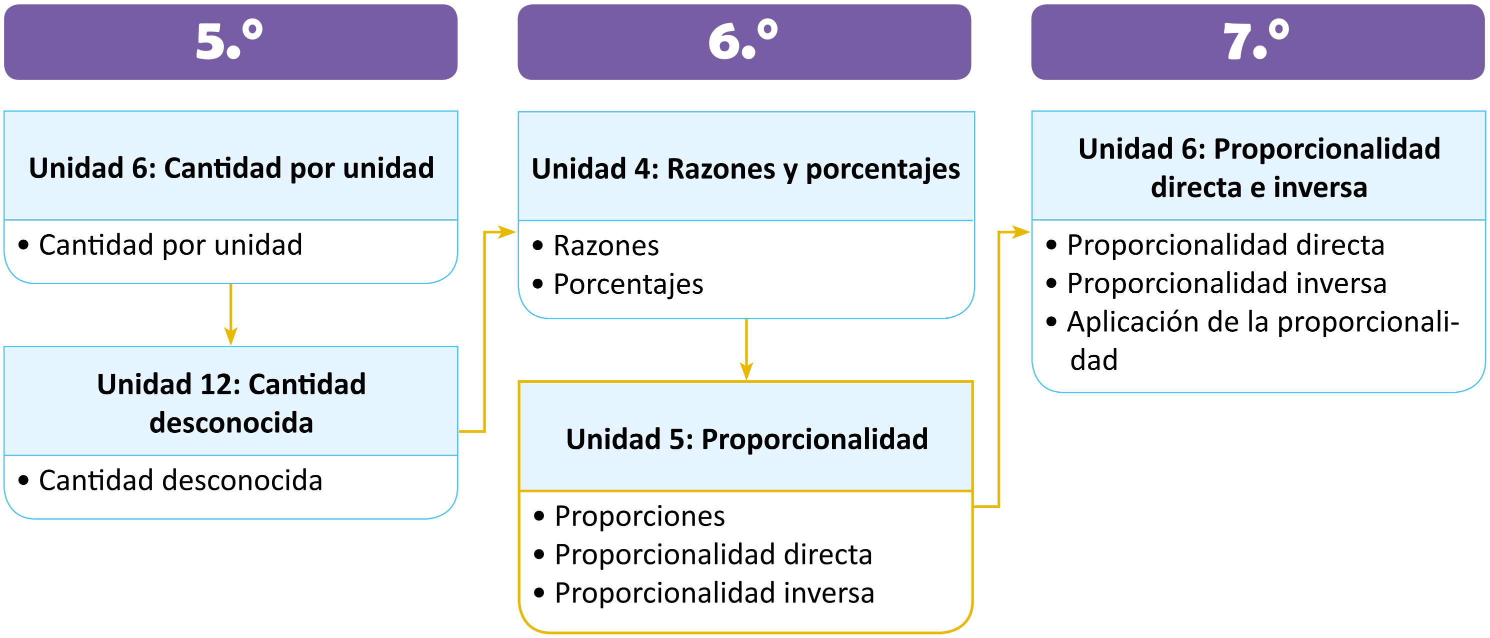
Unidad 5

Proporcionalidad

1 Competencias de la unidad

- Aplicar las propiedades de las proporciones para determinar razones equivalentes y resolver situaciones del entorno.
- Resolver situaciones – problema del entorno utilizando la proporcionalidad directa o inversa.

2 Secuencia y alcance



5.°

Unidad 6: Cantidad por unidad
- Cantidad por unidad

Unidad 12: Cantidad desconocida
- Cantidad desconocida

6.°

Unidad 4: Razones y porcentajes
- Razones
- Porcentajes

Unidad 5: Proporcionalidad
- Proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa

7.°

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

3 Plan de la unidad

Lección	Clase	Título
1 **Proporciones**	1	Variación de cantidades para obtener la misma razón
	2	Razones equivalentes y proporciones
	3	Razón equivalente más simple
	4	Proporciones que incluyen números decimales
	5	Proporciones que incluyen fracciones
	6	Relación de aspecto
	7	Propiedad de las proporciones
	8	Proporciones con un dato desconocido
	9	Propiedad fundamental de las proporciones
	10	Resolución de problemas aplicando proporciones
	11	Reparto proporcional
	12	Practica lo aprendido
	13	Practica lo aprendido

	1	Prueba 1 de la unidad 5

2 **Proporcionalidad directa**	**1**	Relación de proporcionalidad directa
	2	Propiedad de la proporcionalidad directa
	3	Identificación de cantidades directamente proporcionales
	4	Otras cantidades directamente proporcionales
	5	Expresión y = constante × x
	6	Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales
	7	Proporcionalidad directa con un dato desconocido
	8	Practica lo aprendido
3 **Proporcionalidad inversa**	**1**	Relación de proporcionalidad inversa
	2	Propiedad de proporcionalidad inversa
	3	Identificación de cantidades inversamente proporcionales
	4	Expresión $x \times y$ = constante
	5	Proporcionalidad inversa con un dato desconocido
	6	Practica lo aprendido
	7	Proporcionalidad directa e inversa
	1	Prueba 2 de la unidad 5

Total de clases **28**

+ prueba 1 de la unidad
+ prueba 2 de la unidad

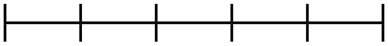
Lección 1

Proporciones (13 clases)

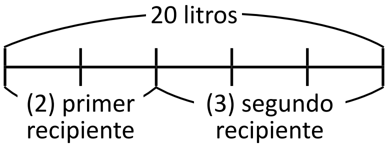
La lección inicia con situaciones donde se desea conservar el mismo sabor, tono, consistencia, etc.; esta idea de conservación sirve para introducir los conceptos de razones equivalentes y de proporción, los cuales se formalizan hasta la clase 1.2. En las clases siguientes se abordan cuestiones sobre la razón equivalente más simple, y proporciones que incluyen números decimales y fracciones; para lo primero es necesario tener clara la relación entre una razón y su valor de razón, y cómo obtener una a partir de la otra, y para lo segundo se utiliza la estrategia vista en la clase 1.1 sobre aumentar el antecedente y el consecuente de una razón la misma cantidad de veces para obtener razones equivalentes y, por tanto, proporciones.

Luego, se trabajan propiedades de las proporciones con el fin de encontrar datos desconocidos, y verificar la propiedad fundamental de las proporciones. La lección finaliza con situaciones sobre repartos proporcionales, es decir, aquellas situaciones donde una cantidad determinada debe ser repartida, no en forma equitativa, sino de manera que se cumpla cierta razón. Para este tipo de problemas se utiliza una gráfica que facilita la visualización de los datos involucrados y lo que representan cada uno con respecto a la razón dada; por ejemplo, para repartir 20 litros de agua en dos recipientes de tal forma que la razón entre las cantidades depositadas en cada uno sea 2 : 3 se hace lo siguiente:

① Se dibuja un segmento de recta dividido en 2 + 3 = 5 partes iguales (si la razón fuese 4 : 7 entonces el total de partes sería 4 + 7 = 11).



② El segmento completo representa los 20 litros de agua, 2 de estas partes corresponden a la cantidad de agua depositada en el primer recipiente y las otras 3 a la cantidad de agua depositada en el segundo.



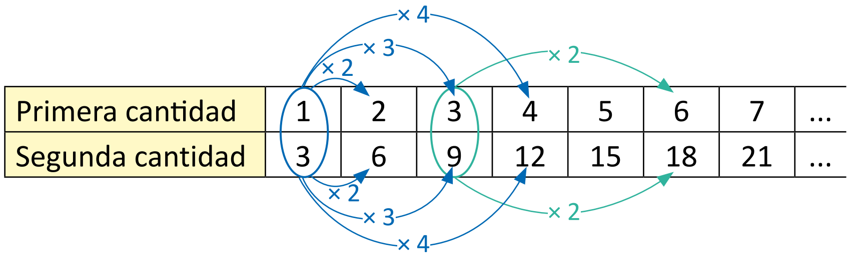
③ Cada división del segmento equivale a 20 ÷ 5 = 4 litros. Entonces, al primer recipiente le corresponden 4 × 2 = 8 litros, y al segundo 4 × 3 = 12 litros; la razón 8 : 12 es equivalente a 2 : 3.

Después de esta lección se aplica una prueba para verificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes y detectar aquellos contenidos de la lección 1 donde aún tienen dificultad.

Lección 2

Proporcionalidad directa (8 clases)

En la primera clase se trabaja con situaciones donde los estudiantes deben identificar la dependencia que tiene una de las cantidades con respecto a la otra, introduciendo así las primeras ideas sobre el concepto de función que será estudiado más formalmente en tercer ciclo. Además, la proporcionalidad directa se define observando el cambio en ambas cantidades, es decir, si la primera cantidad se multiplica por 2 entonces la segunda también se multiplicará por ese factor, si la primera cantidad se multiplica por 3 entonces la segunda también se multiplicará por ese factor, y así sucesivamente. En general, si la primera cantidad se multiplica por un número n entonces la segunda cantidad también se multiplicará por ese número n:



Primera cantidad	1	2	3	4	5	6	7	...
Segunda cantidad	3	6	9	12	15	18	21	...

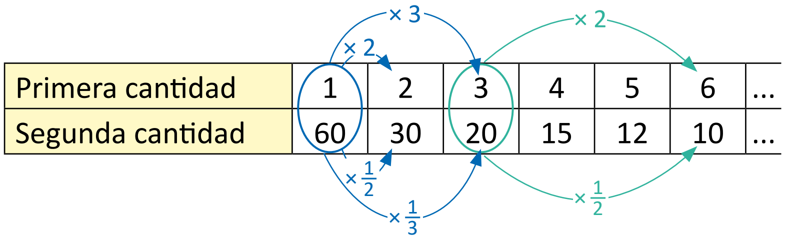
En las clases siguientes se deduce la propiedad de la proporcionalidad directa sobre el cociente constante entre las cantidades, y se utiliza dicho cociente para verificar cuándo dos cantidades son directamente proporcionales, y en la escritura de la relación de proporcionalidad y = constante × x. Finalmente, se trabajan problemas similares a los presentados en la lección 1 sobre proporciones, donde debe encontrarse un dato desconocido en situaciones que involucran cantidades directamente proporcionales; para resolverlos se espera que los estudiantes utilicen la definición de proporcionalidad directa dada en la clase 2.1 o la propiedad de la proporcionalidad directa sobre el cociente.

En séptimo grado se continuará este contenido, incluyendo a los números negativos y el cero en las situaciones para poder trazar la gráfica de la proporcionalidad directa. Por tal razón, cuando se define qué son las cantidades directamente proporcionales debe mencionarse el factor que está involucrado en el "aumento" de las cantidades y no solamente indicar que si una aumenta, la otra también. Además, para la segunda expresión debe tenerse cuidado, pues se cumple cuando la constante de proporcionalidad directa es un número positivo (que es lo que se estudia en sexto grado); en tercer ciclo los estudiantes trabajarán situaciones cuya constante es negativa y notarán que si bien la primera cantidad aumenta, la segunda disminuye y sigue siendo una situación de proporcionalidad directa.

