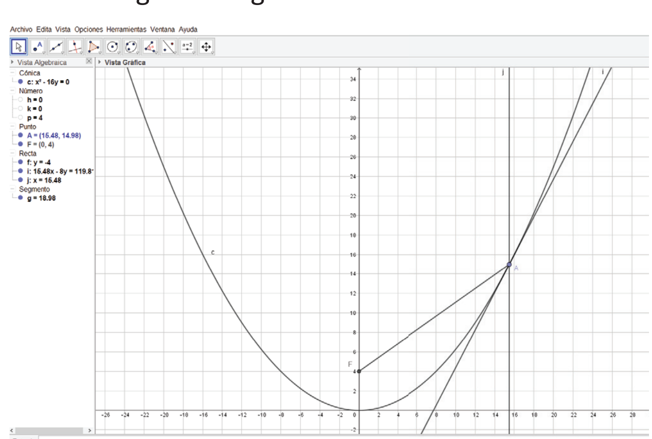
3. Dibuja un segmento de recta que vaya desde el foco (F) hasta el punto localizado en la parábola, tal como lo muestra la figura de abajo.



4. Grafica una recta tangente a la parábola en el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón de Rectas, opción Tangentes, y seleccionando el punto y luego la parábola.

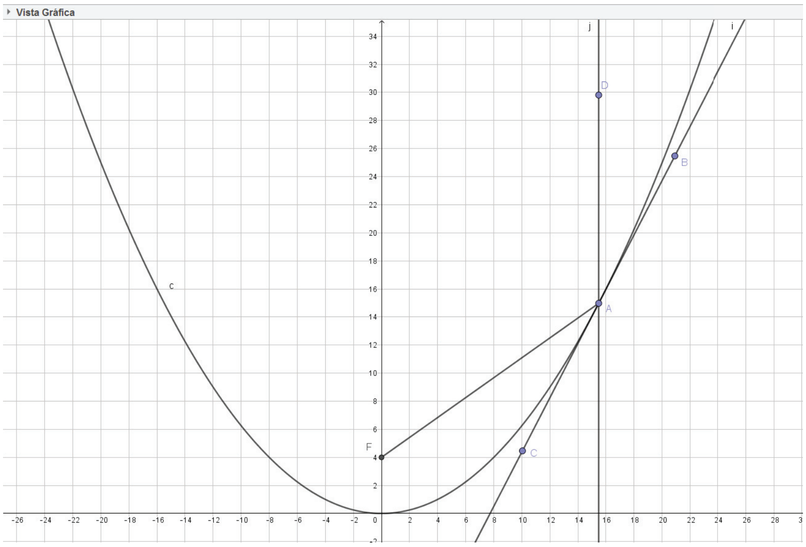


5. Dibuja una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón Rectas, opción Recta paralela, seleccionando el punto y el eje y. Se obtiene la siguiente figura:

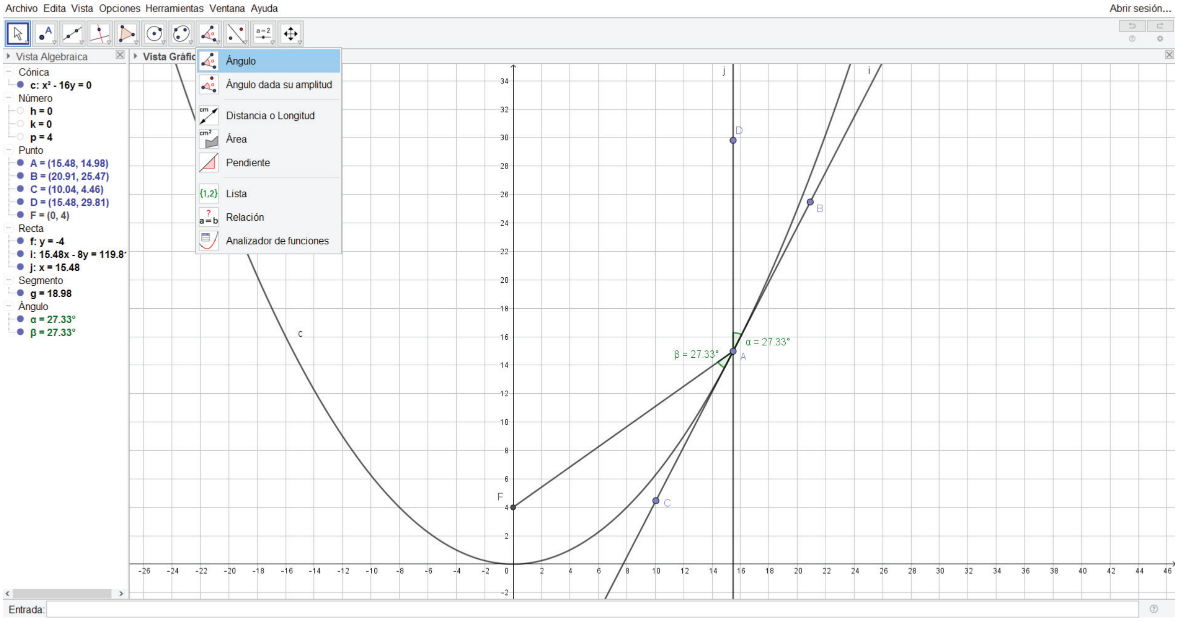


Unidad 3

6. Coloca los puntos B y C sobre la recta tangente, y el punto D sobre la recta paralela al eje y, tal como lo muestra la figura.



7. Mide los ángulos DAB y FAC, utilizando el botón de ángulos, opción Ángulo, tal como lo muestra la figura.



8. Con el cursor puedes mover el punto sobre la parábola y verificar que el ángulo con que se refleja la recta emitida por el foco se mantiene constante respecto de la recta paralela al eje de la parábola. También puedes dar clic derecho sobre el punto y marcar la opción animación para recorrer todos los puntos de la parábola de manera automática.

Actividades

1. Realiza una contrucción para verificar la propiedad de los focos de una elipse que se utilizó en las aplicaciones sobre la elipse.

2. Realiza una construcción para verificar la propiedad de los focos de una hipérbola que se utilizó en las aplicaciones sobre la hipérbola.

5.4 Práctica en GeoGebra: problemas sobre el lugar geométrico de las cónicas

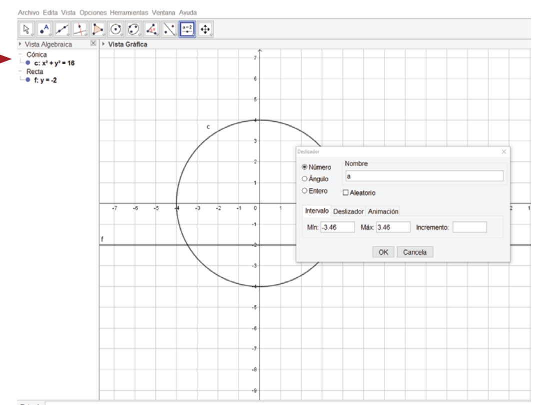
En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las respuestas de los problemas sobre lugar geométrico de secciones cónicas que se resolvieron en la clase 4.10. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye los lugares geométricos correspondientes. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

Retomando el problema 4 de la clase 4.10:

Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.

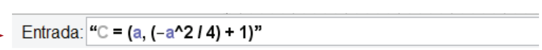
1. Utiliza la barra de entrada para graficar la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.



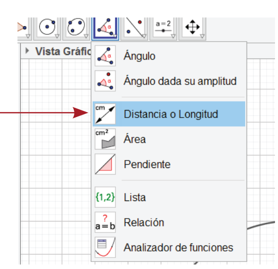
2. Inserta un deslizador con la variable a, seleccionando el botón deslizador y dando un clic sobre la Vista Gráfica en el lugar que se quiere colocar, usar el valor mínimo de –3.46 y máximo de 3.46 y presionar "enter".

3. Para comprobar la respuesta del problema, la cual es "$y = -\frac{x^2}{4} + 1$", ingresa en la barra de Entrada el punto C = $\left(x, -\frac{x^2}{4} + 1\right)$, escribiendo:

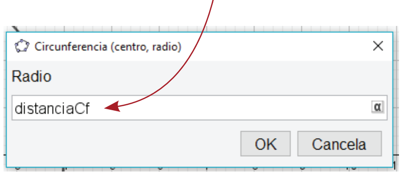
C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

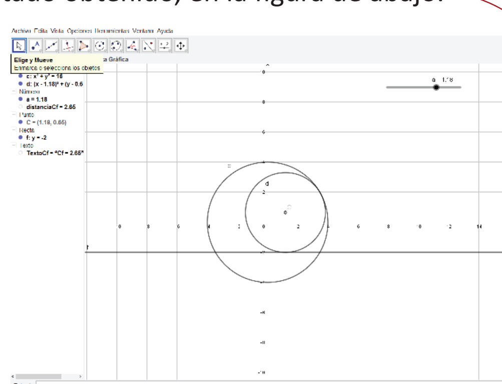


4. En el botón de Ángulo selecciona la opción Distancia o Longitud, selecciona el punto C graficado en el paso 3, y la recta $y + 2 = 0$. Después de ello aparecerá en la Vista Gráfica una etiqueta que muestra la distancia del punto C a la recta, y en la Vista Algebraica aparecerá una variable con nombre "distanciaCf", la cual almacena el valor numérico de la distancia medida.

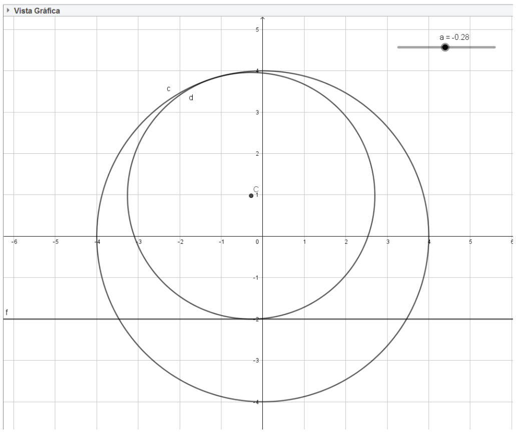


5. Ahora construye una circunferencia, utilizando la opción de centro y radio, luego selecciona como centro el punto C, construido en el paso 3, y en la entrada del radio escribe la variable que almacena la distancia, es decir, "distanciaCf". Se puede observar el resultado obtenido, en la figura de abajo.

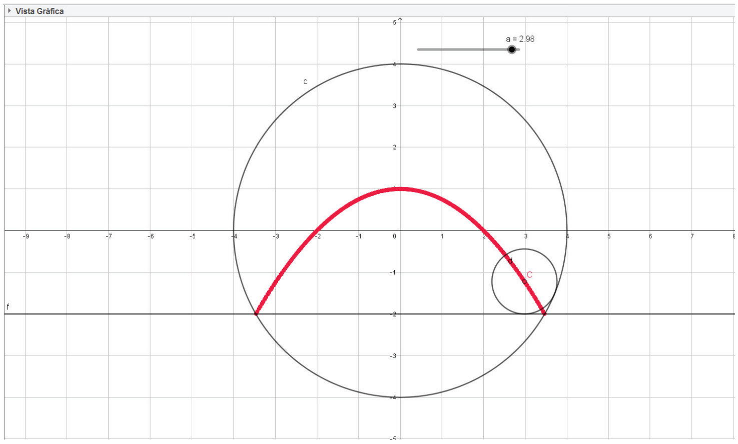




6. Observa que la circunferencia graficada en el paso 5 es tangente tanto a la recta $y + 2 = 0$ como a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Puedes mover el deslizador horizontalmente y ver cómo se mueve dicha circunferencia.



7. Haz clic derecho sobre el punto C y selecciona la opción rastro (se puede cambiar el color del punto, si se desea), ahora mueve el deslizador de nuevo y observa cómo se marca el lugar geométrico con el rastro.



8. Finalmente puedes dar clic derecho sobre el deslizador y seleccionar la opción animación para correr automáticamente el lugar geométrico y comprobar que la respuesta es correcta.

Actividades

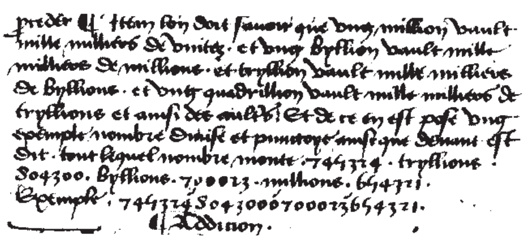
1. Cambia el rango entre el valor mínimo y el máximo del deslizador, observa el resultado y escribe la conclusión de este resultado, enfocándote en la tangencia de la circunferencia con la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2. Realiza una construcción para verificar la respuesta al problema 2 y 3 de los problemas de la unidad de la clase 4.10:
   a) Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.

   b) Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.

Unidad 4

Funciones trascendentales I



Extracto del manuscrito original del Triparty en la science des nombres.

El concepto de potencia se remonta a la Grecia antigua, cuando Euclides (300 a.C.) utilizó este término para indicar el número de veces que debía multiplicarse un número por sí mismo. El pensador francés Nicole Oresme (siglo XIV d.C.) presentó por primera vez la noción de exponente racional e irracional. En el trabajo *Triparty en la science des nombres* (1484) del matemático francés Nicolas Chuquet (siglo XV d.C.), aparecen por primera vez los números negativos como coeficientes, exponentes y soluciones de ecuaciones. Más adelante, alrededor de 1694, el matemático suizo Johann Bernoulli (Siglos XVII-XVIII d.C.) publica un importante trabajo acerca de las funciones exponenciales.

A finales del siglo XIX varios problemas de la naturaleza se describieron matemáticamente por medio de las funciones exponenciales. Svante Arrhenius formalizó la relación entre la constante cinética de una reacción química y la temperatura. Thomas Maltus establece que el crecimiento poblacional tiene un comportamiento exponencial a través del tiempo. Y las observaciones de Newton sobre el enfriamiento de los cuerpos dieron paso a la ley del enfriamiento, que tiene un decaimiento exponencial.

La población mundial aumenta de manera exponencial.

Se estudiarán en esta unidad las propiedades de los exponentes enteros, exponentes racionales y se generalizará la potencia para todo exponente real. Esto permitirá definir la función exponencial y estudiar sus propiedades.

1.1 Propiedades de potencias con igual base y exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^2 \times 2^3$ b) $3^6 \div 3^2$ c) $(2^2)^3$

Solución

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{- veces}}$

a^n → exponente
a^n → potencia
a^n → base

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{\text{5-veces}}$$

$$= 2^5$$

Se cumple que: $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$

$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \quad \text{simplificando}$$

$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4- veces}}$$

$$= 3^4$$

Se cumple que: $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$.

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$

$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{6-veces}}$$

$$= 2^6$$

Se cumple que: $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6$.

Definición

1. Si a y b son números reales, m y n enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$) c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

La propiedad del literal b) también se escribe como fracción: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Si a es un número real: $a^1 = a$

2. Si a es un número real positivo, entonces:

a) Si n es par entonces:

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad par de números negativos}} = a^n$$

b) Si n es impar entonces

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad impar de números negativos}} = -a^n$$

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $3^6 \times 3^4$ b) $(-3)^2 \times (-3)^4$ c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$ e) $(-2)^5 \div (-2)^3$ f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$ h) $(10^4)^3$ i) $[(-3)^3]^5$

1.2 Propiedades de potencias con igual exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Solución

a) $2^3 \times 3^3$

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3); \quad \text{asociando,} \\ &= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{3-veces}} \\ &= 6^3 \end{aligned}$$

Se cumple que: $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Del problema anterior se tiene: $6^3 = 2^3 \times 3^3$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad por 2^3 se tiene:

$$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$$

Se cumple que: $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$.

Conclusión

- Si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

  a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

  b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- La propiedad b) se expresa como división así:

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, entonces:

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

Ejemplo

Expresa el producto $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ como una sola potencia.

a) $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

Por lo tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$.

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div (3)^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

Unidad 4

1.3 Exponente cero y exponente negativo*

Problema inicial

Asume que la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ se cumple para todo entero m y n. Efectúa las siguientes divisiones de dos maneras distintas:

a) $6^3 \div 6^3$

b) $3^3 \div 3^7$

Solución

a) $6^3 \div 6^3$

Utilizando las propiedades de la división
$6^3 \div 6^3 = 1$

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3} = 6^0$$

Por lo tanto, $6^3 \div 6^3 = 6^0$.

Así 6^0 y 1 representan el mismo número.

b) $3^3 \div 3^7$

Utilizando la simplificación:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7} = 3^{-4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$

Entonces 3^{-4} y $\frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

Definición

a) **El exponente cero.**
Si a es un número real con $a \neq 0$ entonces:

$$a^0 = 1.$$

b) **El exponente negativo.**
Si a es un número real con $a \neq 0$ y n un número entero positivo entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición las propiedades de exponentes positivos se aplican también a los exponentes negativos y cero. Si a y b son reales, m y n enteros:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Problemas

1. Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{(-5)^5}$ d) $\frac{1}{10^8}$

2. Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

a) 2^{-7} b) 3^{-5} c) 5^{-1} d) 7^{-2}

1.4 Raíz n-ésima de un número real

Problema inicial

Determina un valor real de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 = 27$

b) $x^4 = 625$

Solución

a) La descomposición prima de 27 es:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$27 = 3^3$

Por lo tanto $x = 3$, es solución de la ecuación.

Así, a 3 se le denomina la raíz cúbica de 27 y se denota por $3 = \sqrt[3]{27}$.

b) La descomposición prima de 625 es:

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$625 = 5^4$

Por lo tanto, $x = 5$ es solución de la ecuación.

A 5 se le denomina la raíz cuarta de 625: $5 = \sqrt[4]{625}$.

También $x = -5$, es solución de la ecuación.

A –5 se le denomina raíz cuarta negativa de 625:

$-5 = -\sqrt[4]{625}$

Definición

Sea n un entero positivo, un número b que cumple la condición $b^n = a$ es llamado **raíz n-ésima** de a.

Al trabajar con raíces n-ésimas de números reales se distinguen dos casos:

1. Si n es impar, a cada número real a le corresponde una única raíz n-ésima y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si n es par, a cada número real positivo a le corresponden dos raíces n-ésima reales, una positiva $\sqrt[n]{a}$ y una negativa $-\sqrt[n]{a}$.

Si se cumple una de las siguientes condiciones n es impar o n es par y $a > 0$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radical

radicando

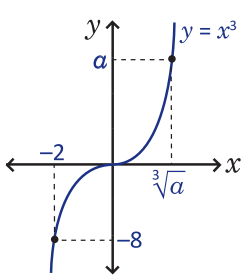
Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.

Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Si n es un entero positivo entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ejemplo

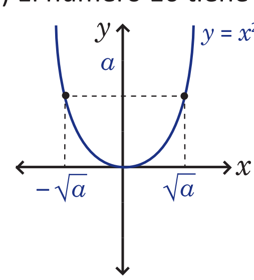
a) El número –8 tiene una única raíz cúbica:



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$

Todo número real a tiene una única raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

b) El número 16 tiene dos raíces cuadradas:



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

Todo número real positivo a tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Problemas

Expresa las siguientes igualdades utilizando la notación de raíz n-ésima.

a) $2^3 = 8$

b) $(-5)^3 = -125$

c) $3^4 = 81$

d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$

f) $(-2)^5 = -32$

g) $(-4)^5 = -1024$

h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

1.5 Expresión de números sin el símbolo radical

Problema inicial

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[3]{729}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Solución

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ se descompone 729,

$= 3^3 \times 3^3$ se reescribe como producto de potencias de índice 3,

$= (3 \times 3)^3$ al utilizar propiedades de potencia,

$= 9^3$.

Es decir, al elevar 9 al cubo se obtiene 729.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{729} = 9$.

b) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

$\dfrac{16}{81} = \dfrac{2^4}{3^4}$ se descomponen 16 y 81,

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ al utilizar propiedades de potencia,

entonces al elevar $\dfrac{2}{3}$ a la cuarta se obtiene $\dfrac{16}{81}$.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$.

Conclusión

Para escribir sin radical el número real $\sqrt[n]{a}$ realiza lo siguiente:

Ejemplo: $\sqrt[3]{1728}$

1. Escribe la descomposición prima de a, si el radicando es una fracción se descompone el numerador y el denominador. → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. Expresa la descomposición como producto de potencias con exponente n. → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. Utiliza la propiedad de producto o división de potencias con el mismo exponente. → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. Se obtiene una expresión de la forma $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$. → $\sqrt[3]{1728} = 12$

Si n es un entero impar y a un número real entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Si n es par, las raíces n-ésimas de números negativos no son números reales.

Problemas

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[5]{243}$

c) $\sqrt[7]{128}$

d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$

f) $\sqrt[4]{256}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{512}{343}}$

h) $\sqrt[6]{\dfrac{64}{729}}$

1.6 Operaciones con raíces n-ésimas

Problema inicial

Utiliza la definición de raíz n-ésima para expresar con un solo radical las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$ b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$ y $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$(\sqrt[3]{6})^3 \times (\sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ se multiplican miembro a miembro las igualdades anteriores,

$(\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{6 \times 20}$ se expresa la potencia como raíz cúbica,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$ se efectúa el producto.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4 = 96$ y $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$ se utiliza la definición de raíz cuarta,

$(\sqrt[4]{96})^4 \div (\sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ se divide miembro a miembro,

$(\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{96 \div 3}$ se expresa la potencia como raíz cuarta ($\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} > 0$),

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$ se efectúa la división.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2 = \sqrt[3]{128}$ se utiliza la definición de raíz cuadrada,

$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3 = (\sqrt[3]{128})^3 = 128$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2 \times 3} = 128$ al aplicar propiedades de potencia,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6 = 128$ se efectúa el producto,

$\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$ se expresa la potencia como raíz sexta $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}} > 0\right)$.

Por lo tanto, $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$.

Conclusión

Para efectuar:		Se tiene que:		Escribiendo como raíz n-ésima:
a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = a \times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
b) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b})^n = a \div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

Para simplificar una raíz n-ésima se utiliza la propiedad de la multiplicación:

$$\sqrt[n]{a^n \times b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b}$$
$$= a\sqrt[n]{b}$$

Si $a_1, a_2, \dots, a_m$ son números reales entonces:
$\sqrt[n]{a_1} \times \sqrt[n]{a_2} \times \cdots \times \sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_m}$

La propiedad b) también se utiliza así:

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Simplificar una raíz es expresarla con un radicando menor al inicial.

Simplificar a la mínima expresión es simplificar el radicando al menor valor posible.

Después de efectuar una operación con radicales siempre debe simplificarse a la mínima expresión.

Ejemplo

1. Simplifica los resultados del Problema inicial.

a) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 5}$
$= 2\sqrt[3]{3 \times 5}$
$= 2\sqrt[3]{15}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$.

b) $\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2}$
$= 2\sqrt[4]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt[6]{128}$

$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6 \times 2}$
$= 2\sqrt[6]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$.

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{4 \times 8 \times 2 \times 4}$
$= \sqrt[8]{2^2 \times 2^3 \times 2 \times 2^2}$
$= \sqrt[8]{2^8}$
$= 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}$
$= \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{3^3}$
$= 3$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica a la mínima expresión tu respuesta.

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10}$ b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50}$ c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10}$ e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}\,)$ f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}\,)$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$ h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$ i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

1.7 Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Dos raíces pueden sumarse o restarse si son semejantes es decir, el índice y el radicando son el mismo.

Solución

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

Simplificando a la mínima expresión:

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \times 2}$ y $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3}$

$= 2\sqrt[3]{2}$ $= 3\sqrt[3]{2}$

Se efectúa la suma de raíces semejantes:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}$$

$$= 5\sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 5\sqrt[3]{2}$.

b) $(\sqrt[6]{4}\,)^3$

Se descompone la potencia como producto:

$$(\sqrt[6]{4}\,)^3 = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4}$$

$$= \sqrt[6]{4 \times 4 \times 4}$$

$= \sqrt[6]{4^3}$ se expresa como potencia

Simplificando: $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

Por lo tanto, $(\sqrt[6]{4}\,)^3 = 2$.

Conclusión

1. Los pasos para realizar suma o resta de raíces n-ésimas son:
   - Simplificar las raíces a la mínima expresión.
   - Sumar o restar raíces semejantes.

2. La potencia de una raíz real cumple $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{m\text{-veces}}$

   Utilizando las propiedades de raíz n-ésima: $(\sqrt[n]{a}\,)^m = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{-veces}}}$

   Reescribiendo como potencia el radicando: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

El número $\sqrt[n]{a}$ no es real, si n es par y a negativo.

Por ejemplo:
$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[6]{-2}$, no son números reales.

Problemas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

   a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$

   e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48}$

   i) $(\sqrt[5]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. Para demostrar que $2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$, realiza los siguientes pasos:

   a) Demuestra que $(1 + \sqrt{3})^3 = 10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

   b) Demuestra que $(-1 + \sqrt{3})^3 = -10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

   c) Efectúa la resta de las raíces cúbicas de los literales anteriores y concluye.

1.8 Exponente racional

Problema inicial

1. Simplifica las siguientes expresiones, escribe tu respuesta como una potencia.
   a) $\sqrt{2^6}$ b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. Demuestra que $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.

Recuerda que para todo número real a positivo:
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$

Solución

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$

Por lo tanto, $\sqrt{2^6} = 2^3$.

Se observa que $3 = \frac{6}{2}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$.

Se observa que $4 = \frac{12}{3}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$ por propiedades de raíces n-ésimas,

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$ al aplicar propiedades de potencia,

$= \sqrt[3]{2^2}$ se utiliza que $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Por lo tanto, $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. Observa que $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

Definición

Si a es un número real positivo, m y n son números enteros y n es positivo, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Una potencia con exponente racional $\frac{m}{n}$ es la raíz n-ésima de una potencia m-ésima.

Además, si r es un entero positivo se cumple que $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, por lo que es válida la simplificación de exponentes racionales, para todo $a > 0$:

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Problemas

1. Escribe las siguientes raíces como potencias con exponente fraccionario, simplifica si se puede.
   a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3^2}$
   e) $\sqrt[4]{5^2}$ f) $\sqrt[5]{2^{10}}$ g) $\sqrt[5]{6^3}$ h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. Escribe las siguientes potencias fraccionarias como raíces de una potencia.
   a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $7^{\frac{3}{8}}$
   e) $12^{\frac{3}{7}}$ f) $11^{\frac{7}{2}}$ g) $9^{\frac{5}{3}}$ h) $10^{\frac{1}{4}}$

1.9 Propiedades de los exponentes racionales

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones expresando tu respuesta como potencia con exponente racional.

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{8}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

Solución

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2$

Por lo tanto, $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$. Observa que: $2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$.

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3$

Por lo tanto, $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$. Se observa que: $3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$.

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ se escribe como raíz cúbica,

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ se escribe como raíz cuadrada,

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}$

Por lo tanto $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$. Se observa que: $8^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$.

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}$

Por lo tanto $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

Observa que: $(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}$

Por lo tanto $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$. Se observa que: $(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$.

Conclusión

1. Las propiedades con exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Si a y b son números reales positivos, m y n son números racionales, entonces:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Para simplificar una potencia racional se debe verificar que la base sea la menor posible.

Ejemplo

Simplifica las respuestas de los literales c), d) y e) del problema inicial.

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3}\times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

1.10 Operaciones con raíces de distinto índice

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

Solución

Se escribe cada raíz como exponente racional:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\
&= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} \\
&= 3^{1} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$.

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}} \\
&= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}} \\
&= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}} \\
&= 9^{\frac{6}{12}} \\
&= 9^{\frac{1}{2}} \\
&= (3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{simplificando} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$.

Conclusión

Para operar raíces con distinto índice, se realizan los siguientes pasos:

1. Cada raíz se escribe como potencia con exponente racional.
2. Se efectúan las operaciones utilizando propiedades de exponentes racionales.
3. Se simplifica el resultado.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2} \\
&= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}} \\
&= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\
&= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \\
&= 2^{\frac{18}{6}} \\
&= 2^{3} \\
&= 8
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$.

b) $\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\
&= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}} \\
&= 3^{\frac{4}{6}} \\
&= 3^{\frac{2}{3}} \qquad \text{no se puede simplificar,} \\
&= \sqrt[3]{3^2} \qquad \text{se escribe como raíz,} \\
&= \sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \div \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

1.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $5^6 \times 5^5$ b) $(-4) \times (-4)^2$ c) $2^6 \times 2^{-3}$ d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$ f) $3^9 \div 3^6$ g) $2 \div 2^4$ h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$ j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$ k) $(4^2)^3$ l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$ n) $(6^{-1})^{-1}$ o) $(5^{-2})^{-2}$ p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. Realiza los siguientes ejercicios, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $3^4 \times 5^4$ b) $2^{-6} \times 3^{-6}$ c) $(-4)^2 \times 8^2$ d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$ f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$ g) $(-35)^7 \div 5^7$ h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando tu respuesta:

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$ b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$ f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$ h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. Simplifica las siguientes raíces:

Escribe cada raíz como potencia racional.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{9}$ c) $\sqrt[6]{27}$ d) $\sqrt[6]{16}$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta a la mínima expresión:

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$ c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$ b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Exponente irracional

El número $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que su valor solo es aproximable: $\sqrt{2} = 1.414213...$

Considera la siguiente sucesión de potencias racionales:
$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 4.655536...$, $3^{1.41} = 4.706965...$, $3^{1.414} = 4.727695...$, $3^{1.4142} = 4.728733...$

La sucesión se aproxima al número real 4.728804...
Los exponentes de la sucesión se aproximan al valor $\sqrt{2}$. Por lo que, se dirá que la sucesión se aproxima al valor $3^{\sqrt{2}}$.

De esta forma, si x es un número irracional y $a > 0$, es posible definir la potencia a^x siguiendo el proceso anterior.

Por lo tanto, la potencia a^x está definida para todo número real x y $a > 0$. Las propiedades vistas anteriormente se generalizan para todo exponente real. Si a y b son números reales positivos, r y s números reales:

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Unidad 4

2.1 Definición de la función exponencial

Problema inicial

Para cada literal completa la tabla y grafica la función dada.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

Solución

a) $f(x) = 2^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Si $x = 0$ se tiene $f(0) = 2^0 = 1$

Si $x = 1$ se tiene $f(1) = 2^1 = 2$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = 2^2 = 4$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

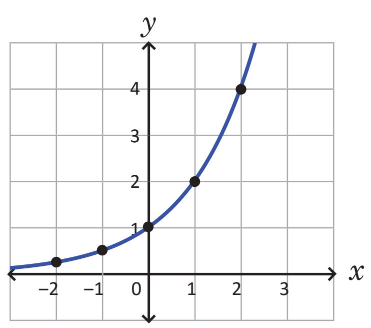
Si $x = 0$ se tiene $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

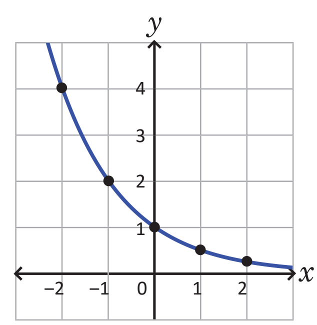
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos en cada caso.





Definición

Sea a un número real positivo y diferente de 1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial**. Al número a se le llama **base**.

La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.

En la función exponencial la variable x está en el exponente.

Si se cumple que $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$, se puede escribir de la forma $f(x) = b^{-x}$, donde $b = \frac{1}{a} > 1$.
Por ejemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 3^{-x}$ c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = 4^{-x}$

2.2 Funciones exponenciales simétricas

Problema inicial

1. Grafica las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 3^x$ b) $f_2(x) = 3^{-x}$ c) $f_3(x) = -3^x$
2. Compara la coordenada en x de los puntos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que tienen la misma coordenada en y.
3. Compara la coordenada en y de los puntos de $f_1(x)$ y $f_3(x)$ que tienen la misma coordenada en x.

Solución

1. a) $f_1(x) = 3^x$

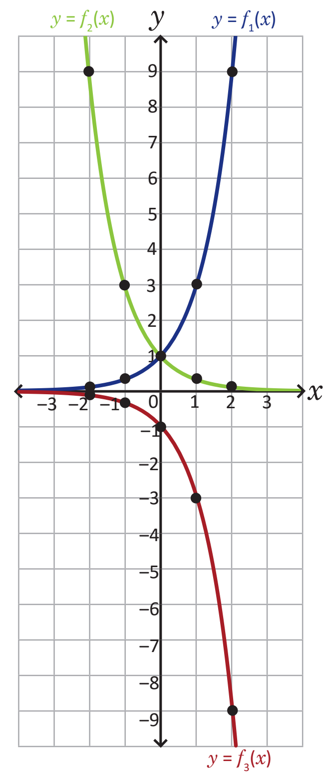
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, 1)
(1, 3)	(–1, 3)
(2, 9)	(–2, 9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(-x, y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje y.

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, –1)
(1, 3)	(1, –3)
(2, 9)	(2, –9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(x, -y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje x.

Se observa que:

- La gráfica de la función $y = 3^{-x}$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$ respecto al eje y.
- La gráfica de la función $y = -3^x$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$, respecto al eje x.

Conclusión

1. Las funciones $y = a^x$ y $y = a^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   Para graficar $y = a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en x de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

2. Las funciones $y = a^x$ y $y = -a^x$ son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^x$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

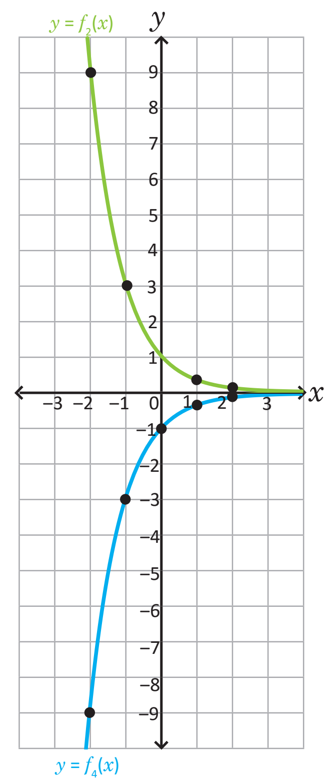
3. Las funciones $y = a^{-x}$ y $y = -a^{-x}$, son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^{-x}$.

Ejemplo

Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$.

Para graficar $f_4(x) = -3^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_2(x) = 3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, −1)
(−1, 3)	(−1, −3)
(−2, 9)	(−2, −9)



Problemas

1. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano utilizando las simetrías:
   $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$, $f_3(x) = -2^x$, $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$ a partir de la función $f_1(x) = 3^x$.

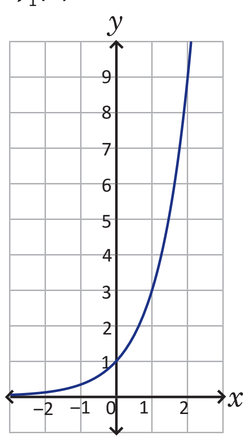
Comprueba que f_4 es simétrica a f_1 respecto al origen: si (a, b) está en la gráfica de f_1 entonces $(-a, -b)$ está en la gráfica de f_4.

2.3 Características de las funciones exponenciales

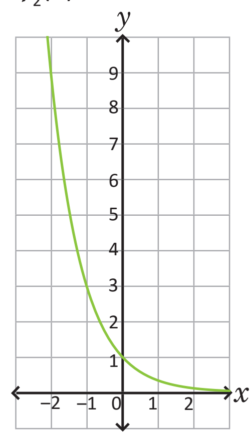
Problema inicial

Se muestran las siguientes funciones y sus gráficas:

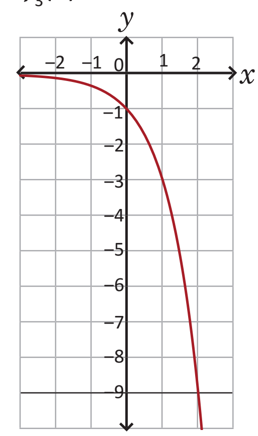
1. $f_1(x) = 3^x$



2. $f_2(x) = 3^{-x}$



3. $f_3(x) = -3^x$



Para cada una de las gráficas determina:

a) Interceptos con los ejes

b) Dominio y rango

c) Si la función es creciente o decreciente

d) Asíntotas de la función

f es una función creciente si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
f es una función decrecientes si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Solución

1. $f_1(x) = 3^x$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^x = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0,\infty[$

c) La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función, pues la gráfica de f_1 se aproxima a la recta $y = 0$ a medida que x disminuye su valor.

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1):
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^{-x} = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0,\infty[$

c) La función es decreciente:
Si $b < c$ entonces $3^{-b} > 3^{-c}$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

3. Las gráficas de las funciones $f_3(x) = -3^x$ y $f_1(x) = 3^x$ son simétricas respecto al eje x.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-3^b > -3^c$	$y = 0$

Conclusión

La siguiente tabla reúne las características de las gráficas de las funciones $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ donde $a > 1$.

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
Intercepto en el eje y	(0, 1)	(0, 1)	(0, –1)
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$R_{f_1} =]0, +\infty[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
Creciente o Decreciente	Creciente Si $b < c$ entonces $a^b < a^c$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-a^b > -a^c$
Asíntota	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

Además, observa que las funciones f_1, f_2 y f_3 no tienen intercepto con el eje x.

Si a es un número real tal que $a > 1$, entonces:
- La función $f(x) = a^x$, se llama **función exponencial creciente**.
- La función $f(x) = a^{-x}$, se llama **función exponencial decreciente**.

Problemas

1. Utiliza la simetría respecto al eje x para completar las características de la función $f(x) = -a^{-x}$ a partir de las características de la función $f(x) = a^{-x}$, $a > 1$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. Determina el intercepto en el eje y, dominio, rango, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f_1(x) = 2^x$ b) $f_2(x) = 2^{-x}$ c) $f_3(x) = -2^x$ d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. Resuelve las siguientes desigualdades utilizando la gráfica de la función $y = 2^x$.

a) $2^x \geq 1$ b) $2^x < 1$

4. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en $[0, \infty[$, desarrollando los siguientes pasos:

a) Demuestra que si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$.

b) De a) prueba que $(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$.

c) De b), concluya que si $0 \leq a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

5. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es decreciente en $]-\infty, 0]$.

2.4 Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial

Problema inicial

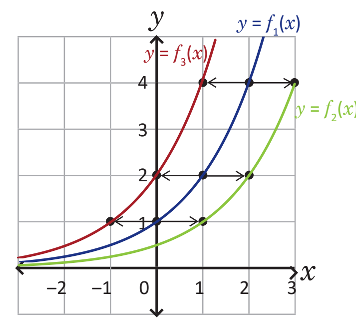
1. Grafica las funciones de cada literal en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$ b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

2. Describe la gráfica de las funciones $f_2(x)$, $f_3(x)$ como un desplazamiento horizontal o vertical de la función $f_1(x)$.

Solución

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

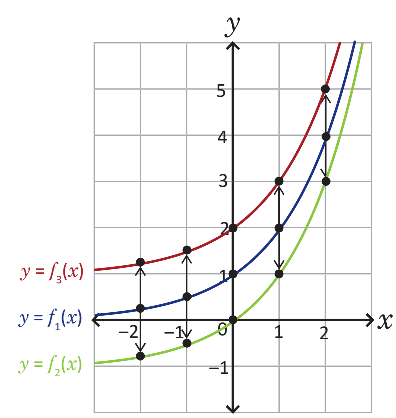
x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Al dibujar las gráficas de las funciones se observa que:
- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la izquierda de la función $f_1(x)$.