Lección 3

Proporcionalidad inversa (7 clases)

Similar a la lección anterior, en la primera clase se define la proporcionalidad inversa identificando en este caso que si la primera cantidad se multiplica por un número n, entonces la segunda cantidad se multiplicará por el recíproco de ese número n, o sea, $\frac{1}{n}$:

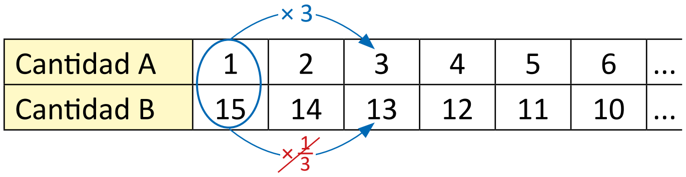


Primera cantidad	1	2	3	4	5	6	...
Segunda cantidad	60	30	20	15	12	10	...

Como en la proporcionalidad directa, para la inversa es necesario mencionar el factor por el que se multiplican cada una de las cantidades y no solamente indicar que si una aumenta entonces la otra disminuye. Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestra la relación entre dos cantidades A y B, se observa claramente que la cantidad A aumenta y la cantidad B disminuye:

Cantidad A	1	2	3	4	5	6	...
Cantidad B	15	14	13	12	11	10	...

Partiendo de los valores 1 para la cantidad A y 15 para la cantidad B, si el primero se multiplica por 3 el resultado es 3; si fuese una relación de proporcionalidad inversa debería multiplicarse 15 por $\frac{1}{3}$ y resultar 13, lo cual no es verdadero:



Cantidad A	1	2	3	4	5	6	...
Cantidad B	15	14	13	12	11	10	...

Por lo tanto, la relación entre las cantidades A y B del ejemplo anterior no es de proporcionalidad inversa. Para poder identificar cuándo dos cantidades son inversamente proporcionales, en las clases siguientes de la lección se deduce la propiedad de la proporcionalidad inversa sobre el producto constante y se utiliza también para escribir la relación en la forma $x \times y$ = constante. Luego, se trabajan problemas sobre el cálculo de datos desconocidos en situaciones de proporcionalidad inversa y se consolidan los contenidos de la unidad en la identificación de cantidades que son directa o inversamente proporcionales, o ninguna de las dos.

Una vez finalizada la lección, se aplica una prueba para verificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes de las lecciones 2 y 3, y detectar aquellos en los que aún tienen dificultad.

Lección 1 Proporciones

1.1 Variación de cantidades para obtener la misma razón

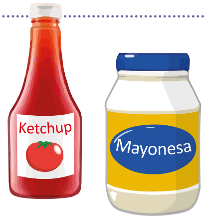
Recuerda

① Completa escribiendo la razón y el valor de razón según el siguiente el ejemplo:

Situación	Razón ($a : b$)	Valor de razón
1. Juan mezcló 6 cucharadas de café y 2 de azúcar. ¿Cuál es la razón entre café y azúcar?	6 : 2	$\frac{6}{2} = 3$
2. De 5 tiros libres Juan logra anotar 3 goles. ¿Cuál es la razón entre tiros libres y goles?	5 : 3	$\frac{5}{3}$
3. En un salón hay 10 niñas y 13 niños. ¿Cuál es la razón entre niñas y niños?	10 : 13	$\frac{10}{13}$

Analiza

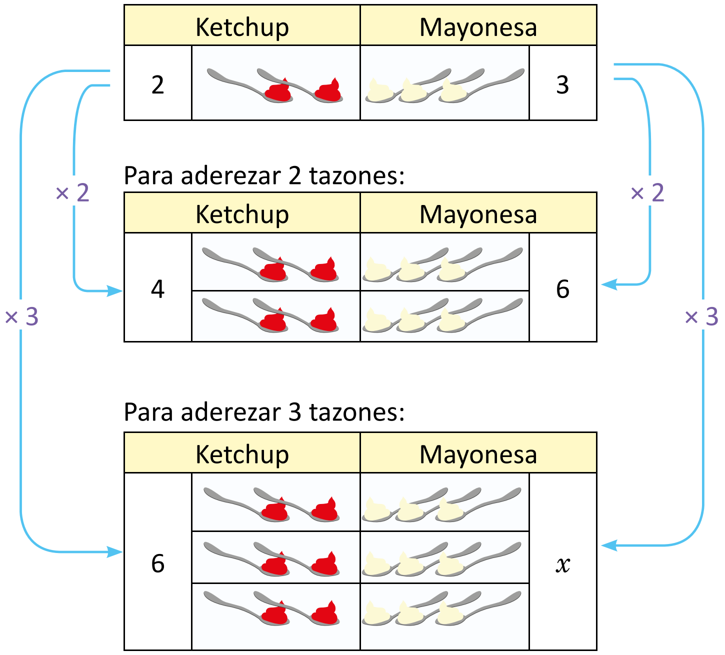
Según la receta de María, para aderezar un tazón de ensalada con salsa rosada se deben mezclar 2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa. ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se deben mezclar para obtener el mismo sabor, si se utilizan 6 cucharadas de ketchup? Representa la cantidad de cucharadas de mayonesa como x.



Soluciona

Represento en una tabla la cantidad de cucharadas de cada ingrediente relacionadas con la cantidad de tazones de ensalada que se pueden aderezar:

②



Para aderezar 1 tazón:

Ketchup	Mayonesa
2	3

2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa.

Para aderezar 2 tazones:

Ketchup	Mayonesa
4	6

4 cucharadas de ketchup y 6 cucharadas de mayonesa.

Para aderezar 3 tazones:

Ketchup	Mayonesa
6	x

6 cucharadas de ketchup y x cucharadas de mayonesa.

Ketchup: 6 cucharadas son 3 veces 2 cucharadas.
Mayonesa: 9 cucharadas son 3 veces 3 cucharadas. Es decir que $x = 9$.
R: Se necesitan 9 cucharadas de mayonesa.

Comprende

③ Cuando se tiene una razón entre dos cantidades $a : b$, la cual se quiere mantener para conservar el mismo sabor, tono, consistencia etc., se pueden aumentar los números a y b en la misma cantidad de veces hasta encontrar las cantidades que se necesitan.

Ejemplo: ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se necesitan si se utilizan 10 cucharadas de ketchup?

Recuerda que, en una razón $a : b$, a la cantidad a se le llama antecedente y a la cantidad b se le llama consecuente.

× 5

Ketchup	Mayonesa
2 cucharadas	3 cucharadas
10 cucharadas	x cucharadas

× 5

En 10 cucharadas de ketchup hay 5 veces 2 cucharadas. Entonces de mayonesa son 5 veces 3 cucharadas, es decir, $x = 15$.

R: 15 cucharadas.

Resuelve

1. En cada literal, encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor.

④

a.

× 4

Chocolate	Leche
3 tazas	2 tazas
12 tazas	x tazas

× 4

$x = 8$

b.

× 7

Café	Leche
2 tazas	1 taza
x tazas	7 tazas

× 7

$x = 14$

c.

× 2

Agua	Jugo de limón
7 vasos	2 vasos
14 vasos	x vasos

× 2

$x = 4$

d.

× 3

Ketchup	Mayonesa
2 cucharadas	5 cucharadas
x cucharadas	15 cucharadas

× 3

$x = 6$

2. Cierta receta indica que la relación entre las tazas de agua y harina es 1 : 3
   a. Por 6 tazas de agua, ¿cuántas tazas de harina se deben utilizar?
   b. Por 15 tazas de harina, ¿cuántas tazas de agua se deben utilizar?

Desafíate

Para preparar café con leche el abuelo José dice: "por cada 2 tazas de café hay que agregar 1 taza de leche y 3 cucharadas de azúcar". Para preparar café con leche con el mismo sabor utilizando 8 tazas de café, ¿cuántas tazas de leche y cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar?

R: 4 tazas de leche y 12 cucharadas de azúcar

Indicador de logro:

1.1 Realiza variaciones proporcionales entre dos cantidades.

Propósito: Introducir las razones equivalentes y la proporción a partir de situaciones sobre conservación de sabor, tono, consistencia, etc.

Puntos importantes: En ① se repasan la escritura de una razón en la forma $a : b$ y la obtención del valor de la razón al calcular el cociente $\frac{a}{b}$; si al calcular el cociente el resultado no es un número natural o un decimal finito, entonces los estudiantes pueden dejar el valor de la razón como fracción. Se espera que los estudiantes resuelvan de forma intuitiva el problema del Analiza, tal como lo hace Ana en ②, y determinen que si la cantidad de cucharadas de ketchup se triplica, entonces también lo debe hacer la cantidad de cucharadas de mayonesa (para mantener el sabor).

En ③ debe enfatizarse que en las situaciones donde es necesario conservar el mismo sabor, tono, consistencia, etc., los números de la razón $a : b$ deben aumentarse la misma cantidad de veces. Esta información se utiliza para resolver los problemas en ④.

Sugerencia metodológica: En adelante se utilizarán letras para representar cantidades desconocidas, los estudiantes no deben confundir la letra x con el símbolo ×. En el problema 2a. del Resuelve debe recordarse que si la razón entre las tazas de agua y harina es 1 : 3 entonces esto significa que por cada taza de agua se utilizan 3 de harina.

Solución de problemas:

2. La razón 1 : 3 indica que por cada taza de agua se utilizan 3 de harina.

a.

Agua	Harina
1 tazas	3 tazas
6 tazas	x tazas

× 6 × 6

$x = 18$

R: 18 tazas de harina.

b.

Agua	Harina
1 tazas	3 tazas
x tazas	15 tazas

× 5 × 5

$x = 5$

R: 5 tazas de agua.

Fecha: **Clase:** 1.1

(Re) Razón Valor de razón

$5 : 3 \longrightarrow \frac{5}{3}$

$10 : 13 \longrightarrow \frac{10}{13}$

(A) ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se deben mezclar si se utilizan 6 de ketchup?

(S) Para 1 tazón:

Ketchup	Mayonesa
2	3

Para 3 tazones:

Ketchup	Mayonesa
6	9

× 3 × 3

Ketchup: 6 cucharadas son 3 veces 2 cucharadas.
Mayonesa: 9 cucharadas son 3 veces 3 cucharadas.

R: 9 cucharadas de mayonesa.

(R) 1. Encuentra la cantidad x.

a.

Chocolate	Leche
3 tazas	2 tazas
12 tazas	x tazas

× 4 × 4

$x = 8$

b.

Café	Leche
2 tazas	1 taza
x tazas	7 tazas

× 7 × 7

$x = 14$

Tarea: página 92

Lección 1

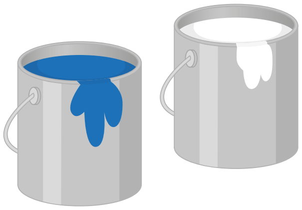
1.2 Razones equivalentes y proporciones

Analiza

① Ana y Carlos mezclaron pintura azul y blanca para obtener un tono celeste. Ana utilizó 3 botes de pintura azul y 4 botes de pintura blanca; mientras que Carlos utilizó 6 botes de pintura azul y 8 botes de pintura blanca.

a. Encuentra el valor de razón entre los botes de pintura azul y blanca que utilizó cada uno.

b. ¿Obtuvieron el mismo tono de celeste?



Soluciona

a. La razón entre las cantidades de botes de pintura azul y blanca para el caso de Ana es 3 : 4, mientras que para Carlos es 6 : 8. Al calcular los valores de las razones obtengo:

$$\text{Ana} \longrightarrow \frac{3}{4} \qquad \text{Carlos} \longrightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{3}{4}$$

José

R: El valor de la razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75).

b. Sí, obtuvieron el mismo tono de celeste, porque en cada caso se obtuvo el mismo valor de razón $\frac{3}{4}$.

Comprende

②
- Cuando dos razones tienen el mismo valor de la razón se les llama **razones equivalentes**.
- A la igualdad entre dos razones equivalentes se le llama **proporción**. Es decir, si la razón $a : b$ es equivalente a la razón $c : d$ entonces la proporción se escribe:

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

y se lee "a es a b como c es a d"; a, b, c y d representan cualquier número.

Por ejemplo, las razones 3 : 4 y 6 : 8 son equivalentes porque su valor de razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75). Puede escribirse la proporción 3 : 4 = 6 : 8.

¿Sabías que...?

Una proporción también puede escribirse utilizando el símbolo "::" en lugar del símbolo "=". Así, 3 : 4 :: 6 : 8 representa una proporción.

Resuelve

③ 1. ¿Son equivalentes las razones dadas en cada literal? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.

a. 2 : 3 y 6 : 9

b. 16 : 12 y 4 : 3

c. 4 : 5 y 8 : 15

2. Carlos y Daniel prepararon salsa rosada. Escribe la razón de ketchup y mayonesa de cada una de las recetas y explica si tienen el mismo sabor.

Carlos	
Ketchup	Mayonesa
4 cucharadas	6 cucharadas

Daniel	
Ketchup	Mayonesa
6 cucharadas	9 cucharadas

3. Para preparar charamuscas de café con leche, la mamá de Beatriz utiliza 4 vasos de café y 3 vasos de leche.

a. Encuentra el valor de la razón de café y leche.

b. Beatriz decidió preparar charamuscas y mezcló 12 vasos de café con 9 vasos de leche. ¿El sabor de estas charamuscas será el mismo de las que prepara su mamá?

Indicador de logro:

1.2 Determina si dos razones son equivalentes verificando la igualdad de sus valores de razón.

Propósito: Definir el concepto de razones equivalentes para identificar proporciones.

Puntos importantes: El problema planteado en ① hace necesario calcular y comparar los valores de las razones para poder responder a la pregunta en b. En ② se define qué son las razones equivalentes y qué es una proporción; en esta clase se deben reforzar la lectura y escritura correcta de una proporción. Para el problema 1. en ③, los estudiantes deben calcular los valores de las razones en cada literal, es recomendable que los escriban como fracción y simplifiquen en los casos que sea posible; en el problema 2., aunque no se solicita, deben calcularse los valores de las razones en cada caso para determinar si tienen el mismo sabor.

Sugerencia metodológica: Se debe recordar a los estudiantes sobre el orden de las cantidades cuando se escribe una razón; por ejemplo, como en a. de ① se pide el valor de la razón entre los botes de pintura azul y blanca, para el caso de Ana la razón correcta es 3 : 4 y para Carlos es 6 : 8. Es recomendable escribir el valor de una razón como fracción en los casos donde el resultado sea un decimal y no un número natural.

Solución de problemas:

1. Se calculan los valores de las razones en cada caso para verificar si son iguales.

a. $2 : 3 \longrightarrow \frac{2}{3}$

$6 : 9 \longrightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2}{3}$

Son equivalentes, 2 : 3 = 6 : 9

b. $16 : 12 \longrightarrow \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{4}{3}$

$4 : 3 \longrightarrow \frac{4}{3}$

Son equivalentes, 16 : 12 = 4 : 3

c. $4 : 5 \longrightarrow \frac{4}{5}$

$8 : 15 \longrightarrow \frac{8}{15}$

No son equivalentes.

2. Para Carlos y Daniel, el valor de la razón de ketchup y mayonesa es $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, sí tienen el mismo sabor.

3. a. **R:** $\frac{4}{3}$

b. $12 : 9 \longrightarrow \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{4}{3}$ **R:** Sí será el mismo.

Fecha: **Clase:** 1.2

Ⓐ Ana utilizó 3 botes de pintura azul y 4 de pintura blanca; Carlos utilizó 6 botes de pintura azul y 8 de pintura blanca.

a. Encuentra el valor de razón entre los botes de pintura azul y blanca que utilizó cada uno.

b. ¿Obtuvieron el mismo tono?

Ⓢ a. Ana $\longrightarrow$ Razón 3 : 4 $\longrightarrow$ Valor de razón $\frac{3}{4}$

Carlos $\longrightarrow$ Razón 6 : 8 $\longrightarrow$ Valor de razón $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{3}{4}$

b. Sí, obtuvieron el mismo tono porque ambos obtuvieron el mismo valor de razón $\frac{3}{4}$.

Ⓡ 1. a. $2 : 3 \longrightarrow \frac{2}{3}$

$6 : 9 \longrightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2}{3}$

Son equivalentes, 2 : 3 = 6 : 9

b. $16 : 12 \longrightarrow \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{4}{3}$

$4 : 3 \longrightarrow \frac{4}{3}$

Son equivalentes, 16 : 12 = 4 : 3

c. No son equivalentes.

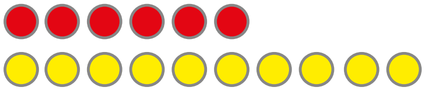
Tarea: página 93

1.3 Razón equivalente más simple

Analiza

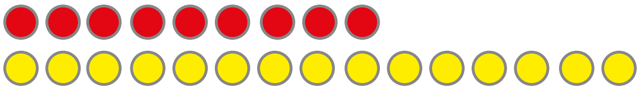
① Carlos hizo una mezcla con 6 botes de pintura roja y 10 botes de pintura amarilla, y Beatriz con 9 botes de pintura roja y 15 botes de pintura amarilla. ¿Obtuvieron el mismo tono de anaranjado?

Carlos



6 : 10

Beatriz



9 : 15

Soluciona ②

Carmen

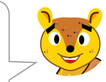
Será el mismo tono de anaranjado si las razones son equivalentes. Calculo el valor de la razón para cada caso:

Carlos → $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}$ Beatriz → $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{3}{5}$

Entonces, las razones son equivalentes, es decir, 6 : 10 = 9 : 15.

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Esto significa que por cada 3 botes de pintura roja se utilizan 5 botes de pintura amarilla.



Antonio

Calculo el valor de la razón en ambos casos:

Carlos → 6 ÷ 10 = 0.6

Beatriz → 9 ÷ 15 = 0.6

Como el valor de la razón es el mismo, son razones equivalentes, 6 : 10 = 9 : 15

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Comprende

Encontrar una razón equivalente con números menores es **simplificar el valor de la razón**; cuando se obtiene la razón equivalente con los números naturales menores posibles se obtiene la **razón equivalente más simple** o **simplificada**.

Por ejemplo, para las razones 6 : 10 y 9 : 15, su razón equivalente más simple es 3 : 5, pues si se simplifican los valores de las razones $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$ se obtiene $\frac{3}{5}$, que corresponde a la razón 3 : 5

③ **¿Qué pasaría?**

Para calcular la razón equivalente más simple de 12: 30, se simplifica el valor de la razón hasta su mínima expresión:

$$\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{30}}} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la razón equivalente más simple de 12 : 30 es 2 : 5

Resuelve

④ 1. Para cada razón, encuentra la razón equivalente más simple.

a. 6 : 4
b. 16 : 20
c. 30 : 18
d. 10 : 35
e. 12 : 8

2. Juan y Ana quieren saber quién de ellos hace más goles al cobrar tiros libres. Juan hizo 14 tiros libres y de estos 6 fueron goles, y Ana logró 9 goles de 21 tiros libres. ¿Quién hace más goles?

Indicador de logro:

1.3 Calcula la razón equivalente más simple de una razón dada y la escribe en la forma $a : b$.

Propósito: Simplificar el valor de una razón dada para obtener otra equivalente cuyos antecedente y consecuente sean los números naturales menores posibles.

Puntos importantes: A diferencia de la clase anterior, las razones para Carlos y Beatriz en ① parecen no ser equivalentes (a simple vista); la idea es que los estudiantes se familiaricen con situaciones donde las razones pueden simplificarse para obtener otra equivalente cuyos antecedente y consecuente son los números naturales menores posibles, es decir, el valor de la razón resultaría en una fracción irreducible. Se espera que los estudiantes resuelvan como lo hace Carmen en ②, pues simplificar el valor de la razón es lo que utilizarán para los problemas propuestos en ④; si un estudiante resuelve como Antonio, es decir, efectúa las divisiones, entonces se le debe indicar que también encuentre la solución usando fracciones.

Sugerencia metodológica: Recordar a los estudiantes que para simplificar una fracción pueden hacerlo como aparece en ③, es decir, ir realizando divisiones sucesivas para el numerador y denominador.

Solución de problemas:

1\. a. 6 : 4 ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3}{2}$

La razón equivalente más simple es 3 : 2

b. 16 : 20 ⟶ $\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{4}{5}$

La razón equivalente más simple es 4 : 5

c. 30 : 18 ⟶ $\frac{\overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} = \frac{5}{3}$

La razón equivalente más simple es 5 : 3

d. 10 : 35 ⟶ $\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{7}{\cancel{35}}} = \frac{2}{7}$

La razón equivalente más simple es 2 : 7

e. 12 : 8 ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{3}{2}$

La razón equivalente más simple es 3 : 2

2\. Juan ⟶ $\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{7}{3}$

Ana ⟶ $\frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{7}{3}$

R: Ambos hacen la misma cantidad de goles.

Fecha: **Clase:** 1.3

Ⓐ Carlos mezcló 6 botes de pintura roja y 10 de pintura amarilla, y Beatriz mezcló 9 botes de pintura roja y 15 de pintura amarilla. ¿Obtuvieron el mismo tono de anaranjado?