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5



- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia abajo de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba de la función $f_1(x)$.

La asíntota horizontal de $f(x) = a^x + k$ es $y = k$.

Conclusión

La gráfica de la función $f(x) = a^{x-h}$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $h > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

La gráfica de la función $f(x) = a^x + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Problemas

1. A partir de la gráfica de $f(x) = 3^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3^{x-2}$ b) $f(x) = 3^{x+1}$ c) $f(x) = 3^x - 3$

2. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 4^{x-1}$ b) $f(x) = 4^{x+2}$ c) $f(x) = 4^x + 2$

2.5 Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos*

Problema inicial

En cada literal traza la gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de $f_1(x) = 2^x$, utiliza simetría y desplazamientos.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$

b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

La simetría se aplica si la potencia es negativa o si la variable tiene signo negativo.

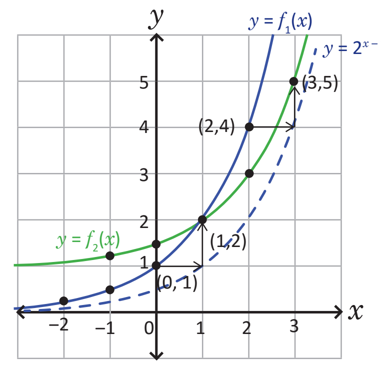
Solución

a) La gráfica de f_1 se dibujó en la clase 2.1.

Se grafica $y = 2^{x-1}$, como un desplazamiento de una unidad hacia la derecha de f_1.

Se grafica $f(x) = 2^{x-1} + 1$, como un desplazamiento de una unidad hacia arriba de y.

Si (x, y) es un punto de $f_1(x)$, entonces el punto $(x + 1, y + 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

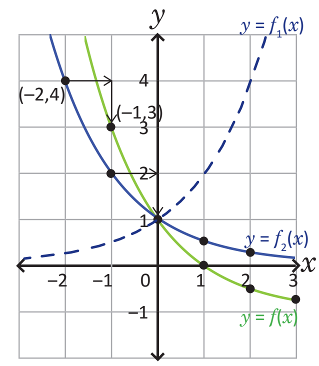


b) Se grafica $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con la gráfica de f_1 respecto al eje y.

Se puede escribir $f(x) = f_2(x - 1) - 1$.

Así, $f(x)$ es un desplazamiento de una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo de $f_2(x)$.

Sea (x, y) un punto de $f_2(x)$, entonces el punto $(x + 1, y - 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

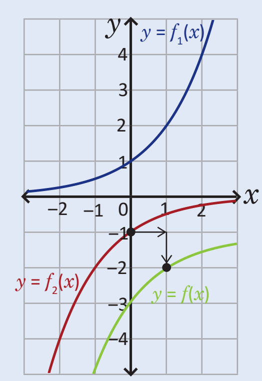


Conclusión

Para elaborar la gráfica de una función exponencial $f(x)$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se dibuja la gráfica de $f_1(x) = a^x$.
2. Se dibuja una función $f_2(x)$ de acuerdo a los signos de la potencia y el exponente de $f(x)$:
   - a^{-x} se utiliza simetría respecto al eje y.
   - $-a^x$ se utiliza simetría respecto al eje x.
   - $-a^{-x}$ se utiliza simetría respecto al origen.
3. Desplazamiento, escribiendo $f(x) = f_2(x - h) + k$ entonces el punto (x, y) de la gráfica de f_2 se desplaza al punto $(x + h, y + k)$ de la gráfica de f.

Ejemplo: $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

Simetría respecto al origen.

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

Desplazamiento

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

Problemas

Grafica las siguientes funciones utilizando simetrías y desplazamientos:

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$

b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$

c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$

d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$

f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$

g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$

h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

2.6 Ecuaciones exponenciales

Problema inicial

Encuentra una solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 25$ b) $2^x = \frac{1}{8}$ c) $4^x = 8$ d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Solución

a) $5^x = 25$

Descomponiendo $25 = 5^2$,

sustituyendo $5^x = 5^2$.

Por lo tanto, $x = 2$.

b) $2^x = \frac{1}{8}$

Descomponiendo $8 = 2^3$,

sustituyendo $2^x = \frac{1}{2^3}$,

escribiendo con exponente negativo $2^x = 2^{-3}$.

Por lo tanto, $x = -3$.

c) $4^x = 8$

Descomponiendo $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$,

sustituyendo $(2^2)^x = 2^3$,

aplicando propiedades de potencia $2^{2x} = 2^3$,

entonces $2x = 3$.

Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$.

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Descomponiendo $9 = 3^2$ y $81 = 3^4$,

sustituyendo $\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$,

escribiendo con exponente negativo: $(3^{-2})^x = 3^4$,

aplicando propiedades de potencia: $3^{-2x} = 3^4$,

entonces $-2x = 4$.

Por lo tanto, $x = -2$.

Definición

Una **ecuación exponencial** es aquella que tiene términos de la forma a^x con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Para resolver una ecuación exponencial se realiza lo siguiente:

1. Se escriben todos los términos en la misma base para obtener una igualdad de potencias con la misma base: $a^r = a^s$.
2. Se igualan los exponentes $r = s$ y se resuelve esta ecuación.

Ejemplo: $27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ y $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3^{3x} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3x = -2$

Por lo tanto, $x = -\frac{2}{3}$.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x = 16$ b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$ c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$ d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$ f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$ g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$ h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

2.7 Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Problema inicial

A partir de la ecuación exponencial: $4^x - 2^x = 2$ realiza lo siguiente:

a) Escribe 4^x como potencia de 2.

b) Sustituye y en lugar de 2^x en la ecuación.

c) Resuelve la ecuación resultante.

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

Solución

a) Se representa 4^x como una potencia de 2:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ al descomponer $4 = 2^2$

Así, se obtiene la ecuación $(2^2)^x - 2^x = 2$.

b) Al utilizar que $(2^2)^x = (2^x)^2$ se tiene:

$$\underset{\displaystyle y^2}{\underset{\downarrow}{(2^x)^2}} - \underset{\displaystyle y}{\underset{\downarrow}{2^x}} = 2$$

c) Resuelve la ecuación resultante.

$y^2 - y = 2$ es una ecuación cuadrática, resolviendo:

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2 \quad \text{o} \quad y = -1$$

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

$$y = 2 \quad \text{o} \quad y = -1$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$2^x = 2 \quad \text{o} \quad 2^x = -1$$

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

$2^x = 2$ o $2^x = -1$, esta ecuación no tiene solución,

$2^x = 2^1$ ya que $2^x > 0$, para todo x real.

$x = 1$

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Una ecuación exponencial, en la que aparece una suma o resta de potencias, se puede reducir a una ecuación cuadrática si una de las bases es el cuadrado de la otra.

Este tipo de ecuaciones se representa así: $p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$.

Para resolverla se realiza lo siguiente:
1. Se efectúa el cambio de variable $y = a^x$.
2. Se resuelve la ecuación $py^2 + qy + r = 0$, del paso anterior.
3. En las soluciones encontradas $y = y_1$, $y = y_2$, se sustituye y por a^x: $a^x = y_1$ y $a^x = y_2$.
4. Por último se resuelven ambas ecuaciones, si se puede. Estas son las soluciones de la ecuación original.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas.

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

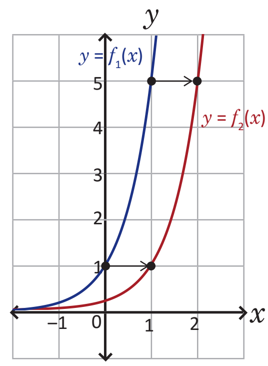
Si una potencia tiene la forma a^{x+r}, con r un número real, se reescribe $a^{x+r} = a^r(a^x)$. Por ejemplo, $2^{x+1} = 2(2^x)$.

2.8 Practica lo aprendido

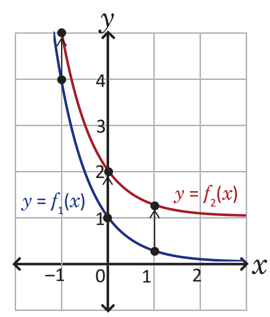
1. Justifica las siguientes afirmaciones.
   a) La gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   b) La gráfica de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^{-x}$ son simétricas respecto al eje x.
   c) Si (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = 3^x$ entonces $(-a, -b)$ es un punto de $y = -3^{-x}$.

2. Utilizando las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Determina la ecuación de $f_2(x)$ a partir de $f_1(x)$.

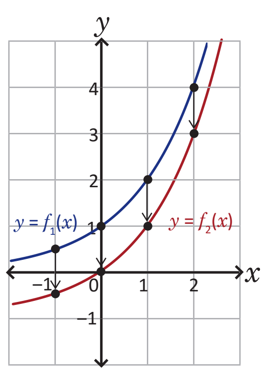
   a) $f_1(x) = 5^x$



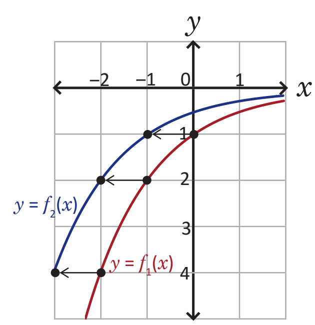
   b) $f_1(x) = 4^{-x}$



   c) $f_1(x) = 2^x$



   d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. Grafica las siguientes funciones y describe sus características: interceptos con los ejes, dominio, rango, asíntota de la función y crecimiento o decrecimiento.

   a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$ b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$ c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$ d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{3x-1} = 32$ b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$ c) $4^{3x-3} = 1$

   d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$ e) $7^{-2x-4} = 49$ f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas:

   a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$ b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$ c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

Unidad 4

2.9 Problemas de la unidad

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}}$ b) $\left[\dfrac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$ c) $\dfrac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}}$ d) $\dfrac{3^{-4} \times 6^8}{2^4}$

2. En los siguientes literales se tienen dos números reales, establece cuál es el mayor de ellos.

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{12}$ y $\sqrt{6}$ d) 4 y $\sqrt[3]{68}$

Utiliza el hecho que $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, con n entero positivo, y el exponente racional para escribir las raíces con índice común, para $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2}$:
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}$ y $\sqrt[4]{2} = 3^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3}$

3. En los siguientes literales determina cuál de los dos números reales es el mayor de ellos:

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{8}$ y $\sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[4]{125}$ y $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{\dfrac{1}{27}}$ y $\sqrt[3]{\dfrac{1}{81}}$

Escribe cada radicando como una potencia

4. Efectúa el producto $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2)$.

5. Racionaliza el denominador de la fracción $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ realizando los siguientes pasos:

a) Escribe $\sqrt[3]{3}$ como una potencia.

b) Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{3}x = 3$, escribe la solución como una potencia.

c) Efectúa $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \dfrac{x}{x}$, con x la solución del literal anterior.

6. Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$ b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$ c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$ e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$ f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$

g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$ h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$ i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10 = 0$

8. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{25}$ representan el mismo número.
b) Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = -2^x$ no se intersecan en ningún punto.
c) $y = 2^x$ y $y = 4^x$ se intersectan en un solo punto.

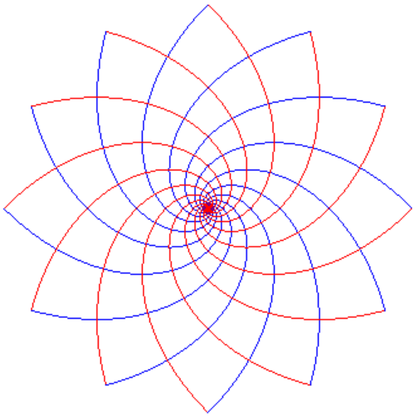
9. Grafica las siguientes funciones.
a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

10. Determina para cada función del problema anterior lo que se pide:
a) Dominio y rango b) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

Funciones Trascendentales II

5 Unidad

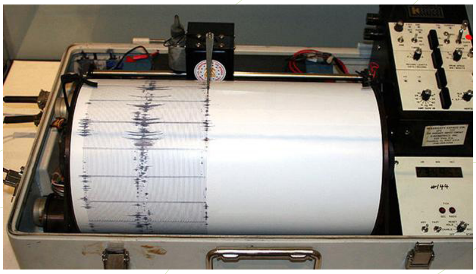
A principios del siglo XVII, los matemáticos ingleses John Napier y Henry Briggs introdujeron y perfeccionaron el logaritmo, un concepto de gran importancia práctica y teórica por su propiedad de simplificar operaciones tediosas como la multiplicación, la división y la extracción de raíces. La motivación de Napier era facilitar los cálculos en trigonometría esférica utilizados en astronomía. Briggs sugirió el 10 como base y creó tablas de logaritmos para números cercanos.



Red ortogonal de espirales logarítmicas

Mosaico decorativo en Corinto siglo II d.C.

Actualmente los logaritmos tienen aplicaciones en muchas ramas de la ciencia: permiten medir la intensidad del sonido, el nivel de acidez de una sustancia conocido como pH, la intensidad de los sismos a través de la escala Richter, los grados de tonalidad de escala cromática en la música, entre otras.



El sismógrafo permite medir la intensidad y duración de los sismos.

En esta unidad se exploran algunas propiedades de las funciones como la inyectividad, la sobreyectividad y la biyectividad. Conocerás la composición de funciones que permitirá definir la función inversa como un caso especial de la composición y luego definir la función logarítmica y estudiar sus propiedades.

1.1 Funciones inyectivas

Problema inicial

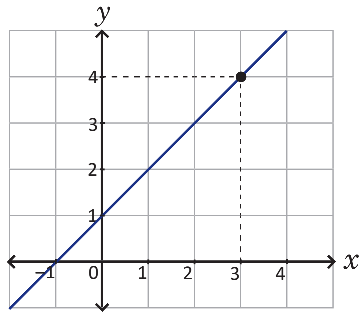
Responde las siguientes preguntas:

a) Sea $f(x) = x + 1$, se sabe que $f(3) = 4$, ¿existe otro valor x en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$?

b) En el caso de la función $f(x) = x^2$, se cumple que $f(2) = 4$, ¿ocurre lo mismo que el caso anterior?

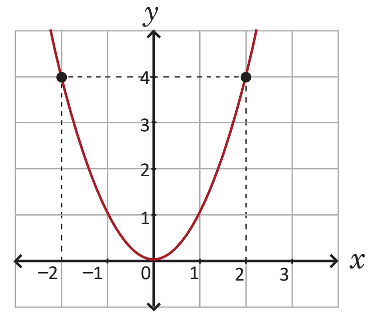
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x + 1$.



El único valor de x tal que $f(x) = 4$ es $x = 3$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No ocurre lo mismo, ya que existen dos valores de x que cumplen $f(x) = 4$: $x = 2$ y $x = -2$.

Definición

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a valores diferentes del conjunto A le corresponden valores diferentes del conjunto B. Simbólicamente: si a, b son elementos de A con $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

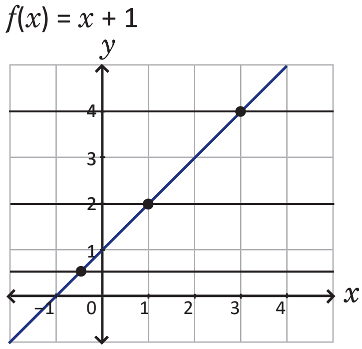
También se puede definir de la siguiente manera: $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a cada imagen en B le corresponde una única preimagen de A.

Para determinar gráficamente la inyectividad de una función se trazan rectas horizontales sobre la gráfica, si una recta interseca a la gráfica en dos o más puntos, entonces la función no es inyectiva.

Ejemplo

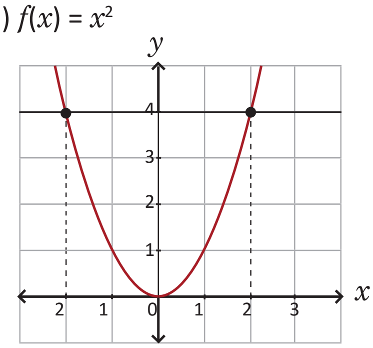
Determina si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x) = x + 1$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto a la función. Por lo tanto, $f(x) = x + 1$ es inyectiva.

b) $f(x) = x^2$



La recta horizontal que pasa por el punto (2, 4) también pasa por el punto (–2, 4). Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no es inyectiva. En este caso $2 \neq -2$ pero $f(2) = f(-2)$ pues $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$.

Problemas

Determina si las siguientes funciones son inyectivas en su dominio:

a) $f(x) = 2x - 6$ b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$ c) $f(x) = 2x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

1.2 Funciones sobreyectivas

Problema inicial

Una función de A en B que tiene como ecuación $y = f(x)$ se puede representar de las siguientes formas:

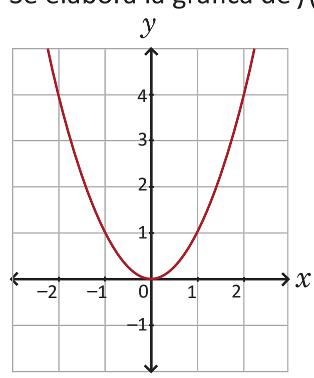
1. f: A $\rightarrow$ B
   $x \rightarrow f(x)$
2. f: A $\rightarrow$ B; $x \rightarrow f(x)$

Esta representación significa "la función de A en B tal que x toma valores en A y $f(x)$ en B".

a) Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, ¿existe un valor x en el conjunto de partida que cumple $f(x) = -1$?
b) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$. Si y es un número real, determina el valor de x tal que $f(x) = y$ si $y = 1$, $y = 8$.

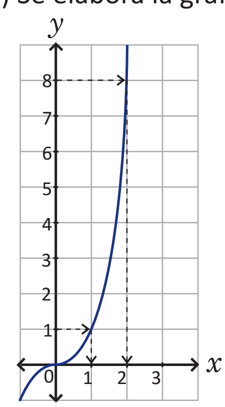
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No hay valores de x tal que $f(x) = -1$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^3$.



El valor de x tal que $f(x) = 1$, es $x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

El valor de x tal que $f(x) = 8$, es $x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

Conclusión

Una función f: A $\rightarrow$ B es **sobreyectiva**, si cada número en B es imagen de, al menos, un número en A.

1. Para decir que una función no es sobreyectiva se debe encontrar un valor y en B que no tenga preimagen en A.
2. Una función f: A $\rightarrow$ B, donde el conjunto B es igual al rango de la función R_f es una función sobreyectiva.

Recuerda que el rango es el conjunto de valores que puede tomar la función $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Ejemplo

a) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, no es sobreyectiva pues no existe un número real x tal que $x^2 = -1$.

El rango de $f(x) = x^2$ no es $\mathbb{R}$ sino $R_f = [0, \infty[$.

b) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$ es sobreyectiva pues un número y en $\mathbb{R}$ es imagen del número $\sqrt[3]{y}$. Al evaluar se tiene: $f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

El rango de $f(x) = x^3$ es $R_f = \mathbb{R}$.

Problemas

Identifica si cada una de las siguientes funciones es sobreyectiva.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow 3x - 2$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow x^2 - 1$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 0]$
   $x \rightarrow -x^2$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow -x^2 + x$

f) $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
   $x \rightarrow \sqrt{x}$

g) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow \frac{1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
   $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow |x|$

El conjunto $]-\infty, a[\cup]a, \infty[$ se puede escribir en la forma $\mathbb{R} - \{a\}$, que representa el conjunto de los números reales exceptuando al número a.

$f(x) = |x|$ es la función valor absoluto.

1.3 Funciones biyectivas*

Definición

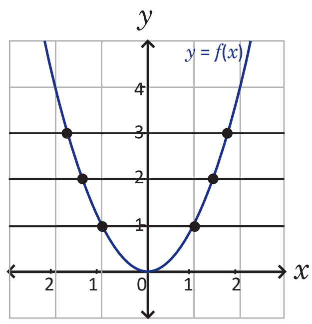
Una función f: A → B es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Si una función no es inyectiva se puede restringir el dominio para que sea inyectiva, en algunos casos se puede hacer de varias maneras.
- Para que la función f sea sobreyectiva basta encontrar el rango R_f y hacer B = R_f.

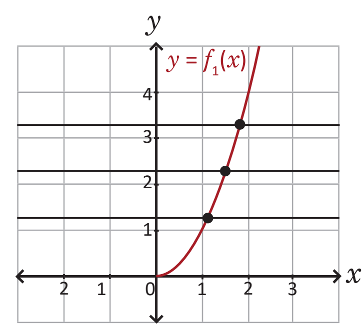
Se llama **restricción de la función f** a la que se obtiene como resultado de los pasos anteriores.

Ejemplo

1. Verifica que la función f: $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$; $x \rightarrow x^2$ no es biyectiva.
2. Haz una restricción del dominio para que la función f sea biyectiva.

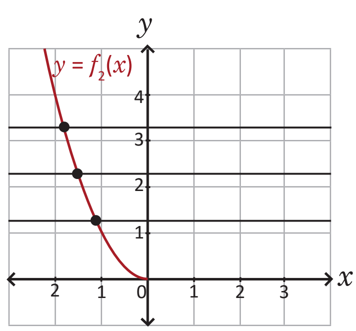


1. Las rectas horizontales cortan en dos puntos a la gráfica, así la función no es inyectiva, por lo que tampoco es biyectiva.



2. Eliminando los puntos con primera coordenada negativa, se obtiene la gráfica de una función inyectiva, a la que se denomina f_1. Su dominio es $[0, \infty[$ y su rango es $[0, \infty[$.

   Por lo tanto, la función f_1: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$; $x \rightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.



Otra restricción de f se obtiene eliminando los puntos con primera coordenada positiva.

Por lo tanto, la función f_2: $[-\infty, 0[\rightarrow [0, \infty[$; $x \rightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.

Problemas

Determina si cada función es biyectiva, si no lo es, haz una restricción de f para que lo sea.

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x$

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x - 1$

c) f: $[0, 10] \rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow x^2$

d) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x^2 - 2x + 3$

e) f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$

f) f: $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow |x|$

g) f: $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 1 + \frac{1}{1-x}$

h) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 2^x$

i) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 2^{-x-1} + 1$

1.4 Composición de funciones

Problema inicial

En el departamento de Morazán el beneficio promedio, en dólares, que obtiene un productor de dulce de atado está dado por $f(x) = 0.53x$, donde x representa la inversión realizada por el productor. Se sabe que la inversión realizada por un productor está dada por la función $g(x) = 69.19x$, donde x es el número de toneladas de caña de azúcar utilizadas. A partir de lo anterior contesta:

1. ¿Cuál es la inversión realizada por el productor si utiliza 2 toneladas?
2. ¿Cuál es el beneficio obtenido por el productor si utiliza 2 toneladas?
3. Determina una función que proporcione el beneficio obtenido a partir de una cantidad x de toneladas de caña de azúcar utilizadas.

Solución

1. Utilizando la función de inversión g, se tiene $g(2) = 69.19(2) = 138.38$.
   Por lo tanto, la inversión realizada es de \$138.38.

$x \xrightarrow{g} g(x)$

Toneladas → Inversión

2. La inversión realizada al utilizar 2 toneladas es $g(2) = \$138.38$.
   Utilizando la función de beneficio f se tiene que
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   Por lo tanto, el beneficio es de \$ 73.3414.

$x \xrightarrow{f} f(x)$

Inversión → Beneficios

3. Al utilizar x toneladas se tiene una inversión de $g(x) = 69.19x$.
   Al utilizar una inversión $g(x)$ se tiene un beneficio de $f(g(x)) = 0.53(g(x))$.
   Por lo tanto, el beneficio a partir de la cantidad x de toneladas es
   $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$.

$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$

Toneladas → Inversión → Beneficios

Definición

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la **composición** de f y g se denota por $(f \circ g)(x)$ y se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

La composición de f y g es una función que resulta de evaluar la función $g(x)$ en la función $f(x)$.

La expresión $f \circ g$ se lee f compuesta con g. La expresión $f(g(x))$ se lee f de g de x.

Ejemplo

Efectúa las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, con las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 1 && \text{se evalúa la función } g(x) \text{ en } f(x), \\ &= 2(x - 3) + 1 \\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(x) - 3 && \text{se evalúa la función } f(x) \text{ en } g(x), \\ &= (2x + 1) - 3 \\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.

> Observa que, en general, $(f \circ g)(x)$ no es igual a $(g \circ f)(x)$:
>
> Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$ se tiene que $(f \circ g)(x) = 2x - 5$ y $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.
>
> En este caso $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Problemas

Efectúa la composición $f \circ g$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$ b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$ c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$ e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$

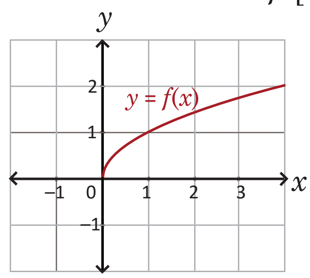
g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$ h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$ i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$

1.5 Dominio de la función composición*

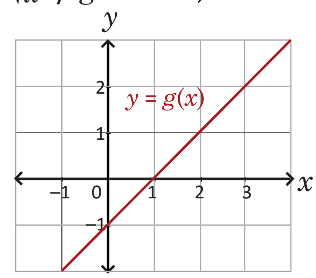
Problema inicial

Se tiene la gráfica de las funciones f: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow \sqrt{x}$ y g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x - 1$.

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$



La composición está definida como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir $g(x)$ se evalúa en $f(x)$. A partir de esto, realiza lo siguiente:

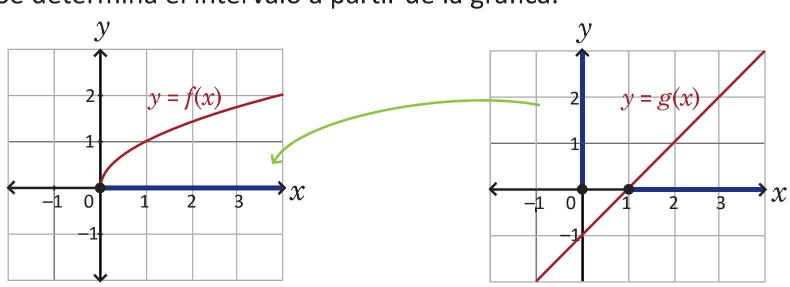
a) Determina el intervalo de los valores que puede tomar $g(x)$ para que $f(g(x))$ esté definida.

b) ¿Cuál es el intervalo de valores que debe tomar x para que $g(x)$ esté en el intervalo del literal anterior?

Solución

a) Los valores que $g(x)$ puede tomar deben estar en el domino de $f(x)$.
Por lo que el intervalo que se pide es $[0, \infty[$.

b) Se determina el intervalo a partir de la gráfica.



En la función $g(x)$ los valores del intervalo $[0, \infty[$ se obtienen al evaluar los valores del intervalo $[1, \infty[$.

Por lo tanto, x debe tomar valores en el intervalo $[1, \infty[$ para que $g(x)$ esté en el intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio de la composición** de f y g está dado por el conjunto: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

El dominio de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$ son los valores que pertenecen a D_g (el dominio de $g(x)$) tal que $g(x)$ pertenece a D_f (el dominio de $f(x)$).

Ejemplo

Utilizando las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 9}$, con dominio $D_f = [9, \infty[$, y $g(x) = 3x$, con dominio $D_g = \mathbb{R}$, encuentra el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x - 9}$.

Se tienen los dominios $D_f = [9, \infty[$ y $D_g = \mathbb{R}$. Para determinar $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ se tiene que $g(x)$ es un valor de $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ si se cumple que $g(x) \geq 9$, sustituyendo se obtiene $3x \geq 9$, por lo que $x \geq 3$ entonces $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$.

Problemas

Determina el domino de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$:

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 3x + 1$
g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 2x + 4$

b) f: $[3, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 12x + 35$
g: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

c) f: $[-1, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 1$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

d) f: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

1.6 Función inversa

Problema inicial

Dadas las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, efectúa las composiciones:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

Solución

a) $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 2 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2}x - 1\right) + 2 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = x$.

b) $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(2x + 2) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = x$.

Definición

Sea f: A $\longrightarrow$ B una función, si una función g: B $\longrightarrow$ A cumple las condiciones:

1. $(f \circ g)(x) = x$, para todo valor x en B.
2. $(g \circ f)(x) = x$, para todo valor x en A.

entonces a g se le llama la **función inversa de** f y se denota por f^{-1}.

La función inversa f^{-1} cumple $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, así para encontrar la ecuación de la función inversa se despeja y de la ecuación $f(y) = x$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Obtén la función inversa de $f(x) = 2x + 2$.

Escribe la ecuación $\Rightarrow$ $f(y) = x$,

evalúa y en $f(x) = 2x + 2$ $\Rightarrow$ $2y + 2 = x$,

al despejar y se obtiene: $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

A la función $h(x) = x$ se le denomina **función identidad**.

Para una función l: A $\longrightarrow$ B, la función identidad cumple las siguientes condiciones:

1. Si h: B $\longrightarrow$ B; $x \longrightarrow x$ entonces $(h \circ l)(x) = l(x)$.

2. Si h: A $\longrightarrow$ A; $x \longrightarrow x$ entonces $(l \circ h)(x) = l(x)$.

Problemas

1. Determina la ecuación de la función inversa de las siguientes funciones.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^3$

c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow (x-2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $x \longrightarrow \frac{x+1}{x-1}$

f) $f: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow (x-1)^2$

2. Comprueba con la composición de funciones, que la función encontrada en cada literal del problema anterior es la función inversa.

Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

1.7 Existencia, dominio y rango de la función inversa

Problema inicial

a) Grafica las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ en un mismo plano cartesiano y observa que si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

> Los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

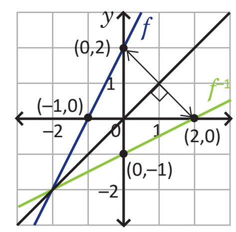
b) Sea (a, b) un punto de la gráfica de f, demuestra que si f posee función inversa f^{-1}, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Grafica la función $f(x) = x^2$, luego para cada punto (a, b) de $f(x)$ gráfica el punto (b, a) y dibuja la curva que une estos puntos.

d) La curva que obtuviste en c), ¿corresponde a la gráfica de una función?

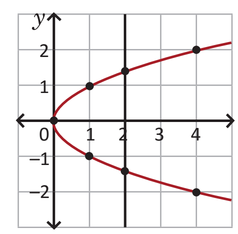
Solución

a) Se observa que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto, si (a,b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de f^{-1}.



b) (a, b) es un punto de la gráfica de f si y solo si $f(a) = b$.
Al aplicar la función inversa a la ecuación anterior se tiene $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$.
Así, por la definición de función inversa se tiene: $a = f^{-1}(b)$.
Por lo tanto, si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Se grafican algunos puntos (b,a): (0, 0), (1, 1), (1, –1), (4, 2), (4, –2).
Se traza la curva que une estos puntos.



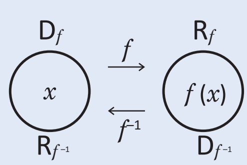
d) La curva que se obtuvo no corresponde a la gráfica de una función pues hay rectas verticales que cortan en dos puntos a la curva.

Definición

Una función f: A ⟶ B posee función inversa si y solo si es biyectiva.
De acuerdo a la clase 1.3, una función puede restringirse para que sea biyectiva y así tener función inversa.

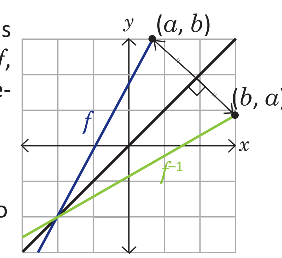
Si (a, b) es un punto de la gráfica de $f(x)$ entonces (b, a) es un punto de la gráfica de $f^{-1}(x)$.

El dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y el rango de la función inversa es el dominio de la función inicial:



$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ y } R_{f^{-1}} = D_f.$$

> La gráfica de f^{-1} es simétrica a la de f, con eje de simetría $y = x$.
>
> El punto (a, b) es simétrico al punto (b, a).



Problemas

En los siguientes literales determina la función inversa, su dominio y su rango. Además grafica la función y su inversa en el mismo plano cartesiano. En el literal d) realiza una restricción de la función.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$
$x \to x^2$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to (x + 1)^2 - 4$

1.8 Practica lo aprendido

1. En los siguientes literales determina la ecuación de las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -x - 2$

b) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x + 1}$, $g(x) = 4 - x^2$

d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 - x$

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$

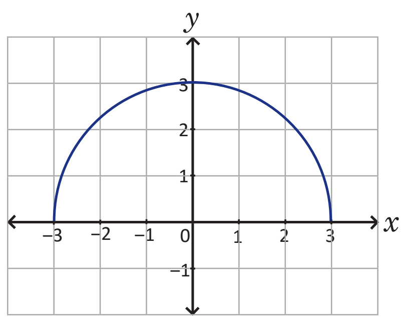
e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$

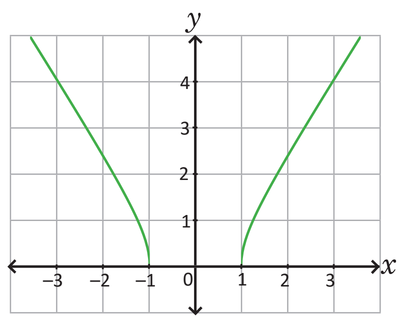
f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

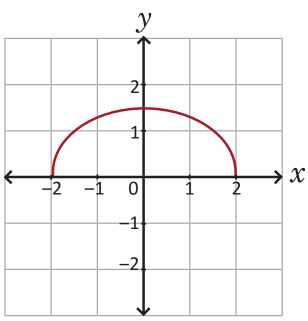
Escribe cada función como una composición de funciones.

3. Se tienen las gráficas de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$ $\qquad$ $f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$







Para cada una:

a) Determina el dominio como el conjunto de los valores donde la función está definida.

b) Restringe el dominio de la función para que sea inyectiva.

c) Con el dominio encontrado en b) determina el rango de modo que la función sea sobreyectiva.

d) Traza la gráfica de la función con el dominio y el rango restringidos en b) y c).

4. A partir de las funciones redefinidas en el problema 3 realiza lo siguiente:

a) Para cada función determina la ecuación de la función inversa.

b) Determina el domino y rango de la función inversa.

c) Grafica en el mismo plano cartesiano f y f^{-1}.

5. Considerando los puntos P(a, b), Q(b, a) y la recta l: $y = x$ demuestra que $d(\mathrm{P}, l) = d(\mathrm{Q}, l)$.

6. Se tienen las siguientes funciones y sus inversas:

f_1: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow x^2$ $\qquad$ f_1^{-1}: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow \sqrt{x}$

f_2: $[-1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow x + 1$ $\qquad$ f_2^{-1}: $[0, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$; $x \longrightarrow x - 1$

Realiza lo siguiente:

a) Determina la ecuación de la función $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$.

b) Determina la ecuación de la función $g_2(x) = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})(x)$.

c) Efectúa las composiciones $(g_1 \circ g_2)(x)$ y $(g_2 \circ g_1)(x)$.

d) En este caso, ¿cuál es la función inversa de $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$?

e) Sean f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera, tal que las funciones f_1^{-1}, f_2^{-1}, $f_1 \circ f_2$ y $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ están definidas. Demuestra que $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1 \circ f_2$.

Unidad 5

2.1 Definición de logaritmo

Problema inicial

¿Qué valor debe tomar el exponente x para que se cumplan las siguientes igualdades?

a) $2^x = 8$

b) $3^x = \frac{1}{27}$

Solución

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$ Se escribe 8 como potencia de 2.

$x = 3$

Por lo tanto, $x = 3$.

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$ Se escribe como potencias de la misma base.

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3$

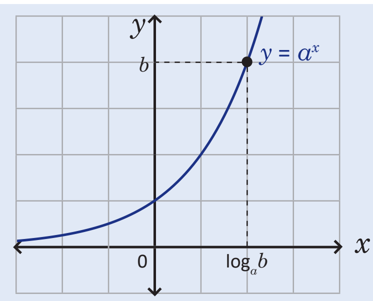
Por lo tanto, $x = -3$.

Definición

Sean a, b y x números reales tal que $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, se define el **logaritmo** base a de un número b como sigue:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Significa que el logaritmo es el exponente al que se debe elevar el número a, llamado **base**, para obtener el número b.

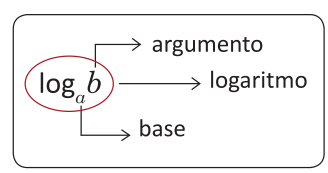


Ejemplo

En el Problema inicial se tiene que

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ y se lee el logaritmo base 2 de 8 es igual a 3.

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ y se lee el logaritmo de $\frac{1}{27}$ base 3 es igual a -3.



Problemas

1. Escribe como un logaritmo cada una de las siguientes potencias.

a) $2^2 = 4$ b) $3^4 = 81$ c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$ d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2. Escribe cada logaritmo como una potencia.

a) $\log_2 64 = 6$ b) $\log_5 25 = 2$ c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$ g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

2.2 Logaritmo de un número

Problema inicial

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 16$

   b) $\log_3 \frac{1}{9}$

2. Demuestra que $\log_a a^c = c$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución

1. a) $\log_2 16$

Sea $x = \log_2 16$

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$ se resuelve la ecuación,

$\Leftrightarrow x = 4$.

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

Sea $x = \log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$ se escribe 9 como potencia de 3,

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$ se reescribe con exponente negativo,

$\Leftrightarrow x = -2$.

2. Se tiene que $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$. Por lo tanto, $x = c$.

Conclusión

Calcular el valor de un logaritmo $x = \log_a b$ es encontrar el valor del exponente x que cumple $a^x = b$.

De manera general para encontrar el valor de un logaritmo se realizan los siguientes pasos:

1. Se escribe como potencia $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
2. Se resuelve la ecuación $a^x = b$.

Si $b = a^c$ entonces $\log_a b = c$, por lo que $\log_a a^c = c$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Ejemplo

Encuentra el valor del logaritmo $\log_4 64$.

Solución 1

Sea $x = \log_4 64$ entonces $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Solución 2

Utilizando la propiedad $\log_a a^c = c$: $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$.

Problemas

Determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 10$

b) $\log_3 1$

c) $\log_2 2^{100}$

d) $\log_2 32$

e) $\log_9 81$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

g) $\log_8 4$

h) $\log_{25} 125$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

k) $\log_4 \frac{1}{2}$

l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

Unidad 5

2.3 Propiedades de los logaritmos*

Problema inicial

1. Compara el resultado de la operación y el logaritmo para cada uno de los siguientes literales.
   a) $\log_2 4 + \log_2 8$ y $\log_2 32$ b) $\log_2 8 - \log_2 4$ y $\log_2 2$ c) $3\log_2 4$ y $\log_2 4^3$ d) $\log_2 8^2$ y $\log_2 4^3$

2. Demuestra las siguientes propiedades.
   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
   c) $b\log_a M = \log_a M^b$
   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Solución

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ y $\log_2 32 = \log_2 2^5$
   $= 2 + 3$ $\qquad = 5$
   $= 5$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2(4 \times 8) = \log_2 32$.

   b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ y $\log_2 2 = 1$
   $= 3 - 2$
   $= 1$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$.

   c) $3\log_2 4 = 3\log_2 2^2$ y $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$
   $= 3(2)$ $\qquad = \log_2 2^6$
   $= 6$ $\qquad = 6$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$.

   d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ y $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$
   $= 6$ $\qquad = 6$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $8^2 = 4^3$.