Ⓢ Se calcula el valor de la razón para cada caso:

Carlos ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}$ Beatriz ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{3}{5}$

Entonces, las razones son equivalentes, es decir,

6 : 10 = 9 : 15.

R: Carlos y Beatriz obtuvieron el mismo tono de anaranjado.

Ⓡ 1. Encuentra la razón equivalente más simple.

a. 6 : 4 ⟶ $\frac{6}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{2}}}$

La razón equivalente más simple es 3 : 2

b. 16 : 20 ⟶ $\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{4}{5}$

La razón equivalente más simple es 4 : 5

c. **R:** 5 : 3 d. **R:** 2 : 7 e. **R:** 3 : 2

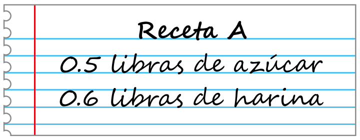
2\. **R:** Hacen la misma cantidad de goles, ya que el valor de la razón para ambos es $\frac{7}{3}$.

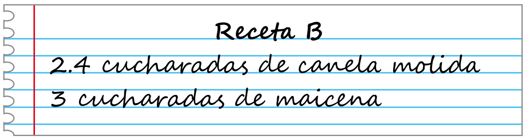
Tarea: página 94

1.4 Proporciones que incluyen números decimales

Analiza

1 Juan quiere preparar una receta de pan dulce y otra de atol, por lo que utiliza las siguientes recetas:


Receta A
0.5 libras de azúcar
0.6 libras de harina


Receta B
2.4 cucharadas de canela molida
3 cucharadas de maicena

Juan quiere obtener el mismo sabor pero solo puede medir libras y cucharadas completas. ¿Qué cantidades debe usar para preparar las recetas?

Soluciona

En la receta A, la razón entre libras de azúcar y libras de harina es 0.5 : 0.6

Para mantener el mismo sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces (¡esto lo ví en la primera clase!).

Multiplico el antecedente y consecuente por 10

0.5 : 0.6 = (0.5 × 10) : (0.6 × 10)
= 5 : 6

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta A utilizando 5 libras de azúcar y 6 libras de harina.

2 En la receta B, la razón entre cucharadas de canela y cucharadas de maicena es 2.4 : 3

Como en la receta A, multiplico el antecedente y consecuente por 10

2.4 : 3 = (2.4 × 10) : (3 × 10)
= 24 : 30

La razón equivalente más simple de 24 : 30 es 4 : 5

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta B utilizando 4 cucharadas de canela y 5 cucharadas de maicena.

Juan obtendrá el mismo sabor, lo que cambiará es la cantidad de porciones de pan y de atol para los cuales se preparará la receta; por lo que obtendrá más porciones.

Comprende

3 Una razón expresada con números decimales, se puede convertir en una razón equivalente con números naturales. Cuando los números solo tienen una cifra decimal se realiza lo siguiente:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por 10, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Resuelve

4 1. Encuentra la razón equivalente más simplificada donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. 0.4 : 0.9
b. 0.9 : 1.5
c. 1.5 : 3
d. 2 : 3.5

2. Encuentra una razón equivalente donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. 0.56 : 0.31
b. 1.25 : 6

Indicador de logro:

1.4 Calcula la razón equivalente más simple de una razón cuyos términos son números decimales.

Propósito: Escribir la razón equivalente más simple de una razón cuyo antecedente o consecuente es un número decimal, multiplicando ambos términos por 10 o 100.

Puntos importantes: En ① debe aclararse que para la receta B, aunque solo el antecedente (las cucharadas de canela) es decimal, al multiplicar por 10 para convertirlo en un número natural, también se verá afectado el consecuente (las cucharadas de maicena); además, para esta receta no basta solo con efectuar la multiplicación por 10, pues la razón equivalente obtenida no será la más simple, tal como se muestra en ②; se debe aplicar lo visto en la clase anterior. Los pasos descritos en ③ se utilizan directamente para resolver el problema 1. de ④; para 2. puede indicarse que multiplicar por 10 no bastará para convertir las cantidades a números naturales, y que los estudiantes deduzcan el número conveniente (100).

Sugerencia metodológica: Antes de plantear el Analiza, recordar a los estudiantes sobre lo trabajado en las clases 1.1 (aumentar el antecedente y consecuente de una razón en la misma cantidad de veces) y 1.3 (razón equivalente más simple); para ello, se puede realizar una lectura de la Conclusión en cada una.

Solución de problemas:

1. a. (0.4 × 10) : (0.9 × 10) = 4 : 9

   R: La razón equivalente más simplificada con números naturales es 4 : 9.

   b. (0.9 × 10) : (1.5 × 10) = 9 : 15

   $9 : 15 \longrightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{3}{5}$

   R: La razón equivalente más simplificada con números naturales es 3 : 5.

   c. **R:** La razón equivalente más simplificada con números naturales es 1 : 2.

   d. **R:** La razón equivalente más simplificada con números naturales es 4 : 7.

2. a. **R:** La razón equivalente más simplificada con números naturales es 56 : 31.

   b. **R:** La razón equivalente más simplificada con números naturales es 5 : 24.

Fecha:

Clase: 1.4

Ⓐ Juan utiliza las siguientes recetas:

Receta A	Receta B
0.5 lb de azúcar	2.4 cda de canela
0.6 lb de harina	3 cda de maicena

Si solo puede medir libras y cucharadas completas, ¿qué cantidades debe usar?

Ⓢ En A, la razón entre libras de azúcar y de harina es 0.5 : 0.6; multiplico el antecedente y consecuente por 10.

0.5 : 0.6 = (0.5 × 10) : (0.6 × 10)
= 5 : 6

R: 5 libras de azúcar y 6 de harina.

En B, la razón entre cucharadas de canela y de maicena es 2.4 : 3

2.4 : 3 = (2.4 × 10) : (3 × 10)
= 24 : 30

La razón equivalente más simple de 24 : 30 es 4 : 5

R: 4 cucharadas de canela y 5 de maicena.

Ⓡ 1. Encuentra la razón equivalente más simple.

a. **R:** 4 : 9 b. **R:** 3 : 5
c. **R:** 1 : 2 d. **R:** 4 : 7

2. a. **R:** 56 : 31 b. **R:** 5 : 24

Tarea: página 95

1.5 Proporciones que incluyen fracciones

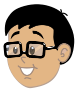
Analiza

1 Una receta para elaborar crema de mantequilla para postres utiliza $\frac{6}{5}$ taza de mantequilla y $\frac{1}{2}$ onzas de queso crema.

a. Expresa la razón entre la cantidad de tazas de mantequilla y onzas de queso crema.
b. Si solo se tienen depósitos que pueden medir tazas y onzas completas, ¿cuántas tazas de mantequilla y queso crema se deben utilizar para mantener el mismo sabor?

Soluciona

a. La razón entre las cantidades de mantequilla y queso crema es: $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$



Carlos

b. Para conservar el sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces y obtener tazas y onzas completas.

Multiplico el antecedente y el consecuente por el mcm de 5 y 2, que es 10.

$$\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = \left(\frac{6}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{2}{\cancel{10}}\right) : \left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \overset{5}{\cancel{10}}\right)$$
$$= (6 \times 2) : (1 \times 5)$$
$$= 12 : 5$$

R: Se deben utilizar 12 tazas de mantequilla y 5 onzas de queso crema.

Comprende

Una razón expresada con fracciones se puede convertir en una razón equivalente con números naturales siguiendo los pasos:

2

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por el mcm de los denominadores, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Resuelve

3 Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. $\frac{1}{7} : \frac{3}{4}$
b. $\frac{4}{5} : \frac{7}{5}$
c. $\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$
d. $\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$
e. $\frac{3}{4} : \frac{9}{4}$
f. $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$
g. $\frac{3}{7} : 4$
h. $2 : \frac{4}{5}$

Recuerda que un número natural puede convertirse en fracción con el denominador 1, por ejemplo, $3 = \frac{3}{1}$.

Desafíate

Miguel preparó su café con una razón entre azúcar y café $\frac{2}{5} : \frac{4}{3}$; Carmen preparó su café a una razón de $\frac{1}{2} : \frac{5}{3}$, ¿obtuvieron ambos el mismo sabor del café?

Indicador de logro:

1.5 Calcula la razón equivalente más simple de una razón cuyos términos son fracciones.

Propósito: Escribir la razón equivalente más simple de una razón cuyo antecedente o consecuente es una fracción, multiplicando ambos términos por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.

Puntos importantes: En ① se utiliza una situación similar a la de la clase anterior, en este caso el antecedente y consecuente de las razones debe multiplicarse por el mcm de los denominadores para poder encontrar una equivalente con números naturales. En ②, cuando se multiplican el antecedente y el consecuente porel mcm es conveniente simplificar antes de efectuar la operación para que la razón equivalente obtenida sea la más simple. Finalmente, en ③ debe hacerse énfasis en el paso ①.

Solución de problemas:

a. $\left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \overset{4}{\cancel{28}}\right) : \left(\frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{7}{\cancel{28}}\right) = (1 \times 4) : (3 \times 7)$

$= 4 : 21$

R: La razón equivalente más simple con números naturales es 4 : 21.

b. $\left(\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) : \left(\frac{7}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) = (4 \times 1) : (7 \times 1)$

$= 4 : 7$

R: La razón equivalente más simple con números naturales es 4 : 7.

c. $\left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{5}{\cancel{15}}\right) : \left(\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{3}{\cancel{15}}\right) = (1 \times 5) : (4 \times 3)$

$= 5 : 12$

d. $\left(\frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{1}{\cancel{3}}\right) : \left(\frac{5}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{1}{\cancel{3}}\right) = (2 \times 1) : (5 \times 1)$

$= 2 : 5$

e. $\left(\frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{1}{\cancel{4}}\right) : \left(\frac{9}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{1}{\cancel{4}}\right) = (3 \times 1) : (9 \times 1)$

$= 3 : 9$

La razón equivalente más simple de 3 : 9 es 1 : 3.

f. $\left(\frac{2}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \overset{1}{\cancel{7}}\right) : \left(\frac{4}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \overset{1}{\cancel{7}}\right) = (2 \times 1) : (4 \times 1)$

$= 2 : 4$

La razón equivalente más simple de 2 : 4 es 1 : 2.

g. **R:** 3 : 28

h. **R:** 5 : 2

✦ Desafíate

R: Sí obtuvieron el mismo sabor de café, porque ambas razones son equivalentes a 3 : 10.

Fecha: **Clase:** 1.5

Ⓐ Una receta utiliza $\frac{6}{5}$ tazas de mantequilla y $\frac{1}{2}$ onza de queso crema.

a. Expresa la razón entre la mantequilla y el queso crema.

b. Si solo se miden tazas y onzas completas, ¿cuántas se deben utilizar?