2. Sean $x = \log_a M$ y $y = \log_a N$, por definición se tiene $M = a^x$ y $N = a^y$.

   a) Se tiene el producto $MN = a^x a^y = a^{x+y}$
   Al escribir como logaritmo: $\log_a MN = x + y$
   Por lo tanto, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

   b) Se tiene el cociente $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
   Por definición de logaritmo $\log_a \frac{M}{N} = x - y$
   Por lo tanto, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

   c) Se tiene la potencia $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$
   Se reescribe como logaritmo $bx = \log_a M^b$
   Por lo tanto, $b\log_a M = \log_a M^b$.

   d) En este caso $x = \log_a M$ y $x = \log_a N$
   Entonces $M = a^x$ y $N = a^x$
   Por lo tanto, $M = N$.

Conclusión

Sean a, M y N números positivos con $a \neq 1$, los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Observa:
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ y $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$.
Se tiene que $(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$.
Por lo que, en general, $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 12 + \log_6 18$ c) $\log_2 96 - \log_2 3$ d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$ f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$ g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$ h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$ j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$ k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$ l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18$

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: $e = 2.718281828459045...$

Solución

Sea $x = \log_2 5$. Entonces:

$2^x = 5$ por la definición de logaritmo,

$\log 2^x = \log 5$ se aplica logaritmo a ambos lados de la igualdad,

$x \log 2 = \log 5$ utilizando propiedades de logaritmo,

$x = \dfrac{\log 5}{\log 2}$.

El logaritmo base 10, usualmente, se denota sin la base: $\log_{10} a = \log a$.

Se utiliza la calculadora para determinar el cociente:

log 5 ÷ log 2 = $\Rightarrow$ Pantalla de la calculadora

Por lo tanto, $\log_2 5 = 2.321928095...$

```
log 5 ÷ log 2
      2.321928095
```

Definición

Sean a, b y c números positivos tales que $a \neq 1$ y $c \neq 1$. Se denomina **cambio de base** a la igualdad:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo

1. Demuestra la propiedad del cambio de base para $c = 10$.

   Se tiene que $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

   Se aplica logaritmo base 10: $\log a^x = \log b$.

   Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $x \log a = \log b$.

   Se despeja x: $x = \dfrac{\log b}{\log a}$, $\log a \neq 0$ ya que $a \neq 1$.

   Por lo tanto, se tiene que $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$.

2. Calcula el valor de $\log_4 8$.

   En este caso no es necesario utilizar la calculadora.

   Se utiliza $c = 2$.

   $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \dfrac{3}{2}$.

   Por lo tanto, $\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$.

   Se puede utilizar cualquier base.

   $\log_4 8 = \dfrac{\log_3 8}{\log_3 4} = \dfrac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \dfrac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \dfrac{3}{2}$.

Problemas

1. Simplifica los siguientes logaritmos con la propiedad de cambio de base.

   a) $\log_4 32$ b) $\log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_9 \sqrt{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

   e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$ h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

   Observa que el argumento del logaritmo y la base son potencias de una misma base.

2. Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

   a) $\log_5 24$ b) $\log_2 \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

   Utiliza $c = 10$.

Unidad 5

2.5 Definición de la función logarítmica y su gráfica

Problema inicial

1. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) Determina si la función $f(x) = \log_2 x$ es creciente o decreciente.

2. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) ¿La función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es creciente o decreciente?

Solución

1. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

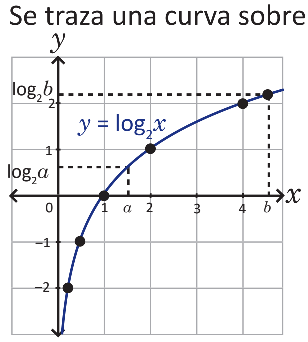
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_2 2 = 1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_2 a < \log_2 b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_2 x$ es creciente.

2. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

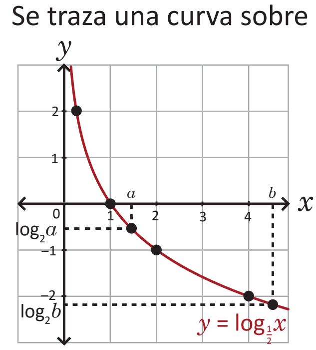
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente.

Definición

La función logarítmica se define como sigue $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \rightarrow \log_a x$$
donde a es un número positivo y $a \neq 1$.

La monotonía de la función $f(x) = \log_a x$ se describe a continuación:
1. Es creciente si $a > 1$.
2. $f(x)$ = Es decreciente si $0 < a < 1$.

Un logaritmo está bien definido si el argumento es positivo.

La gráfica de $f(x) = \log_a x$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

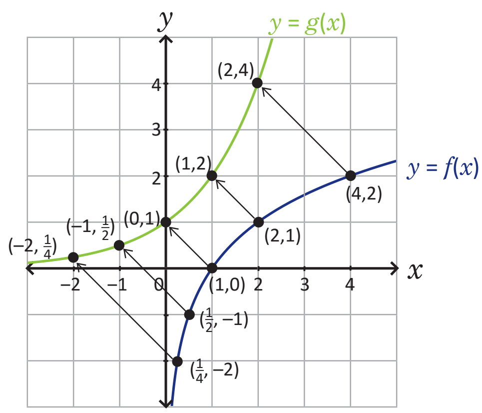
2.6 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ y observa que si (a,b) es un punto de f entonces (b, a) es un punto de g.
2. Efectúa las composiciones:
   a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

Solución

1. La función $f(x) = \log_2 x$ se graficó en la clase anterior y la función $g(x) = 2^x$ se graficó en la clase 2.1 de la unidad 4.



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
(4, 2)	(2, 4)
(2, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

2. Efectúa las composiciones:

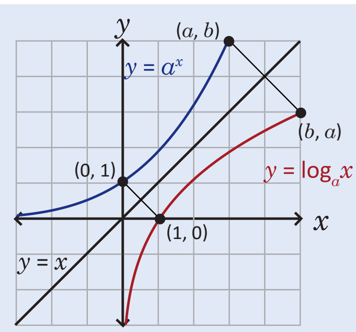
a) $f(g(x)) = f(2^x)$
$= \log_2 2^x$
$= x$

b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
$= 2^{\log_2 x}$
$= x$

Por la definición de logaritmo $a^{\log_a x} = x$.

Conclusión

1. Las funciones $y = \log_a x$ y $y = a^x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.



2. Para dos números reales a y b con $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene que $\log_a a^b = b$ y $a^{\log_a b} = b$ (con $b > 0$).

3. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.

   $f: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ $\qquad f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R}$
   $x \to a^x$ $\qquad x \to \log_a x$

4. $y = a^x$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, haciendo uso de la simetría se obtiene que $y = \log_a x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.

5. El dominio de la función logaritmo es el rango de la función exponencial: $]0, \infty[$.
   El rango de la función logaritmo es el dominio de la función exponencial: $\mathbb{R}$.

6. La función logaritmo, al ser la inversa de la función exponencial, es una función biyectiva.

Problemas

Para cada función escribe su función inversa y grafícalas en el mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Recuerda que $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$

Unidad 5

2.7 Ecuaciones logarítmicas, parte 1

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones encontradas.

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_3(x-1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$ d) $\log_6(3x(x+1)) = 2$

Verifica que el argumento del logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados.

Cuando se trata con logaritmos se consideran solo las soluciones reales.

Solución

a) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8.$

Como $8 > 0$ entonces, $x = 8$ es solución de la ecuación.

b) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$

Puesto que $10 - 1 = 9 > 0$.
Por lo tanto, $x = 10$ es solución de la ecuación.

c) Se utiliza la definición de logaritmo:

$$\begin{aligned} \log_5 x^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 = 5^4 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 5^2 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 25 \end{aligned}$$

Se verifica que $(\pm 25)^2 > 0$.
Por lo tanto, $x = 25$ y $x = -25$ son soluciones de la ecuación.

d) Se utiliza la definición de logaritmo: $3x(x+1) = 6^2$
Se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x - 6^2 = 0 &\Leftrightarrow 3(x+4)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ o } x = 3 \end{aligned}$$

Verificando si $x = -4$, $3(-4)(-4+1) = 36 > 0$.
Si $x = 3$, $3(3)(3+1) = 36 > 0$.
Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación.

Conclusión

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la cual aparece la variable x en el argumento del logaritmo.

Para resolver una ecuación de la forma $\log_a M = b$, donde M es una expresión algebraica de variable x, se resuelve la ecuación $a^b = M$ que se obtiene al aplicar la definición de logaritmo: $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$.
Luego se verifica si las soluciones encontradas satisfacen la condición del argumento $M > 0$.

Además, las ecuaciones exponenciales pueden resolverse aplicando logaritmos:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejemplo

Observa la siguiente solución:

$$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$$

Problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2(x+1) = 5$ c) $\log_2 x^2 = 6$ d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$ f) $\log_3(2x+1) = -1$ g) $\log_2 x^2 = -2$ h) $\log_2(x^2+4) = 3$
i) $\log(x(20-x)) = 2$ j) $\log_6(x(13-x)) = 2$ k) $\log(x(x+3)) = 1$ l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $9^x = 15$ b) $2^{x+1} = 13$ c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125$

2.8 Ecuaciones logarítmicas, parte 2

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

Solución

a) Se usa la propiedad de la suma de logaritmos:

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$\log_2(x(x-1)) = 1$

se debe aplicar la definición y resolver:

$$\begin{aligned}\log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1\end{aligned}$$

se verifica que el argumento es positivo en cada logaritmo:

si $x = 2$, $2 > 0$, $2 - 1 = 1 > 0$.

Si $x = -1$, $-1 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$ Se utiliza la propiedad: $\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$

$x = 1$ se resuelve la ecuación.

Se evalúa $x = 1$ en cada logaritmo

$2(1) = 2 > 0$ y $2 + 1 = 3 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Para resolver las ecuaciones logarítmicas se utilizan las propiedades de los logaritmos para llevar la ecuación a la forma $\log_a M = b$.

1. Para todo M y N, números positivos se cumple que

a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

c) $\log_a M^b = b\log_a M$

d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2. Se debe comprobar que el argumento de cada logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados para verificar que son soluciones de la ecuación.

En la propiedad $\log_a M^b = b\log_a M$, M debe ser un número positivo. Si b es par se debe tener cuidado.
Ejemplo:
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
En este caso falta la solución $x = -9$.
Así, es mejor no utilizarla en la solución de ecuaciones.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

Unidad 5

2.9 Logaritmo base 10 y logaritmo natural*

Problema inicial

1. Determina el valor de $\log 2^{2019}$.
2. ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{2019}?

Observa que
n se escribe con 1 dígito si y sólo si $10^0 \leq n < 10^1$
n se escribe con 2 dígitos si y sólo si $10^1 \leq n < 10^2$
n se escribe con 3 dígitos si y sólo si $10^2 \leq n < 10^3$

Solución

1. Se calcula $\log 2^{2019} = 2019 \log 2 = 607.77956...$

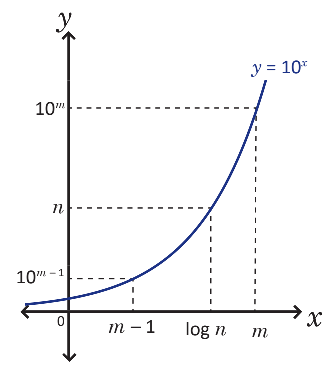
2. Observa el número de dígitos de los números

$$\underbrace{1, 2, ..., 9}_{1 \text{ dígito}}, \underbrace{10, 11, 12, ..., 99}_{2 \text{ dígitos}}, \underbrace{100, 101, ..., 999}_{3 \text{ dígitos}}, \underbrace{1\,000, 1\,001, ..., 9\,999}_{4 \text{ dígitos}}, \underbrace{10\,000, 10\,001}_{5 \text{ dígitos}}...$$

Entonces se puede deducir que, si n es un número positivo:
n se escribe con m dígitos si y sólo si $10^{m-1} \leq n < 10^m$

El número de dígitos de 2^{2019} está determinado por el exponente m tal que
$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m - 1 \leq \log 2^{2019} < m$$

Del problema 1 se tiene que $607 \leq \log 2^{2019} < 608$.
Por lo tanto, 2^{2019} se escribe con 608 dígitos.



Observa que si $10^{m-1} \leq n < 10^m$, entonces $m - 1 \leq \log n < m$, ya que la base es $10 > 1$.

Conclusión

1. El logaritmo base 10 de un número a se denota por $\log a$.

2. El número de dígitos de un número entero positivo a es el número entero m inmediatamente mayor a $\log a$.

3. El logaritmo natural de un número a es el logaritmo $\log_e a$, la base es el número neperiano $e = 2.71828...$, y se utiliza la notación $\log_e a = \ln a$.
El logaritmo natural es muy útil en el cálculo infinitesimal.

Problemas

1. ¿Cuántos dígitos tienen las siguientes potencias?
   a) 3^{2019} b) 5^{1000} c) $2\,019^{2019}$

2. ¿Cuáles potencias de 2 tienen 2 019 dígitos?

3. Obtener el valor de los siguientes logaritmos:
   a) $\ln 2$ b) $\ln 3$
   c) $\ln 10$ d) $\ln \frac{1}{4}$
   e) $\ln \frac{8}{3}$ f) $\ln \frac{11}{3}$

En la calculadora utiliza la tecla ln para calcular el logaritmo natural de un número.

2.10 Practica lo aprendido

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 49$ b) $\log_{16} 2$ c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ e) $\log_5 \sqrt{5}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. Determina el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_6 2 + \log_6 3$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$ e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$ f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$ h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$ i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin usar la calculadora.

a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$ b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$ c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4. Encuentra el valor de los siguientes logaritmos con la propiedad del cambio de base:

a) $\log_3 15$ b) $\log_8 6$ c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$ f) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$

5. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$ b) $\log_3 x(x + 2) = 1$ c) $\log_2 x(2 - 3x) = -2$

d) $\log_6(2x - 3) = \log_6 5 + \log_6 7$ e) $\log (x - 3) + \log (5 - x) = 0$ f) $\log (x - 8) - \log (x - 9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6 - x) = 1$ h) $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 1$ i) $\log_2(x^2 + 9) = 1 + \log_2(2x^2 - 33)$

7. Determina la cantidad de dígitos de los siguientes números:

a) 2^{350} b) 3^{1234} c) 4^{98765}

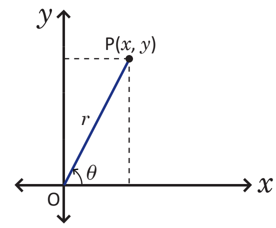
8. Encuentra la potencia de base 11 que se escribe con 100 dígitos. ¿Existe otra?

3.1 Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)

Problema inicial

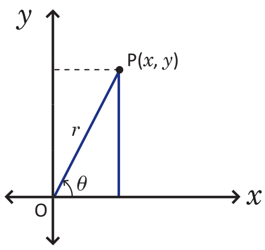
1. Se tiene la gráfica del ángulo θ, O es el origen, $\overline{OP}$ es el lado terminal del ángulo θ dibujado en posición estándar, r es la longitud del segmento $\overline{OP}$. Escribe las razones trigonométricas del ángulo θ.

2. ¿Las razones trigonométricas dependen del valor de r?

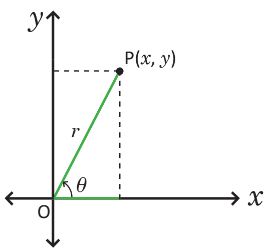


Solución

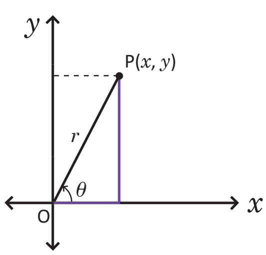
1.



sen $\theta = \frac{y}{r}$



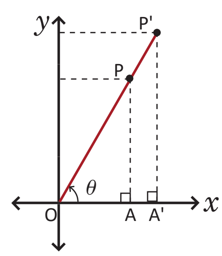
cos $\theta = \frac{x}{r}$



tan $\theta = \frac{y}{x}$

siempre que $x \neq 0$

2. Se elige otro punto P'(x', y') tal que $\overline{OP'}$ es también lado terminal de θ, como muestra la figura:



Se cumple que P es un punto del segmento $\overline{OP'}$.

Sea A la proyección de P en el eje x y A' la proyección de P' en el eje x.

Se cumple que ΔPOA ~ ΔP'OA', por criterio AA de semejanza de triángulos.

Si $r' = \overline{OP'}$, entonces de la semejanza se tiene que
sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Por lo tanto, las razones no dependen del valor de r.

Conclusión

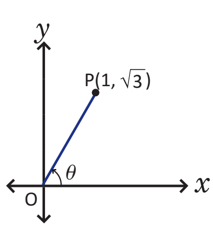
1. Las razones trigonométricas no dependen de la longitud del segmento $\overline{OP}$.
2. Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ.
3. Al ángulo θ le corresponde un único valor de sen θ, un único valor de cos θ y un único valor de tan θ.
4. Las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ son funciones del ángulo θ.

De ahora en adelante se llamarán **funciones trigonométricas** a las razones seno, coseno y tangente.

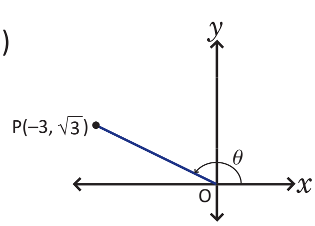
Problemas

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ a partir del punto P(x, y).

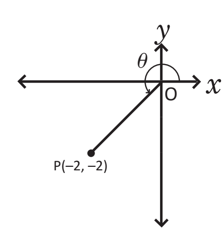
a)



b)



c)



2. Comprueba que el punto P'(cos θ, sen θ) pertenece al segmento $\overline{OP}$ en cada literal del problema 1.

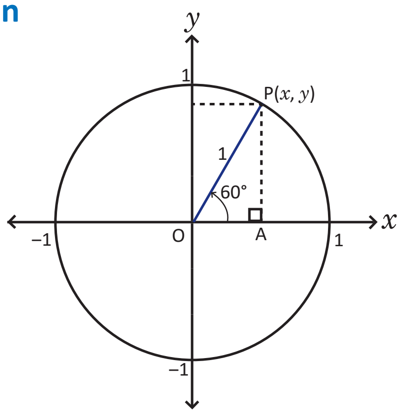
3.2 Círculo trigonométrico

Problema inicial

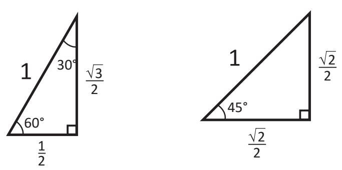
1. Dibuja en el plano cartesiano una circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Representa el ángulo de 60° tomando como lado terminal un radio de la circunferencia.
2. Determina las coordenadas del punto P(x, y), que es la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo.

Solución

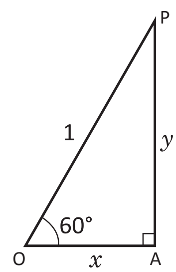
1.



Los triángulos notables a utilizar en los ángulos de referencia en el Círculo trigonométrico son:



2. En la figura se forma el triángulo rectángulo POA, P es el punto P(x, y), O es el origen y A es la proyección de P sobre el eje x.



Utilizando razones trigonométricas:
sen 60° = $\frac{y}{1} = y$ y cos 60° = $\frac{x}{1} = x$

Por lo que se tiene:
y = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y x = cos 60° = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son: P$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

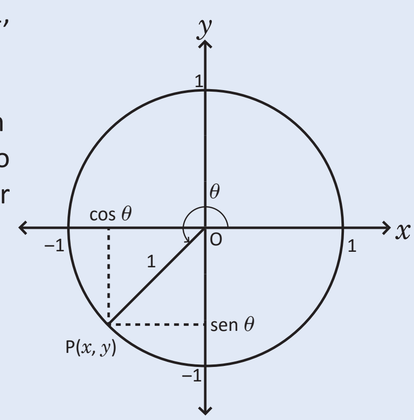
Conclusión

1. Se denomina **Círculo trigonométrico (CT)** a la circunferencia de radio 1, centrada en el origen O.

2. Las coordenadas de un punto P(x, y) en el círculo trigonométrico están determinadas por el ángulo θ dibujado en posición estándar con lado terminal $\overline{OP}$. Por definición de las razones trigonométricas de cualquier ángulo se tiene sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$.

   Por lo tanto, P(x, y) = P(cos θ, sen θ).

3. Para todo ángulo θ es posible determinar los valores de cos θ y sen θ como coordenadas de un punto en el CT.



Problemas

1. Para cada valor de θ grafica el punto P(cos θ, sen θ) en el CT. Dibuja un círculo por cada literal.
   a) θ = 120°, θ = 210° b) θ = 30°, θ = 300° c) θ = 45°, θ = 135°
   d) θ = –45°, θ = –135° e) θ = 360°, θ = 405° f) θ = 495°, θ = 540°

2. Obtén el seno y coseno de los siguientes ángulos utilizando el círculo trigonométrico.
   a) θ = 0° b) θ = 90° c) θ = 180° d) θ = 270°

Utiliza el hecho que P(cos θ, sen θ) = P(x, y).

3.3 Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico

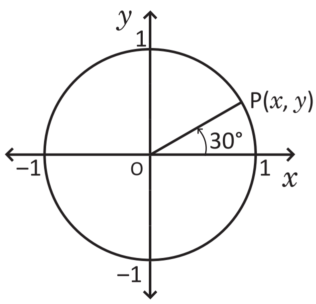
Problema inicial

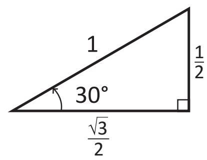
Grafica los siguientes puntos en el CT y determina sus coordenadas:

a) P(cos 30°, sen 30°)　　　　b) P(cos 390°, sen 390°)

Solución

a)

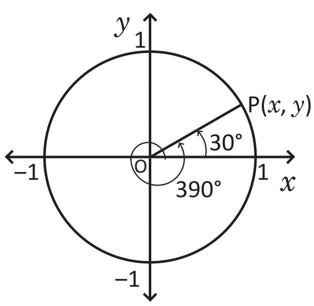




$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　　　　$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 30°, \text{sen } 30°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



Se descompone el ángulo 390° = 30° + 360°.

El ángulo de referencia es 30°, así se tiene que

$\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　　y　　$\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 390°, \text{sen } 390°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

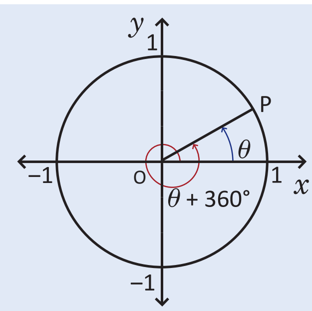
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera y sea $\alpha = \theta + 360°$. Se cumple que al dibujar los ángulos θ y α, en posición estándar, tienen el mismo lado terminal en el CT.

Así se cumple que $P(\cos \theta, \text{sen } \theta) = P(\cos(\theta + 360°), \text{sen}(\theta + 360°))$.

Una función f es **periódica** si existe un valor t tal que para todo x se cumple que $f(x) = f(x + t)$. Por lo que las funciones seno y coseno son periódicas pues cumplen las siguientes propiedades:

$\cos(\theta \pm 360°) = \cos \theta$　　　　$\text{sen}(\theta \pm 360°) = \text{sen } \theta$



Ejemplo

Determina el valor de sen(–330°).

$\text{sen}(-330°) = \text{sen}(-330° + 360°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, aplicando la periodicidad.

Por lo tanto, $\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores:

a) sen 405°　　b) cos 420°　　c) sen(–300°)

d) cos(–675°)　　e) sen 1080°　　f) cos 630°

g) sen(–900°)　　h) cos(–630°)　　i) sen 540°

2. Utiliza las fórmulas del seno y coseno de una suma para demostrar las siguientes propiedades:

a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta$　　b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

3.4 Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Para cada uno de los ángulos:

1. $\theta = 30°$ 2. $\theta = -30°$

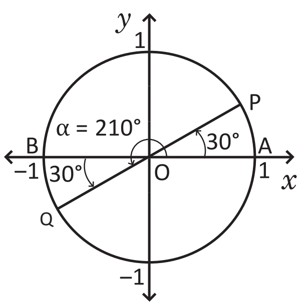
P'$(-x, -y)$ es el punto simétrico de P(x, y) respecto al origen.

Realiza lo siguiente:

a) Grafica el punto Q simétrico al punto P(cos θ, sen θ) respecto al origen y escribe sus coordenadas.
b) Determina el ángulo α en posición estándar que corresponde al punto Q.
c) Calcula el valor de tan α.

Solución

1.



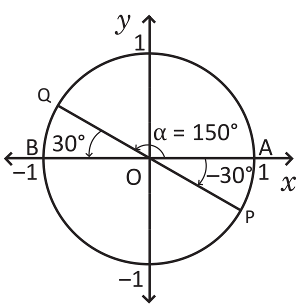
a) Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ hasta cortar nuevamente al CT. Este punto de corte es Q pues $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$. Sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢BOQ = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° + 30° = 210°.

c) Se tiene el punto Q(–cos 30°, –sen 30°), entonces:

$$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) Se grafica el punto Q y sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P, respecto al origen.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢QOB = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° – 30° = 150°.

c) Se tiene el punto Q(cos(–30°), –sen(–30°)), entonces:

$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

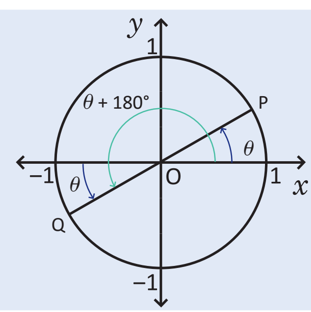
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera, entonces:

$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos\theta, -\text{sen }\theta).$$

Así, $\tan(\theta + 180°) = \frac{-\text{sen }\theta}{-\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

Por lo tanto, la propiedad de **periodicidad** de la tangente está dada por la expresión: $\tan(\theta \pm 180°) = \tan\theta$.



Problemas

1. Utiliza la periodicidad de la función tangente para calcular los siguientes valores:

a) tan 225° b) tan 210° c) tan 240° d) tan 180°

e) tan(–150°) f) tan(–135°) g) tan(–120°) h) tan(–300°)

2. Utiliza la fórmula de la tangente de una suma para demostrar la propiedad $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Unidad 5

3.5 Función seno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función y = sen θ.

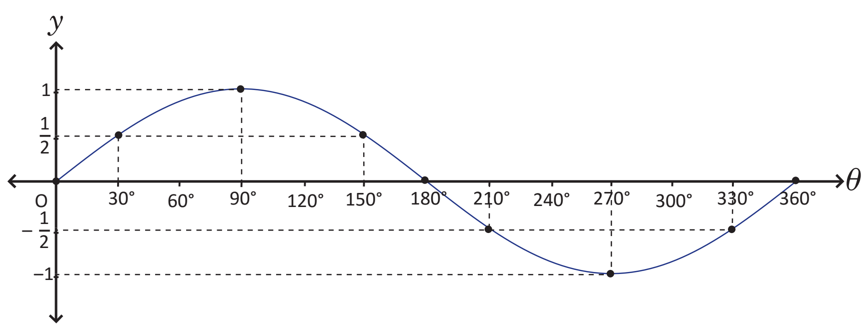
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

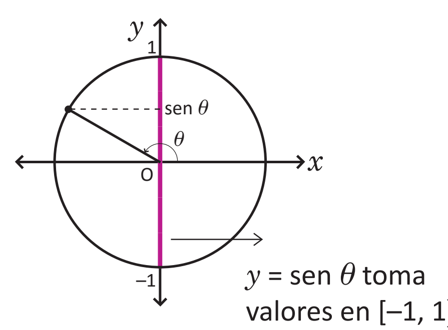


2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo.

   Por lo tanto, el dominio de la función y = sen θ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del seno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [−1, 1].

   Por lo tanto, el rango de la función y = sen θ es [−1, 1].



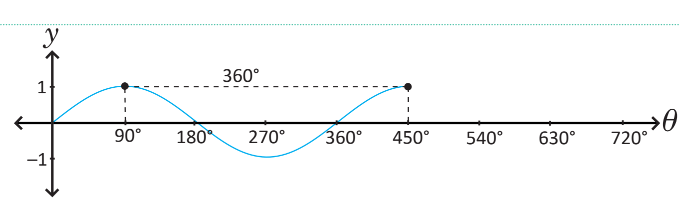
Conclusión

La función $f(\theta)$ = sen θ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango R_f = [−1, 1].

La función $f(\theta)$ = sen θ es una función periódica, es decir, existe un valor α tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ para todo valor de θ. Se llama **periodo** de la función f al valor más pequeño $\alpha > 0$ tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$. El periodo de la función seno es 360°. En general se cumple que sen $(\theta + 360°n)$ = sen θ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función seno graficada en el intervalo [0°, 450°]. Utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta)$ = sen θ, en el intervalo [−360°, 0°].

3.6 Función coseno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \cos\theta$.

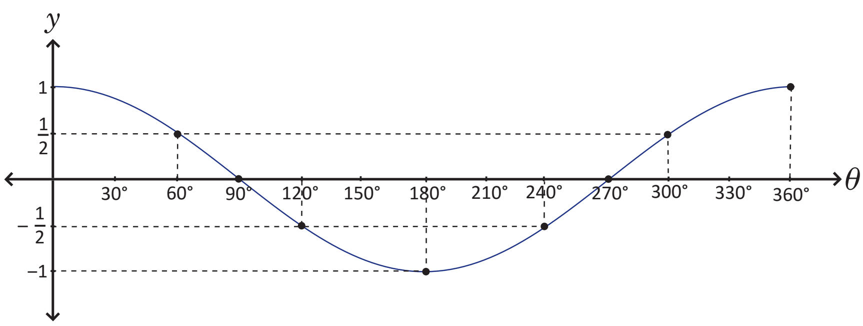
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

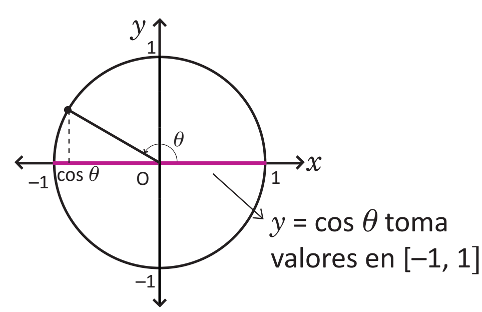
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo. Por lo tanto, el dominio de la función $y = \cos\theta$ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del coseno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [–1, 1]. Por lo tanto, el rango de la función $y = \cos\theta$ es [–1, 1].



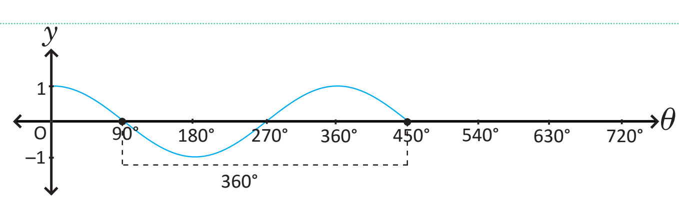
Conclusión

La función $f(\theta) = \cos\theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \cos\theta$ es una función periódica. El periodo de la función coseno es 360°. En general se cumple que $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función coseno graficada en el intervalo [0°, 450°], utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.

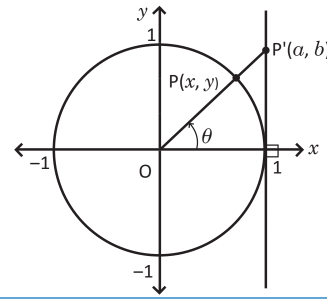


2. Grafica la función $f(\theta) = \cos\theta$, en el intervalo [–360°, 0°].

3.7 La tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Se traza la recta $x = 1$ y se dibuja un ángulo θ con lado terminal $\overline{OP}$, donde P(x, y) es un punto en el CT. Luego el segmento OP se prolonga hasta el punto P' que está en la recta $x = 1$.



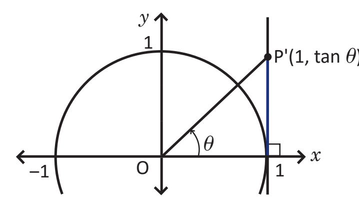
1. Determina las coordenadas del punto P'(a, b) en función de θ.

2. ¿Para cuáles valores de θ, la función $y = \tan\theta$ no está definida?

Solución

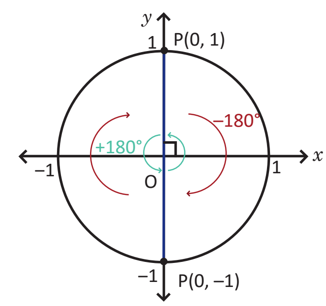
1. Se tiene que $a = 1$, ya que P' es un punto de la recta $x = 1$.
   Utilizando la definición de tangente se tiene que $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$.

   Por lo tanto, P'(a, b) = P'(1, tan θ).



2. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$, no está definida si $x = 0$. Este valor corresponde a los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$, cuyos puntos en el CT son (0, 1) y (0, –1) respectivamente.

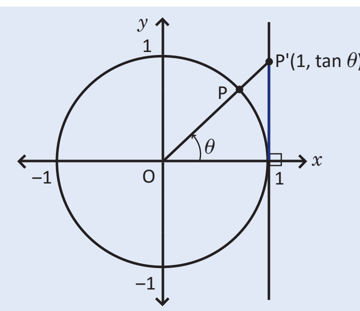
   También $x = 0$, si se suma o resta 180° de estos ángulos. Por lo tanto, todos estos valores se pueden escribir así: $90° + 180°n$, donde n es un número entero.



Conclusión

La tangente de un ángulo θ puede representarse en el círculo trigonométrico de la siguiente manera:
1. Se dibuja el punto P correspondiente al ángulo θ en el CT.
2. Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ (O es el origen) hasta cortar a la recta $x = 1$.
3. Se llama P' al punto de corte. La coordenada en y de P' es igual a tan θ.

La función tan θ no está definida para aquellos ángulos de la forma:
$\theta = 90° + 180°n$ donde n es un número entero.



Problemas

Representa el valor de la tangente de los siguientes ángulos, utilizando la figura de la conclusión:

a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 60°$ c) $\theta = 135°$

d) $\theta = -45°$ e) $\theta = -120°$ f) $\theta = -150°$

3.8 Gráfica de la función tangente

Problema inicial

1. ¿Qué sucede con el valor de tan θ, si θ toma valores cercanos a 90° y –90°? Utiliza las siguientes tablas.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. Completa la siguiente tabla y grafica la función y = tan θ en el intervalo]–90°, 90°[.

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. Determina el dominio de la función y = tan θ.
4. ¿Cuál es el rango de la función y = tan θ?

Solución

1. Para ángulos cercanos a 90°.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

El valor de tan θ se vuelve cada vez mayor cuando θ toma valores muy cercanos a 90°.

Para ángulos cercanos a –90°.

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5 729.5...

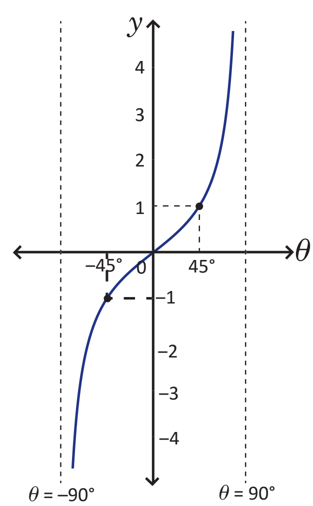
El valor de tan θ se vuelve cada vez menor cuando θ toma valores muy cercanos a –90°.

Se observa que θ = 90° y θ = –90° son asíntotas verticales.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

Al graficar se obtiene la figura de la derecha.



3. En la clase anterior se vio que la función y = tan θ, no está definida para los valores θ = 90° + 180°n, con n entero. Por lo tanto, el dominio es: $\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n es entero}.

4. A partir de la gráfica se obtiene que el rango de y = tan θ es $\mathbb{R}$.

Conclusión

La función $f(\theta)$ = tan θ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ – {90° + 180°n | n es entero} y su rango es $\mathbb{R}$. Además, las rectas θ = 90° + 180°n, donde n es un número entero, son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.

La función $f(\theta)$ = tan θ es una función periódica. El periodo de la función tangente es 180°, y por tanto, en general, tan (θ + 180°n) = tan θ para todo n entero.

Problemas

Utiliza la periodicidad de la tangente para graficar la función $f(\theta)$ = tan θ en el intervalo]–270°, 270°[.

3.9 Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = 2sen θ en el intervalo [0°, 360°].

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) Grafica la función $g_1(\theta)$ = cos θ en el intervalo [0°, 360°] luego, grafica $g_2(\theta)$ = cos 2θ en el intervalo [0°, 180°], utiliza la siguiente tabla.

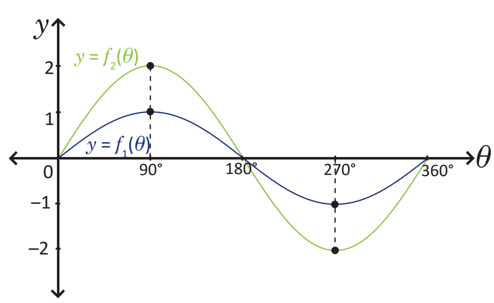
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) Comprueba que $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ y completa la gráfica hasta el ángulo 360°.

Solución

1. Completando la tabla.

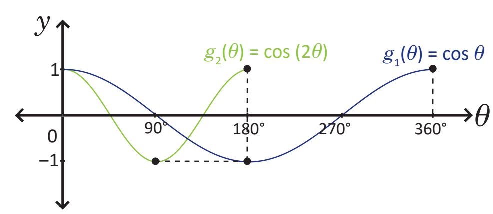
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



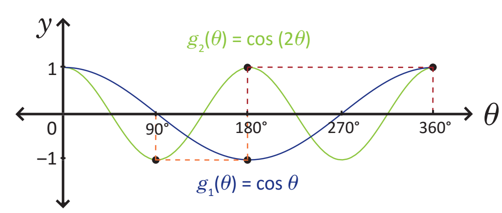
Cada punto de $f_2(\theta)$ = 2sen θ se obtiene multiplicando por 2 la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

2. a) Completando la tabla.

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



Cada punto de la gráfica de $g_2(\theta)$ = cos 2θ se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ la coordenada en θ de los puntos de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Definición

Se llama **amplitud** de la función trigonométrica $f(\theta)$ = A sen θ al valor |A| y es el máximo valor que puede tomar la función. En este caso, el rango de la función es [–|A|, |A|]. Esta función se obtiene multiplicando por A todas las coordenadas en y de la función sen θ.