Ⓢ a. La razón es $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$

b. Se multiplica el antecedente y consecuente por el mcm de 5 y 2:

$\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = \left(\frac{6}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{2}{\cancel{10}}\right) : \left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \overset{5}{\cancel{10}}\right)$

$= (6 \times 2) : (1 \times 5)$

$= 12 : 5$

R: 12 tazas de mantequilla y 5 onzas de queso crema.

Ⓡ Encuentra la razón equivalente más simple.

a. $\left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \overset{4}{\cancel{28}}\right) : \left(\frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{7}{\cancel{28}}\right) = (1 \times 4) : (3 \times 7)$

$= 4 : 21$

R: La razón equivalente más simple con números naturales es 4 : 21.

b. **R:** 4 : 7

c. **R:** 5 : 12

d. **R:** 2 : 5

e. **R:** 1 : 3

f. **R:** 1 : 2

g. **R:** 3 : 28

h. **R:** 5 : 2

Tarea: página 96

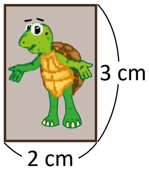
1.6 Relación de aspecto

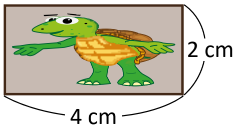
Analiza

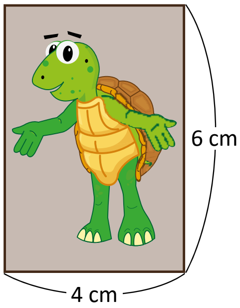
① Observa las siguientes fotografías:

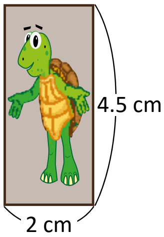
a. Para cada una encuentra el valor de la razón entre las medidas de la base y la altura, después simplifícalas.

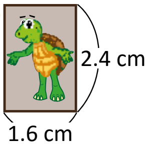
b. Encuentra en cuáles de las fotografías la imagen se ve de la misma forma y contesta, ¿qué relación hay entre el valor de razón de estas fotografías?

①


②


③


④


⑤


Soluciona

Beatriz

a. Calculo los valores de las razones en cada caso:

Fotografía	Base (cm)	Altura (cm)	Valor de razón
①	2	3	$\frac{2}{3}$
②	4	2	$\frac{4}{2} = 2$
③	4	6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
④	2	4.5	$\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$
⑤	1.6	2.4	$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b. Las imágenes se ven de la misma forma en ①, ③ y ⑤. El valor de la razón entre las medidas de la base y la altura de estas fotografías es igual a $\frac{2}{3}$ lo que significa que la base es $\frac{2}{3}$ veces la altura.

Puedo escribir las relaciones en forma de proporción:

① y ③ ⟶ 2 : 3 = 4 : 6
① y ⑤ ⟶ 2 : 3 = 1.6 : 2.4
③ y ⑤ ⟶ 4 : 6 = 1.6 : 2.4

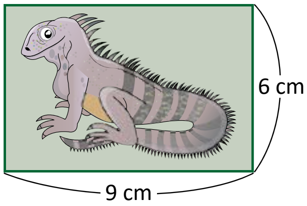
Comprende

Se llama **relación de aspecto de una imagen** a la razón entre las medidas de su base y su altura. Dos imágenes tienen **la misma forma** si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

Aunque las dimensiones en los televisores sean distintas, la imagen se ve igual ya que la relación de aspecto es la misma. En televisiones tradicionales, la relación de aspecto es 4 : 3, y en los panorámicos es 16 : 9

Resuelve

② Carlos quiere imprimir la siguiente fotografía con otras dimensiones, manteniendo la misma forma. ¿Cuál o cuáles de los siguientes tamaños se pueden elegir?



a. Base 18 cm, altura 12 cm

b. Base $\frac{1}{2}$ cm, altura $\frac{1}{3}$ cm

c. Base 20 cm, altura 16 cm

d. Base 1.8 cm, altura 1.2 cm

Indicador de logro:

1.6 Identifica figuras rectangulares que guardan la misma relación de aspecto.

Propósito: Determinar la razón entre la base y la altura de un rectángulo (relación de aspecto) para verificar si dos imágenes tienen la misma forma.

Puntos importantes: En esta clase se introduce de manera implícita el concepto de semejanza de figuras planas, el cual está ligado a las proporciones y la relación de aspecto; la definición matemática se trabajará hasta 9.° grado. En b. de ❶, cuando se indica "la misma forma" no basta con que la imagen sea la misma en todas las fotografías (una tortuga), sino que esta no debe estar distorsionada; por ello, quedan descartadas las fotografías ② y ④. En los problemas de ❷ debe determinarse si las medidas de la base y altura en cada literal forman una proporción con las medidas de la fotografía del garrobo.

Solución de problemas:

La razón entre la base y la altura de la fotografía es 9 : 6, y su valor de razón es $\frac{3}{2}$.

a. Razón ⟶ 18 : 12

Valor de la razón ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{2}$

Entonces, 9 : 6 = 18 : 12

R: Sí se puede elegir este tamaño.

b. Razón ⟶ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

Razón equivalente más simple ⟶ 3 : 2

Valor de la razón ⟶ $\frac{3}{2}$

Entonces, 9 : 6 = $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

R: Sí se puede elegir este tamaño.

c. Razón ⟶ 20 : 16

Valor de la razón ⟶ $\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{5}{4}$

9 : 6 y 20 : 16 no forman una proporción.

R: No se puede elegir este tamaño.

d. Razón ⟶ 1.8 : 1.2

Razón equivalente más simple ⟶ 3 : 2

Valor de la razón ⟶ $\frac{3}{2}$

Entonces, 9 : 6 = 1.8 : 1.2

R: Sí se puede elegir este tamaño.

Fecha: **Clase:** 1.6

Ⓐ a. Para cada fotografía, encuentra el valor de la razón entre la base y la altura (simplifícalas).

b. Encuentra en cuáles la imagen se ve de la misma forma. ¿Qué relación hay entre el valor de la razón de esas fotografías?

Ⓢ a. ① ⟶ Valor de razón: $\frac{2}{3}$

② ⟶ Valor de razón: $\frac{4}{2} = 2$

③ ⟶ Valor de razón: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

④ ⟶ Valor de razón: $\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

⑤ ⟶ Valor de razón: $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b. Las imágenes se ven de la misma forma en ①, ③ y ⑤. El valor de la razón entre las medidas de la base y la altura de estas fotografías es igual a $\frac{2}{3}$.

Ⓡ a. Razón ⟶ 18 : 12

Valor de la razón ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{2}$

Entonces, 9 : 6 = 18 : 12

R: Sí se puede elegir este tamaño.

b. **R:** Sí se puede elegir ese tamaño.

c. **R:** No se puede elegir ese tamaño.

Tarea: página 97

1.7 Propiedad de las proporciones

Analiza

En cada caso, encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

① a. $3 : 5 = 24 : x$ b. $6 : 12 = 2 : x$

Recuerda que en las proporciones, las razones son equivalentes.

Soluciona

a. En la primera clase aprendí que el antecedente y consecuente de una razón pueden aumentarse la misma cantidad de veces para conservar la razón:


Mario

②

	Antecedente	Consecuente	
× 8	3	5	× 8
	24	x	

Como el antecedente aumentó 8 veces, el consecuente también debe aumentar 8 veces. Así:

$$x = 5 \times 8 = 40$$

R: 40

b. En $6 : 12 = 2 : x$ observo que $6 \times \frac{1}{3} = 2$. Entonces, 6 aumentó $\frac{1}{3}$ veces para obtener 2 y, por lo tanto, 12 también debe aumentar $\frac{1}{3}$ veces:

$$x = \overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4$$

R: 4

Comprende

③ Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por el mismo número se obtiene una razón equivalente, y por tanto, una proporción.

Resuelve

④ 1. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $1 : 5 = 5 : x$ b. $6 : 2 = 3 : x$ c. $3 : 1 = 30 : x$

d. $8 : 16 = 1 : x$ e. $12 : 15 = 24 : x$ f. $20 : 35 = 4 : x$

2. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $5 : 2 = x : 6$ b. $18 : 8 = x : 4$ c. $11 : 13 = x : 130$

✶ Desafíate

Dos números se encuentran a una razón 1 : 4; si uno de ellos es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

Indicador de logro:

1.7 Encuentra razones equivalentes multiplicando el antecedente y consecuente por un mismo número.

Propósito: Calcular el consecuente o antecedente de una de las razones en una proporción.

Puntos importantes: En esta clase se utiliza lo visto en la clase 1.1, la diferencia ahora radica en que el que se multiplica puede ser natural o una fracción. Se formaliza además la propiedad para encontrar razones equivalentes y construir proporciones. En ambos literales de ① debe encontrarse el consecuente de la segunda razón (x); no se espera que los estudiantes den una solución "muy formal" en cuanto a los cálculos, esta puede realizarse de manera más intuitiva identificando el número por el que se ha multiplicado el antecedente de la primera razón para obtener el de la segunda (similar a la solución de Mario en ②), y concluir que dicho número debe multiplicarse también por el consecuente de la primera razón para encontrar x. En ③, resaltar que el número por el que se multiplican el antecedente y consecuente de una razón para obtener otra equivalente puede ser natural o fracción, y comparar esto con la solución de b. en ②. El problema 1. de ④ es similar al Analiza; la variante en 2. es que el número desconocido x corresponde al antecedente de la segunda razón (la idea de solución es la misma).

Solución de problemas:

1. a. El antecedente de la primera razón aumentó 5 veces; entonces:

$$x = 5 \times 5 = 25$$

R: 25

b. El antecedente de la primera razón aumentó $\frac{1}{2}$ veces; entonces:

$$x = \overset{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1$$

R: 1

c. El antecedente de la primera razón aumentó 10 veces; entonces:

$$x = 1 \times 10 = 10$$

R: 10

d. **R:** 2

e. **R:** 30

f. **R:** 7

2. a. El consecuente de la primera razón aumentó 3 veces; entonces:

$$x = 5 \times 3 = 15$$

R: 15

b. **R:** 9

c. **R:** 110

★ Desafíate

Los números 1 y 4 están a razón 1 : 4, y 4 es tres unidades mayor que 1 (1 + 3 = 4).

R: 1 y 4

Fecha: **Clase:** 1.7

Ⓐ En cada caso, encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. 3 : 5 = 24 : x

b. 6 : 12 = 2 : x

Ⓢ a. El antecedente y consecuente de una razón pueden aumentarse la misma cantidad de veces:

	Antecedente	Consecuente	
	3	5	
×8	24	x	×8

El antecedente aumentó 8 veces, el consecuente también debe aumentar 8 veces:

$$x = 5 \times 8 = 40$$

R: 40

b. $6 \times \frac{1}{3} = 2$; 6 aumentó $\frac{1}{3}$ veces para obtener 2. Entonces 12 también debe aumentar $\frac{1}{3}$ veces:

$$x = \overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4$$

R: 4

Ⓡ 1. Encuentra el valor del número x.

a. El antecedente de la primera razón aumentó 5 veces; entonces:

$$x = 5 \times 5 = 25$$

R: 25

b. **R:** 1 c. **R:** 10 d. **R:** 2 e. **R:** 30 f. **R:** 7

Tarea: página 98

1.8 Proporciones con un dato desconocido

Analiza

Para preparar galletas de chocolate, la razón entre la cantidad de harina y chocolate (en gramos) es 5 : 3 Si Beatriz utiliza un paquete de 150 g de harina, ¿cuántos gramos de chocolate debe utilizar? Representa esta cantidad como x gramos.

Soluciona

① 

Carmen

La razón 5 : 3 significa que, por cada 5 gramos de harina se necesitan 3 gramos de chocolate. Coloco los datos en una tabla:

Harina (g)	Chocolate (g)
5	3
150	x

× 30

× 30

Para mantener el sabor, 5 : 3 = 150 : x; observo que los 5 g de harina aumentaron 30 veces para obtener 150 g (5 × 30 = 150). Entonces:

$$x = 3 \times 30$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.

Antonio

El valor de la razón de 5 : 3 es $\frac{5}{3}$. Como debe conservarse el sabor, este valor de razón debe ser el mismo para la razón 150 : x

Utilizo la relación:

consecuente = antecedente ÷ valor de razón

$$x = 150 \div \frac{5}{3}$$
$$x = \overset{30}{\cancel{150}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}}$$
$$x = 30 \times 3$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.

La ventaja del primer procedimiento es que no necesitas identificar antecedente o consecuente, o calcular el valor de la razón. Pero recuerda que debes mantener la correspondencia entre harina y chocolate.

Comprende

Para encontrar un dato desconocido en una proporción se puede utilizar la propiedad de las proporciones, identificando la cantidad de veces que se ha aumentado uno de los datos.

Resuelve

② Encuentra el valor de la cantidad que hace falta.

a.

Harina (g)	Chocolate (g)
3	2
120	x

b.

Harina (g)	Chocolate (g)
14	10
140	x

c.

Harina (g)	Chocolate (g)
7	3
x	120

d.

Harina (g)	Chocolate (g)
50	40
x	200

★ Desafíate

Las dimensiones de la bandera salvadoreña son 3.25 m de largo por 1.89 m de ancho. Si Ana elabora una versión más pequeña con 1 m de largo, ¿cuánto debe medir el ancho?

Indicador de logro:

1.8 Encuentra el dato faltante en una proporción.

Propósito: Calcular el antecedente o consecuente de una de las razones en una proporción.

Puntos importantes: La diferencia con la clase anterior es que en esta se utilizan cantidades grandes para las razones de los problemas, y encontrar el número por el que hay que multiplicar puede ser difícil para los estudiantes. Se pueden recordar las siguientes relaciones:

consecuente = antecedente ÷ valor de razón   antecedente = consecuente × valor de razón

Un estudiante puede resolver los problemas usando lo anterior, tal como lo hace Antonio en ①; caso contrario se puede seguir la misma estrategia de la clase 1.7 (ver la solución de Carmen en ①). Para los problemas en ② cualquiera de las dos estrategias de solución es válida.

Solución de problemas:

a. **Forma 1**

Harina (g)	Chocolate (g)
3	2
120	x

× 40   × 40

De lo anterior, $x = 2 \times 40 = 80$

R: 80

a. **Forma 2**

Valor de razón (harina : chocolate) → $\frac{3}{2}$

Como x es el consecuente de la segunda razón:

$$x = 120 \div \frac{3}{2} = \overset{40}{\cancel{120}} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 40 \times 2 = 80$$

R: 80

b. **R:** 100

c. **Forma 1**

Harina (g)	Chocolate (g)
7	3
x	120

× 40   × 40

De lo anterior, $x = 7 \times 40 = 280$

R: 280

c. **Forma 2**

Valor de razón (harina : chocolate) → $\frac{7}{3}$

Como x es el antecedente de la segunda razón:

$$x = \overset{40}{\cancel{120}} \times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 40 \times 7 = 280$$

R: 280

d. **R:** 250

Desafíate

La razón equivalente más simple de 3.25 : 1.89 con números naturales es 325 : 189, y el valor de la razón es $\frac{325}{189}$. El ancho de la versión más pequeña debe medir $1 \div \frac{325}{189} = \frac{189}{325}$ m.

Fecha: **Clase:** 1.8

Ⓐ La razón entre la cantidad de harina y chocolate (en gramos) es 5 : 3; si Beatriz utiliza 150 g de harina, ¿cuántos utilizará de chocolate?

Ⓢ Forma 1

Harina	Chocolate
5	3
150	x

× 30   × 30

Los 5 g de harina aumentaron 30 veces, entonces:

$x = 3 \times 30$

$x = 90$

R: 90 g

Forma 2

El valor de la primera razón es $\frac{5}{3}$. Este valor debe ser el mismo para la segunda.

$x = 150 \div \frac{5}{3}$

$x = \overset{30}{\cancel{150}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}}$

$x = 30 \times 3$

$x = 90$

R: 90 g

Ⓡ Encuentra el valor de la cantidad que hace falta.

a. **Forma 1**

Harina (g)	Chocolate (g)
3	2
120	x

× 40   × 40

De lo anterior, $x = 2 \times 40 = 80$

R: 80

b. **R:** 100   c. **R:** 280   d. **R:** 250

Tarea: página 99

1.9 Propiedad fundamental de las proporciones

Recuerda

① Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $4 : 9 = 20 : x$
$x = 45$

b. $11 : 10 = x : 100$
$x = 110$

Analiza

② Usando la proporción 6 : 10 = 9 : 15, realiza lo siguiente:

a. Multiplica el antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda.
b. Multiplica el consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.
c. ¿Cómo son los resultados de a. y b.? ¿Qué puedes concluir sobre las proporciones?

Soluciona

a. El antecedente de la primera razón es 6 y el consecuente de la segunda razón es 15. Efectuando la multiplicación obtengo:

$$6 \times 15 = 90$$

b. El consecuente de la primera razón es 10 y el antecedente de la segunda razón es 9. Realizando la multiplicación obtengo:

$$10 \times 9 = 90$$

c. Observo que: ¡los resultados de a. y b. son iguales!
Esto quiere decir que en una proporción el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.

Comprende

Propiedad fundamental de las proporciones

En una proporción, el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda. Es decir, para la proporción $a : b = c : d$ se cumple

$$a \times d = b \times c$$

a, b, c y d representan cualquier número.

¿Sabías que...?

En una proporción $a : b = c : d$, a los números a y d también se les conoce como "extremos" y, a b y c como "medios". Entonces, la propiedad de las proporciones indica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, refiriéndose a que $a \times d = b \times c$.

Resuelve

③ Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones en los siguientes casos.

a. 2 : 3 = 6 : 9
b. 5 : 3 = 20 : 12
c. 4 : 6 = 8 : 12
d. 10 : 8 = 30 : 24

✶ Desafíate

Encuentra el valor de c para que se forme una proporción.

$$25 : 50 = c : 10$$

Indicador de logro:

1.9 Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones: el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Propósito: Deducir la propiedad fundamental de las proporciones en $a : b = c : d$, verificando que se cumple $a \times d = b \times c$.

Puntos importantes: Los problemas en ① se pueden resolver ya sea encontrando el número que debe multiplicarse por el antecedente o consecuente (Forma 1 de la clase 1.8), o utilizando el valor de la primera razón y las relaciones: antecedente = consecuente × valor de razón y consecuente = antecedente ÷ valor de razón (Forma 2 de la clase 1.8). Para poder deducir la propiedad fundamental de la proporciones se realizan los pasos presentados en los literales a. y b. de ②, se utiliza un caso particular para introducir la misma y luego solo comprobar su veracidad en los problemas de ③.

Solución de problemas:

a. Para 2 : 3 = 6 : 9, se multiplica el antecedente de la primera razón (2) con el consecuente de la segunda (9):

$$2 \times 9 = 18$$

Luego, se multiplica el consecuente de la primera razón (3) por el antecedente de la segunda (6):

$$3 \times 6 = 18$$

Entonces, 2 × 9 = 3 × 6.

b. Para 5 : 3 = 20 : 12, se multiplica el antecedente de la primera razón (5) con el consecuente de la segunda (12):

$$5 \times 12 = 60$$

Luego, se multiplica el consecuente de la primera razón (3) por el antecedente de la segunda (20):

$$3 \times 20 = 60$$

Entonces, 5 × 12 = 3 × 20.

c. Para 4 : 6 = 8 : 12

$$4 \times 12 = 48$$
$$6 \times 8 = 48$$

Entonces, 4 × 12 = 6 × 8.

d. Para 10 : 8 = 30 : 24

$$10 \times 24 = 240$$
$$8 \times 30 = 240$$

Entonces, 10 × 24 = 8 × 30.

★ Desafíate

25 × 10 = 250, entonces 50 × c = 250. De lo anterior se deduce que $c = 250 \div 50 = 5$.

R: $c = 5$

Fecha: **Clase:** 1.9

Re Encuentra el valor del número x.

a. 4 : 9 = 20 : x
4 aumenta 5 veces
$x = 9 \times 5 = 45$

b. 11 : 10 = x : 100
10 aumenta 10 veces
$x = 11 \times 10 = 110$

A Usando la proporción 6 : 10 = 9 : 15

a. Multiplica el antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda.
b. Multiplica el consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.
c. ¿Cómo son los resultados de a. y b.?

S a. Efectuando la multiplicación: 6 × 15 = 90
b. Efectuando la multiplicación: 10 × 9 = 90
c. ¡Los resultados de a. y b. son iguales!
El producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.

R Comprueba la propiedad fundamental.

a. Para 2 : 3 = 6 : 9

$$2 \times 9 = 18$$
$$3 \times 6 = 18$$

Entonces, 2 × 9 = 3 × 6.

Tarea: página 100

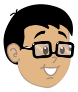
1.10 Resolución de problemas aplicando proporciones

Analiza

En una rifa, por cada 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados. Si se reduce la cantidad de papeles no premiados a 30, ¿cuántos papeles premiados deben colocarse?

Soluciona

① Si al colocar 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados, entonces la razón es 60 : 100. Escribo los datos en una tabla (x representará la cantidad desconocida).



Carlos

Cantidad de premiados	Cantidad de no premiados
60	100
x	30

Como debe mantenerse la razón, entonces 60 : 100 = x : 30. En esta ocasión, no es fácil identificar por cuánto debe multiplicarse 100 para obtener 30, entonces uso la propiedad de las proporciones.

$$60 \times 30 = 100 \times x$$
$$1,800 = 100 \times x$$

Esto quiere decir que 100 veces x es igual a 1, 800. Por lo tanto,

$$x = 1,800 \div 100 = 18$$

R: 18 papeles premiados.