La función $f(\theta)$ = sen Bθ, donde B es un número real diferente de 0, cumple que

sen (Bθ + 360°) = sen Bθ $\Leftrightarrow$ sen B$\left(\theta + \frac{360°}{B}\right)$ = sen Bθ $\Leftrightarrow$ $f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta)$.

Así, el **periodo** de la función $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (se utiliza |B|, porque el periodo es positivo).

Estas definiciones también se aplican a las funciones $f(\theta)$ = Acos θ y $f(\theta)$ = cos Bθ.

Problemas

Grafica, en el intervalo [0, 360°], las siguientes funciones utilizando la amplitud y periodicidad.

a) $f(\theta)$ = 3sen θ b) $f(\theta)$ = –2cos θ c) $f(\theta)$ = sen 3θ d) $f(\theta)$ = cos $\frac{\theta}{2}$

3.10 Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En cada literal grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen θ + 1; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ + 1						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ y $g_2(\theta)$ = sen θ – 1; [0°, 450°]

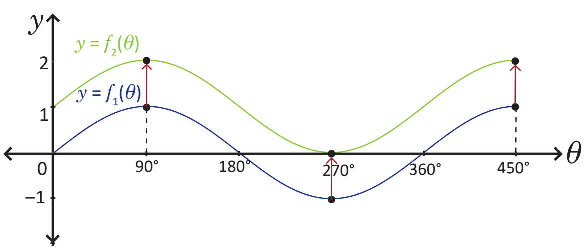
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1						

Solución

Observa que las funciones sen(θ + 1°) y sen θ + 1 son distintas.

a) Se completa la tabla.

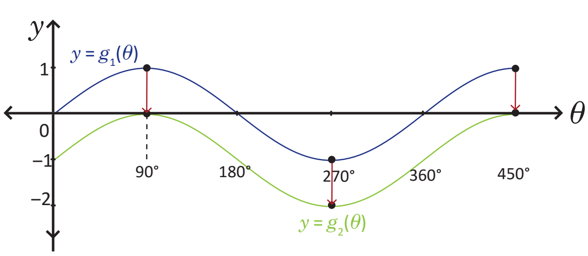
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen θ + 1 es un desplazamiento de 1 unidad hacia arriba de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1	–1	0	–1	–2	–1	0



Cada punto de $g_2(\theta)$ = sen θ – 1 es un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = sen θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de la función sen θ.

- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Dada la función $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ con dominio $\mathbb{R}$, su rango es el intervalo $[-1 + k, 1 + k]$.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos $\theta + k$ como desplazamiento vertical de la función cos θ.

En general la gráfica de $f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$: hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos θ + 1

b) $f(\theta)$ = sen θ + 2

c) $f(\theta)$ = cos θ – 2

d) $f(\theta)$ = sen θ – 3

3.11 Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En los siguientes literales grafica las funciones en un mismo plano cartesiano, en el intervalo dado.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$; [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen$(\theta - 90°)$						

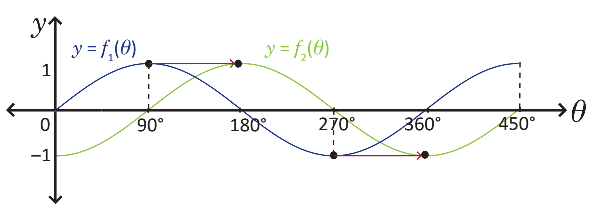
b) $g_1(\theta)$ = cos θ y $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos$(\theta + 90°)$							

Solución

a) Se completa la tabla.

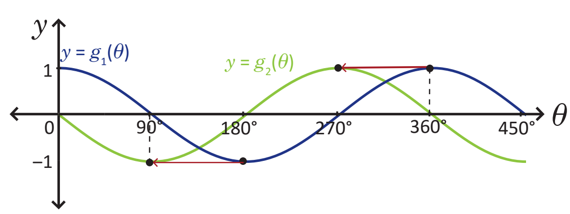
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen$(\theta - 90°)$	–1	0	1	0	–1	0



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la derecha de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos$(\theta + 90°)$	0	–1	0	1	0	–1



Cada punto de $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la izquierda de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen$(\theta - \alpha)$ es un desplazamiento horizontal de α unidades de la gráfica de sen θ.

- Si $\alpha > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $\alpha < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos$(\theta - \alpha)$ como desplazamiento de la función cos θ.

En general, la gráfica de $f(x - h)$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la gráfica de $f(x)$:

- Hacia la derecha si $h > 0$.
- Hacia la izquierda si $h < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 45°)$

b) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 90°)$

c) $f(\theta)$ = sen$(\theta - (-30°))$

d) $f(\theta)$ = sen$(\theta + 90°)$

3.12 Forma general de las funciones trigonométricas

Problema inicial

Grafica la función $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ en el intervalo [0°, 360°] realizando los siguientes pasos:

1. Considera las funciones $f_1(\theta) = \text{sen}\,3\theta$, $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ y completa la Tabla 1.
2. Completa la Tabla 2.
3. Grafica en el mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, en el intervalo [0, 120°].
4. Utiliza la periodicidad para completar la gráfica de $f_2(\theta)$ hasta el intervalo [0°, 360°].
5. Grafica en otro plano cartesiano las funciones $f_2(\theta)$ y $f(\theta)$. Utiliza la Tabla 2.

Tabla 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

Tabla 2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

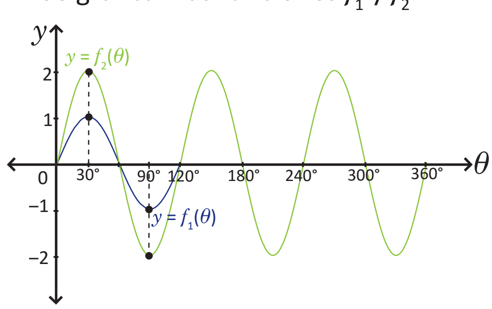
Observa que
$f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.

Solución

1. Se completa la tabla 1.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

3 y 4. Se grafican las funciones f_1 y f_2.

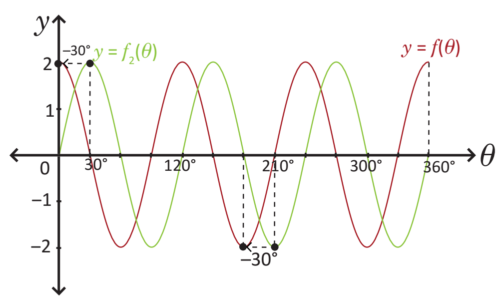


El periodo de f_1 es $\frac{360°}{3} = 120°$.

2. Se completa la tabla 2.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

5. Se grafican las funciones
$f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.



La gráfica de $f(\theta)$ es un desplazamiento de 30° hacia la izquierda de la gráfica de $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$.

Conclusión

Una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Tiene amplitud $|A|$, por lo que su rango es $[-|A|, |A|]$.
2. Tiene periodo $\frac{360°}{|B|}$ y es un desplazamiento horizontal de α unidades respecto a la función $A\text{sen}\,B\theta$.

Para graficar una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$ se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se grafica la función sen $B\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$.
2. Se grafica la función $A\text{sen}\,B\theta$ y se utiliza la periodicidad para completar el intervalo en el que se graficará.
3. Se efectúa el desplazamiento horizontal de α unidades para obtener $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$.

Problemas

Grafica cada función, en el intervalo [0, 360°] utilizando los desplazamientos, amplitud y periodo:

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

3.13 Sistema circular de ángulos

Problema inicial

1. Encuentra la longitud del arco del CT cuyo ángulo central es 45°.

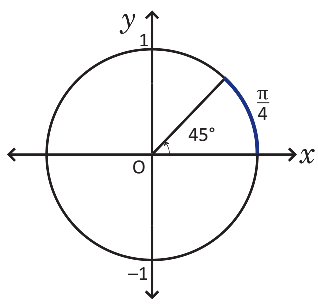
2. Encuentra el ángulo central del CT cuya longitud es $\frac{\pi}{6}$.

En una circunferencia de radio r, la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ está dado por $2\pi r\frac{\theta}{360°}$.

Solución

1. El radio del CT es $r = 1$.
   La longitud del arco subtendido por el ángulo de 45° está dado por: $2\pi(1)\frac{45°}{360°} = \cancel{2}^{1}\pi \frac{1}{\cancel{8}_{4}}$.

   Por lo tanto, la longitud del arco es $\frac{\pi}{4}$.



2. Sea α el ángulo central tal que $2\pi\frac{\alpha}{360°} = \frac{\pi}{6}$.

   Se despeja $\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360°}{2\pi}\right) = 30°$.

   Por lo tanto, el ángulo que subtiende un arco de longitud $\frac{\pi}{6}$ es 30°.

Definición

En el círculo trigonométrico se define: **1 radián** como el ángulo que subtiende un arco de longitud 1.

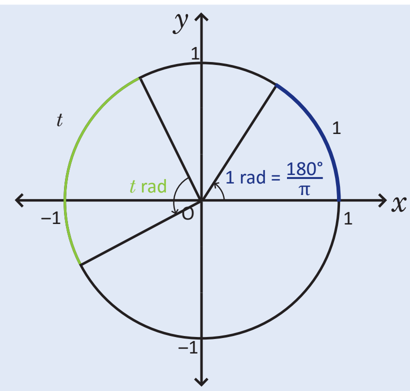
Así t **radianes** es el ángulo que subtiende un arco de longitud t y se representa como t rad (o solo t).

El ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, subtiende un arco de longitud $\frac{\theta}{180°}\pi$, entonces el ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, tiene un valor de $\frac{\theta}{180°}\pi$ rad.

Esta definición se extiende a cualquier ángulo de la siguiente manera: si θ es un ángulo cualquiera, entonces su valor en radianes está dado por

$$\frac{\theta}{180°}\pi \text{ rad.}$$

Si se tiene la medida de un ángulo t en radianes, su valor θ en grados está dado por $\theta = \frac{180°}{\pi}t$.



El sistema en el que se escriben los ángulos en grados se denomina **sistema sexagesimal de ángulos**.

Ejemplo

a) Expresar en radianes el ángulo 120°.

$$120° = \frac{120°}{180°}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Escribe en grados el valor de $\frac{\pi}{5}$.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36°$$

Problemas

1. Se tienen los siguientes ángulos en grados, determina su valor en radianes:

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. Se tiene los siguientes ángulos en radianes, determina su valor en grados:

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

3.14 Practica lo aprendido

1. Dibuja el círculo trigonométrico y grafica el punto P(cos θ, sen θ) para cada valor de θ.
   a) θ = 60° b) θ = 150° c) θ = 240° d) θ = 330°

2. Utiliza la representación del seno y coseno en el CT para demostrar la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

3. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores.
   a) sen 750° b) cos 765° c) tan 600°
   d) sen(–660°) e) cos(–690°) f) tan(–495)

4. Realiza lo que se pide:
   a) Demuestra que la función f: [–90°, 90°] $\rightarrow$ [–1, 1]; $\theta \rightarrow$ sen θ, es biyectiva.
   b) Restringe la función coseno para que sea biyectiva. Utiliza la gráfica de la clase 3.6.

5. Utiliza la representación de la función tangente en el CT para demostrar la identidad $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

6. Realiza los siguientes problemas:
   a) Traza la recta y = 1, que es tangente al CT en el punto (0,1).
   b) Sea θ un ángulo en el primer cuadrante. Dibuja los puntos R(0,1), P(cos θ, sen θ) y Q el punto de intersección de la recta y = 1 con la prolongación del segmento OP.
   c) Demuestra que $OQ = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$.
   d) Determina las coordenadas del punto Q(a, b)
   e) Demuestra que $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

7. Determina el periodo de las siguientes funciones y grafícalas en el intervalo dado.
   a) tan (θ – 90°); [0, 360°] b) tan 2θ; [0, 270°]

8. Determina el periodo y la amplitud de las siguientes funciones, luego grafícalas en el intervalo dado.
   a) $f(\theta)$ = sen 5θ; [0°, 144°] b) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{3}$; [0°, 1 080°]
   c) $f(\theta)$ = 4 cos θ; [0°, 360°] d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta$; [0°, 360°]

9. Grafica las siguientes funciones utilizando desplazamientos, amplitud y periodo. Además determina su dominio y rango.
   a) $f(\theta)$ = 2cos(6θ – 120°) b) $f(\theta)$ = 4sen(2θ + 120°)
   c) $f(\theta)$ = –2cos(4θ + 180°) d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

10. Reescribe los ángulos en el sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.
   a) 20° b) 50° c) 140° d) 345°
   e) 500° f) –150° g) $\frac{\pi}{8}$ rad h) $\frac{4\pi}{9}$ rad
   i) $\frac{5\pi}{3}$ rad j) $\frac{\pi}{180}$ rad k) 3π rad l) $-\frac{\pi}{2}$ rad

11. Si un arco circular de 9 centímetros subtiende el ángulo central de 45° en una circunferencia, ¿cuál es la longitud del radio de la circunferencia?

12. El radio de una circunferencia es 5 cm, determina la medida del ángulo central, en radianes, que subtiende un arco de 12 cm.

Unidad 5

3.15 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
   d) $2^{3x+2} = 256$ e) $2^x = 3^{x-2}$ f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$

2. Utiliza desplazamientos horizontales y verticales para graficar las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \log_3(x - 1)$ b) $f(x) = \log_2 x + 2$ c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$ d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$

3. Para cada función del problema anterior determina: dominio, rango, asíntotas y su función inversa.

4. **Interés compuesto.** Si una cantidad de dinero C se invierte durante t años, con un interés del r% anual, recapitalizable (que se reinvierte) n veces al año. El dinero que se obtiene al final de los t años está dado por la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$.

   María realiza un depósito a plazo de \$500, en una Cooperativa de Ahorro. El interés anual del depósito es del 4%. El dinero se recapitaliza 4 veces al año (cada tres meses).
   a) Sustituye los valores conocidos en la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$, para obtener una fórmula que dé el dinero acumulado por María después de t años.
   b) ¿Cuánto dinero habrá acumulado María después de 2 años?
   c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que María acumule al menos \$750?

5. **Crecimiento poblacional.** El crecimiento de una población a lo largo del tiempo está dado por la siguiente función exponencial: $P(t) = C(1 + r)^t$. Donde C es la población inicial, r es la tasa de crecimiento y t la cantidad de años transcurridos. La población de El Salvador para el año 2017 se estimó en 6 172 011 con una tasa de crecimiento poblacional de 0.3%. Utilizando la información anterior resuelve los siguientes problemas:
   a) Si la tasa de crecimiento se mantiene igual, ¿cuál será, aproximadamente, la población en El Salvador en el año 2030?
   b) ¿En qué año la población alcanzará los 7 millones de habitantes?

6. Justifica la veracidad de la siguiente proposición: para todo número natural n se cumple que si 2^n tiene k dígitos entonces 2^{n+1} tiene k dígitos o 2^{n-1} tiene k dígitos.

7. Restringe la función tangente para que sea una función biyectiva y grafícala.

8. Grafica las funciones inversas de las funciones trigonométricas utilizando las funciones restringidas del problema 4 del Practica lo aprendido 3.14 y el problema anterior.

   Utiliza los ángulos en el sistema circular.

9. Demuestra que para todo ángulo θ se cumple que
   a) $\operatorname{sen}^2\theta \leq 1$
   b) $|\operatorname{sen}\theta + \cos\theta| \leq 2$

   Utiliza la desigualdad triangular.

   c) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
   d) $|\operatorname{sen}\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$ Utiliza el literal anterior.
   e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero.

10. Aproximación del valor de π. Con los siguientes polígonos inscritos en el círculo de radio 1, calcula el cociente del perímetro del polígono entre el diámetro del círculo:
    a) Octágono regular b) Dodecágono regular

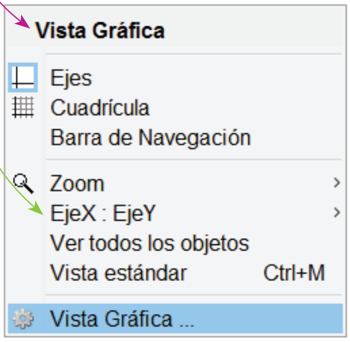
El método de exhaución fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo. El método consiste es inscribir polígonos regulares en el círculo para aproximar su área. Con este método también realizó aproximaciones del cociente del perímetro de la circunferencia por su diámetro, es decir, de la constante π.
Dunham, W. *(2004) Viaje a través de los genios*.

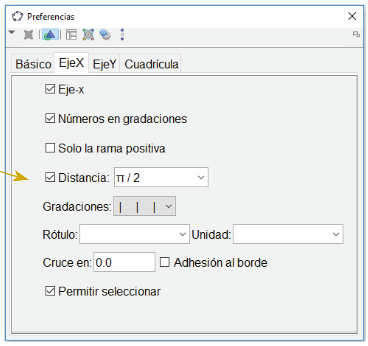
4.1 Práctica en GeoGebra: funciones trigonométricas

Con el desarrollo de esta práctica aprenderás sobre las gráficas de las funciones trigonométricas en GeoGebra y sus propiedades: amplitud, periodo y desplazamientos.

Práctica

1. Cambiar la numeración del eje.
   - a) Clic derecho en la Vista Gráfica.
   - b) Selecciona Vista Gráfica
   - c) Selecciona EjeX.
   - d) Selecciona el cuadro Distancia.
   - e) Selecciona en el cuadro desplegable π / 2.



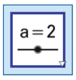


2. Gráfica de funciones trigonométricas.
   - a) Función Seno. Escribe en la barra de Entrada sen x.

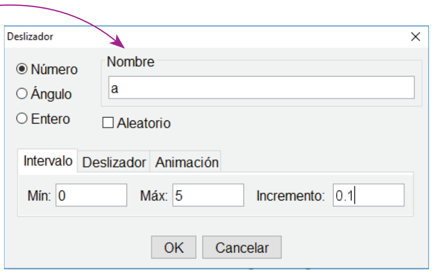
   - b) Evaluando valores en la función seno. Cuando se evalúan ángulos en grados en las funciones trigonométricas debe colocarse el símbolo de grados correspondiente. Escribe en la barra de Entrada a = f(90°), b = f(90), c = f(π / 2). Observa que en b = $f(90)$ el programa evalúa 90 radianes.

3. Amplitud de las funciones trigonométricas.
   Grafica la función $g(x) = 2\text{sen}\ x$. Escribe en la barra de entrada g(x) = 2*f(x).

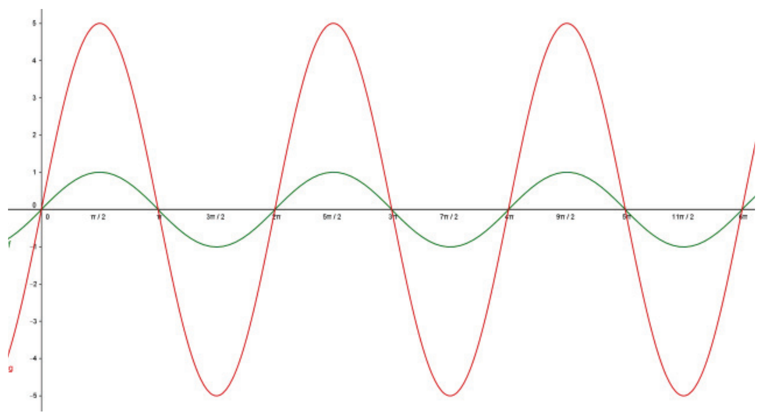
4. El comportamiento de la función $f(x) = a\text{sen}(x)$ con $a > 0$.
   Creación de un deslizador.
   - a) En la barra de herramientas selecciona Deslizador.



   - b) Clic en la Vista Gráfica.
   - c) Aparecerá un cuadro en el que debe colocarse el nombre al deslizador, en este caso **a**. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok.

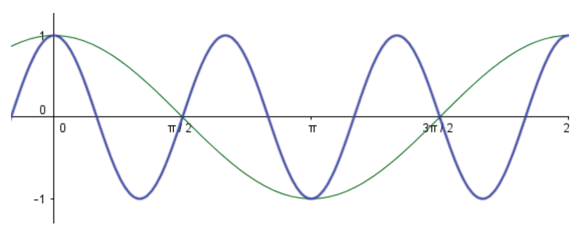


   - d) Dibuja la función $f(x) = \text{sen}\ x$.
   - e) Dibuja la función $g(x) = a\text{sen}\ x$.
   - f) Selecciona el punto del deslizador y observa que a medida que se mueve hacia la derecha la función se dilata, mientras que hacia la izquierda se contrae.
   - g) Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.



5. Periodo

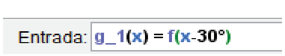
   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función cos $3x$. Escribe en la barra de Entrada g(x)=f(3x).
   c) Grafica la función cos $\frac{x}{3}$. Escribe en la barra de Entrada h(x)=f(x/3).

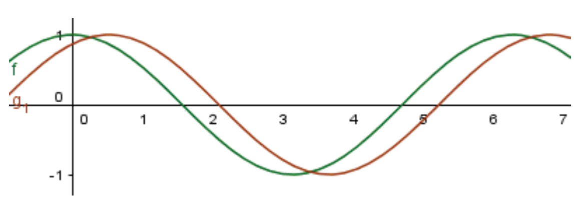


6. Desplazamientos verticales u horizontales.

   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función $g_1(x)$ = cos $(x - 30°)$.
   c) Grafica la función $h_1(x)$ = cos $(x + 60°)$.
   d) Grafica la función $g_2(x)$ = cos(x) + 3.
   e) Grafica la función $h_2(x)$ = cos(x) – 2.

Para escribir subíndice en GeoGebra se utiliza guion bajo como se muestra a continuación.





Actividades

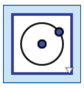
1. Grafica las funciones del problema 8 de la clase 3.14.
2. Grafica las funciones del problema 10 de la clase 3.14.
3. Crea un deslizador **B**, con mínimo 0, máximo 5 e incremento 0.1. Luego grafica las funciones $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = sen Bx. Observa el comportamiento de la función g a medida que el valor de **B** aumenta o disminuye.
4. Realiza una animación utilizando deslizadores para desplazamiento vertical y horizontal.

4.2 Práctica en GeoGebra: construcción de las funciones seno y coseno

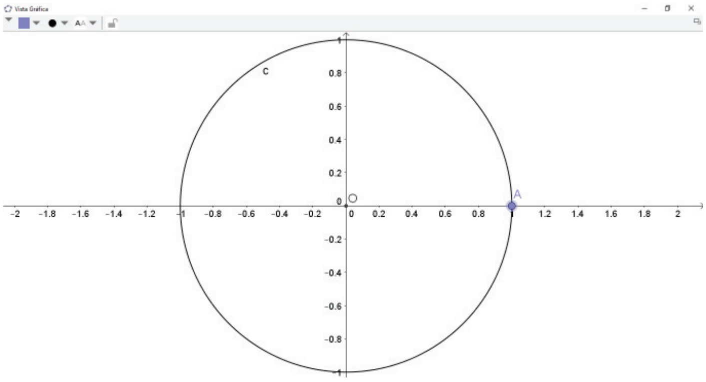
Es posible construir las funciones trigonométricas observando su comportamiento en el círculo trigonométrico. A continuación se graficará la función seno.

Práctica

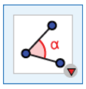
1. Dibujar el círculo trigonométrico.



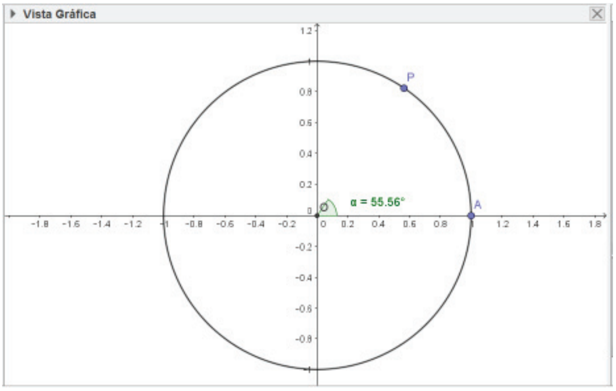
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.



2. Dibujar el ángulo.

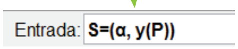


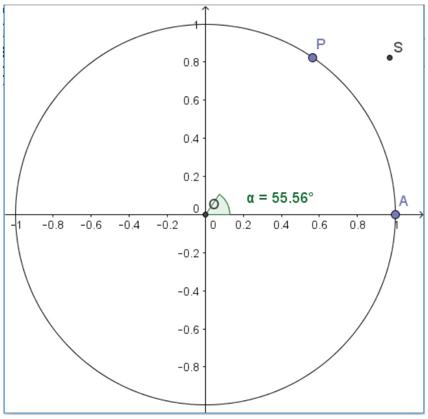
   a) Selecciona un punto P en el CT.
   b) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
   c) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto P (es decir sen α).

   a) En la barra de Entrada escribe S = (α, y(P)) y presiona Enter.





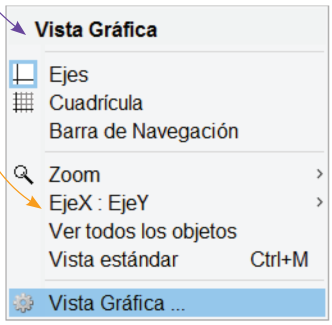
4. Cambiar la numeración del eje x.

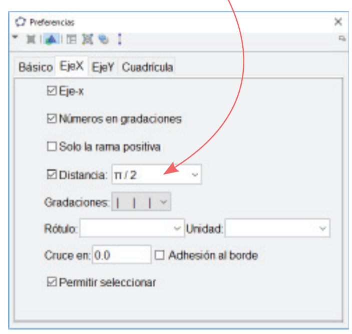
a) Clic derecho en la Vista Gráfica (ningún elemento debe estar seleccionado).

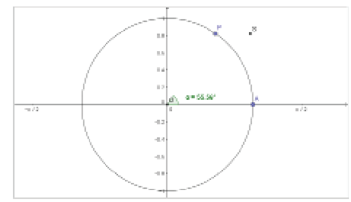
b) Clic en Vista Gráfica.

c) Clic en EjeX.

d) Clic en el cuadro Distancia y selecciona la opción π / 2. Luego salir.





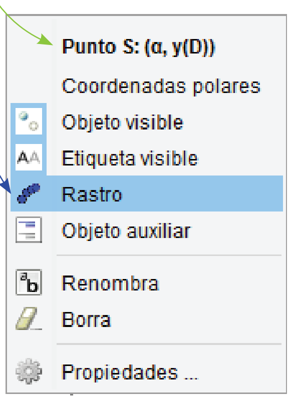


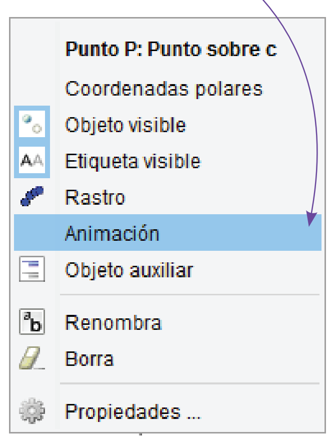
5. Graficando la función seno.

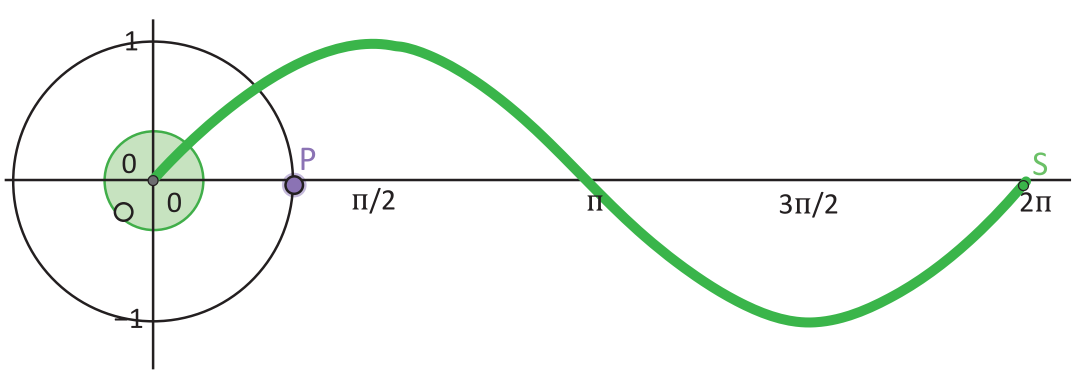
a) Selecciona el punto S y dar clic derecho.

b) Clic en rastro.

c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.







Actividades

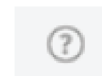
Construye la función coseno a partir del círculo trigonométrico.

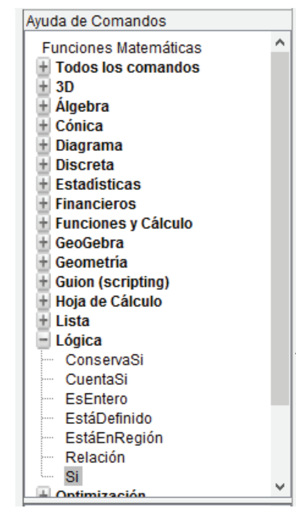
4.3 Práctica en GeoGebra: construcción de la función tangente

De igual manera que las funciones seno y coseno, la función tangente se puede dibujar a partir del círculo trigonométrico. Sin embargo, se tiene la dificultad que el ángulo al recorrer los valores $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ en el CT, la función debe evaluarse en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Para realizar esto se explicará la utilidad de la función **Si** del bloque de lógica.

Práctica

1. Clic en el botón Ayuda de Comandos, que se encuentra a la derecha de la barra de entrada. Se desplegará el panel de comandos.





2. Selecciona la función Si del bloque de lógica. En este comando deben ingresarse 2 o 3 datos separados por coma.

Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

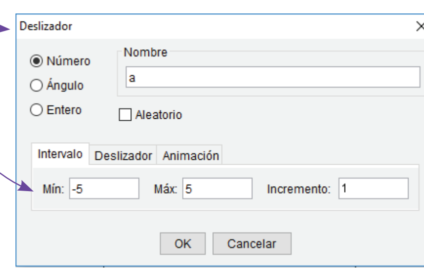
Condición: Se introduce una condición en la que está involucrada una variable, puede ser una igualdad, una desiguladad, entre otras.

Entonces: Es el valor que el comando devolverá si la condición es verdadera.

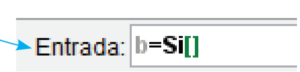
Si no: Es el valor que el comando devolverá si la condición no es verdadera.

3. Se creará un número **b** a partir de un deslizador **a**, de tal manera que si el valor de **a** es negativo entonces el valor de **b** será 0 y si el valor de **a** es positivo entonces **b** tomará el valor de **a**.

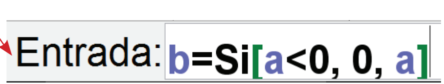
   a) Crea un deslizador con nombre **a**, de -5 a 5 e incremento 1.



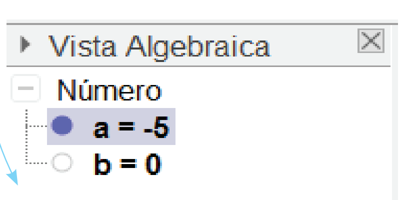
   b) Escribe en la barra de Entrada **b =**, luego pegar el comando Si del bloque de lógica.



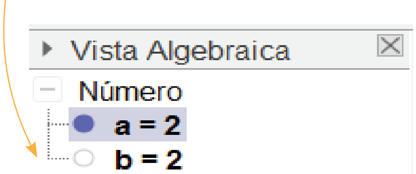
   c) Se debe evaluar si **a** es negativo por lo que la condición a ingresar es **a**<0. El valor que el comando devolverá es 0 si se cumple **a**<0. El valor que el comando devolverá es **a** si no se cumple que **a**<0.



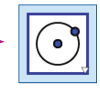
En el caso que **a** sea negativo **b** tomará el valor de 0.



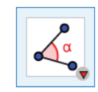
En el caso que a sea positivo **b** tomará el valor de **a**.



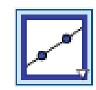
4. Dibujar el Círculo Trigonométrico:
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.
   c) Grafica la recta $x = 1$.



5. Dibujar el ángulo:
   a) Coloca el punto A(1, 0).
   b) Selecciona un punto P en el CT.
   c) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
   d) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



6. Representación de la tangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta $x = 1$.
   c) Oculta la recta trazada.

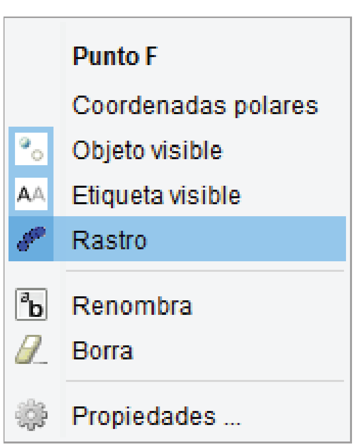


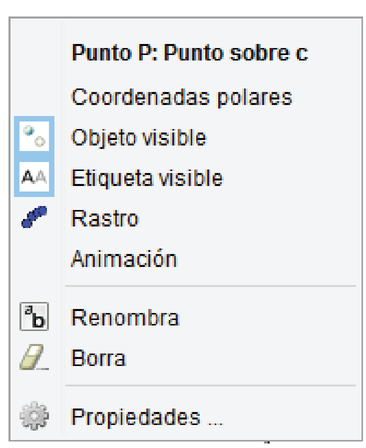
7. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto Q (es decir tan α).

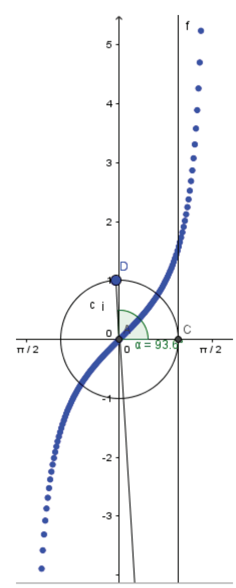
   a) Construye el ángulo θ. Entrada: **θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]**

   b) Nombra T al punto de construcción.
      En la barra de Entrada escribe T = (θ, y(Q)) y presiona Enter. Entrada: **T = (θ, y(Q))**

8. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Selecciona el punto T, clic derecho y clic en Rastro.
   c) Seleciona el punto P, clic derecho y luego iniciar Animación.







Actividades

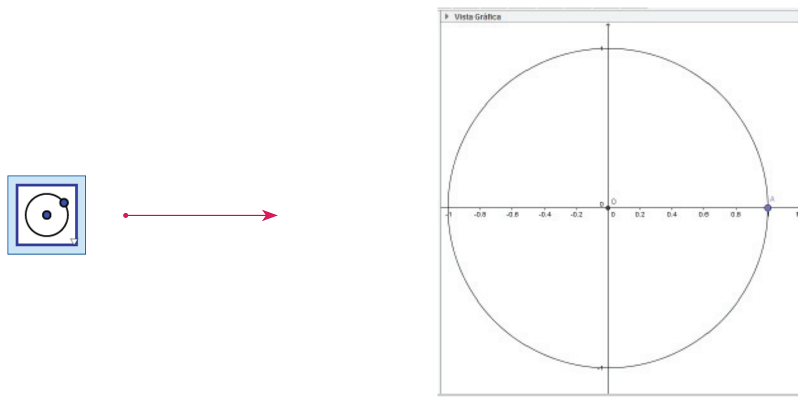
Construye la función cotangente a partir del círculo trigonométrico.

4.4 Práctica en GeoGebra: el método de exhaución

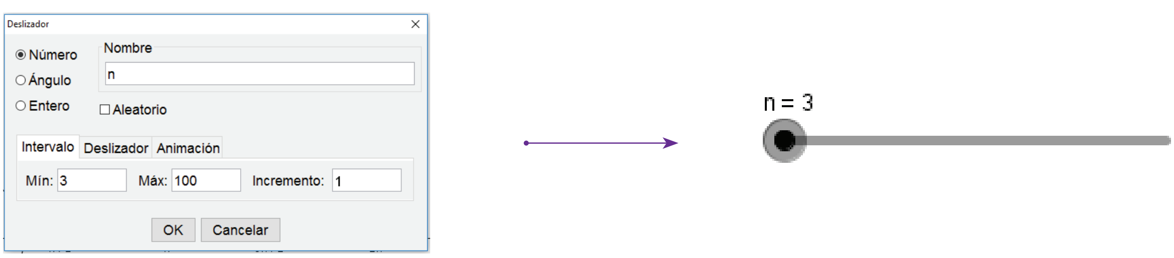
Se construirá un polígono inscrito en el círculo trigonométrico para observar la aproximación que tiene el área del polígono, a medida que sus lados aumentan, respecto al área del círculo.

Práctica

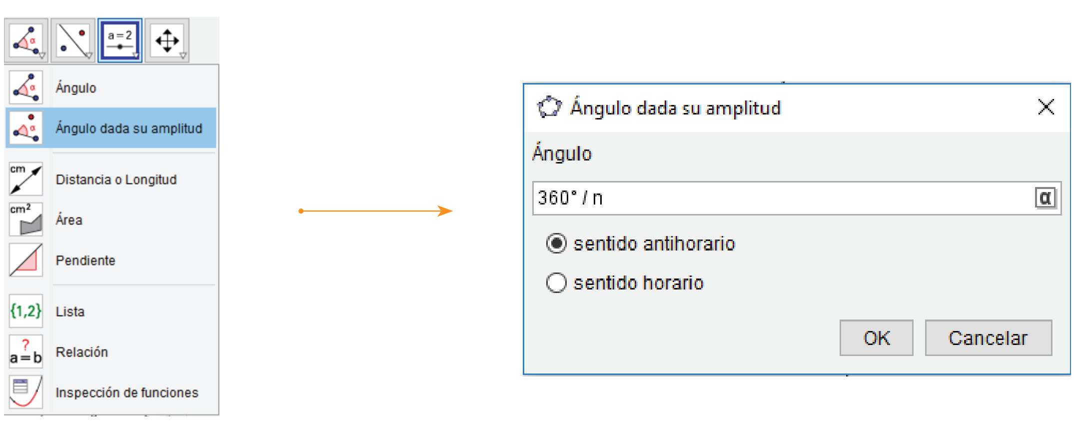
1. Construcción del círculo trigonométrico.
   El centro debe ser O(0, 0) y A(1, 0) el punto.



2. Construir un deslizador para el número de lados de un polígono regular con nombre n.
   Mínimo 3, máximo 100 e incremento 1.

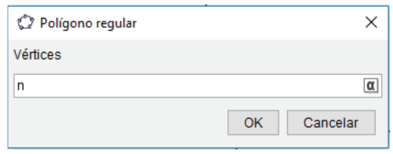


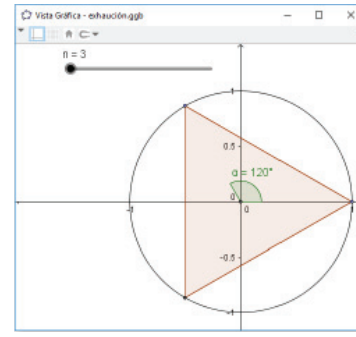
3. Construcción del ángulo central α dada su amplitud.
   a) Selecciona los puntos A, 0 y como amplitud 360° /n. Clic en OK.
   b) Aparecerá otro punto en el CT. Dar el nombre B.