Comprende

Para resolver problemas de proporciones donde se desconoce algún dato y no es fácil identificar la cantidad de veces que aumenta una de las cantidades, se puede utilizar la propiedad fundamental de las proporciones.

Resuelve

② 1. Para elaborar una receta de salsa agridulce se utilizaron 20 ml de salsa inglesa y 30 ml de salsa de tomate. Si ahora se utilizarán 50 mililitros de salsa inglesa, ¿cuántos mililitros de salsa de tomate deben usarse para mantener el mismo sabor?

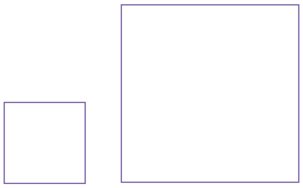
2. Una fotografía mide 10 cm de base y 15 cm de altura. Si se amplía para que la base sea 12 cm, ¿cuánto medirá la altura?

Recuerda que dos imágenes tienen la misma forma si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

3. Según un estudio, 500 ml de leche entera aportan 290 calorías. Si una persona consume 200 ml de leche entera, ¿cuántas calorías aporta esta cantidad?

Desafíate

Las longitudes de los lados de dos cuadrados es 2 : 5, si el perímetro de uno de ellos es 24 cm, ¿cuál es la longitud del lado del otro cuadrado?



Indicador de logro:

1.10 Resuelve problemas sobre proporciones con datos desconocidos.

Propósito: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones para encontrar datos desconocidos en razones equivalentes.

Puntos importantes: A diferencia de las clases anteriores, en las proporciones presentadas en esta no es fácil determinar el número por el que hay que multiplicar los términos de la primera razón para obtener la segunda; debido a eso, es necesario utilizar la propiedad fundamental de las proporciones, estudiada en la clase 1.9. En ① se observa que al ordenar los datos del problema del Analiza en la tabla, no es inmediato determinar por cuánto hay que multiplicar 100 para obtener 30; se recurre a la propiedad fundamental de las proporciones para plantear, en un primer momento, la proporción 60 : 100 = x : 30, y luego llegar a 60 × 30 = 100 × x. Para los problemas en ② los estudiantes pueden realizar un proceso similar al mostrado en ①, es decir, plantear primero la proporción y luego usar la propiedad fundamental para escribir las multiplicaciones correspondientes.

Solución de problemas:

1. La razón entre los mililitros de salsa agridulce y salsa inglesa es 20 : 30

Salsa inglesa (ml)	Salsa de tomate (ml)
20	30
50	x

Entonces, 20 : 30 = 50 : x y se cumple:

$$20 \times x = 30 \times 50$$
$$20 \times x = 1,500$$

De lo anterior se deduce x = 1,500 ÷ 20 = 75

R: 75 ml de salsa de tomate.

2. La razón entre la base y la altura es 10 : 15

Base (cm)	Altura (cm)
10	15
12	x

Entonces, 10 : 15 = 12 : x y se cumple:

$$10 \times x = 15 \times 12$$
$$10 \times x = 180$$

De lo anterior se deduce x = 180 ÷ 10 = 18

R: 18 cm

3. **R:** 116 calorías.

Desafíate

R: 15 cm

Fecha: **Clase:** 1.10

Ⓐ Por cada 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados. Si se reduce la cantidad de papeles no premiados a 30, ¿cuántos papeles premiados deben colocarse?

Ⓢ La razón entre papeles premiados y no premiados es 60 : 100

Premiados	No premiados
60	100
x	30

Entonces 60 : 100 = x : 30. Se usa la propiedad de las proporciones.

$$60 \times 30 = 100 \times x$$
$$1,800 = 100 \times x$$

100 veces x es igual a 1,800. Por lo tanto,

$$x = 1,800 \div 100 = 18$$

R: 18 papeles premiados.

Ⓡ 1. La razón es 20 : 30

Salsa inglesa (ml)	Salsa de tomate (ml)
20	30
50	x

Entonces, 20 : 30 = 50 : x y se cumple:

$$20 \times x = 30 \times 50$$
$$20 \times x = 1,500$$

De lo anterior se deduce x = 1,500 ÷ 20 = 75

R: 75 ml de salsa de tomate.

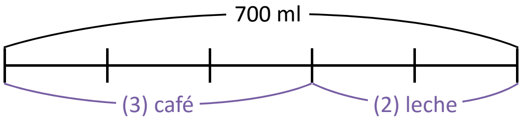
Tarea: página 101

Lección 1

1.11 Reparto proporcional

Analiza

① Antonio quiere preparar 700 ml de café con leche. Si la razón entre las cantidades de mililitros de café y leche debe ser 3 : 2, ¿cuántos mililitros de café necesita?

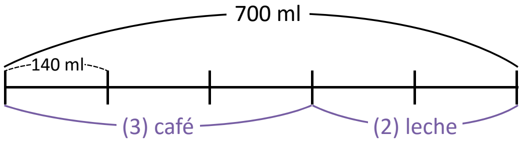


La razón 3 : 2 significa que por cada 3 ml de café se usan 2 ml de leche. El segmento representa el total (700 ml), se divide en 5 partes iguales donde tres de ellas representan los mililitros de café y las dos restantes los mililitros de leche.

Soluciona

② El total de partes son 5, y representan 700 ml. Entonces, cada parte representa 700 ÷ 5 = 140 mililitros.

Ana



Como lo que corresponde al café tiene 3 partes entonces la cantidad de mililitros de café necesarios son:

$$140 \times 3 = 420$$

R: 420 ml

La cantidad de leche utilizada sería 700 – 420 = 280 mililitros. Entonces la razón entre café y leche es 420 : 280, y su equivalente más simple 3 : 2

Comprende

Para resolver problemas donde una cantidad debe repartirse en una razón determinada $a : b$, se puede utilizar un segmento dividido en $a + b$ partes iguales, encontrar el valor que representa cada parte y encontrar, ya sea a o b.

Resuelve

③

1. Doña María tiene un terreno de 300 m^2 de área. Ella quiere sembrar maíz y maicillo de manera que, la razón entre el área de maíz y maicillo sea 2 : 1; ¿cuántos metros cuadrados medirá el área para la siembra de maíz?
2. La razón entre la cantidad de niñas y niños en un salón es 5 : 3; si en total hay 32 alumnos, ¿cuántas niñas hay en el salón?
3. Para una rifa se han colocado 120 papelitos en una caja. Si la razón entre papeles premiados y no premiados es 1 : 7, ¿cuántos papeles no premiados hay en la caja?

✶ Desafíate

1. María y Luis invirtieron dinero para la venta de yuca frita; María aportó \$16 y Luis aportó \$14. El dinero recolectado después de la venta fue de \$60 y quieren repartirlo proporcionalmente según lo aportado. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?
2. La razón entre la cantidad de dulces de Juan y Ana es 3 : 5 y la diferencia entre las cantidades es 8 dulces. ¿Cuántos dulces tiene cada uno?

Indicador de logro:

1.11 Realiza repartos proporcionales de una cantidad a partir de una razón dada.

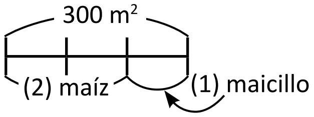
Propósito: Distribuir una cantidad de forma proporcional de acuerdo a una razón dada para encontrar un dato desconocido.

Puntos importantes: Las situaciones abordadas en esta clase son parecidas al problema en ①, donde se tiene una cantidad que debe dividirse en dos partes de tal forma que se encuentren a una razón determinada; no es una partición equitativa sino proporcional. El gráfico en ① servirá para que los estudiantes visualicen que cada parte representa $\frac{1}{5}$ de 700, es decir, 700 ÷ 5 = 140, y para encontrar la cantidad de mililitros de café solo se debe multiplicar lo anterior por 3 (ver solución de Ana en ②). Para los problemas de ③ pueden elaborarse los gráficos respectivos y facilitar de esa forma la interpretación y solución de cada uno.

Materiales: Carteles con las gráficas del Analiza y para la solución del problema 1 del Resuelve.

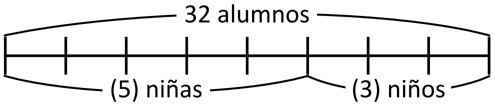
Solución de problemas:

1. Se elabora un segmento; como la razón es 2 : 1 el segmento se divide en 2 + 1 = 3 partes iguales.



Cada parte equivale a 300 ÷ 3 = 100 m²; para el maíz corresponden 100 × 2 = 200 m².
R: 200 m²

2. Se elabora un segmento; como la razón es 5 : 3 el segmento se divide en 5 + 3 = 8 partes iguales.



Cada parte equivale a 32 ÷ 8 = 4 alumnos; la cantidad de niñas es 4 × 5 = 20.
R: 20 niñas.

3. **R:** 105 papeles no premiados.

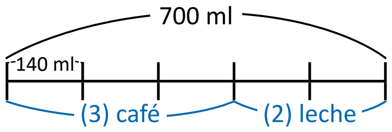
Desafíate

1. **R:** A María le corresponden $32 y a Luis $28.
2. **R:** Ana tiene 20 dulces y Juan tiene 12.

Fecha: **Clase:** 1.11

Ⓐ Antonio quiere preparar 700 ml de café con leche. Si la razón entre las cantidades de mililitros de café y leche debe ser 3 : 2, ¿cuántos mililitros de café necesita?

Ⓢ El total de partes son 5 y representan 700 ml; cada parte representa 700 ÷ 5 = 140 mililitros.

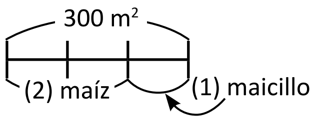


Lo que corresponde al café tiene 3 partes; la cantidad de mililitros de café necesarios son:

140 × 3 = 420

R: 420 ml

Ⓡ 1. La razón es 2 : 1, el segmento se divide en 2 + 1 = 3 partes iguales.



Cada parte equivale a 300 ÷ 3 = 100 m²; para el maíz corresponden 100 × 2 = 200 m².
R: 200 m²

2. **R:** 20 niñas.

3. **R:** 105 papeles no premiados.

Tarea: página 102

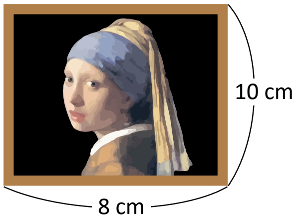
1.12 Practica lo aprendido

1. ¿Son equivalentes las razones dadas? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.
   a. 2 : 5 y 8 : 20
   b. 4 : 5 y 16 : 30

2. Encuentra la razón equivalente más simple de 30 : 50

3. Encuentra razones equivalentes a las siguientes, que involucren únicamente números naturales.
   a. 0.6 : 0.3
   b. $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$

4. ¿Cuáles de las siguientes dimensiones se pueden utilizar para imprimir la siguiente fotografía y conservar la forma de ella?
   a. Base 4 cm, altura 5 cm.
   b. Base 16 cm, altura 30 cm.