4. Contrucción del polígono regular.
   a) Selecciona la opción Polígono regular y escoge los puntos A y B.

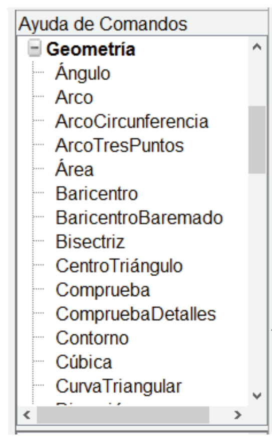
b) En el cuadro que aparecerá a continuación, escribe el número de vértices n.





Aparecerá automáticamente el valor del área del polígono construido.

5. Calcular el área del círculo, con el comando Área del bloque de Geometría. Observa cómo se aproxima el área del polígono regular a la del círculo a medida que se incrementa el número de lados.



6. Determinar los perímetros del polígono y de la circunferencia.

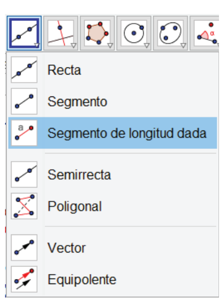
Perímetro del polígono — Entrada: **P=Perímetro[polígono1]**

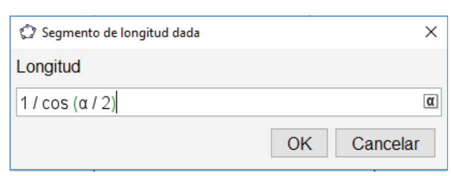
Perímetro de la circunferencia — Entrada: **C=Perímetro[c]**

7. Comparar los perímetros del polígono y la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono.

8. La constante π se define como el cociente del perímetro del círculo entre su radio. Utiliza la contrucción realizada para obtener una aproximación del valor de π.

9. Construcción de un polígono regular que circunscriba al Círculo trigonométrico. Construye un segmento OO_1 de longitud dada, con longitud $\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. El punto O_1 se debe colocar en el eje x.

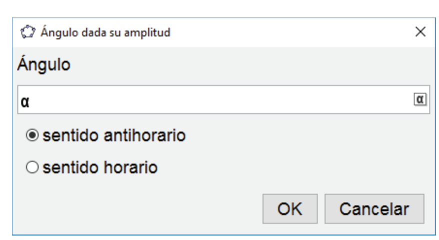




10. Construir el ángulo central β dada su amplitud.

a) Selecciona los puntos O_1, O y como amplitud α. Clic en OK.

b) Cambia el nombre al punto resultante por O_2.



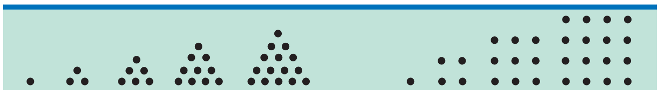
11. Construir el polígono regular utilizando los puntos O_1 y O_2. El número de lados debe ser n.

Actividades

Efectúa las 3 aproximaciones realizadas en los problemas anteriores (área, perímetro y el valor π) con el polígono construido en el numeral 10.

Unidad 6

Sucesiones aritméticas y geométricas



Números figurales (triangulares y cuadrangulares) de la época de los griegos.

Las sucesiones tanto aritméticas como geométricas han sido una temática que se ha desarrollado a lo largo de la historia sin definir un autor principal. Hay registros de diferentes culturas, por ejemplo en Babilonia, los créditos y los cálculos conllevaban de alguna manera una fórmula parecida al interés compuesto, lo cual requiere trabajo con sucesiones geométricas; los egipcios también trabajaron con la suma de sucesiones para expresar algunas fracciones; los griegos trabajaron con patrones y diseñaron números figurales como los que se observan en la primera imagen.

Una de las sucesiones más famosas e importantes es la sucesión de Fibonacci, la cual modela algunas formas de la naturaleza.

En el análisis de las sucesiones siempre está el análisis de patrones, los cuales han sido utilizados en diferentes áreas. En la actualidad se aplican fórmulas financieras, cuya base (en algunos casos) son las sucesiones geométricas, incluso algunos fenómenos de la naturaleza, como la reproducción de algunos seres vivos, pueden modelarse como sucesiones geométricas o aritméticas según la situación.

La unidad contiene un repaso sobre patrones, con el objetivo de identificar su secuencia y la forma en que se han generado para luego realizar un estudio generalizado. Luego se hará un estudio más amplio sobre las sucesiones aritméticas y geométricas, y se analizará la suma de los primeros n términos de una sucesión.

1.1 Patrones

Problema inicial

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina en la Figura 4 y la Figura 6 si la secuencia se va formando de igual manera.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7 si la secuencia se va formando de la misma manera?

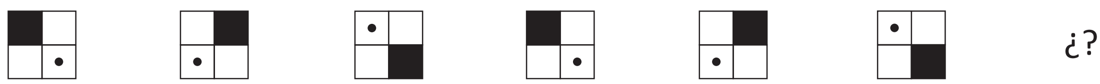


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	3	5	8	12	17	23	¿?
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7	Posición 8

Solución

a) Puede observarse que cada figura se obtiene agregando dos cuadrados a la figura anterior, acomodándolos en forma de L. Entonces, la Figura 4 y la Figura 6 son las que muestran las figuras de la derecha.

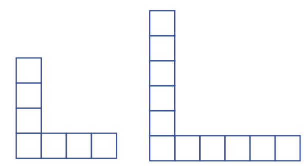


Figura 4 Figura 6

b) Si se considera que el cuadrado grande va rotando 90° en el sentido horario respecto a su centro, la Figura 2 se obtiene rotando una vez la Figura 1, la Figura 3 se obtiene rotando una vez la Figura 2, la Figura 4 se obtiene rotando dos veces la Figura 3, la Figura 5 se obtiene rotando una vez la Figura 4 y la Figura 6 se obtiene rotando una vez la Figura 5. Por lo tanto, la Figura 7 se obtiene rotando dos veces la Figura 6, por lo que la Figura 7 es .

c) Puede observarse que

$$2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+5} 17 \xrightarrow{+6} 23$$

2	3	5	8	12	17	23
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7

Entonces, el siguiente número deberá ser 23 + 7 = 30.

Para generar un número se suma el número anterior y su posición.

Conclusión

Un **patrón** matemático es una secuencia de números o figuras que satisfacen cierta regla y con la cual puede generarse cualquier elemento de la secuencia.

Problemas

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina las figuras 5, 6 y 7 que corresponden a la secuencia e identifica la regla que se ha utilizado para generarla.

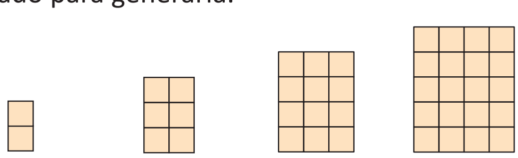


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7?

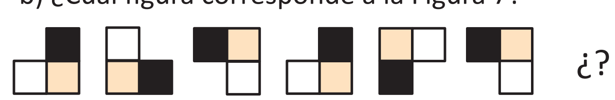


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	6	12	20	30	42	¿?

1.2 Patrones generalizados

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia:

3	6	9	12	15	18	21	¿?	¿?	...
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	

a) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la secuencia?
b) ¿Cuáles son los números que corresponden a las posiciones 8 y 9?
c) ¿Cuál sería el número correspondiente a la posición 20? ¿y a la posición 100?
d) ¿Cuál sería el número correspondiente a una posición cualquiera n?

Solución

a) Al observar la secuencia se puede determinar que todos los números son múltiplos de 3, por lo que la regla utilizada es multiplicar por 3 el número de posición en la que se encuentra.

b) Por el resultado del literal a, en las posiciones 8 y 9 corresponden los números 3(8) = 24 y 3(9) = 27.

c) Como el número se obtiene multiplicando la posición por 3, entonces 3(20) = 60 es el número que corresponde a la posición 20 y 3(100) = 300 es el número que corresponde a la posición 100.

d) El número que corresponderá a la posición n es $3n$.

La sucesión también puede generarse sumando 3 al número anterior.

Definición

A una secuencia de números que sigue cierta regla también se le conoce como **sucesión**. En una sucesión, sus elementos tienen un orden y habitualmente se denotan por a_n, donde n representa la posición que ocupa dicho elemento. Por ejemplo, en la sucesión del Problema inicial, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_7 = 21$, $a_n = 3n$.

A cada elemento de una sucesión se le llama **término** y al término que ocupa la n-ésima posición (con n un número natural) se le llama **término general**. Por ejemplo, $a_n = 3n$ es el término general del Problema inicial.

Una sucesión es **finita** si tiene una cantidad finita de elementos. Caso contrario, se dice que la sucesión es **infinita**.

Al escribir una sucesión se hace en orden, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ donde los puntos suspensivos indican que la sucesión sigue.

En algunas ocasiones no es posible encontrar el término general, en una forma simple, que describa una sucesión.

Ejemplo

Determina el término general de la siguiente sucesión y calcula los términos 20, 41 y 101.

$$-1, 2, -3, 4, -5, ...$$

Observa que la sucesión va alternando signo en sus términos, y en cada posición impar su signo es negativo y en cada posición par, su signo es positivo. Nota que esto puede escribirse como:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Además, los valores absolutos de los números que componen la sucesión son todos consecutivos y coinciden con su posición dentro de la sucesión, por lo tanto, el término general es $a_n = (-1)^n\, n$.

Por lo tanto, los términos 20, 41 y 101 son $a_{20} = (-1)^{20}\, 20 = 20$, $a_{41} = -41$, y $a_{101} = -101$.

Problemas

1. Para cada sucesión, encuentra el término general y los términos que se piden.
   a) 2, 4, 6, 8, ... ¿cuál es el término 42?
   b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... ¿cuál es el término 21?
   c) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿cuál es el término 11?
   d) 1, 8, 27, 64, 125, ... ¿cuál es el término 8?
   e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ ¿cuál es el término 954?
   f) 2, 0, 2, 0, 2, ... ¿cuál es el término 10?, ¿y el 55?

2. Enlista los primeros cinco términos de la sucesión que tiene término general a_n, en cada uno de los siguientes casos:

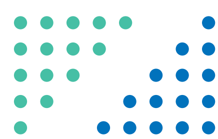
   a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = -n + 2$ d) $a_n = n^2 - 3$

3. Observa el siguiente proceso: sea T_5 el número de elementos de la Figura 5, en la siguiente sucesión:

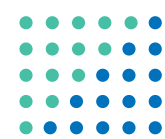
Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

- Se reordenan los elementos de la figura 5.

- Se duplica la figura.



- Se unen las dos figuras iguales formando un rectángulo de 5 × 6 elementos.



Por lo tanto, $2T_5 = 5(6)$.

Generaliza el proceso anterior para determinar el término general T_n de la sucesión.

Una de las sucesiones más famosas es la conocida Sucesión de Fibonacci.

Fibonacci fue un matemático italiano que nació en Pisa, alrededor de 1175. Su nombre verdadero era Leonardo de Pisa pero comúnmente se le conocía como Fibonacci, nombre que representa la versión corta de Filius Bonaccio, que significa hijo de Bonaccio.

La sucesión de Fibonacci es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...; es decir, los términos de la sucesión de Fibonacci pueden determinarse sumando los dos términos anteriores.

Esta sucesión tuvo su primera aparición cuando se planteó el problema que involucraba la reproducción de un par de conejos, con la hipótesis que estos eran inmortales, se volvían adultos al cabo de un mes, y que de cada pareja de conejos nacía una pareja de conejos (un macho y una hembra).

1.3 Sucesiones aritméticas: definición

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia y responde:

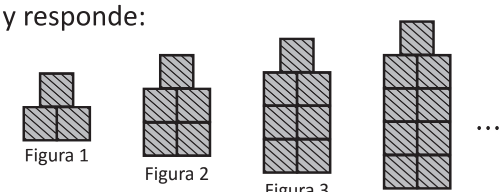


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

a) Enlista el número de elementos de los primeros 10 términos de la sucesión.
b) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la sucesión?
c) Si a un término se le resta su término anterior, ¿qué se puede observar si se hace en repetidas ocasiones?
d) Si sumas los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8 y así sucesivamente, ¿qué sucede?

Solución

a) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Número de elementos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) Si se observan las figuras, se han ido añadiendo dos cuadrados respecto a la figura anterior.

c) Al tomar un término y restarle su anterior se puede observar que el resultado siempre es el mismo cuando se hace varias veces. En este caso resulta ser 2.

$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$
$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$

d) Obsérvese que los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, y 5 y 6, a pares siempre están a una misma distancia de los extremos. Puede observarse que al sumar términos que están a igual distancia de los extremos, el resultado es siempre el mismo: 24.

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

11 + 13 = 24
9 + 15 = 24
7 + 17 = 24
5 + 19 = 24
3 + 21 = 24

Definición

A la sucesión donde sus términos pueden obtenerse sumando un mismo número al término anterior se llama **sucesión aritmética**.

Una sucesión aritmética tiene la propiedad que al restarle a un término su anterior siempre se obtendrá el mismo resultado. A este resultado se le llama **diferencia**.

Otra de las propiedades de una sucesión aritmética finita es que al sumar términos que están a una misma distancia de los extremos el resultado es el mismo.

Un detalle importante que hay que resaltar sobre las sucesiones aritméticas es que la diferencia puede ser un número cualquiera, esto es, puede ser un número entero, racional, decimal o irracional.

Problemas

Identifica si cada sucesión es una sucesión aritmética. En caso de serlo, determina su diferencia.

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ...
b) –3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, ...
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ...
d) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$
e) –4, –4, –4, –4, –4, –4, ...
f) 11, 7, 3, –1, –5, –9, ...

1.4 Sucesiones aritméticas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión aritmética del Problema inicial de la clase 1.3.

Solución

Obsérvese primero que si a_{n-1} es un término cualquiera, a_n es el término que le sigue. Como cada figura se obtiene sumando dos cuadrados a la figura anterior, se tiene que

$$\underbrace{5 = 3 + 2}_{a_2 = a_1 + 2},\quad \underbrace{7 = 5 + 2}_{a_3 = a_2 + 2},\quad \underbrace{9 = 7 + 2}_{a_4 = a_3 + 2},\quad \ldots \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Se tiene entonces que

$$a_2 = a_1 + 2,\quad a_3 = a_2 + 2,\quad a_4 = a_3 + 2,\quad a_5 = a_4 + 2, \ldots,\quad a_{n-2} = a_{n-3} + 2,\quad a_{n-1} = a_{n-2} + 2\ ,\quad a_n = a_{n-1} + 2$$

Se necesita encontrar una fórmula en términos de la posición que ocupa en la sucesión. Nótese entonces que,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + (2 + 2) \\ &= a_{n-3} + (2 + 2 + 2) \\ &= a_{n-4} + (2 + 2 + 2 + 2) \end{aligned}$$

Si se continúa de ese modo
$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) = (a_3 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) \\ &= a_3 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) = (a_2 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) \\ &= a_2 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) = (a_1 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) \\ &= a_1 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}) \end{aligned}$$

Observa que $4 = n - (n - 4)$.

Se tiene entonces que a_n es igual al primer término más $n - 1$ veces 2, es decir, el término general de la sucesión es $a_n = a_1 + 2(n - 1)$.

Conclusión

En una sucesión aritmética, si d es su diferencia, su término general está dado por $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Ejemplo

Calcula los términos 4, 12, 17 y 99 de la sucesión aritmética $a_n = -2 + 6(n - 1)$ y determina cuál es el término a_1 y su diferencia.

Para calcular los términos que se piden, se sustituye la n por la posición del término. Así,

$a_4 = -2 + 6(4 - 1) = -2 + 6(3) = -2 + 18 = 16$ $\qquad a_{12} = -2 + 6(12 - 1) = -2 + 6(11) = 64$

$a_{17} = -2 + 6(17 - 1) = -2 + 6(16) = 94$ $\qquad a_{99} = -2 + 6(99 - 1) = -2 + 6(98) = 586$

Además, $a_1 = -2$ y su diferencia es $d = 6$.

En muchas ocasiones, el término general de una sucesión aritmética se presenta en la forma $a_n = a_1 - d + dn$. Por ejemplo, $a_n = -2 + 6(n - 1)$ puede escribirse como $a_n = -8 + 6n$.

Problemas

1. Establece el término general de las sucesiones aritméticas de los problemas de la Clase 1.3.

2. Determina los términos 1, 7, 11, 20 y 100 de cada una de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$ b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$ c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$

d) $a_n = -4 - (n - 1)$ e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$ f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$

g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$ h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$ i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$

1.5 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1*

Problema inicial

Resuelve cada literal.

a) ¿Cuánto vale la suma 1 + 2 + 3 + ⋯ + 28 + 29 + 30? Busca una forma de calcularla sin sumar término a término.

b) Si se tienen los números 1, 2, 3, ..., $n - 3$, $n - 2$ y $n - 1$, ¿cuánto vale la suma de todos ellos?

c) ¿Cuánto vale la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $a_n = a_1 + d(n - 1)$?

d) En la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2n$, ¿cuánto vale la suma de los primeros 10 términos?

Para el literal a, considera también la suma 30 + 29 + 28 + ⋯ + 3 + 2 + 1.

Solución

a) Si se realiza la suma

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{28} & + & \boxed{29} & + & \boxed{30} \\ + & \boxed{30} & + & \boxed{29} & + & \boxed{28} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & 31 & + & 31 & + & 31 & + \cdots + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array} \quad \text{------------------ (1)}$$

el resultado es el mismo. En la suma 1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 hay 30 términos, por lo que en la suma (1) se está sumando 30 veces el número 31, por lo tanto es igual a 31(30).

Por otra parte, la suma en (1) se obtuvo sumando 1 + 2 + 3 + ⋯ + 28 + 29 + 30 dos veces, por lo que la suma pedida es igual a $\frac{31(30)}{2}$. Al simplificar, se obtiene

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\cancelto{15}{30})}{\cancelto{1}{2}} = 31(15) = 465.$$

Por lo tanto, 1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 465.

b) Si se utiliza la misma técnica utilizada en la parte a), se tendría

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{n-3} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-1} \\ + & \boxed{n-1} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-3} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & n & + & n & + & n & + \cdots + & n & + & n & + & n \end{array} \quad \text{------------------ (2)}$$

La suma en (2) tiene $n - 1$ términos, por lo que vale $n(n - 1)$. Pero nuevamente, se ha sumado dos veces $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1$, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) Se colocan los n términos en el nuevo orden

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 \overset{+d}{\frown} + \; a_2 \overset{+d}{\frown} + \; a_3 + \cdots + a_{n-2} \overset{+d}{\frown} + \; a_{n-1} \overset{+d}{\frown} + \; a_n \\ S_n = & a_n \overset{-d}{\frown} + \; a_{n-1} \overset{-d}{\frown} + \; a_{n-2} + \cdots + a_3 \overset{-d}{\frown} + \; a_2 \overset{-d}{\frown} + \; a_1 \\ \hline 2S_n = & (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

En el último renglón, todas las parejas tienen el mismo valor $a_1 + a_n$ porque en cada suma el primer sumando va aumentando por d y el segundo por $-d$.

Como hay n parejas se tiene $2S_n = n(a_1 + a_n)$. Por lo tanto $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Si se sustituye $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se tiene que $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d]$.

Unidad 6

d) Se quieren sumar 10 términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n$, entonces se calcula el primer y décimo término

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

Así, la suma de los 10 primeros términos es:

$$S_n = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

Definición

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una forma abreviada de escribir la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ y se lee "la sumatoria de a_i desde i igual 1 hasta i igual n".

Bajo esta notación, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2} n[2a_1 + d(n-1)];\text{ con } d \text{ la diferencia de la sucesión.}$$

A esta suma se le conoce como **suma parcial** de una sucesión o **serie**, que en este caso se trata de una sucesión aritmética.

El símbolo Σ es una letra griega que corresponde a la letra mayúscula sigma. Cuando se utiliza para representar una suma se hace referencia a él como "el símbolo de sumatoria".

Problemas

1. Para cada caso, calcula lo que se pide.
   a) La suma de los primeros 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$.
   b) La suma de los primeros 28 términos de la sucesión $a_n = 11 - (n - 1)$.
   c) La suma de los primeros 77 términos de la sucesión $a_n = -4 + 5(n - 1)$.
   d) La suma de los primeros 33 términos de la sucesión $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$.

2. Dos flechas se encuentran dentro de un triángulo y un pentágono de modo que apuntan a los vértices de estos. A continuación se muestran cuatro figuras de la secuencia en la que giran las flechas:

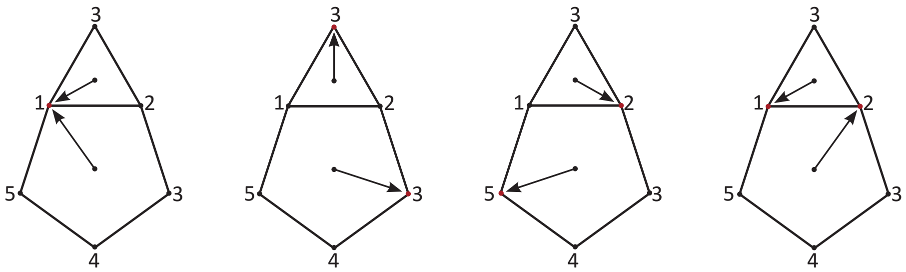


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Si las flechas siguen siempre el mismo movimiento, determina el número de figura en la cual las flechas habrán apuntado un mismo vértice por trigésima vez.

1.6 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ deben sumarse para obtener 1 845?

Solución

Como la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ se tiene que

$$a_n = 5 \text{ y } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\left[2(5) + 2(n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left[10 + 2(n-1)\right] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1\,845.$$

Se ha obtenido una ecuación de grado 2 donde la incógnita es n. Como se desea saber cuántos términos deben sumarse para obtener 1 845, hay que determinar las soluciones de dicha ecuación.

Resolviendo,

$$n(n+4) = 1\,845 \Rightarrow n^2 + 4n - 1\,845 = 0 \Rightarrow (n+45)(n-41) = 0.$$

De aquí se tiene que $n = -45$ o $n = 41$. Pero por ser n una posición de la sucesión, este no puede ser negativo, por lo tanto, se deben sumar 41 términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ para obtener 1 845.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética para obtener un resultado específico, debe resolverse la ecuación cuadrática que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina el número de términos que deben sumarse en cada sucesión aritmética para obtener el resultado indicado.

   a) $a_n = -1 + (n - 1)$; suma parcial 434

   b) $a_n = 3 + 4(n - 1)$; suma parcial 1 081

   c) $a_n = -3 + 3(n - 1)$; suma parcial 270

   d) $a_n = 5 - 2(n - 1)$; suma parcial -391

   e) $a_n = -4 - 7(n - 1)$; suma parcial -129

   f) $\sum_{i=1}^{n}\left[-100 + 4(i-1)\right] = 0$

   217 es múltiplo de 7.

   1 081 y 391 son múltiplos de 23.

2. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 1 064?

Carl Friedrich Gauss fue un matemático, físico, astrónomo y geodesta alemán, nació el 30 de abril de 1777 y falleció el 23 de febrero de 1855. Es considerado el príncipe de los matemáticos y desde sus años tempranos mostró extraordinarias pruebas de su habilidad mental. De niño, después de haberle preguntado a varios miembros de su familia sobre la pronunciación de las letras del alfabeto, aprendió a leer por su cuenta.

Gauss ingresó a la escuela cuando alcanzó los 7 años de edad, donde eventualmente se incorporó al curso de Aritmética, estudios en los cuales la mayoría de pupilos permanecían hasta los 15 años, que era la edad en la que terminaban sus estudios obligatorios. En dicho curso ocurrió un evento digno de mencionar, ya que fue de gran influencia para la futura vida de Gauss: en una ocación Büttner, el director de la escuela, quien también era su maestro de Aritmética, dió a la clase el ejercicio de escribir todos los números del 1 al 100 y sumarlos. El problema apenas había sido asignado, cuando Gauss puso la tableta donde escribía sobre la mesa y dijo: ¡Aquí está!, mientras los demás pupilos aún estaban calculando, multiplicando y sumando; en ese momento Büttner vió la tableta de Gauss y encontró escrito un solo número, que era la respuesta correcta.

Gauss estaba en posición de explicar al profesor cómo llegó a este resultado y dijo: "100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, etc., y así tenemos tantos pares como hay en 100. Así, la respuesta es 50 × 101, o 5 050".

Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathemathical Association of America.

Unidad 6

1.7 Sucesiones aritméticas: problemas

Problema inicial

Determina la diferencia de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 27 y cuyo quinto término es 35. Calcula el primer término y el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es la sucesión aritmética con diferencia d entonces $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

De los datos, se tiene que $a_3 = 27$ y $a_5 = 35$. Pero

$$a_3 = a_1 + d(3 - 1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5 - 1) = a_1 + 4d = 35.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 4$ en la primera ecuación $a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
Entonces, el primer término y el término general de la sucesión son

$$a_1 = 19 \text{ y } a_n = 19 + 4(n - 1) = 15 - 4n.$$

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión aritmética, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión aritmética y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión aritmética, para determinar el término general se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de aplicar la definición del término general en cada término conocido.

Problemas

1. El segundo término de una sucesión aritmética es 12 y el cuarto término es 22. Determina el término general de la sucesión.

2. El quinto término de una sucesión aritmética es –11 y el décimo primer término es –26. Calcula el séptimo término.

3. De una sucesión aritmética se sabe que $a_9 = -5$ y que $a_{15} = 31$. Calcula a_{20}.

4. El octavo término de una sucesión aritmética es 8 y el vigésimo es 44. Determina el término general de la sucesión.

5. Calcula la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética que tiene por séptimo término a –25 y cuyo noveno término es –35.

6. Se tiene que $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ y $a_7 = 34$. Determina el término general a_n de la sucesión aritmética.

7. Dada la sucesión aritmética $a_1 = 43$, $a_2 = 37$, ... , ¿cuál es el primer entero n tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$?

2.1 Sucesiones geométricas: definición*

Problema inicial

a) Si el área del cuadrado en la Figura 1 es 1, determina el área sombreada si cada cuadrado se ha dividido en cuatro cuadrados iguales.

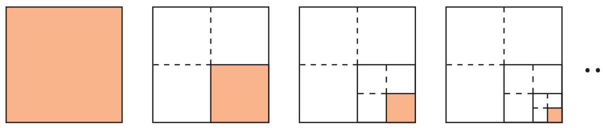


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Qué regla se puede establecer para encontrar el valor del área sombreada en cada figura?
c) De acuerdo al literal b), enlista los 7 primeros términos de la sucesión.
d) Si se divide un término entre su anterior, ¿qué se observa? Realiza este procedimiento al menos tres veces.

Solución

a) Si el área sombreada en la Figura 1 es 1, al haberse dividido en cuatro partes iguales, el área sombreada en la Figura 2 representa la cuarta parte respecto al área sombreada del cuadrado de la Figura 1, es decir, el área sombreada es igual a $\frac{1}{4}$.

De igual forma, el área sombreada en la Figura 3 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 2, por lo que el área sombreada es $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$.

Continuando con el mismo análisis, el área sombreada en la Figura 4 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 3, es decir que el área sombreada es $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$.

b) Para encontrar el área sombreada en una figura se puede dividir entre 4 el valor del área sombreada de la figura anterior.

c) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Valor del área	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,024}$	$\frac{1}{4\,096}$

d) Al dividir un término entre su anterior se tiene

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4\,096} \div \frac{1}{1\,024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

Se puede observar entonces que siempre se obtiene el mismo resultado: $\frac{1}{4}$.

Conclusión

Una sucesión donde sus términos pueden obtenerse multiplicando por un mismo número el término anterior se llama **sucesión geométrica**.

Una sucesión geométrica tiene la propiedad que al dividir un término entre su anterior, el resultado siempre es el mismo. A este resultado se le llama **razón**.

Problemas

Determina si las siguientes sucesiones son geométricas. En caso de serlo, especifica la razón.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, –6, 12, –24, 48, –96, ...
d) –1, –2, –4, –6, –8, –10, ...

2.2 Sucesiones geométricas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión geométrica de la clase 2.1.

Solución

Se sabe que si a_{n-1} es el término, $n - 1$, a_n es el siguiente término. Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene multiplicando por $\frac{1}{4}$ el término anterior, se tiene que

$$\underbrace{\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 1}_{a_2 = \frac{1}{4} \times a_1}, \quad \underbrace{\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{a_3 = \frac{1}{4} \times a_2}, \quad \underbrace{\frac{1}{64} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}}_{a_4 = \frac{1}{4} \times a_3}, \ldots, a_n = \frac{1}{4} \times a_{n-1}$$

Es decir,

$$a_2 = \frac{1}{4} \times a_1, \quad a_3 = \frac{1}{4} \times a_2, \quad a_4 = \frac{1}{4} \times a_3, \ldots, \quad a_{n-2} = \frac{1}{4} \times a_{n-3}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{4} \times a_{n-2}, \quad a_n = \frac{1}{4} \times a_{n-1}$$

Se desea encontrar una fórmula que describa la sucesión en términos de la posición que ocupa un elemento. Nótese que,

$$a_n = \frac{1}{4} \times a_{n-1} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times a_{n-2} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times a_{n-3} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times a_{n-4}$$

Si se continúa de ese modo,

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4}\right)}_{n-4} \times a_4 = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4}\right)}_{n-3} \times a_3 = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4}\right)}_{n-2} \times a_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4}\right)}_{n-1} \times a_1$$

Entonces, a_n es igual al primer término multiplicado por el producto de $n - 1$ veces la razón $\frac{1}{4}$; es decir, que el término general de la sucesión geométrica es $a_n = a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, donde $a_1 = 1$.

Conclusión

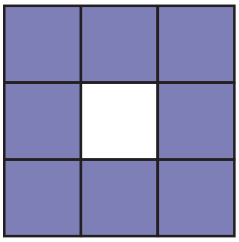
En una sucesión geométrica, si r es su razón, su término general está dado por $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Problemas

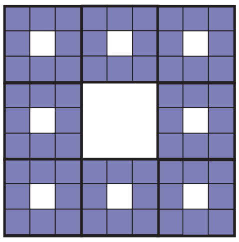
1. Establece el término general de las sucesiones geométricas del problema de la clase 2.1.

2. Observa el siguiente proceso:

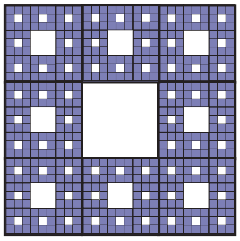
Paso 1. Se divide un cuadrado de lado 1 en 9 partes iguales y se quita el del centro.



Paso 2. De cada cuadrado que queda, se divide en 9 partes iguales y se quita el cuadrado del centro de cada uno de ellos.



Paso 3. Se realiza el mismo proceso con los cuadrados que quedan, dividiéndolos en 9 partes iguales y quitando el del medio.



Si se sigue de ese modo, determina el valor del área del cuadrado más pequeño en el que queda dividido el cuadrado inicial, después de haber realizado el proceso n veces. A esta figura se le conoce con el nombre de **Alfombra de Sierpinski**.

2.3 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1

Problema inicial

1. Sea S = $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$. Calcula el valor de S – rS y determina otra expresión para S.
2. Calcula la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión geométrica $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Solución

1. Se tiene que $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ se multiplica por r toda la expresión y se obtiene $rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$.

   Si se resta rS de S se obtiene

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \quad \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

   Por lo que $S(1 - r) = 1 - r^n$. Si $r \neq 1$, se despeja S y se tiene que $S = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

   Es decir, si $r \neq 1$, $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Si $r = 1$ la suma significa sumar n veces 1 por lo que $S = n$.

2. Al enlistar los primeros n términos de la sucesión

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2a_1,\ a_4 = r^3a_1,\ \dots,\ a_{n-2} = r^{n-3}a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2}a_1,\ a_n = r^{n-1}a_1.$$

   Y calcular la suma

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \dots + r^{n-3}a_1 + r^{n-2}a_1 + r^{n-1}a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

   Si $r = 1$, entonces la suma es na_1.

3. Utilizando el resultado de 2, como se quiere calcular la suma de los primeros 5 términos, $n = 5$, además $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{4}$, entonces la suma buscada es

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

La fracción compleja se calcula como

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Conclusión

La suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, escrita con el símbolo de sumatoria, está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) & \text{si } r \neq 1 \\ na_1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Problemas

1. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 15(2)^{n-1}$.
2. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \dots$
4. Calcula la suma $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$ hasta el término 5. Deja expresado con exponentes.

Puede utilizarse la calculadora cuando hay que efectuar potencias grandes. También es recomendable dejar la respuesta expresada en fracción y no aproximar.

Unidad 6

2.4 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y razón -4 deben sumarse para obtener 102.5?

Solución

Se sabe que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n - 1}{-4-1}\right) = 102.5.$

Entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}[1-(-4)^n] = 102.5$$
$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1\,025$$
$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1\,024 \qquad \text{------------------ (1)}$$

Un primer análisis que puede hacerse es que, se tiene la potencia de un número negativo y este resulta ser negativo, por lo tanto, n debe ser impar. Como n es impar, $(-4)^n = -4^n$, por lo que resolver (1) es equivalente a resolver $4^n = 1\,024$.

Se escribe 1 024 como potencia de 4: $1\,024 = 4^5$. Al sustituir se obtiene $4^n = 4^5$. Entonces $n = 5$.

Por lo tanto, deben sumarse los primeros 5 términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ para obtener 102.5.

Conclusión

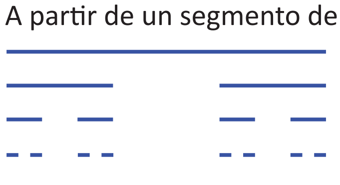
Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener un resultado específico debe resolverse la ecuación exponencial que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina cuántos términos deben sumarse de cada sucesión para obtener el resultado indicado
   a) 1, 2, 4, 8, 16, ..., suma parcial 511
   b) 2, 6, 18, 54, ..., suma parcial 2 186
   c) 4, –20, 100, – 500, ..., suma parcial –10 416
   d) $a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$, suma parcial $\frac{127}{3}$
   e) $a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$, suma parcial $-\frac{364}{3}$
   f) $a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$, suma parcial $\frac{6\,303}{2\,401}$

2. Determina los posibles valores que pueden obtenerse al calcular una suma parcial de la sucesión 1, –1, 1, –1, 1, ...

3. A partir de un segmento de longitud 1 se construye la siguiente sucesión:



Paso 1. Se divide el segmento en tres partes iguales y se extrae el segmento del medio. Se tienen dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$.
Paso 2. Luego se dividen los otros dos segmentos en tres partes iguales y se extraen los segmentos del medio. Se tienen cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{9}$.

Si se continúa este proceso, responde:
a) En el paso n, ¿cuántos segmentos se han extraído?
b) ¿Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen en el paso 10?
c) ¿En qué paso la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen es menor a 0.1?

2.5 Sucesiones geométricas: problemas

Problema inicial

El tercer término de una sucesión geométrica es 20 y el octavo término es –640. Determina el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es el término general de la sucesión geométrica y r su razón entonces $a_n = a_1r^{n-1}$.

Se sabe que $a_3 = 20$ y $a_8 = -640$. Pero $a_3 = a_1r^2 = 20$ y $a_8 = a_1r^7 = -640$. Si se divide a_8 entre a_3 se tiene

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1r^7}{a_1r^2} = r^5 = \frac{-640}{20} = -32.$$

De $r^5 = -32$ puede deducirse que $r = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$.

Falta calcular el primer término de la sucesión, y para ello se toma a_3 o a_8 y se utiliza el hecho que $r = -2$.

$$a_3 = a_1(-2)^2 = 4a_1 = 20 \ \Rightarrow \ a_1 = 5.$$

Por lo tanto, $a_n = 5(-2)^{n-1}$.

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión geométrica, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión geométrica y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión geométrica, para determinar el término general se dividen ambos términos y se resuelve la ecuación que resulta. En este caso, la ecuación es de la forma $r^n = c$, por lo que hay que calcular un número r tal que al elevarlo a la potencia n resulte el número c.

Problemas

1. El cuarto término de una sucesión geométrica es 1 y el séptimo término es $\frac{1}{8}$. Determina el término general y el quinto término.

2. El primer término de una sucesión geométrica es 3 y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Determina el término general y el cuarto término.

   Hay dos posibles soluciones.

3. En una sucesión geométrica, el quinto término es 48 y el octavo es 384. Determina el décimo segundo término.

4. ¿Qué término de la sucesión geométrica 2, 6, 18, ... es 13 122?

5. El segundo y quinto término de una sucesión geométrica son 10 y 1 250, respectivamente. ¿Es 31 250 un término de esta sucesión? Si es así, ¿qué término es?

6. Calcula la suma parcial de los primeros 6 términos de la sucesión geométrica cuyo tercer término es 28 y su sexto término es 224.

2.6 Practica lo aprendido

1. Determina el término general de la sucesión 1, 4, 7, 10, ...

2. Calcula el término 30 de la sucesión aritmética que tiene primer término 2 y diferencia 3.

3. ¿Cuál es el primer término de una sucesión aritmética a_n tal que $a_{50} = 29$ y $d = -3$?

4. Calcula la suma de los primeros 17 términos de $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n - 1)$.

5. Calcula la suma de los primeros 12 términos de $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}n$.

6. Calcula la suma $5 + 9 + 13 + \cdots + 401$.

7. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión –9, –6, –3, ... para obtener 66?

8. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión 26, 21, 16, ... para obtener 74?

9. Calcula el término 6 de la sucesión 3, 6, 12, 24, ...

10. El término 7 de una sucesión geométrica es 192 y su razón es 2. Calcula los primeros cuatro términos de la sucesión.

11. En una sucesión geométrica se tiene que $a_8 = 16$, $r = -4$. Determina el valor de a_{12}.

12. Calcula la suma $3 + 6 + 12 + \cdots + 6\,144$.

13. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$ para obtener 2 049?

14. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión del problema 11 para obtener $-\frac{3\,277}{1\,024}$?

2.7 Problemas de la unidad

1. Los ángulos internos de un triángulo están en sucesión aritmética con diferencia 10°. ¿Cuánto mide cada ángulo?

2. El cuarto término de una sucesión aritmética es 10 y el sexto término es 16. Determina una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.

3. El quinto término de una sucesión aritmética es 17 y su diferencia es 2. Determina la suma de los primeros 11 términos de la sucesión.

4. Si el término 6 de una sucesión aritmética es 8 y el término 11 es –2, ¿cuál es el primer término?, ¿cuál es la diferencia?

5. ¿Cuántos términos de la sucesión 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 290?

6. Una deuda puede ser pagada en 32 semanas pagando \$5 la primera semana, \$8 la segunda semana, \$11 la tercera, y así sucesivamente. Hallar la cantidad de dinero que se debe.

7. Sean a y b las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + A = 0$, y sean c y d las soluciones de la ecuación $x^2 - 12x + B = 0$. Se sabe que a, b, c y d forman, en ese orden, una sucesión geométrica. Determina los valores de A y B.

Métodos de conteo

Unidad 7

Los métodos de conteo surgen como una necesidad para analizar y comprender matemáticamente juegos de azar (comprender la suerte), históricamente esta teoría surge de las formas de entretenimiento de la alta sociedad que existían en Francia, hacia el siglo XVII aproximadamente, las cuales consistían en participar en juegos que incluían lanzamientos de dados, monedas, extracción de objetos, cartas, etc., es por ello que para establecer matemáticamente el fenómeno de la suerte, surgen los métodos de conteo empleados y descubiertos por los matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat, quienes aplicaron estos métodos para comprender y analizar las decisiones más favorables para los jugadores, a modo de tener más éxito basando las decisiones en conceptos matemáticos.

Baraja francesa del siglo XVI aproximadamente.

Además del surgimiento histórico para resolver una situación de la vida cotidiana, estos conceptos después de su estudio a lo largo de los siglos más recientes, se han desarrollado a tal punto de ser aplicados a ramas tecnológicas como la computación, para el cifrado de información, y continúa siendo una herramienta para el análisis y creación de juegos de azar y concursos donde en muchas ocasiones, más que la suerte, juega la matemática.

A continuación se estudiarán algunos contenidos como el diagrama de árbol, a partir de ello se introducirán algunos principios básicos de conteo, luego se hará un estudio más amplio sobre las permutaciones, las combinaciones y las aplicaciones del conteo a situaciones específicas.

1.1 Teoría de conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos que pueden ser números, letras, personas, y prácticamente cualquier tipo de cosas. Cada objeto del conjunto recibe el nombre de **elemento**. Si a es un elemento de A, se denota por $a \in$ A o A $\ni a$, y se lee "a pertenece a A" o "A contiene al elemento a". La cantidad de elementos que tiene un conjunto se conoce como **cardinalidad del conjunto** y dado un conjunto A se denota la cardinalidad de A por n(A) (o en ocasiones como|A|). Un conjunto se denota encerrando entre "llaves" todos los elementos del conjunto. Si los elementos están expresados en forma de lista, se dice que el conjunto está expresado por **extensión**, por ejemplo: A = {1, 2, 3, a, b, c}.

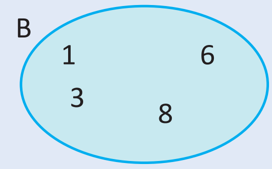
Si los elementos están expresados por una regla o característica de todos los elementos, se dice que el conjunto está expresado por **comprensión**, por ejemplo:

{x| x es un número positivo menor que 6}.

El conjunto se lee: los x tal que x es un número positivo menor que 6.

Se entiende como el conjunto formado por los "x" tal que (o de modo que) dicho "x" cumple ser un número positivo menor que 6.

Para representar gráficamente un conjunto a menudo se utiliza un óvalo en cuyo interior se ubican todos los elementos del conjunto, esta representación se conoce como **diagrama de Venn**, por ejemplo el conjunto B = {1, 3, 6, 8} se puede representar en un diagrama de Venn así:



Ejemplo 1

Determina la cardinalidad del conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10} y si es posible, expresa el conjunto por comprensión.
La cardinalidad de A es: n(A) = 5.
Se puede expresar por comprensión como: A = {x| x es un número positivo par no mayor que 10}.
También se puede expresar como A = {Los números positivos pares no mayores que 10}.

Ejemplo 2

Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.

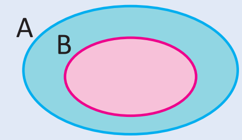
a) A = {Los números positivos impares menores a 8}
b) B = {x| x = 2n, para n en los números naturales}

a) A = {1, 3, 5, 7} y n(A) = 4.
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} y n(A) = ∞.

Para denotar conjuntos cuyos elementos siguen un patrón pero no terminan, se pueden utilizar puntos suspensivos, como en el literal b, y en este caso la cardinalidad del conjunto se denota por infinito, ∞.

Definición

Un conjunto B es **subconjunto** de un conjunto A si se cumple que todo elemento de B es elemento de A (Si $a \in$ B entonces $a \in$ A), y se denota por B ⊂ A o A ⊃ B, que se lee "B incluido en A" o "A incluye a B".



Por ejemplo, si A = {2, 3, 5, 8, 9} y B = {2, 5}, entonces B ⊂ A.

El conjunto que no posee elementos se conoce como **conjunto vacío**, se denota por ∅, y se cumple que n(∅) = 0. Para todo conjunto A se cumple que ∅ ⊂ A.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se conoce como **conjunto potencia de A**. Si A = {a, b, c} , entonces el conjunto potencia de A es {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

1.2 Operaciones con conjuntos

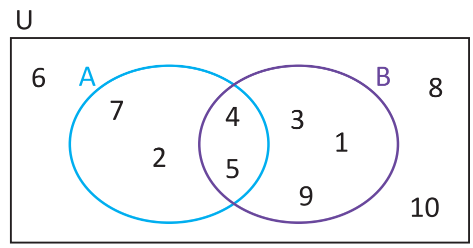
Problema inicial

Considerando los conjuntos A = {2, 4, 5, 7} y B = {1, 3, 4, 5, 9}.

a) Determina el conjunto de los elementos que están en A o en B.
b) Determina el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.
c) Determina el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B.
d) Considerando U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Determina el conjunto de los elementos que están en U pero no están en A.

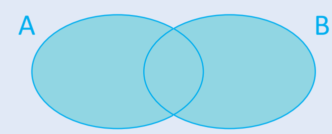
Solución

a) El conjunto es: {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) El conjunto es: {4, 5}.
c) El conjunto es: {2, 7}.
d) El conjunto es: {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

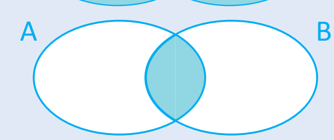


Definición

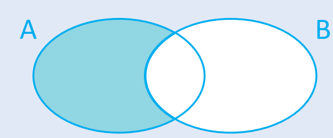
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A o en B se conoce como **unión de conjuntos**, se denota A⋃B, y se lee "A unido B".



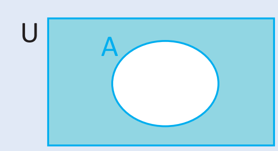
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B se conoce como **intersección de conjuntos**, se denota A⋂B, y se lee "A intersectado B".



La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B se conoce como **diferencia de conjuntos**, y se denota A – B.



La operación entre dos conjuntos A y U que cumplen que A ⊂ U y toma los elementos de U que no están en A se conoce como **complemento** del conjunto A, y se denota A^c. Al conjunto U a menudo se le conoce como **conjunto universo** o simplemente **universo**.

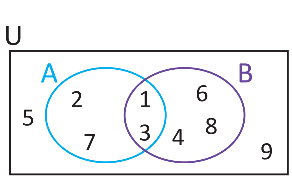


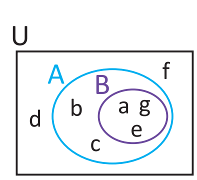
Problemas

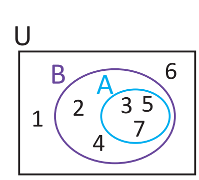
1. Para cada literal, determina los conjuntos A⋃B, A⋂B, A – B y B – A.

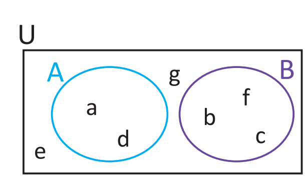
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {–2, 0, 1, 4, 7}, B = {–2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2. Para cada diagrama de Venn, determina los conjuntos A, B, A⋃B, A⋂B, A – B, B – A, A^c y B^c .

a) 

b) 

c) 

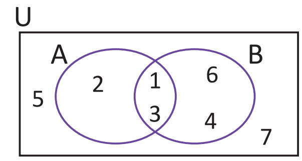
d) 

1.3 Cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los conjuntos A y B representados por el diagrama de Venn de la derecha, resuelve:

a) ¿Cuántos elementos tiene A?
b) ¿Cuántos elementos tiene B?
c) ¿Cuántos elementos tiene A⋂B?
d) ¿Cuántos elementos tiene A⋃B?
e) ¿Cuántos elementos tiene A^c?



Solución

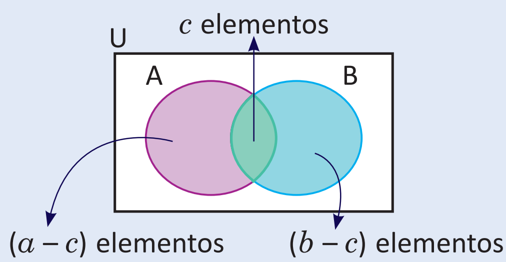
El conjunto universo es: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a) Identificando el conjunto A = {1, 2, 3}, entonces el número de elementos de A será: n(A) = 3.
b) Identificando el conjunto B = {1, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de B será: n(B) = 4.
c) Identificando el conjunto A⋂B = {1, 3}, entonces el número de elementos de A⋂B será: n(A⋂B) = 2.
d) Identificando el conjunto A⋃B = {1, 2, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de A⋃B será: n(A⋃B) = 5.
e) Identificando el conjunto A^c = {4, 5, 6, 7}, entonces el número de elementos de A^c será: $n(A^c) = 4$.

En general

Considerando los conjuntos A y B de modo que $n(A) = a$, $n(B) = b$ y $n(A\cap B) = c$, entonces se cumple que

$$n(A\cup B) = (a-c) + (b-c) + c$$
$$= a + b - c.$$

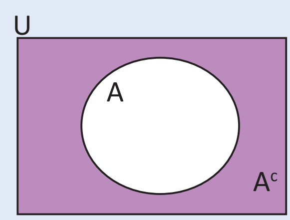


Y esto es equivalente a tener:

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B).$$

De forma parecida analizando A^c como los elementos de U que no están en A se puede concluir que

$$n(A^c) = n(U) - n(A).$$



En general, para los conjuntos U, A y B se cumple que

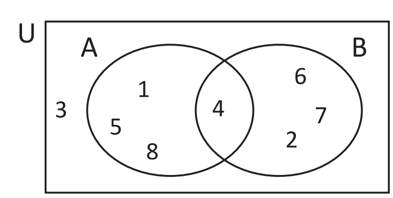
$$\boldsymbol{n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B),}$$
$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A).}$$

Problemas

1. Considerando el diagrama de Venn de la derecha, resuelve los literales.

a) $n(A\cup B)$ b) $n(U)$ c) $n(A^c)$ d) $n(B^c)$
e) $n[(A\cup B)^c]$ f) $n(A^c\cap B^c)$ g) $n[(A\cap B)^c]$ h) $n(A^c\cup B^c)$

Utilizando diagramas de Venn puedes comprobar que $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ y $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$. Estas propiedades se conocen como **identidades de De Morgan**.



2. Considerando los conjuntos U, A y B en los que se cumple que $n(U) = 60$, $n(A) = 35$, $n(B) = 21$ y $n(A\cap B) = 14$, determina:

a) $n(A\cup B)$ b) $n(A^c)$ c) $n(B^c)$ d) $n[(A\cup B)^c]$ e) $n[(A\cap B)^c]$ f) $n(A - B)$ g) $n(A\cap B^c)$

1.4 Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:

a) ¿Cuántos múltiplos de 3 hay?

b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?

c) ¿Cuántos múltiplos tanto de 3 como de 5 hay?

d) ¿Cuántos múltiplos de 3 o de 5 hay?

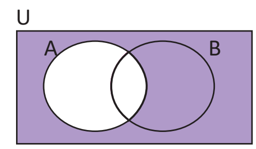
Solución

Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 3 y como B al conjunto de los múltiplos de 5 que están en U.

A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) La cantidad de múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(A) = 33$.



b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de A, es decir:

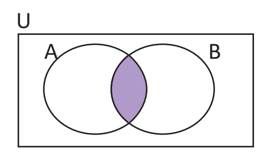
$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67.$$

c) El conjunto formado por los múltiplos de 3 y de 5 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 15 que hay entre 1 y 100.

$A \cap B = \{15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)\}$.

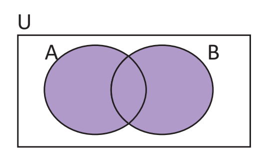
Entonces $n(A \cap B) = 6$.

Los múltiplos comunes de 3 y 5 son los múltiplos del mínimo común múltiplo de ellos, es decir, 15.



d) El conjunto formado por los múltiplos de 3 o de 5 está dado por el conjunto $A \cup B$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$.



Conclusión

La teoría de conjuntos puede resultar muy útil para realizar conteo de situaciones que se modelan a partir de conjuntos.

Problemas

1. Determina cuántos números del 1 al 100 no son múltiplos de 3 ni de 5. Luego realiza el diagrama de Venn que representa dicha situación.

2. Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:
   a) ¿Cuántos múltiplos de 2 hay?
   b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?
   c) ¿Cuántos múltiplos de 2 y de 3 hay?
   d) ¿Cuántos múltiplos de 2 o de 3 hay?
   e) ¿Cuántos números que no son múltiplos de 2 ni de 3 hay?

3. La tabla muestra la cardinalidad de la intersección de los conjuntos de la fila y de la columna. Considerando los conjuntos A y B, llena la tabla con la información que falta:

	A	A^c	Total
B	42		56
B^c		10	
Total	76		100

2.1 Diagrama de árbol

Problema inicial

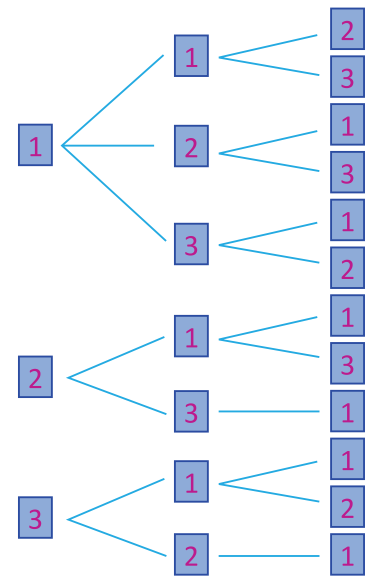
Hay 4 tarjetas numeradas de la siguiente manera $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$; determina de cuántas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución

Analizando la posición de las tarjetas como muestra el diagrama de la derecha.

A partir de él se puede observar que cada camino que se pueda tomar es una forma en que se pueden colocar las tres cartas, y estas se pueden contar a partir de la última columna de tarjetas numeradas.

Por lo tanto hay 12 formas.



Definición

El diagrama en donde se listan todas las posibilidades de un suceso por casos y se representa por líneas rectas se conoce como **diagrama de árbol**, el diagrama de la solución es un ejemplo de diagrama de árbol.

En los eventos sobre extracción de objetos, se dice que es **con reemplazo** cuando al extraer un objeto este se devuelve al grupo de extracción, y **sin reemplazo** cuando el objeto no se devuelve.

Problemas

1. Utiliza un diagrama de árbol para determinar de cuántas formas se pueden extraer sin reemplazo 3 bolitas de color rojo, amarillo y verde (una de cada color) de una bolsa, si se extrae una bolita a la vez.

2. Utiliza un diagrama de árbol para calcular cuántas formas hay para repartir 4 dulces de diferente sabor entre 4 personas, si ninguna puede quedar sin dulces.

3. María tiene 2 pantalones, 1 falda, 2 blusas y 3 pares de zapatos, todos diferentes. Utiliza diagrama de árbol para determinar cuántas formas diferentes tiene María para vestirse.

4. Utiliza un diagrama de árbol para calcular el total de maneras que hay para extraer 2 cartas con reemplazo de entre 5 cartas diferentes.

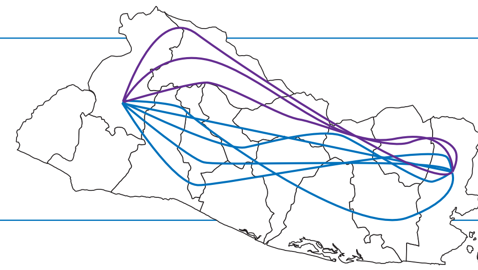
5. Se lanzan tres dados diferentes. Determina el número de casos donde la suma sea 5.

En el primer dado solo puede caer 1, 2 o 3, sino ya no podría sumar 5.

2.2 Principio de la suma

Problema inicial

¿De cuántas maneras se puede viajar de Santa Ana a La Unión, si pasando por San Salvador hay 5 caminos diferentes y pasando por Chalatenango hay 3 formas diferentes? Considera que ningún camino pasa por ambos lugares.



Solución

Para viajar de Santa Ana a La Unión hay 2 opciones: pasar por San Salvador o bien pasar por Chalatenango, y ninguna ruta pasa por ambos lugares a la vez. De forma que para saber el total de maneras que hay para ir de Santa Ana a La Unión es 5 + 3 = 8.

Conclusión

Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, y ambos eventos no ocurren al mismo tiempo, entonces el total de maneras en que puede ocurrir el evento A o B (es decir uno de los dos) es $a + b$. Este resultado se conoce como **principio de la suma**.

Ejemplo

En una zapatería tienen 4 tipos de sandalias, 2 tipos de zapatillas y 3 tipos de botas, ¿cuántos tipos de zapatos diferentes ofrece la zapatería?

La zapatería ofrece 3 tipos de zapatos: sandalias, de las cuales hay 4 tipos diferentes; zapatillas, de las cuales hay 2 tipos diferentes; y botas, de las cuales hay 3 tipos de botas diferentes.

Así se cumple que la zapatería ofrece 4 + 2 + 3 = 9 tipos de zapatos diferentes.

Problemas

1. En una zona de comedores hay 3 locales en donde se puede comprar, si el primero tiene 4 opciones de comida, el segundo 5 y el tercero 7, determina de cuántas formas se puede comprar comida en alguno de los locales.

2. María tiene 4 centros escolares para realizar sus horas sociales, en el primer centro escolar tiene 2 opciones, en el segundo tiene 3 opciones, en el tercero tiene 4 opciones y en el cuarto solamente una opción para realizar las horas sociales. Determina cuántas opciones tiene en total María para realizar sus horas sociales.

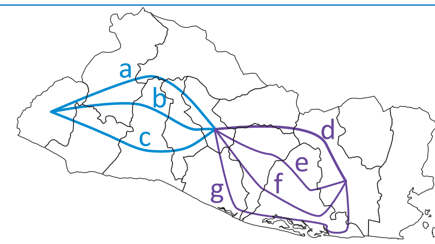
3. Determina cuántas maneras hay para que al lanzar 2 dados al mismo tiempo, la suma de los puntos sea 7 o 4.

4. En la situación del problema 3, determina cuántas maneras hay para que la diferencia de los puntos sea 2 o 3.

2.3 Principio de la multiplicación

Problema inicial

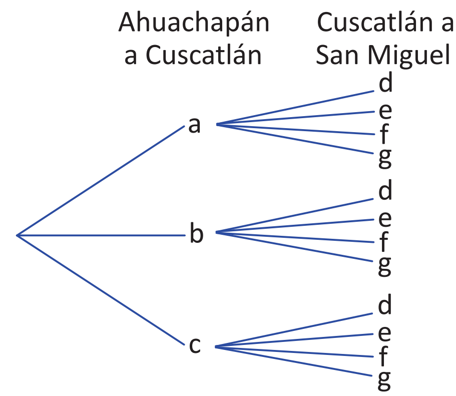
¿De cuántas maneras se puede viajar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán, si para llegar de Ahuachapán a Cuscatlán hay 3 formas diferentes de llegar a, b y c, y para llegar de Cuscatlán a San Miguel hay 4 formas diferentes para llegar d, e, f y g?



Solución

Para salir de Ahuachapán a Cuscatlán existen 3 formas diferentes, y por cada una de ella al llegar a Cuscatlán hay 4 formas diferentes de llegar a San Miguel, entonces el total de maneras para llegar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán es 3 × 4 = 12 maneras diferentes.

Las 12 maneras son: ad, ae, af, ag, bd, be, bf, bg, cd, ce, cf, cg.



Conclusión

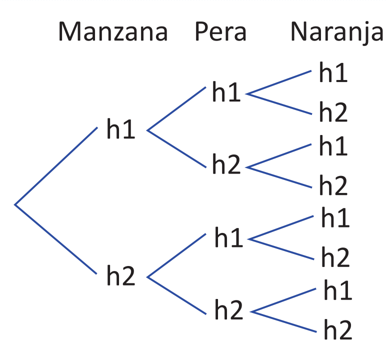
Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, y para cada una de estas maneras un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, entonces el total de formas en que puede ocurrir el evento A y el evento B (es decir los dos) es ab. Este resultado se conoce como **principio de la multiplicación**.

Es posible que para resolver algunos problemas sea necesario aplicar tanto el principio de la suma como el principio de la multiplicación.

Ejemplo

José quiere repartir una manzana, una pera y una naranja a sus dos hermanos. Determina de cuántas maneras puede repartir las frutas si incluso puede darse el caso que le dé a un hermano todo y al otro nada.

Tomando como referencia la fruta, para cada una de estas, la manzana tiene 2 posibilidades: que se dé al hermano 1 o al hermano 2; luego, la pera también tiene 2 posibilidades, y la naranja igualmente tiene 2 posibilidades, entonces José puede repartir la fruta de 2 × 2 × 2 = 8 maneras diferentes.



Problemas

1. Determina de cuántas maneras se puede formar una pareja de un niño y una niña de entre 4 niños y 3 niñas.

2. En un comedor hay 3 tipos de platos fuertes, 2 tipos de arroz y 3 tipos de ensalada. Determina de cuántas maneras se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada.

3. Determina de cuántas maneras se pueden repartir una pera y un mango entre 3 personas diferentes. Considera que no se pueden dar ambas frutas a una sola persona.

4. María tiene 4 calzonetas y 3 camisetas para baloncesto, y tiene 5 calzonetas y 4 camisetas para fútbol. ¿De cuántas maneras puede vestirse María para jugar baloncesto o fútbol?

2.4 Factorial de un número

Problema inicial

Determina de cuántas maneras es posible arreglar 4 personas en una fila.

Solución

En la primera posición de la fila puede colocarse cualquiera de las 4 personas, entonces hay 4 posibilidades.

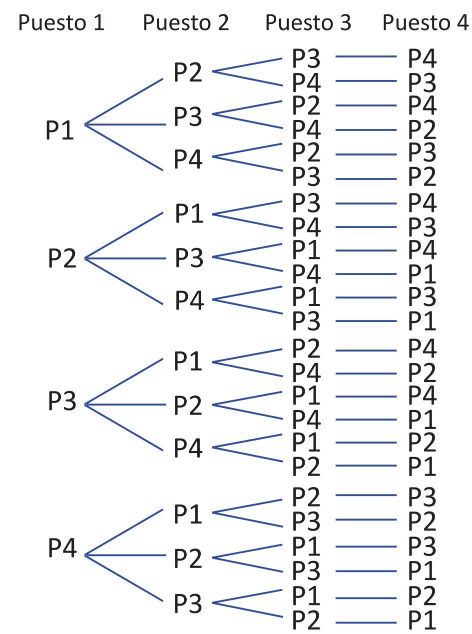
Luego, en la segunda posición de la fila ya solo se tienen 3 personas (porque en la primera posición ya quedó una) entonces hay 3 posibilidades.

Análogamente, para la tercera posición solo hay 2 posibilidades y para la última posición solo habrá 1 posibilidad.

Por lo tanto, por principio de la multiplicación, el total de maneras de arreglar 4 personas en una fila es:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Hay 24 maneras diferentes para arreglar 4 personas en una fila.



Definición

Para un número natural n, se define el **factorial de n** como el producto de los números consecutivos desde 1 hasta n. Se denota el factorial de n por $n!$, y se lee "n factorial". Entonces:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Observa que $n! = n \times (n-1)!$

Ejemplo

Calcula o simplifica el resultado de las operaciones con factorial.

a) $3!$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

b) $6! \div 4!$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$$

c) $4! - 3!$

$$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3! = 3!(4-1) = 6(3) = 18$$

Primero calcula lo que está entre paréntesis.

d) $\frac{2\,018!}{2\,018}$

$$\frac{2\,018!}{2\,018} = \frac{\cancel{2\,018} \times 2\,017!}{\cancel{2\,018}} = 2\,017!$$

Problemas

1. Calcula el resultado de las operaciones con factorial.

a) $4!$ b) $5!$ c) $(5-3)!$ d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$ f) $4! + 3!$ g) $4! \times 3!$ h) $(2 \times 3)!$

2. Calcula o simplifica las siguientes expresiones con factoriales.

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$ c) $\frac{4!}{6}$ d) $\frac{2\,019!}{2\,019}$ e) $\frac{7!}{(7-2)!}$ f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$ g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. Determina el valor de x.

a) $x! = 110(x-2)!$ b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

Unidad 7

2.5 Permutaciones

Problema inicial

Determina la cantidad de maneras en que se puede colocar 3 vocales diferentes en una fila.

Solución

Se pueden considerar los 3 puestos de la siguiente manera.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Para elegir la vocal que estará en el primer puesto hay 5 posibilidades (cualquiera de las 5 vocales, a, e, i, o, u).

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Luego para el segundo y tercer puesto quedarán únicamente 4 y 3 posibilidades respectivamente.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{\ 4\ }} \times \underset{\text{Tercero}}{\underline{\ 3\ }}$$

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de colocar 3 de las 5 vocales en una fila es: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Conclusión

Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como **permutación**.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando r de n ($0 \leq r \leq n$) está dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Observa que $n\text{P}0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

Este total se denota por $n\text{P}r$, y se lee "n permuto r", es decir

$$n\text{P}r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}_{r\ \text{factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

El total de maneras de ordenar n objetos diferentes es $n!$, por otro lado, con la fórmula de permutaciones se tiene que $n\text{P}n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$, y esto debe ser $n!$, por lo tanto se cumple que $0! = 1$.

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9, si no se repite ningún dígito?

Al tomar 3 cifras, es importante el orden entre ellas (forman números diferentes), entonces considerando la permutación tomando 3 de 9 objetos, $9\text{P}3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$. Por lo tanto, se pueden formar 504 números.

$$9\text{P}3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3\ \text{factores}}$$

Problemas

1. ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?
2. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 caramelos de diferente sabor para 6 estudiantes, considerando que ningún estudiante recibe más de un caramelo?
3. Calcula la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 6 personas.
4. Determina la cantidad de maneras que hay para sentar 5 personas en 3 asientos.
5. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar 5 personas en una fila, si una persona específica de ellas debe estar al inicio?

2.6 Permutaciones y métodos de conteo

Problema inicial

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niños y 4 niñas en fila, si todos los niños deben estar juntos.

Solución

Se puede considerar los niños como un solo bloque y luego arreglar únicamente 5 objetos en fila (las 4 niñas y el bloque de niños).

___	___	___	___	___
Niña	Niña	Niña	___ ___ ___ Niños	Niña

Se pueden ordenar los 5 elementos (las 4 niñas y el bloque de los niños) de 5! maneras, y luego, se puede ordenar el bloque de los niños de 3! maneras.

5	4	3	2	1
Niña	Niña	Niña	3 2 1 Niños	Niña

Y aplicando el principio de la multiplicación, se tiene que el total de maneras que hay para ordenar 3 niños y 4 niñas de modo que los 3 niños estén juntos es $5! \times 3! = 720$.

Conclusión

En permutaciones es común utilizar la estrategia de considerar un conjunto de elementos que deben ir juntos como un solo objeto, y ordenar tanto los elementos del bloque como todos los objetos, aplicando el principio de la multiplicación.

Ejemplo

Determina de cuántas maneras se pueden ordenar 3 hombres y 4 mujeres en fila, de tal manera que los hombres no estén a la par (uno a la par de otro).

Las maneras de colocar las 4 mujeres en una fila se puede hacer de 4! maneras. Entonces los hombres pueden estar en cualquiera de los espacios que se marcan en la figura de abajo.

___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___

Entonces los hombre se pueden arreglar separados de $_5P_3$ maneras. Aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para arreglar 3 hombres y 4 mujeres de modo que los hombres no están uno a la par de otro es $4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1\,440$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre.
2. Se tiene 9 libros de historia y 6 de matemática (todos distintos), ¿cuántas formas hay para ordenar 5 libros en un estante si se debe cumplir que estos 5 libros son de una misma materia?
3. ¿Cuántas cadenas de 6 letras diferentes se pueden formar si las primeras 2 deben ser vocales y las últimas 4 consonantes utilizando las letras de la “a” a la “j”?
4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 4 hombres y 4 mujeres, si estos deben ir intercalados?
5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 estudiantes en 6 sillas colocadas en una fila, si dos específicos de ellos siempre se sientan juntos (sin dejar sillas vacías de por medio)?

2.7 Permutaciones con repetición

Problema inicial

¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4, 5, si en el número se admiten dígitos repetidos?

Solución

Considerando los 5 espacios de las cifras del número:

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{U}}{\underline{\qquad}}$$

Entonces comenzando con las unidades, habrán 3 opciones (cualquiera de los números 2, 4 o 5).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Luego, para las decenas también habrán 3 opciones (dado que en el número se admiten dígitos repetidos).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Y análogamente para centenas, unidades y decenas de millar también habrán 3 opciones para cada uno.

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{UM}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{C}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{D}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Por lo tanto, se pueden formar $3^5 = 241$ números de 5 cifras con los dígitos 2, 4 y 5 admitiendo repetición.

Conclusión

El total de formas que hay para formar cadenas de longitud r con n elementos que se pueden repetir en la cadena es: n^r.

Ejemplo

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto con n elementos?

Tomando cada elemento del conjunto y considerando que para formar un subconjunto dicho elemento solo tiene dos opciones: estar en el subconjunto o no estar. Así para cada elemento de los n del conjunto se cumple que

$$\underset{\text{Elemento 1}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Elemento 2}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \dots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

Este resultado significa que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto de cardinalidad n es 2^n.

Por lo tanto, el total de subconjuntos que se pueden formar de un conjunto con n elementos es 2^n.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para colocar 3 letras en una fila utilizando a, b, c y d; considera que las letras se pueden repetir.

2. El código binario es una forma de representación numérica alternativa al sistema decimal, y es muy utilizado en el ambiente computacional porque solo utiliza dos dígitos o caracteres, el 0 y el 1 que se conocen como bits y resultan fáciles de almacenar en una computadora. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden representar en código binario.

3. Determina cuántos subconjuntos de A = {a, b, c, d, e, f} se pueden formar.

4. El número de la placa de un vehículo está conformada por 2 letras, que ocupan las primeras 2 posiciones, y 4 números. Si en una placa se pueden repetir tanto letras como números, y se pueden usar las letras A, B, C, D, E y los números del 1 al 9, determina cuántas placas se pueden elaborar con estas condiciones.

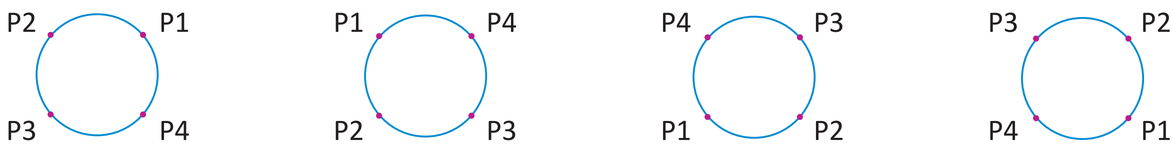
2.8 Permutaciones circulares

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda. Se considera el mismo arreglo cuando al girar un arreglo coincide con otro.

Solución

En este caso, considerando un arreglo particular, por ejemplo:



Dado que la mesa es redonda, los cuatro arreglos de arriba son equivalentes, es decir, solo cuentan por 1.

Entonces el mismo arreglo se puede rotar 4 veces (una vez por cada silla), entonces si consideramos arreglar a todas las personas como si fuera una fila, esto se puede hacer de 4! maneras, pero haciendo esto se estaría contando 4 veces cada ordenamiento, entonces el total de maneras en que se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda es: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ maneras.

En general

El total de permutaciones que se pueden realizar ordenando r de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{{}_{n}P_{r}}{r}.$$

En particular, el total de permutaciones de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ejemplo

Determina de cuántas formas se pueden ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda.

El total de formas en que se pueden ordenar 4 de 6 personas en una fila es ${}_{6}P_{4}$.

Dado que es un arreglo en una mesa redonda, en el total anterior se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas que hay para ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda es $\frac{{}_{6}P_{4}}{4} = 90$.

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden subir 7 niños a un carrusel con 7 caballitos todos idénticos?
2. En una mesa redonda hay 5 sillas y 7 personas (2 quedan paradas), determina de cuántas maneras se pueden sentar.
3. Cinco amigos juegan en una mesa redonda, determina de cuántas maneras se pueden ubicar, si 2 de ellos siempre quieren estar a la par.

Puedes utilizar el método visto en la clase 2.6.

4. Cuatro bailarines y cuatro bailarinas interpretan una danza en donde forman un círculo y se toman todos por las manos. ¿De cuántas formas pueden ubicarse los bailarines si en la danza deben aparecer alternadamente un hombre y una mujer?
5. Determina de cuántas formas pueden sentarse 4 parejas de novios si la pareja de cada persona debe estar justo en la posición de enfrente de la que se ubique.

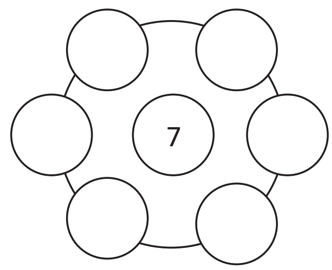
2.9 Configuraciones circulares*

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda, si una persona se sienta en el centro y las otras 6 alrededor.

Solución

Considerando el siguiente esquema de la situación.



En este caso dependiendo de la persona que esté en el centro se considerará un arreglo (o caso) diferente, y luego por cada persona que esté en el centro se ubican 6 personas en forma circular, es decir, el total de maneras para sentar 7 personas con esta condición es: $7 \times (6 - 1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$.

Conclusión

Para contar las maneras en que se pueden ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1) Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.
2) Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.

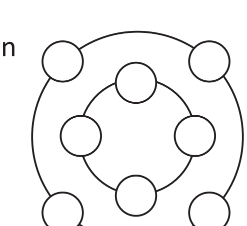
Problemas

1. Para discutir sobre "La mejora de los aprendizajes de matemática en El Salvador" se reúnen 12 personas en una mesa redonda, 3 japoneses, el Ministro de Educación de El Salvador y el Director Nacional de Educación Media, el resto son especialistas en Educación matemática. Determina de cuántas maneras se pueden sentar si:
   a) No importa el orden.
   b) Los 3 japoneses siempre están juntos, y el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro.

2. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en 9 sillas de una mesa redonda?

3. Se coloca una familia de 6 personas en una mesa redonda, determina de cuántas formas se pueden sentar si el padre y la madre se sientan frente a frente.

4. En un congreso sobre "Educación y prevención de enfermedades de transmisión sexual en adolescentes", asisten 8 personas que se sientan en dos ruedas, de 4 asientos cada una como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden sentar las 8 personas en los 8 asientos.



5. Determina de cuántas formas se puede colorear un cubo con 6 colores diferentes. Si se considera que si al rotar el cubo los colores coinciden con otra coloración, entonces la coloración es la misma.

2.10 Permutaciones con objetos idénticos*

Problema inicial

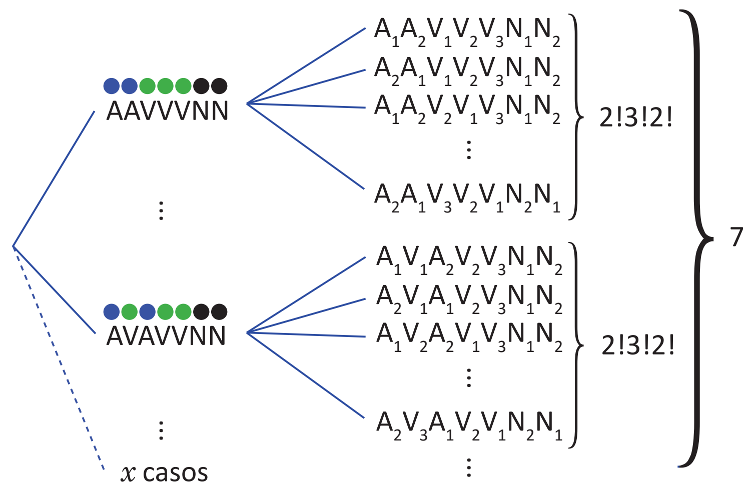
En el juego de boliche las bolas salen en fila y todas tienen el mismo tamaño y el mismo peso, determina todas las posibilidades de orden en que pueden salir 7 bolas de boliche si 2 son azules, 3 verdes y el resto negras.

Solución

Se puede considerar que el total de formas de ordenar las bolas es x.

Si las bolas fueran diferentes, el total de maneras en que se pueden ordenar 7 bolas diferentes es 7!

Además, cada caso en que podrían salir las bolas tendría 2!3!2! formas diferentes de ordenarse (si fueran diferentes), como lo muestra la figura de la derecha.



Entonces se cumple que $7! = x(2!3!2!)$.

Por lo tanto, el total de formas (x) para ordenar 2 bolas azules, 3 verdes y 2 negras es:

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$

En general

El total de permutaciones que se pueden realizar con n objetos si r_1 son de un tipo (todos idénticos), r_2 de otro tipo (todos idénticos también), hasta r_k de otro tipo, y cumplen que $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ está dado por:

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots\,r_k!}$$

Este resultado se conoce como **multicombinatorio**, porque se puede demostrar utilizando combinaciones.

Ejemplo

En el juego de ajedrez hay 16 piezas de color negro y 16 piezas de color blanco. Para cada color hay 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, 1 rey, 1 reina y 8 peones. Determina de cuántas maneras se pueden ordenar en fila 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, el rey y la reina de color blanco.

Considera que las piezas del mismo tipo tienen forma idéntica.

En total hay 8 piezas, y hay 2 torres idénticas, 2 caballos idénticos, 2 alfiles idénticos, entonces el total de formas que hay para ordenar estas piezas en fila es:

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040.$$

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra PATRIA?
2. Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene 3 banderas amarillas, 2 blancas y se colocan todas las banderas en fila para realizar una señal, ¿cuántas señales diferentes se pueden hacer?
3. Para formar una comisión de jóvenes que participará en un evento organizado por el Centro de Capacitación y Promoción de la Democracia (CECADE) se deben elegir 1 jefe representante, 2 suplentes y 4 delegados acompañantes. Determina de cuántas maneras se puede escoger la comisión de un grupo de 10 jóvenes.
4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las 16 piezas negras del ajedrez, si se ubican de manera circular.

Unidad 7

2.11 Conteo por complemento

Problema inicial

En una fábrica se cuenta con 6 ventiladores; debido a que siempre se necesita que el lugar se mantenga fresco, al menos un ventilador se mantiene encendido. Determina cuántas formas hay para satisfacer esta condición.

Solución

Todos los posibles casos que se pueden dar son, que solo un ventilador esté encendido, que 2 de los 6 ventiladores estén encendidos, y así sucesivamente hasta el caso que los 6 ventiladores estén encendidos.

Para contar todas las formas posibles en que estará al menos un ventilador encendido, se pueden contar todas las maneras en que se pueden encontrar los ventiladores, es decir, como cada ventilador tiene 2 opciones (estar apagado o encendido), todas las posibles maneras en que se pueden encontrar los ventiladores son 2^6.

Y el único caso que no cumple es cuando todos los ventiladores están apagados, es decir 1 caso. Por lo tanto, el total de maneras en que al menos un ventilador está encendido es: $2^6 - 1 = 63$.

Conclusión

En ocasiones, la cantidad de casos que se pueden dar para que un evento o condición A suceda son demasiados y se vuelve difícil contarlos. Sin embargo, en ocasiones puede ser más fácil contar lo que no se pide, es decir, el complemento de lo que se quiere, y restárselo al total de maneras de ordenar todos los objetos sin condiciones. Denotando el conjunto de todos los casos posibles por U se tiene que

$$A \subset U \text{ y } n(U) \text{ es finito, entonces } n(A) = n(U) - n(A^c)$$

Ejemplo

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niñas y 3 niños si no pueden estar las 3 niñas juntas.

Contando los casos en que las 3 niñas están siempre juntas, esto se puede hacer de $4! \times 3!$ maneras.

Y los 3 niños y 3 niñas (6 en total) se pueden ordenar de $6!$ maneras.

Entonces, restándole al total de maneras de ordenar los 6 niños las formas en que las 3 niñas siempre están juntas da como resultado $6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$. Por lo tanto, se pueden ordenar de 576 formas diferentes.

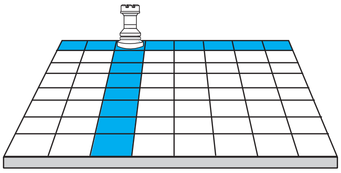
Problemas

1. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden formar en código binario (utilizando los dígitos 0 y 1) de modo que la multiplicación de todos los dígitos del número sea cero.

2. Se colocan 4 cifras del 1 al 4 en una fila, permitiendo repetir las cifras. Determina el número de filas que tienen al menos dos cifras iguales.

3. Hay 4 niñas y 2 niños, determina de cuántas maneras se pueden colocar los 6 en una fila, de modo que los niños no estén juntos.

4. En el juego de ajedrez la torre puede atacar a otra pieza que se encuentra en línea recta en un tablero de 8×8, como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden ubicar 2 torres para que no se ataquen si:



   a) Una torre es negra y la otra blanca.
   b) Ambas torres son del mismo color.

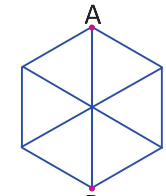
Para el literal b considera que las torres del mismo color sí se pueden atacar.

2.12 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de permutaciones.

1. En un congreso sobre “Oportunidades para jóvenes con discapacidad” participan 10 personas que hablan español, 15 que hablan inglés, 14 que hablan francés, y entre ellas 5 hablan español e inglés, 7 hablan inglés y francés, 4 hablan español y francés, y hay 2 personas que hablan los tres idiomas. Determina cuántas personas asistieron al congreso.

2. En la figura se muestra un hexágono regular cuyo lado mide 1 cm. Determina de cuántas maneras se puede unir el punto A con el punto B usando 3 segmentos de longitud 1 cm.



3. En una competencia de atletismo participan 3 personas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar los atletas, si pueden haber incluso empates triples?

4. Determina el valor de x en la ecuación $x! = 72(x-2)!$

5. Hay 4 niños y 5 niñas, y se colocan 4 de ellos en una fila de modo que en cada extremo hay un niño y en las posiciones centrales hay niñas. Determina de cuántas maneras se puede formar la fila de 4 personas.

6. Hay 7 tarjetas numeradas del 0 al 6, de ellas se sacan 4 y se colocan en fila, determina cuántos números múltiplos de 5 se pueden formar al tomar las tarjetas como dígitos del número, considerando que el primer dígito de izquierda a derecha no puede ser cero.

Para que un número sea múltiplo de 5, el valor de las unidades debe ser 0 o 5.

7. Determina cuántas formas hay para repartir 10 dulces de diferente sabor entre 3 niños, si puede darse el caso que se den todos los dulces a un solo niño.

8. En una clase hay 4 grupos formados por 3 niños y 2 niñas cada uno, determina cuántas maneras hay para ubicar cada grupo en filas de asientos diferentes si además tanto los niños como las niñas de cada grupo deben estar siempre juntos.

9. ¿De cuántas formas se pueden ubicar en un estante 3 libros de 7° grado (iguales), 6 libros de 8° (iguales) y 4 de 9° (iguales), si los de 8° deben estar todos juntos?

10. Determina de cuántas formas se pueden ubicar circularmente 7 personas si:

    a) Dos de ellas están juntas.
    b) Dos de ellas no están a la par.

3.1 Combinaciones

Problema inicial

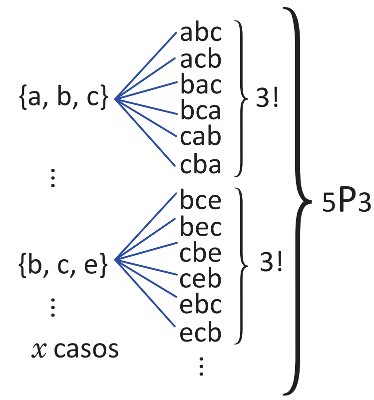
Determina de cuántas formas se pueden seleccionar 3 letras del siguiente conjunto {a, b, c, d, e}.

Solución

Tomando x como el total de formas de seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e}.

Dado que en una selección de 3 letras no importa en que orden se haga, entonces cada selección multiplicada por 3! dará como resultado todas las formas de ordenar 3 de las 5 letras, es decir, $x(3!) = {}_5P_3$.

Por lo tanto, el total de formas que hay para seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e} es: $x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10.$



Conclusión

Una selección de objetos donde el orden no importa se conoce como **combinación**.

Una combinación a menudo está relacionada con la forma de escoger un grupo de objetos, porque en este sentido no importa el orden, sino el conjunto final de objetos que se elija.

El número total de combinaciones que se pueden realizar escogiendo r objetos entre un conjunto de n objetos, con $0 \leq r \leq n$ está dado por: $\frac{{}_nP_r}{r!}$.

Este número total de combinaciones se denota por ${}_nC_r$, y se lee "n combino r", es decir:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Observa que ${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1.$

Observa que ${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ y es equivalente de n objetos distintos escoger r que se sacan o escoger $n - r$ que se dejan.

Ejemplo

En una bolsa hay 3 pelotas rojas (iguales) y 4 pelotas verdes (iguales), determina de cuántas formas se pueden ordenar en una fila las 7 pelotas.

Se puede considerar que se tienen 7 espacios en la fila, entonces será suficiente escoger en cuáles espacios irán las bolas rojas (las bolas azules irán en los espacios restantes), y esto se puede hacer de ${}_7C_3$:

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$${}_7C_3 = \frac{\overbrace{7 \times 6 \times 5}^{3 \text{ factores}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ factores}}}$$

Por lo tanto, las 7 pelotas se pueden ordenar de 35 formas diferentes.

Este problema se puede resolver utilizando permutaciones o combinaciones, dependiendo si se toma de referencia los objetos o los espacios de los objetos.

Problemas

1. ¿Cuántos licuados diferentes se pueden hacer combinando 2 frutas que pueden ser fresa, melón, zapote, guayaba, papaya y mango? ¿Cuántos con 3 frutas?

2. Se tienen 5 puntos en el plano cartesiano de modo que no hay 3 de ellos alineados. Determina cuántos segmentos de recta que unan 2 de dichos puntos se pueden trazar.

3. Se tiene el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos de sus subconjuntos tienen solo un número? ¿Cuántos dos números? ¿Cuántos tres números? ¿Cuántos cuatro números? ¿Cinco números? ¿Y ningún número?

3.2 Combinaciones y principios de conteo

Problema inicial

Se dispone de un grupo de 5 mujeres y 3 hombres, resuelve:

a) ¿Cuántas formas hay para escoger 2 personas, si ambas tienen que ser del mismo sexo?

b) ¿Cuántas formas hay para escoger 4 personas, de modo que sean 2 hombres y 2 mujeres?

Solución

a) Para esta situación se pueden dar 2 casos:

Caso 1: pueden ser 2 mujeres, estas se pueden elegir de ${}_5C_2$ maneras diferentes.

Caso 2: pueden ser 2 hombre, estos se pueden elegir de ${}_3C_2$ maneras diferentes.

Por lo tanto, por el principio de la suma, el total de formas para escoger 2 personas, ambas del mismo sexo es: ${}_5C_2 + {}_3C_2 = 10 + 3 = 13$.

b) Primero se pueden elegir las mujeres de ${}_5C_2$ maneras. Luego por cada forma de escoger las mujeres hay ${}_3C_2$ maneras para escoger los hombres.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para escoger 4 personas (2 de un sexo y 2 de otro sexo) es: ${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$.

Conclusión

En algunas situaciones será necesario aplicar los principios de suma y multiplicación a las combinaciones para contar todos los casos. Además, en las permutaciones puede analizarse cómo escoger los objetos que se ordenarán para luego ordenarlos.

Ejemplo

Se tienen 7 libros de matemática (todos diferentes) y 5 sobre derechos de la niñez y la adolescencia (todos diferentes). Determina de cuántas formas se pueden ordenar 3 libros de matemática y 2 sobre derechos de la niñez y la adolescencia en un estante.

Se pueden elegir primero los 3 libros de matemática, esto se puede hacer de ${}_7C_3$ formas, y luego se eligen los 2 libros sobre derechos de la niñez y la adolescencia, esto se puede hacer de ${}_5C_2$ formas.

Finalmente los libros se pueden ordenar de 5! formas. Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de maneras para ordenar todos los libros es: ${}_7C_3 \times {}_5C_2 \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42\,000$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ubicar 2 niños y 3 niñas en una fila, escogiendólos de un grupo de 3 niños y 4 niñas.

2. De un grupo de 6 hombres y 4 mujeres se desea formar una comisión de tres personas, determina cuántas comisiones distintas se pueden formar si:

a) No hay restricciones.

b) Debe haber solo hombres o solo mujeres.

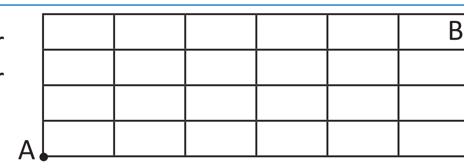
c) Debe haber dos hombres y una mujer.

d) Debe haber al menos una mujer.

3.3 Conteo de caminos

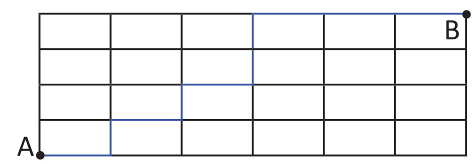
Problema inicial

La cuadrícula de la derecha representa las calles de Sonsonate por las que se puede conducir, determina de cuántas formas puede ir una persona desde el punto A al punto B por el camino más corto.



Solución

Para que un camino sea de longitud mínima debe moverse únicamente hacia la derecha y hacia arriba (sino se estaría regresando), entonces el problema se resume a hacer una cadena de 6 + 4 = 10 pasos, de los cuáles 4 son verticales y 6 son horizontales.



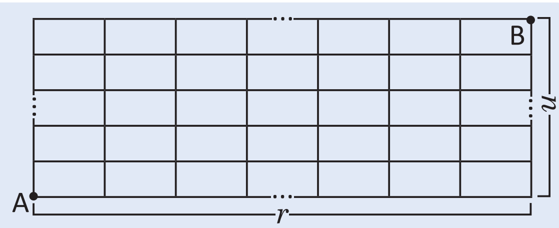
Para ello, basta con escoger donde irán los 6 pasos hacia la derecha, y esto se puede hacer de ${}_{10}C_{6}$ formas.

Por lo tanto, el total de caminos más cortos para llegar del punto A al punto B es: ${}_{10}C_{6} = 210$.

Conclusión

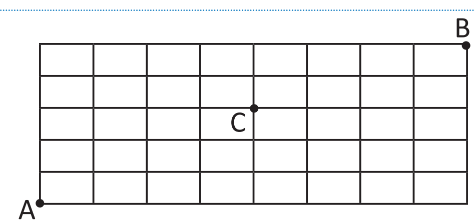
En una cuadrícula de $n \times r$ celdas, para determinar el total de caminos más cortos que van del punto A al punto B se pueden usar combinaciones, y el total será igual a: ${}_{(n+r)}C_{r}$.

Esta construcción por caminos puede ser muy útil para la demostración de algunas identidades combinatorias.



Ejemplo

Determina de cuántas formas se puede ir desde el punto A hasta el punto B por el camino más corto si se debe pasar por el punto C.



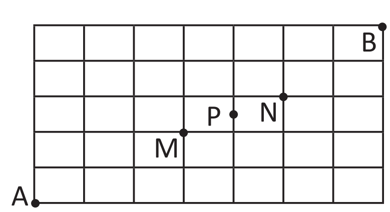
Para llegar de A a C se tienen que dar 4 pasos horizontales y 3 verticales, entonces hay un total de ${}_{7}C_{4}$ caminos de longitud mínima. Luego para llegar de C a B hay ${}_{6}C_{4}$ caminos de longitud mínima.

Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima que van de A hacia B pasando por C son ${}_{7}C_{4} \times {}_{6}C_{4} = 35 \times 15 = 525$.

Problemas

Para la siguiente cuadrícula, determina cuántos caminos de longitud mínima hay que

a) Llevan de A a B.
b) Llevan de A a B pasando por M.
c) Llevan de A a B pasando por N.
d) Llevan de A a B pasando por M y N.
e) Llevan de A a B pasando por M o N.
f) Llevan de A a B y no pasan por M ni por N.
g) Llevan de A a B pasando por P.



3.4 Demostraciones utilizando conteo de caminos*

Problema inicial

Demuestra utilizando un argumento por caminos, la propiedad recursiva de Pascal:

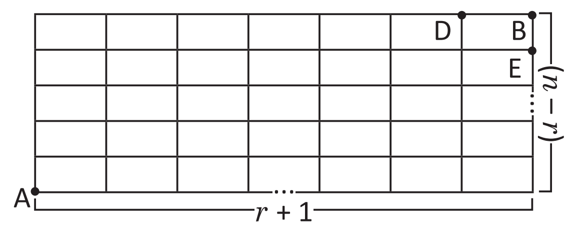
$$(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1) \text{ con } n \geq r$$

Solución

Considerando una cuadrícula de dimensión $(n-r) \times (r+1)$, y considerando que para llegar del punto A al punto B solo hay dos casos, pasando por el punto D o pasando por el punto E.

El total de maneras para llegar de A hasta B es $(n+1)\mathrm{C}(r+1)$, debido a que $(n-r)+(r+1) = n+1$.

Además, para llegar al punto D hay $n\mathrm{C}r$ maneras, debido a que $(n-r)+r = n$.



Y para llegar al punto E hay $n\mathrm{C}(r+1)$ maneras, debido a que $(n-r-1)+(r+1) = n$.

Por lo tanto, $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$.

Conclusión

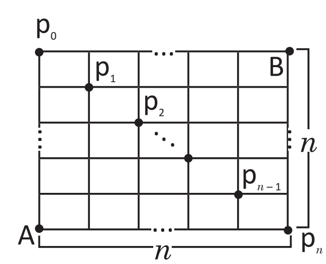
Para demostrar algunas identidades combinatorias se puede utilizar el conteo de caminos, para ello hay que crear una cuadrícula que se adecúe a la situación y luego contar los caminos de dos maneras diferentes.

Ejemplo

Demuestra la identidad utilizando un argumento por caminos:

$$(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = 2n\mathrm{C}n$$

Considerando una cuadrícula de $n \times n$, entonces el total de caminos de longitud mínima que hay para llegar de A hasta B es $2n\mathrm{C}n$.



Y también se pueden contar estos caminos en casos, un caso (que pase por el punto p_0) sería que en los primeros n pasos no hay pasos horizontales, entonces en los siguientes n pasos no hay pasos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}0)(n\mathrm{C}0)$ maneras.

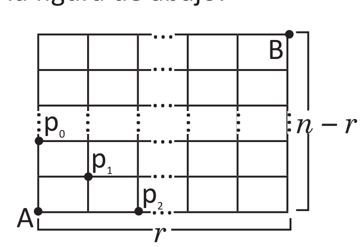
Otro caso (que pase por el punto p_1) es dar un paso horizontal en los primeros n y entonces solo se podría dar un paso vertical en los últimos n pasos, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}1)(n\mathrm{C}1)$ maneras. Así sucesivamente hasta llegar al caso (que pase por el punto p_n) que en los primero n pasos todos sean horizontales y los últimos n pasos sean todos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}n)(n\mathrm{C}n)$ maneras.

Por lo tanto, $(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = (2n)\mathrm{C}n$.

Problemas

Demuestra la siguiente identidad utilizando un argumento por caminos en la figura de abajo:

$$n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0(n-2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)].$$



Unidad 7

3.5 Identidades combinatorias contando de 2 formas*

Problema inicial

Utiliza un argumento por conjuntos para demostrar la siguiente identidad combinatoria.

$$nC0 + nC1 + nC2 + \cdots + nC(n-2) + nC(n-1) + nCn = 2^n$$

Solución

Contando la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de n elementos. Contando de 2 maneras distintas.

Forma 1: Contando las posibilidades que tiene cada elemento.

Cada elemento tiene 2 posibilidades, estar o no estar en el subconjunto; por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es: 2^n.

$$\underset{\text{Elemento 1}}{\underline{\ 2\ }} \times \underset{\text{Elemento 2}}{\underline{\ 2\ }} \times \cdots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\ 2\ }} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\ 2\ }}$$

Forma 2: Contando las posibilidades que tiene cada subconjunto.

La cantidad de subconjuntos con cero elementos son: $nC0$.
La cantidad de subconjuntos con un elemento son: $nC1$.
La cantidad de subconjuntos con dos elementos son: $nC2$.

Y así sucesivamente hasta llegar a la cantidad de subconjuntos que tienen n elementos.

Por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es:

$$nC0 + nC1 + nC2 + \cdots + nC(n-2) + nC(n-1) + nCn$$

Y como se contó lo mismo, se debe cumplir que: $nC0 + nC1 + nC2 + \cdots + nC(n-2) + nC(n-1) + nCn = 2^n$.

Conclusión

Para demostrar identidades combinatorias se puede contar alguna situación de dos formas distintas, este método se conoce como **comparación**.

Problemas

Demuestra las siguientes identidades utilizando un argumento por conjuntos.

a) $nCr = nC(n-r)$.
b) $(n+1)C(r+1) = nCr + nC(r+1)$, con $n \geq r+1$.
c) $nCr = 2C0(n-2)Cr + 2C1[(n-2)C(r-1)] + 2C2[(n-2)C(r-2)]$, con $n \geq r+2$, $r \geq 2$.
d) $(n+m)Cr = nC0(mCr) + nC1[mC(r-1)] + \cdots + nC(r-1)(mC1) + nCr(mC0)$, con $(m \geq r)$ y $(n \geq r)$.

Para b), considerar un conjunto A con $n+1$ elementos del cual se sacan $r+1$ elementos, y que para un elemento particular de A hay dos opciones: estar o no estar en la extracción.

Para c), considerar un conjunto A con n elementos que se puede dividir en dos conjuntos, uno con 2 elementos y otro con $n-2$ elementos, y se sacan r elementos de A.

Para d), razonar de manera similar al literal anterior.

3.6 Triángulo de Pascal

Problema inicial

Realiza las siguientes actividades:

a) Elabora una tabla y coloca en las filas valores de n desde 0 hasta 5, y en las columnas valores de r desde 0 hasta 5 también. En cada celda (que sea posible) calcula el valor del combinatorio ${}_nC_r$.

b) Ordena los valores de los combinatorios en forma triangular, desde el valor de $n = 0$ hasta $n = 5$.

c) Determina el patrón que sigue una fila a partir de la que le antecede y a partir de él deduce los valores de la sexta fila del triángulo sin calcular directamente los combinatorios.

Solución

a) En la primera fila solo se puede calcular un combinatorio, ${}_0C_0 = 1$; en la segunda fila solo se pueden calcular 2 combinatorios, ${}_1C_0$ y ${}_1C_1$; en la tercera fila solo se pueden calcular 3 combinatorios, ${}_2C_0$, ${}_2C_1$ y ${}_2C_2$. Así sucesivamente se calculan los valores de la tabla.

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Ordenando los combinatorios de la tabla en forma triangular:

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

c) Analizando el triángulo formado, los costados siempre serán unos, puesto que allí queda el valor de ${}_nC_0$ (= 1) y ${}_nC_n$ (= 1), y al parecer el número que queda por debajo y en medio de dos números, es la suma de los dos números que están por encima de él. Por ejemplo, 2 está por debajo de 1 y 1, y se cumple que 1 + 1 = 2; de manera análoga 10 está debajo de 6 y 4, y se cumple que 6 + 4 = 10. Siguiendo este patrón, los valores de la fila 6 serían: 1, 1 + 5, 5 + 10, 10 + 10, 10 + 5, 5 + 1 y 1.

$$\begin{array}{l|ccccccccccccc}
n = 0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & 1 & + & 1 & & & & & \\
n = 2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n = 3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n = 4 & & & 1 & & 4 & & 6 & + & 4 & & 1 & & \\
n = 5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n = 6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Conclusión

El triángulo construido por los combinatorios se llama **triángulo de Pascal**. El patrón deducido en el Problema inicial puede ser probado matemáticamente utilizando la propiedad recursiva de Pascal que se demostró en la clase anterior, ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & {}_0C_0 & & & & & & \\
 & & & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & & & \\
 & & & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & & & \\
 & & & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & & & \\
 & & {}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 & & \\
 & {}_5C_0 & & {}_5C_1 & & {}_5C_2 & & {}_5C_3 & & {}_5C_4 & & {}_5C_5 & \\
{}_6C_0 & & {}_6C_1 & & {}_6C_2 & & {}_6C_3 & & {}_6C_4 & & {}_6C_5 & & {}_6C_6 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Problemas

1. Determina los valores de la séptima y octava fila del triángulo de Pascal sin calcular los combinatorios.

2. A la derecha se muestran dos filas del triángulo de Pascal. Justifica el cálculo que genera el segundo renglón aplicando que ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

3.7 Binomio de Newton*

Problema inicial

Considerando el desarrollo del producto $(x + y)^5$, determina el coeficiente que acompaña a la parte literal x^2y^3.

Solución

El desarrollo de la expresión $(x + y)^5$ se puede expresar a partir de $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$.

Para desarrollar $(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ se toma x o y de cada paréntesis y se multiplican, luego se simplifican términos semejantes. El coeficiente de x^2y^3 es igual al número de casos en que se toman tres y de entre los 5 paréntesis, es decir $5\text{C}3 = 10$.

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña la parte literal x^2y^3 en el desarrollo del producto $(x + y)^5$ es:

$$5\text{C}3 = 10.$$

Teorema

En general considerando el desarrollo de $(x + y)^n$, el coeficiente que acompaña a la parte literal $x^{n-r}y^r$, con $0 \leq r \leq n$ es: $n\text{C}r$.

Por lo tanto, se cumple el siguiente resultado para desarrollar $(x + y)^n$:
$(x + y)^n = (n\text{C}0)x^n + (n\text{C}1)x^{n-1}y + (n\text{C}2)x^{n-2}y^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]x^2y^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]xy^{n-1} + (n\text{C}n)y^n$.

Y se puede expresar utilizando sumatorio de la siguiente manera:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} (n\text{C}r)x^{n-r}y^r.$$

Este resultado se conoce como **binomio de Newton**, y además puede ser utilizado para demostrar algunas propiedades o identidades de los combinatorios que no son tan obvias utilizando conteo.

Ejemplo

Demuestra la siguiente identidad combinatoria: $n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n = 2^n$.

Utilizando el binomio de Newton y dándole los valores numéricos para $x = 1$ y $y = 1$.

$$(1 + 1)^n = (n\text{C}0)1^n + (n\text{C}1)1^{n-1}1 + (n\text{C}2)1^{n-2}1^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]1^21^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]1^{n-1} + (n\text{C}n)1^n$$

$$2^n = n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n.$$

Problemas

1. Determina el coeficiente de x^7 en el desarrollo del binomio $(1 - x)^{10}$.

2. Determina el coeficiente de x^2y^6 en el desarrollo del binomio $(x + 3y^3)^4$.

3. Determina el coeficiente del término que no contiene x en el desarrollo del binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.

4. Demuestra: $\sum_{r=0}^{n} 3^r(n\text{C}r) = 4^n$.

Puedes aplicar un método similar al del ejemplo.

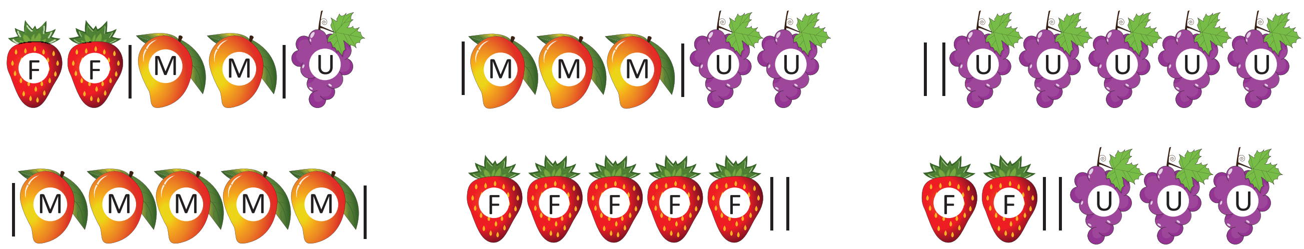
3.8 Técnica de los separadores*

Problema inicial

José quiere comprar 5 dulces en la tienda y le dan a escoger 3 sabores diferentes, fresa, mango y uva. ¿De cuántas formas puede escoger José los 5 dulces que desea comprar, si incluso podría comprarlos todos de un mismo sabor?

Solución

Se pueden escoger los sabores en orden, fresa, mango y uva, y se pone una | (separador) entre los grupos de diferente sabor. Por ejemplo:



Entonces una fila de 5 bolitas (O) y 2 separadores (|), corresponde a una única combinación de sabores de dulces, por lo tanto, el problema se reduce a contar el total de maneras que hay de ordenar 5 bolitas idénticas y 2 separadores idénticos. Y esto se puede hacer escogiendo los 2 lugares de entre los 7 que pueden ocupar los separadores, es decir de $_7C_2$ maneras (o bien escogiendo los lugares de las bolitas de $_7C_5$ maneras).

$$\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc$$

El total de formas en que se pueden escoger 5 dulces de entre 3 sabores es $_7C_2 = 21$.

En general

El total de formas para escoger r objetos de n tipos diferentes entre sí, si los objetos de un tipo son idénticos entre sí, se puede hacer agregando $n - 1$ separadores y el total estaría dado por:

$$_{(n + r - 1)}C_r.$$

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para pedir 6 pupusas escogiendo entre queso, frijol con queso, revueltas y queso con loroco, si:
   a) No hay restricciones.
   b) Debe pedirse al menos 1 de cada clase.
   c) Se deben pedir al menos 3 revueltas.
   d) Deben pedirse 2 de queso y a lo sumo 2 revueltas.

Puedes asegurar una de cada clase y luego pedir las otras 2 de cualquier clase.

2. Determina todas las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, si:
   a) Son enteros no negativos.
   b) Son enteros positivos.

Puedes analizar de manera parecida al problema 1 literal b.

3.9 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de combinaciones.

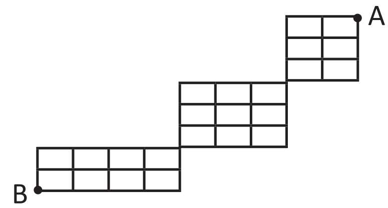
1. Se tienen 3 cartas iguales, y se dispone de 5 sobres de diferente color. Determina de cuántas formas se pueden colocar las cartas en los sobres.

2. Determina cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres vértices de un hexágono.

3. ¿Cuántas cadenas binarias (de ceros y unos) de longitud 8 tienen como máximo 3 unos?

4. Se tiene 6 niñas y 3 niños, determina de cuántas formas se pueden ordenar si los 3 niños no pueden estar uno a la par de otro (siempre tienen que estar separados por al menos una niña).

5. Determina cuántos caminos de longitud mínima hay para llegar de A hasta B en la siguiente figura.



6. Resuelve:

   a) En el binomio de Newton $(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_r) x^{n-r} y^r$, sustituye $x = 1$ y $y = -1$, para demostrar la relación $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r = 0$.

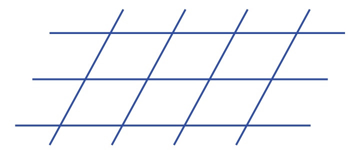
   b) Encuentra el valor de $\sum_{r=2}^{2020} (-1)^r ({}_{2\,020}\mathrm{C}_r)$ utilizando la relación del literal a.

7. Un grupo de 7 amigos quiere comprar paletas en una heladería, si en la heladería hay 7 sabores diferentes de paletas, determina de cuántas formas se puede comprar una paleta para cada integrante del grupo de amigos.

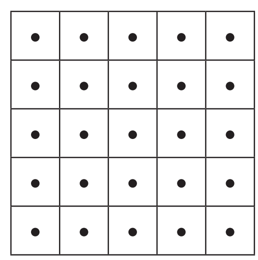
3.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina cuántos paralelogramos hay en la figura de la derecha. Las líneas horizontales y oblicuas son paralelas respectivamente.



2. Considerando el siguiente arreglo de puntos sobre el tablero de la figura.



Determina el número de formas en que se pueden seleccionar 3 puntos de modo que sean los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los lados de la cuadrícula.

3. De un grupo de 8 estudiantes se harán 4 grupos de 2 estudiantes. Determina cuántos grupos se pueden formar si:

   a) Cada grupo hablará sobre un tema distinto que puede ser: equidad de género, democracia, medio ambiente o educación integral de la sexualidad.

   b) Todos los grupos deben discutir sobre la inclusividad.

4. Determina de cuántas maneras se pueden agrupar 9 personas en 3 grupos, cuando el número de personas de cada grupo es:

   a) 2, 3 y 4. b) 3, 3 y 3. c) 2, 2 y 5.

5. Demuestra la fórmula $\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$ vista en la clase 2.10 aplicando combinaciones.

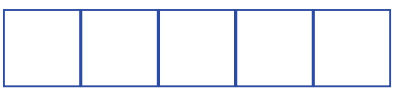
6. Demuestra la igualdad $n\mathrm{C}r = \frac{n(n-1)}{r\,(r-1)}[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$ aplicando la fórmula $p\mathrm{C}q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$.

Unidad 7

3.11 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Se pintan los 5 cuadrados de la figura con los colores rojo, verde y azul; de modo que dos contiguos (a la par uno del otro) tengan diferentes colores, y no se requiere utilizar todos los colores. Determina de cuántas formas se pueden pintar en cada caso:



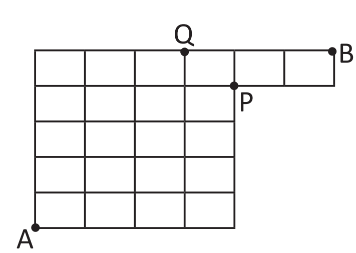
   a) Sin restricción
   b) Simétricamente
   c) Solo verde y azul

2. Determina el número de filas compuestas por las cifras: 1, 2, 3, 4 y 5 no repetidas y de modo que en los dos extremos hay números impares.

3. En un país que tiene varios aeropuertos, una aerolínea ofrece vuelos que conectan cualesquiera dos aeropuerto de dicho país. Si se sabe que la aerolínea realiza 42 vuelos diferentes (que conectan 2 aeropuertos diferentes en cada vuelo), determina cuántos aeropuertos tiene dicho país tomando en cuenta que el viaje que conecta un aeropuerto A con un aeropuerto B se considera diferente al viaje que conecta al aeropuerto B con el aeropuerto A.

4. Una rana se ubica en el escalón 10 de unas gradas, la rana se mueve un escalón por salto (hacia arriba o hacia abajo). ¿Cuántas formas existen para que la rana en su décimo salto quede en el escalón 14?

5. Determina de cuántas formas se puede ir por la ruta más corta en las condiciones siguientes:



   a) De A a B pasando por P.
   b) De A a B pasando por Q.
   c) De A a B.

6. Demuestra que ${}_{15}C_0 + {}_{16}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{18}C_3 = {}_{19}C_3$.

Puedes sustituir el primer término ${}_{15}C_0$ (= 1) por ${}_{16}C_0$ (= 1), y luego aplicar la fórmula ${}_{p}C_{q} + {}_{p}C_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ repetidamente.

Unidad 8

Probabilidad

El contexto histórico en el que surgieron los conceptos de probabilidad se dieron en el ámbito de la resolución de problemas que aparecían al momento de realizar algunos juegos de azar, por ejemplo, en un juego dos personas elegían que al lanzar una moneda caería cara o corona y el ganador sería aquel que lograba ya sea 5 caras o 5 coronas, sin embargo, los jugadores se retiraban cuando uno tenía 4 caras y el otro 3 coronas. Si cada jugador había puesto 32 monedas, el problema era determinar la forma más justa de repartir las 64 monedas. Este problema fue planteado por un experto jugador y apostador llamado Antoine Gombaud, caballero de Meré, a los matemáticos franceses Pascal y Fermat, quienes mediante correspondencia resolvieron todo tipo de problemas sobre juegos de azar, creando la noción de probabilidad y aplicándola en la resolución de estos problemas; estos estudios fueron retomados después por el matemático francés Pierre-Simón Laplace, quien presenta la teoría analítica de las probabilidades y se sigue hasta que se formaliza matemáticamente toda la teoría de probabilidades con la axiomática del matemático ruso Kolmogórov, en 1933 aproximadamente.

Imagen representativa sobre el problema de Monty Hall, en un concurso de televisión de 1963.

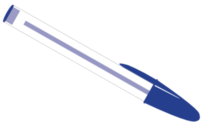
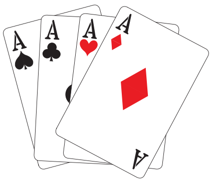
La rama de la estadística inferencial se fue desarrollando conforme los años pasaron, y su aplicación en diversos campos científicos ha resultado muy importante, puesto que a partir de la inferencia se ha podido modelar fenómenos y predecir comportamientos de estos fenómenos con bastante certeza, en áreas como la economía, educación, transporte, construcción, etc.

Los contenidos que estudiarás en esta unidad abarcan primero la noción de probabilidad experimental y teórica, y luego se construirán los axiomas de Kolmogórov para el estudio de la probabilidad, finalmente se estudia la probabilidad condicional y la importancia de los experimentos independientes.

1.1 Actividad introductoria

Materiales

- Una moneda, un lapicero, un juego de naipes.

Actividad

- Dibuja en tu cuaderno una tabla con 3 filas y 11 columnas, en la primera columna coloca los títulos, predicción y resultado, y en la primera fila los números del 1 al 10.
- Coloca en la segunda fila los resultados que podrías predecir al tirar una moneda, si en el primer lanzamiento crees que caerá cara coloca “Ca” abajo del número 1, sino coloca “Co”. Observa el ejemplo y llena la fila de predicciones en tu cuaderno; como lo muestra el ejemplo:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Predicción	Ca									
Resultado										

- Ahora realiza 10 lanzamientos con la moneda y llena la fila de resultados. Luego responde:

a) Analiza si es más factible que en 10 lanzamientos de la moneda se obtengan 10 caras, o que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras y 4 coronas.
b) ¿Cuáles son todos los posibles resultados que se podían obtener al lanzar una moneda?
c) ¿Cuántas veces se obtuvo cara como resultado al lanzar la moneda 10 veces? ¿Cuántas veces se obtuvo corona?
d) Divide la cantidad de caras obtenidas en los resultados entre 10 (frecuencia relativa).

Definición

Al lanzar una moneda no se puede saber con certeza el resultado que se obtendrá, sin embargo, puede existir una forma de tener un parámetro sobre los resultados que son más certeros y los que no. La rama de la matemática que estudia la forma de representar con números la mayor o menor certeza de la ocurrencia de un resultado para realizar predicciones se conoce como: **probabilidad**.

Un proceso que genera un conjunto de datos (o resultados, como el hecho de lanzar una moneda) se conoce como **experimento**. El conjunto de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento se conoce como **espacio muestral**. Un elemento del espacio muestral se conoce como **evento simple** y cualquier subconjunto del espacio muestral se conoce como **evento**.

El valor obtenido dividiendo la cantidad de veces que se obtiene un resultado específico entre el total de veces que se realiza un experimento (frecuencia relativa) se conoce como: **probabilidad experimental**.

$$P_e(A) = \frac{\text{Número de veces que sucede un evento A}}{\text{Total de veces que se realiza un experimento}}.$$

Problemas

Utilizando el juego de naipes (baraja), realiza una predicción respecto al color que se puede obtener en cada carta, al sacar 10 cartas (después de sacar una carta, no se devuelve). Luego realiza el experimento y escribe los resultados en una tabla, así como lo hiciste en la actividad:

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento del color que tiene una carta extraída de la baraja?
b) Ejemplifica al menos 5 eventos simples que pueden ocurrir en el experimento de extraer 10 cartas y ver su color.
c) Basado en los resultados obtenidos, calcula la probabilidad experimental que al extraer una carta, esta sea de color negro.

1.2 Probabilidad

Problema inicial

Considerando el experimento de lanzar una moneda una vez.

a) ¿Piensas que la posibilidad de caer cara es mayor que la de caer corona?
b) ¿Con cuál número se podría expresar la posibilidad de caer cara?

Solución

a) Al lanzar una moneda solo hay dos posibles resultados, cae cara o cae corona. Ambas opciones tendrían la misma posibilidad de caer.

b) Solo hay dos posibles resultados y para que caiga cara solo hay una forma; además los resultados tienen la misma posibilidad de caer y esto se puede expresar como una fracción:

$$\frac{1}{2}$$

$1 \longleftarrow$ Una forma de caer cara.

Dos posibles resultados cara o corona. $\longrightarrow 2$

Definición

Si en un experimento se cumple que cada evento simple (cada posible resultado) tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces el valor obtenido dividiendo el total de elementos que tiene un evento A (casos favorables), es decir, $n(\text{A})$, entre el total de elementos del espacio muestral S (casos posibles), es decir, $n(\text{S})$, se conoce como **probabilidad teórica**, además:

$$\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})}.$$

Ejemplo

Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado caiga un número par (la cantidad de puntos sea par).

Considerando el espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Denotando el evento A = "Cae un número par", este evento se puede expresar como A = {2, 4, 6}.

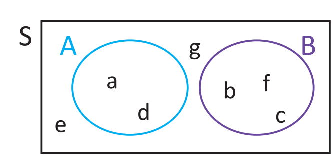
Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces caiga el número 3 en ambas ocasiones (la cantidad de puntos sea 3).

2. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de todos los puntos (de ambos dados) sea 7.

3. Considerando el espacio muestral (S) como conjunto, analiza el siguiente diagrama de Venn, si cada evento simple tiene la misma probabilidad de ocurrir, resuelve:
   a) Determina la probabilidad teórica de A.
   b) Determina la probabilidad teórica de B.



4. Calcula la probabilidad teórica del evento de sacar una carta roja en una extracción de una baraja y compárala con la probabilidad experimental. Para la probabilidad experimental utiliza la clase anterior.

1.3 Intersección y regla de adición para probabilidad

Problema inicial

Se tira un dado una vez y se definen los siguientes eventos:

A: Cae 1, 2 o 3 B: Cae 1, 3 o 5

a) ¿Qué representa el evento "ocurre A o B"? Determina su probabilidad.
b) ¿Qué representa el evento "ocurre A y B"? Determina su probabilidad.

Solución

a) El evento ocurre A o B, significa que al lanzar el dado puede caer 1, 2, 3 o 5, es decir, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. Entonces se tiene que los casos favorables son 4 y los casos posibles (al tirar un dado) son 6. Por lo tanto, P(A o B) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) El evento ocurre A y B, significa que al lanzar el dado puede caer 1 o 3 (para que se cumpla tanto A como B), es decir $A \cap B = \{1, 3\}$. Entonces se tiene que los casos favorables son 2 y los casos posibles son 6, por lo tanto, P(A y B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Conclusión

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral (S), al evento definido por "ocurre tanto A como B" se denota por $A \cap B$ y se lee "evento A intersectado B".

Cuando la intersección de 2 eventos es vacía, es decir, $A \cap B = \varnothing$, se dice que **los eventos A y B son mutuamente excluyentes**.

Además, al evento definido por "ocurre el evento A o el evento B" se denota por $A \cup B$ y se lee "evento A unido B". Puesto que se cumple que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cuando los eventos A y B son mutuamente excluyentes se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja de 52 cartas, el resultado sea un "as" o 7?

Se puede denotar los eventos: A: La carta es un "as". B: La carta es un 7.

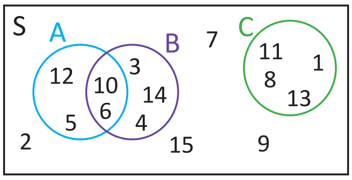
Se cumple que $n(A) = 4$ (los 4 "ases" de la baraja), $n(B) = 4$ (los 4 "sietes" de la baraja), y el evento de extraer un "as" o un 7 es $A \cup B$ y además $A \cap B = \varnothing$, por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados el resultado de sumar sus puntos sea 5 o 7.

2. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A \cap C)$ d) $P(A \cup C)$
   e) ¿Cuáles eventos son mutuamente excluyentes y cuáles no?



3. Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños, dos niñas específicas estén siempre juntas y 2 niños específicos estén siempre juntos.

1.4 Aplicación de la regla de adición de probabilidad*

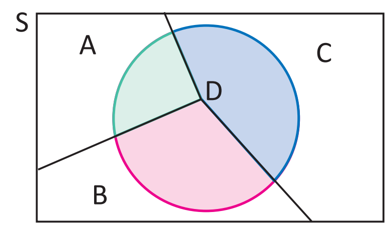
Problema inicial

En una empresa se producen 500 dispositivos, entre celulares, tablets, laptops; entre estos 500 dispositivos la probabilidad de que un producto sea un celular defectuoso es $\frac{1}{20}$, la probabilidad de que el producto sea una tablet defectuosa es $\frac{3}{125}$, y la probabilidad de que sea una laptop defectuosa es $\frac{1}{50}$. Determina la probabilidad de que al seleccionar uno de los 500 productos, este sea defectuoso.

Solución

Considerando los eventos A: es celular. B: es tablet. C: es laptop.

Sea D el evento: producto defectuoso; solo tiene tres opciones a saber, ser celular defectuoso, ser tablet defectuosa o ser laptop defectuosa.



Observando el diagrama de Venn a la derecha, se cumple que $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$.

Además se sabe que $P(D \cap A) = \frac{1}{20}$, $P(D \cap B) = \frac{3}{125}$, $P(D \cap C) = \frac{1}{50}$.

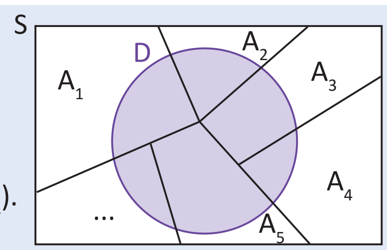
Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer uno de los 500 productos sea defectuoso es:

$$P(D) = P[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)] = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{1}{20} + \frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{25 + 12 + 10}{500} = \frac{47}{500}.$$

Conclusión

Para calcular la probabilidad de un evento D que se divide en varios eventos particulares $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, mutuamente excluyentes y que la unión de todos los A_i conforman el evento D, se calcula de la siguiente manera:

$$P(D) = P[(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup \ldots \cup (D \cap A_n)] = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \ldots + P(D \cap A_n).$$



Ejemplo

Para una rifa se utilizan papeles de 4 colores diferentes, $\frac{1}{6}$ de todos los papeles están premiados. De todos los papeles premiados $\frac{1}{18}$ son verdes, $\frac{1}{36}$ son rojos y $\frac{1}{18}$ son morados. Determina la probabilidad de que al extraer un papel de color amarillo, este tenga premio.

Considerando los eventos D: El papel sale premiado. A_1: El papel es verde y premiado.

A_2: El papel es rojo y premiado. A_3: El papel es morado y premiado. A_4: El papel es amarillo y premiado.

Entonces, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4)$.

Luego, $P(D \cap A_4) = P(D) - P(D \cap A_1) - P(D \cap A_2) - P(D \cap A_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$.

Problemas

1. Se encuesta a algunas personas acerca de su sexo y profesión, y a partir de ello se sabe que del total de personas, $\frac{1}{3}$ son mujeres médicas, $\frac{1}{6}$ son mujeres matemáticas, y $\frac{1}{16}$ son mujeres que laboran en otras actividades. Determina la probabilidad de que al seleccionar una persona encuestada, esta sea mujer.

2. En una clínica pediátrica se atiende la misma cantidad de niñas y de niños, y $\frac{1}{6}$ de todos los niños atendidos son niñas mayores de 12 meses. Determina la probabilidad de que sea atendida una niña de a lo sumo 12 meses.

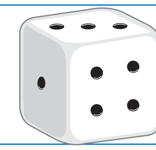
1.5 Axiomas de probabilidad (teórica)

Problema inicial

Considerando el experimento de tirar un dado, resuelve:

a) Determina la probabilidad de obtener un 3 en la tirada.

b) Determina la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en la tirada.



Solución

Expresando el espacio muestral como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Sean A y B los eventos correspondientes a cada literal.

a) Se cumple que A = {3}, entonces $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

b) Se cumple que B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, entonces $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$.

Axiomas de Kolmogórov

Para dos eventos A y B de un espacio muestral S se cumple:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$. Dado que $A \subseteq S$, entonces se cumple $0 \leq n(A) \leq n(S)$.

2) P(S) = 1. En esta situación los casos favorables son todos los casos posibles, o bien A = S.

3) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Del axioma 2 y 3 se deduce que $P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$, y entonces $P(\varnothing) = 0$.

Ejemplo

A partir del axioma 3 de Kolmogórov, demuestra que si A, B y C son eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Para 3 conjuntos A, B y C se cumple que: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Puesto que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) \quad \text{--------} \ (1)$$

Luego como $A \cap B = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{--------} \ (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1), se cumple que

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A) + P(B) + P(C).$$

De la misma manera si cada pareja de los eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces se tiene que:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Problemas

1. Determina la probabilidad que al formar un grupo de 5 personas entre 4 mujeres y 4 hombres si:
   a) está integrado por 2 hombres y 3 mujeres;
   b) está integrado por al menos un hombre o por al menos una mujer;
   c) está integrado por 3 o por 4 mujeres.

Utiliza las propiedades de los combinatorios para simplificar los cálculos.

2. Sean A, B, C y D eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = A \cap C = B \cap C = B \cap D = C \cap D = D \cap A = \varnothing$, demuestra que $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$.

1.6 Probabilidad del complemento*

Problema inicial

Calcula la probabilidad que al tirar un dado 3 veces caiga 1 al menos una vez.

Solución

Considerando el evento A: Cae 1 al menos una vez en 3 tiradas, entonces se puede definir el evento:

A^c = No cae 1 en las 3 tiradas.

Además, para el espacio muestral S, se cumple que $S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$ entonces:

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, pero $P(S) = 1$ (por los axiomas de Kolmogórov), entonces $P(A) + P(A^c) = 1$.

Por lo tanto $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Luego, $n(S) = 6^3$ (considerando que cada tirada tiene 6 opciones) y $n(A^c) = 5^3$ (hay 5 opciones, 2, 3, 4, 5 y 6) por lo tanto, $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$.

Finalmente $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Conclusión

Sea A un evento dentro de un espacio muestral S. Al evento A^c se le conoce como **complemento del evento A**, y a $P(A^c)$ se le conoce como **probabilidad del complemento del evento A**. Se cumple que

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños no queden las 3 niñas todas juntas.

Considerando el evento A: Las 3 niñas no quedan todas juntas.

Entonces A^c: Las 3 niñas quedan todas juntas.

Luego $n(A^c) = 4!3!$ y $n(S) = 6!$

Luego $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$, y por lo tanto, $P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

> También puedes encontrar los casos favorables contando por el complemento y calcular directamente lo que se está pidiendo.

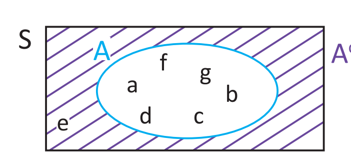
Problemas

1. La probabilidad de que una tuerca producida por una máquina sea defectuosa es $\frac{1}{40}$, determina la probabilidad que la tuerca sea no defectuosa.

2. Determina la probabilidad de que al tirar una moneda 10 veces se obtenga al menos una cara.

3. En un juego de dados se lanzan 6 dados, y un jugador gana si en la tirada se obtiene al menos un "1" en alguno de los dados. Determina la probabilidad de ganar en este juego de dados.

4. Considerando el evento A en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) $P(A^c)$ b) $1 - P(A^c)$ c) $P(A \cap A^c)$ d) $P(A \cup A^c)$



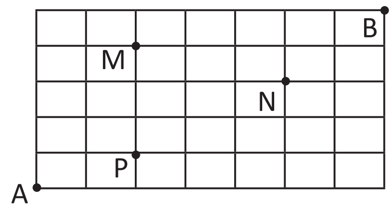
1.7 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas sobre probabilidad.

1. Determina el espacio muestral del experimento de lanzar 2 dados al mismo tiempo. Luego expresa como subconjunto el evento "la suma de los puntos es 7", y el evento "la suma de los puntos es 5".

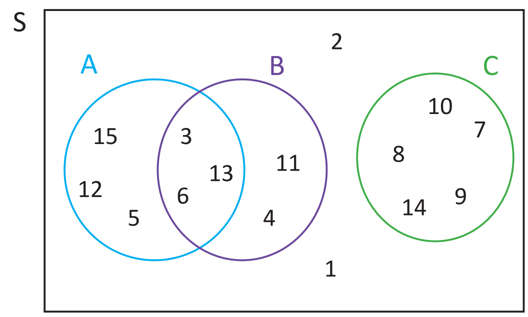
2. Carmen se transporta por la ciudad de Santa Ana, se encuentra en el punto A y desea llegar al punto B como lo muestra la figura. Determina la probabilidad de que tomando los caminos más cortos se cumpla lo siguiente:

   a) Carmen pasa por el punto M o por el punto N.
   b) Carmen pasa por el punto P y por el punto N.



3. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:

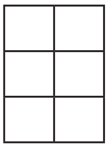
   a) El espacio muestral S, el evento A, el B y el C.
   b) $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
   c) $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ y $P(A \cap C)$.
   d) $P(A \cup B)$, $P(B \cup C)$ y $P(A \cup C)$.
   e) $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(C^c)$.
   f) $1 - P(A^c)$, $1 - P(B^c)$ y $1 - P(C^c)$.



4. Se eligen el presidente y vicepresidente de una comisión de entre 5 hombres y 5 mujeres. Determina la probabilidad de que el presidente sea mujer y el vicepresidente sea hombre.

5. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Al seleccionar una pieza de Braile, determina:

   a) La probabilidad de que la pieza tenga exactamente 3 puntos y 3 vacíos.
   b) La probabilidad de que la pieza tenga un punto o un vacío.
   c) La probabilidad de que la pieza tenga 8 puntos.



6. En una tienda de electrodomésticos se determina que al llegar un cliente, la probabilidad de que compre un televisor es $\frac{4}{15}$, que compre una refrigeradora es $\frac{7}{30}$, y que compre una lavadora es $\frac{2}{15}$. Determina la probabilidad de que al llegar un cliente se venda alguno de estos 3 productos. Considera que cada cliente compra a lo sumo un producto.

7. En un juego de azar se descubre que un dado está cargado, pues al lanzarlo 20 veces, en 17 ocasiones cayó 6. Si el juego consiste en lanzar un dado una vez y que no caiga 6, determina la probabilidad de ganar el juego.

8. Se encargarán 12 pupusas para cenar, y se puede escoger entre pupusa de ayote, revueltas y de queso. Determina la probabilidad de que al encargarlas, al menos una pupusa sea revuelta, considerando que cada tipo de pupusa tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

2.1 Probabilidad condicional

Problema inicial

Los resultados de una encuesta sobre profesiones se muestran en la tabla de la derecha. Calcula la probabilidad de que al elegir una persona sea una mujer matemática dado que ya se ha elegido una mujer.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Solución

Sea A: es matemático y B: es mujer.

Dado que ya se sabe que al elegir la persona esta fue mujer (ya no cabe la posibilidad de que sea hombre), entonces los casos posibles son 77.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Y los casos favorables están en la celda donde coincide que sea mujer como que sea matemático, es decir, son 22 casos favorables.

Por lo tanto, P(A si ya sucedió B) = $\frac{22}{77} = \frac{2}{7}$.

Definición

Dados dos evento A y B, se puede estar interesado en encontrar la probabilidad de que suceda el evento A suponiendo que ya sucedió el evento B. Esto se conoce como **probabilidad condicional**, se denota P(A/B), y se lee: "La probabilidad de A dado B". Para calcularla se puede considerar que los casos posibles son las formas en que puede suceder B, es decir n(B), y los casos favorables como las formas en que puede suceder A⋂B, es decir n(A⋂B). Entonces se cumple que

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

Considerando el total de casos que tiene el espacio muestral como n(S), se tiene que la igualdad anterior es equivalente a

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es mayor que 4 dado que es impar.

Considerando, A: es mayor que 4 y B: es impar.

$P(A\cap B) = \frac{1}{6}$ (solo 5 cumple), $P(B) = \frac{3}{6}$ (cumplen el 1, 3 y 5), por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{\cancel{6}} \div \frac{3}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$.

Problemas

1. Considerando la tabla del Problema inicial, determina:
   a) La probabilidad de escoger un hombre dado que se ocupa de los oficios del hogar.
   b) La probabilidad de escoger un matemático dado que es hombre.
   c) La probabilidad de escoger una mujer dado que es matemático.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es impar dado que es mayor que 3.

3. En una empresa de carros hay 3 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros, y al escoger un carro al azar, la probabilidad de que sea defectuoso y que sea de la máquina 1 es $\frac{1}{120}$. Determina la probabilidad de que un carro producido por la máquina 1 sea defectuoso.

2.2 Variantes de la probabilidad condicional

Problema inicial

En una bolsa hay 3 bolitas azules y 5 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición (sin regresar la primera bolita que se saca a la bolsa), determina la probabilidad de que las dos bolitas sean de color azul.

Solución

Sea A: la primera bolita es azul y B: la segunda bolita es azul.

Se está interesado en que tanto la primera como la segunda bolita sean azules, es decir, $P(A \cap B)$.

Se tiene que $P(A) = \frac{3}{8}$, ahora quedan 7 bolitas, de las cuales 2 son azules. Por lo tanto $P(B/A) = \frac{2}{7}$.

De la definición de probabilidad condicional se sabe que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, de lo cual se puede deducir que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de extraer dos bolitas azules es $\frac{3}{28}$.

Conclusión

Es posible calcular la probabilidad de una intersección a partir del resultado de probabilidad condicional que se estudió en la clase 2.1, para ello se cumple que: $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$.

Este resultado se conoce como **Teorema del producto para probabilidad.**

Problemas

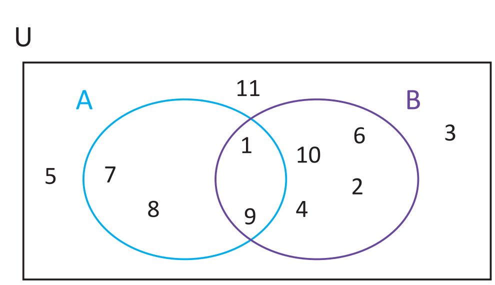
1. En una bolsa hay 2 bolitas azules y 4 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición, determina la probabilidad que la primera bolita sea azul y la segunda sea blanca.

2. Se tiene una baraja con cartas de 4 colores diferentes (uno de esos colores es verde), cada color tiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Si se extraen 2 cartas, una tras otra sin reposición, determina la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) Ambas sean 1.
   b) La primera sea 2 y la segunda sea 3.
   c) La primera sea 3 y la segunda sea 4 de color verde.
   d) Ambas sean del mismo color.
   e) La primera sea 2 y la segunda 1 del mismo color.

3. Utilizando el diagrama de Venn de la derecha calcula:

   a) P(B) y P(A).
   b) P(B/A) y P(A/B).
   c) Calcula $P(A \cap B)$ de dos formas diferente a partir de los literales anteriores.



2.3 Aplicación de la probabilidad condicional

Problema inicial

Se extraen dos cartas una tras otra de una baraja, determina la probabilidad de que la segunda carta sea de diamantes dado que la primera fue de diamantes, si:

a) La primera carta no se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.

b) La primera carta se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.

Solución

Considerando A: la segunda carta es de diamantes y B: la primera carta es de diamantes.

a) Para que la primera carta sea de diamantes hay 13 cartas disponibles, y luego dado que no se devuelve, para que la segunda carta sea de diamantes solamente habría 12 cartas disponibles. Y los casos posibles son 52 y luego 51 para la segunda carta, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$.

Además, para que la primera carta sea de diamantes hay 13 posibilidades, y para la segunda carta habrían 51 cartas disponibles, por lo tanto, $P(B) = \frac{13}{52} \times \frac{51}{51} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{17} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$.

b) La diferencia con el caso anterior es que para que la segunda sea de diamantes se tendrán 13 cartas disponibles de nuevo, y en los casos posibles 52 y 52, por lo tanto, $P(A\cap B) = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$.

Y análogamente $P(B) = \frac{13}{52} \times \frac{52}{52} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Conclusión

La probabilidad condicional a menudo se utiliza para agregar condiciones dependiendo la conveniencia o la situación determinada. Por ejemplo para el Problema inicial podría ser de utilidad para estudiar las estrategias de juego, en otras situaciones podría utilizarse para pronosticar el clima, situaciones de epidemias y características de las personas que afecta, entre otros.

Problemas

1. En un juego de cartas la primera carta ha sido de tréboles, para ganar es necesario que la segunda carta también sea de tréboles. Analiza en qué situación se tienen mayores probabilidades de ganar, si la segunda carta es extraída de la misma baraja que la primera (sin reponer la primera carta), o si la segunda carta es extraída de una baraja íntegra (de la cual no se ha extraído ninguna carta aún).

2. En un estudio se quiere determinar si la diabetes es una consecuencia del sobrepeso,y se investigó que la probabilidad de que una persona tenga sobrepeso es $\frac{1}{2}$, y además cuando una persona tiene sobrepeso la probabilidad de que tenga también diabetes es $\frac{2}{3}$. Determina la probabilidad de que una persona tenga tanto sobrepeso como diabetes.

3. En una carpintería se han elaborado 25 pupitres de los cuáles 4 están defectuosos, 5 tienen pequeños problemas y los demás están en óptimas condiciones. Determina la probabilidad de que al escoger 2 pupitres uno tras otro, el primero esté defectuoso y el segundo tenga pequeños problemas.

4. En un juego se tienen 3 puertas, y tras una de ellas hay un premio de un carro; el juego consiste en que el concursante elige una de las 3 puertas, luego el presentador, quien conoce qué hay detrás de cada puerta, abre una puerta que sabe que no tiene premio, y da la opción al concursante que cambie de puerta. Utiliza la probabilidad condicional para determinar con cuál opción (cambiando o quedándose con la puerta) tiene mayores probabilidades de ganar.

2.4 Problemas con probabilidad condicional

Problema inicial

En una carpintería se diseñan pupitres para personas zurdas, y en ella trabajan Marta, María y Carlos. Las probabilidades que un pupitre elaborado por Marta, María y Carlos tenga defectos es 0.1, 0.12 y 0.11 respectivamente. Si todos producen la misma cantidad de pupitres, determina:

a) La probabilidad de elegir un pupitre defectuoso.

b) La probabilidad de que al elegir un pupitre defectuoso este lo haya elaborado Marta.

Solución

a) Sean los eventos A: es de Marta, B: es de María, C: es de Carlos, D: es defectuoso.

Entonces se cumple que $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Además se sabe que: $P(D/A) = 0.1$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Marta).
$P(D/B) = 0.12$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de María).
$P(D/C) = 0.11$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Carlos).

Puesto que todos producen la misma cantidad de pupitres, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Además se sabe que $P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$, entonces $P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = \frac{1}{3}(0.1)$.

Análogamente se cumple que $P(B \cap D) = \frac{1}{3}(0.12)$ y $P(C \cap D) = \frac{1}{3}(0.11)$.

Por lo tanto, $P(D) = \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.12) + \frac{1}{3}(0.11) = \frac{1}{3}(0.33) = 0.11$.

b) Ahora bastaría calcular $P(A/D)$ (la probabilidad de que un pupitre sea de Marta dado que es defectuoso).

Dado que $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$, y del literal a), $P(A \cap D) = \frac{1}{3}(0.1)$ y $P(D) = 0.11$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{(0.11)} = \frac{10}{33}$.

Observa que una probabilidad se puede escribir como fracción o como decimal, y el Problema inicial también se puede trabajar convirtiendo los decimales a fracciones.

Conclusión

Para calcular la probabilidad de que un pupitre sea defectuoso fue necesario aplicar la regla de adición entre las intersecciones de eventos excluyentes (si un pupitre lo elabora Marta no pudo haber sido elaborado por Carlos o María), este resultado se conoce como **teorema de probabilidad total**.

Luego, se utilizó el resultado para calcular la probabilidad de que un pupitre sea de una persona en particular dado que ya se sabe que es defectuoso, este resultado se conoce como **teorema de Bayes**.

Problemas

1. En una fábrica hay 2 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros cada una; la probabilidad de que un carro ensamblado por la máquina 1 tenga problemas es 0.05 y la probabilidad de que un carro producido por la máquina 2 tenga problemas es 0.07, determina:
   a) La probabilidad de que un carro tenga problemas.
   b) La probabilidad de que al tener un carro con problemas, este haya sido ensamblado por la máquina 1.

2. Una imprenta posee 3 impresoras, la impresora 1 produce el 20%, la impresora 2 el 40% y la 3 produce el resto. La probabilidad de que la impresora 1 imprima defectuosamente una página es $\frac{1}{100}$, que lo haga la impresora 2 es $\frac{1}{50}$ y que sea la impresora 3 es $\frac{1}{40}$. Determina la probabilidad de que al tener una página defectuosa esta haya sido impresa por la máquina 3.

2.5 Experimentos independientes*

Problema inicial

Se definen dos experimentos y dos eventos de la siguiente manera:

T_1: Lanzar una moneda
T_2: Lanzar un dado

A_1: Cae cara
A_2: Cae uno o dos

a) Encuentra la probabilidad de que en T_2 ocurra A_2, cuando en T_1 ocurre A_1.
b) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1, cuando en T_2 ocurre A_2.
c) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1 y en T_2 ocurre A_2.

Solución

Sean S_1 y S_2 los espacios muestrales de T_1 y T_2 respectivamente.

a) Puesto que el experimento T_1 no influye en el experimento T_2, la probabilidad de A_2 es: $\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Puesto que el experimento T_2 no influye en el experimento T_1, la probabilidad de A_1 es: $\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$.

c) Considerando T_1 y T_2 como un solo experimento T con espacio muestral S, y denotando por C el evento ocurre A_1 en T_1 y A_2 en T_2, se tiene que $n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ y $n(C) = n(A_1) \times n(A_2)$, por lo tanto:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(S_1) \times n(S_2)} = \frac{n(A_1)}{n(S_1)} \times \frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

El resultado del literal c) se puede expresar como $P(C) = P(A_1) \times P(A_2)$.

Definición

Tomando dos experimentos T_1 y T_2 de modo que A_1 es un evento de T_1 y A_2 es un evento de T_2, se cumple que si la ocurrencia del experimento T_1 no influye en el experimento T_2 (y viceversa), se dice que T_1 y T_2 son **experimentos independientes**.

Se cumple que la probabilidad que ocurra tanto el evento A_1 en T_1 como el evento A_2 en T_2 es:

$$P(A_1) \times P(A_2).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 2 veces se obtenga “1” en la primera tirada y “2” en la segunda. Sea A: Cae “1” en la primera tirada, y B: Cae “2” en la segunda tirada.

Como A y B son eventos de dos experimentos independientes (lanzar el dado la primera vez es un experimento y lanzarlo la segunda vez es otro), entonces la probabilidad es:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} .$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja la primera sea de corazón y la segunda de trébol. Considera que después de la primera extracción se devuelve la carta.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar una moneda 3 veces, se obtenga solamente una cara y sea en el último lanzamiento.

3. Determina la probabilidad de que al extraer 2 cartas una tras otra de una baraja (con reemplazo), se cumpla que la primera es una carta roja, y la segunda es “J” o de diamantes.

4. Determina la probabilidad de que al responder 5 preguntas de verdadero y falso al azar se obtengan 4 respuestas correctas.

2.6 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 1

Problema inicial

Determina la probabilidad de que al lanzar 5 veces un dado se obtengan “6 o 3” dos veces.

Solución

Considerando en un lanzamiento el evento A: Cae 6 o 3 y B: No cae 6 ni 3.

Lanzar el dado 5 veces son 5 experimentos independientes, y para obtener el evento se tienen los siguientes casos:

$$ {}_5C_2 \text{ casos} \begin{cases} \text{A A B B B tiene probabilidad} \quad P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \text{A B A B B tiene probabilidad} \quad P(A) \times P(B) \times P(A) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases} $$

El total de casos es igual al número de maneras que hay para escoger 2 de los 5 lugares en donde ocurrirá el evento A, por lo tanto hay ${}_5C_2$ casos, y todos estos casos son mutuamente excluyentes y de igual probabilidad, por lo tanto la probabilidad es:

$$ {}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}. $$

Conclusión

Sea p la probabilidad de que suceda el evento A en un experimento. Cuando se repite n veces el experimento, la probabilidad de que ocurra el evento A r veces $(0 \leq r \leq n)$ es:

$$ ({}_nC_r)p^r(1-p)^{n-r}. $$

Ejemplo

Analizando el desempeño de un jugador de fútbol se obtuvo la información de que al tirar una falta, la probabilidad de que marque gol es $\frac{3}{10}$, la probabilidad de que el tiro pegue en algún poste es $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de que el tiro vaya fuera es $\frac{1}{5}$. Determina la probabilidad de que al realizar 6 tiros, 3 sean gol, 2 peguen en el poste y 1 vaya fuera.

Considerando en un tiro de falta los eventos A: es gol, B: pega en el poste, C: va fuera.

Puesto que cada tiro de falta es independiente del otro, se puede dar el caso de obtener los 3 goles en los primeros tiros, luego 2 al poste y 1 va fuera, cuya probabilidad es $P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(C)$.

Luego el total de casos es igual al total de formas en que se pueden escoger los experimentos (tiros) en que hará gol (${}_6C_3$) y luego de los restantes experimentos (tiros) escoger cuáles pegarán en el poste (${}_3C_2$).

Cada uno de estos casos tiene una probabilidad de ocurrir de $\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{5\,000}$.

Por lo tanto, la probabilidad es: ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times \frac{3}{5\,000} = \frac{9}{250}$.

Problemas

1. En una bolsa se tienen 3 bolitas rojas y 4 bolitas negras. Se extraen 4 bolitas una tras otra y con reemplazo (la bolita extraída se devuelve a la bolsa). Determina:
   a) La probabilidad de que hayan sido 2 bolitas rojas y 2 negras.
   b) La probabilidad de que haya sido a lo sumo 1 bolita roja.
   c) La probabilidad de que haya sido al menos 1 bolita negra.

2. Determina la probabilidad de que al extraer 7 cartas (una tras otra) con reemplazo de una baraja tradicional (de 52 cartas) 3 de ellas sean de diamantes, 2 sean de color negro y 2 sean de corazones.

2.7 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 2

Problema inicial

En un juego se lanza un dado hasta que se obtiene 2 veces el número cinco, determina la probabilidad de lograr esto en 4 lanzamientos del dado.

Solución

En este caso en el cuarto lanzamiento debe caer cinco, y en los primeros 3 lanzamientos también debe caer 1 vez cinco. Como cada lanzamiento es independiente del otro, entonces se tiene que la probabilidad requerida es:

$$_{3}C_{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{432}.$$

Conclusión

Considerando un evento A del espacio muestral de un experimento, si el experimento se repite n veces hasta que ocurra r veces el evento A, entonces el evento A tuvo que haber ocurrido $(r-1)$ veces en las primeras $(n-1)$ repeticiones y en la última repetición del experimento.

Problemas

1. De una baraja tradicional se extrae una carta tras otra, con reposición (después de extraerla se devuelve a la baraja), los experimentos terminan cuando se extraen 3 cartas de diamante. Determina la probabilidad de obtener estas 3 cartas de diamantes en las primeras 6 extracciones.

2. En un juego de mesa se puede comenzar a mover el peón hasta que se obtiene 6 en el lanzamiento de un dado.

   Determina:
   a) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del primer lanzamiento.
   b) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del tercer lanzamiento.
   c) La probabilidad de comenzar a mover el peón después de a lo sumo 3 lanzamientos.
   d) La probabilidad de comenzar a mover el peón en al menos 3 lanzamientos.

3. La meta de producción individual de una empresa textil es de 4 camisas sin imperfecciones, y la probabilidad de producir una camisa con imperfecciones es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de lograr la meta produciendo exactamente 5 camisas.
   b) La probabilidad de lograr la meta produciendo a lo sumo 6 camisas.
   c) La probabilidad de lograr la meta produciendo al menos 7 camisas.

4. Determina la probabilidad de que al sacar cartas de una baraja tradicional (52 cartas) la segunda carta de tréboles sea en la quinta extracción, considerando que la extracción es con reposición.

5. Un experto de tiro lanza dardos a un blanco, y se sabe que acierta 7 de cada 10 tiros. Un juego consiste en que 3 participantes dicen cuántos tiros será necesario hacer para lograr que 4 dardos den en el blanco; el primer participante dice que se logrará en 5 tiros, el segundo dice que en 7 tiros y el tercero dice que en 10 tiros. Determina qué participante tiene mayor probabilidad de ganar.

2.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de corazones, si ya se sabe que la carta extraída es de color rojo.

2. La probabilidad de que un programa de televisión sea visto por un hombre casado es 0.3, la probabilidad de que sea visto por una mujer casada es 0.4, y la probabilidad de que un esposo vea el programa cuando su esposa lo ve es 0.7.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que una pareja casada vea el programa.
   b) La probabilidad de que una esposa vea el programa dado que el esposo lo ve.
   c) La probabilidad de que al menos uno de los esposos vea el programa.

3. Para rifar 3 premios participan 15 personas, de las cuales 10 son mujeres y 5 son hombres, determina la probabilidad de que 3 hombres ganen un premio, si una misma persona no puede ganar dos premios.

4. La probabilidad de que llueva en un día de octubre es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que no llueva durante 5 días seguidos.
   b) La probabilidad de que llueva 3 días de una semana (5 días).
   c) La probabilidad de que llueva hasta el sexto día del mes de octubre.

5. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 5 veces se obtenga exactamente un cuatro, un seis y un uno, en alguno de los lanzamientos.

6. El 30% de los conductores tienen un accidente de tránsito, el 30% de estos accidentes es debido a que el conductor estaba bajo los efectos del alcohol, el 20% por contestar el celular y el 5% cambiaba la emisora. Por otro lado, el 40% de los conductores van bajo los efectos del alcohol, el 50% contestan el celular y el 70% cambia la emisora mientras conduce.

   Determina:
   a) La probabilidad de que una persona choque dado que se conduce ebria.
   b) La probabilidad de que una persona choque dado que contestó el celular.
   c) La probabilidad de que una persona choque dado que cambió la emisora.

7. En el control de calidad de una envasadora de alimentos se extraen productos hasta completar 4 defectuosos, si el 95% del producto es producido de buena calidad.

   Determina:
   a) La probabilidad de que se extraigan 10 elementos en el control de calidad.
   b) La probabilidad de que los primeros 4 productos sean los defectuosos.

2.9 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de diamante o de picas o Jota.

♠ Picas	♣ Tréboles
♥ Corazones	♦ Diamantes

2. Calcula la probabilidad de que al lanzar 3 dados la suma sea 10.

3. Determina la probabilidad de que al ordenar 3 bolas azules (idénticas), 4 bolas moradas (idénticas) y 2 bolas negras (idénticas) las bolas negras queden todas juntas.

4. En un juego se tienen 2 bolsas, la primera contiene 3 bolas blancas, 2 rojas y una negra, la segunda contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras. Se extrae una bola de alguna de las bolsas.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que se extraiga una bola negra de la segunda bolsa.
   b) La probabilidad de que se extraiga una bola roja.

5. En un ropero hay 3 pares de zapatos negros y 4 paresde zapatos cafés. Si se extrae un zapato, determina:

   a) La probabilidad de extraer un zapato café derecho o un zapato negro izquierdo.
   b) La probabilidad de extraer un zapato izquierdo o de color negro.

6. Calcula la probabilidad de que en una cadena binaria (de 0 y 1) de longitud 6 aparezcan al menos 3 ceros juntos al final de la cadena.

7. Determina la probabilidad de que al ubicar 2 torres en un tablero de ajedrez (8×8) estas queden alineadas vertical u horizontalmente.

8. Determina la probabilidad de que al ubicar 3 niñas y 3 niños en una mesa redonda ningún niño quede a la par de otro niño.

9. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Determina la probabilidad de que al escoger una pieza del sistema Braile tenga al menos una casilla vacía (sin punto en relieve).

Unidad 8

2.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. En un juego se tiene una baraja tradicional de la que se han quitado 3 cartas de corazones, una de diamante y 2 de tréboles, el juego consiste en adivinar de qué palo será la carta que se extraiga de la baraja modificada (picas, corazones, tréboles o diamantes). Determina la opción que tiene mayor probabilidad de ganar.

2. Un juego consiste en adivinar cuántas caras caerán al lanzar 7 veces una moneda, Carmen dice que caerán 4 caras y Carlos dice que caerán 3 caras. Determina quién tiene mayor probabilidad de ganar. Si fueran 8 lanzamientos, determina cuál sería la opción más probable.

3. Un juego de dados consiste en adivinar después de cuántas tiradas se obtendrá 3 veces el número 5. Una persona dice que se logrará después de 6 tiradas, otra dijo que después de 7, y otra dijo que después de 8 tiradas. Determina qué persona tiene mayores probabilidades de ganar. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?

4. La probabilidad de que en una calle el semáforo esté arruinado es 0.2, la probabilidad de que en dicha calle ocurra un accidente es 0.5, y la probabilidad de que ocurra un accidente considerando que el semáforo está dañado es 0.75.

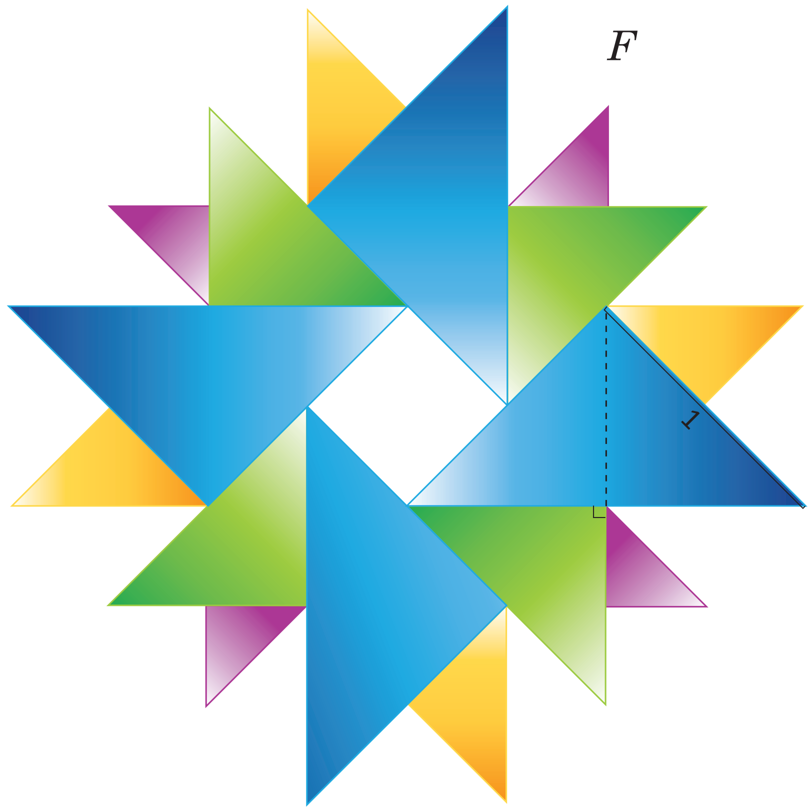
   Determina:
   a) La probabilidad de que ocurra un accidente y el semáforo esté arruinado.
   b) La probabilidad de que el semáforo esté arruinado dado que ocurrió un accidente.

5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 bolas rojas, todas indistinguibles entre sí, se extraen 3 bolas de la urna, una después de la otra, con la condición que si la bola es roja se devuelve a la urna, pero si la bola es blanca no se devuelve. Determina la probabilidad de que al sacar 3 bolas, exactamente una de ellas sea de color blanco.

6. En un consultorio se tiene que la probabilidad de que alguien tenga cáncer si se le ha diagnosticado es 0.9, y la probabilidad de que alguien lo padezca si se le ha diagnosticado que no lo tiene es 0.15, además se sabe que el 20% de los pacientes son diagnosticados con cáncer.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que un paciente padezca de cáncer.
   b) La probabilidad de que un paciente sea diagnosticado con cáncer si lo padece.

7. En un juego de un programa de televisión se gira una ruleta de colores, participan 3 personas. El juego consiste en adivinar después de cuántas giradas caerá la ruleta en la casilla de color rojo. Una persona dice que en la tercera girada, otra dice que en la sexta girada, y la última dice que en la cuarta girada. Determina cuál de las personas tiene mayor probabilidad de ganar si la probabilidad de que caiga rojo en la ruleta es 0.3. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?



Área F = ¿?

La figura está formada por 4 triángulos de cada color, entonces se tiene que:

$$\text{Área } F = 4T_1 + 4T_2 + 4T_3 + 4T_4 = 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$$

Entonces del contenido de sucesiones geométricas: $\text{Área } F = 4\left(\frac{2^4 - 1}{2^4}\right) = \frac{15}{4}.$

GOBIERNO
DE EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

EL SALVADOR
Grande como su gente

JICA