5. Encuentra el número x para que se forme una proporción.
   a. $2 : 5 = 12 : x$
   b. $10 : 6 = 15 : x$

1.13 Practica lo aprendido

1. Doña Beatriz es la dueña de una pupusería; considera que la razón entre la cantidad (en libras) de harina y queso es 5 : 3; si para vender pupusas el sábado en la tarde comprará 9 libras de queso, ¿cuántas libras de harina necesita?

2. En una rifa, el organizador quiere que la razón entre papelitos premiados y no premiados sea 2 : 7; si se colocan 16 papelitos premiados, ¿cuántos papelitos no premiados se deben colocar?

3. Juan y Marta observan que doña Julia utiliza 9 cucharadas de azúcar y 21 cucharadas de harina para preparar atol de maíz tostado. Analiza el comentario de cada uno y explica si es falso o verdadero.

   Juan: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 12 cucharadas de azúcar y 28 cucharadas de harina.
   Marta: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 15 cucharadas de azúcar y 30 cucharadas de harina.

4. Don Juan quiere preparar 120 libras de mezcla para pegar ladrillos, manteniendo una razón entre las cantidades (en libras) de cemento y arena de 1 : 3. ¿Qué cantidades de cemento y arena debe usar?

★Desafíate

Don Miguel quiere repartir $100 entre sus tres hijos, quienes tienen las edades de 10, 15 y 25 años. Si el dinero lo repartirá proporcionalmente a las edades de sus hijos, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Indicador de logro:

1.12 Resuelve problemas sobre proporciones.

Solución de problemas:
(1.12)

1. a. Para 2 : 5 $\longrightarrow \frac{2}{5}$

Para 8 : 20 $\longrightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{2}{5}$

R: Sí son equivalentes, 2 : 5 = 8 : 20.

b. Para 4 : 5 $\longrightarrow \frac{4}{5}$

Para 16 : 30 $\longrightarrow \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{15}{\cancel{30}}} = \frac{8}{15}$

R: No son equivalentes.

2. 30 : 50 $\longrightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{30}}}{\underset{5}{\cancel{50}}} = \frac{3}{5}$; la razón equivalente más simple es 3 : 5.

3. a. (0.6 × 10) : (0.3 × 10) = 6 : 3

La razón equivalente más simple es 2 : 1.

R: 2 : 1

b. $\left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{6}}} \times \overset{1}{\cancel{6}}\right) : \left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \overset{3}{\cancel{6}}\right) = (1 \times 1) : (1 \times 3)$

$= 1 : 3$

R: 1 : 3

4. La razón entre la base y la altura de la fotografía es 8 : 10, y su valor de razón es $\frac{4}{5}$.

a. Razón $\longrightarrow$ 4 : 5

Valor de la razón $\longrightarrow \frac{4}{5}$

Entonces, 8 : 10 = 4 : 5.

R: Sí se puede elegir este tamaño.

b. Razón $\longrightarrow$ 16 : 30

Valor de la razón $\longrightarrow \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{15}{\cancel{30}}} = \frac{8}{15}$

Entonces, 8 : 10 no es equivalente a 16 : 30.

R: No se puede elegir este tamaño.

5. a. El antecedente de la primera razón aumentó 6 veces; entonces:

$$x = 5 \times 6 = 30$$

R: 30

b. Por la propiedad fundamental de las proporciones, $10 \times x = 6 \times 15$; así:

$$10 \times x = 90$$

De lo anterior se deduce que $x = 90 \div 10 = 9$

R: 9

(1.13)

1.

	Harina (lb)	Queso (lb)	
	5	3	
×3	x	9	×3

De lo anterior, $x = 5 \times 3 = 15$

R: 15

2.

	Premiados	No premiados	
	2	7	
×8	16	x	×8

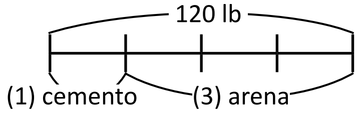
De lo anterior, $x = 7 \times 8 = 56$

R: 56

3. La razón entre las cucharadas de azúcar y harina según la receta de doña Julia es 9 : 21, y su valor de razón es $\frac{3}{7}$.

- Para Juan, la razón es 12 : 28 y su valor de razón es $\frac{3}{7}$; por lo tanto, su comentario es verdadero.
- Para Marta, la razón es 15 : 30 y su valor de razón es $\frac{1}{2}$; por lo tanto, su comentario es falso.

4. Se elabora un segmento; como la razón es 1 : 3 el segmento se divide en 1 + 3 = 4 partes iguales.



Cada parte equivale a 120 ÷ 4 = 30 lb; para el cemento corresponden 30 lb y para la arena 30 × 3 = 90 lb.

R: 30 lb de cemento y 90 lb de arena.

✶Desafíate

Al sumar las edades de los tres hijos se obtienen 50 años. Entonces, al dividir el dinero de don Miguel entre la suma anterior se obtiene la cantidad de dinero que debe repartir por año: 100 ÷ 50 = 2. Al hijo de 10 años le corresponden 2 × 10 = \$20, al de 15 le corresponden 2 × 15 = \$30, y al de 25 le tocan 2 × 25 = \$50.

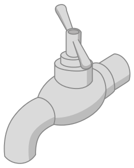
Lección 2 Proporcionalidad directa

2.1 Relación de proporcionalidad directa

Analiza

1 Antonio abre un chorro y vierte agua en un recipiente; toma nota de la altura del agua al pasar 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, etc., y escribe los datos en una tabla.

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...



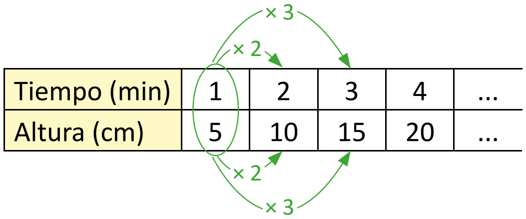
a. Partiendo de 1 minuto, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica o triplica?
b. Partiendo de 2 minutos, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica?
c. De acuerdo a los datos en la tabla, ¿cuál sería la altura del agua al pasar 5 minutos?

Soluciona

2

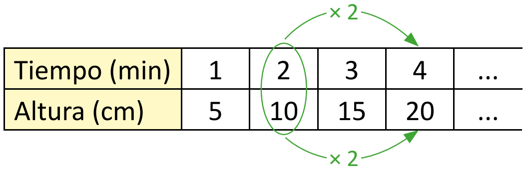
José

a. Usando la tabla, me ubico en la columna con tiempo 1 min y altura 5 cm. Duplicar o triplicar el tiempo significa efectuar 1 × 2 = 2 o 1 × 3 = 3. Observo que, si el tiempo se duplica o triplica, ¡la altura también se duplica o triplica!



Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

b. Duplicar el tiempo a partir de 2 min significa efectuar 2 × 2 = 4. Observo que, si el tiempo se duplica a 4 minutos entonces la altura se duplica a 20 minutos.



Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

c. De 1 a 5 minutos el tiempo ha aumentado 5 veces, entonces la altura también aumentará 5 veces, es decir, será igual a 5 × 5 = 25 cm.

Comprende

3 Cuando dos cantidades a y b cumplen que al multiplicarse a por 2, por 3, etc., la cantidad b también se multiplica por 2, por 3, etc., respectivamente, entonces se dice que las cantidades son **directamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad directa**.

El tiempo transcurrido y la altura del agua en un recipiente son cantidades directamente proporcionales.

Resuelve

4
1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de papayas y el precio. Estas cantidades son directamente proporcionales. Completa los precios que hacen falta.

Número de papayas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	2	4				...

2. Un automóvil recorre una carretera con una rapidez de 40 km por hora.
   a. Completa la tabla escribiendo la cantidad de kilómetros recorridos al variar la cantidad de horas.

Tiempo transcurrido (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida (km)						...

   b. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al transcurrir 6 horas?

Indicador de logro:

2.1 Encuentra datos faltantes en cantidades que son directamente proporcionales.

Propósito: Definir la proporcionalidad directa y utilizarla para calcular los datos faltantes en situaciones con cantidades directamente proporcionales.

Puntos importantes: La relación de proporcionalidad directa se utilizará en séptimo grado para introducir el concepto de función. En la situación de ① se provee una tabla para identificar la relación entre el tiempo y la altura de acuerdo a lo solicitado en a. y b.; los estudiantes deben observar que si se toma una cantidad de tiempo específico y se multiplica por un número natural, entonces su correspondiente altura también se multiplicará por dicho número natural, tal como aparece en ②. En ④, para completar la tabla de 1. los estudiantes deben identificar el número por el cual debe multiplicarse el precio que corresponde a 1 papaya para obtener las restantes; mientras que en 2. deben extraer del enunciado los kilómetros que corresponden a 1 hora.

Sugerencia metodológica: Para hacer referencia a cantidades directamente proporcionales no es conveniente utilizar expresiones como "si una cantidad aumenta, la otra también aumenta", ya que esto no es cierto cuando la constante de proporcionalidad es un número negativo (estos casos se estudiarán en séptimo grado). Para evitar esa confusión, la proporcionalidad directa se define en ③ utilizando lo estudiado en la lección anterior sobre proporciones.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1.

× 2 × 3 × 4 × 5

Número de papayas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	2	4	6	8	10	...

× 2 × 3 × 4 × 5

2. a.

× 2 × 3 × 4 × 5

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
Distancia (km)	40	80	120	160	200	...

× 2 × 3 × 4 × 5

b. **R:** 240 km

Fecha: **Clase:** 2.1

Ⓐ Antonio vierte agua en un recipiente y toma nota de la altura del agua al pasar 1 min, 2 min, 3 min, etc.

a. Partiendo de 1 min, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica o triplica?

b. Partiendo de 2 min, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica?

c. ¿Cuál sería la altura del agua al pasar 5 minutos?

Ⓢ a.

× 3
× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2
× 3

Si el tiempo se duplica o triplica, la altura también.

b.

× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2

La altura se duplica a 20 cm.

c. Será igual a 5 × 5 = 25 cm.

Ⓡ 1.

× 2 × 3 × 4 × 5

n.° de papayas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	2	4	6	8	10	...

× 2 × 3 × 4 × 5

Tarea: página 104

2.2 Propiedad de la proporcionalidad directa

Analiza

① Antonio anotó la relación entre el tiempo y la altura del agua en un depósito.

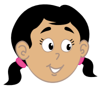
a. Encuentra el cociente de la altura entre el tiempo. ¿Cuánto resulta?

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente							

b. ¿Cuánto aumenta la altura del agua cada minuto?

Soluciona

a. Calculo el cociente en cada caso. Por ejemplo, si el tiempo es 1 min y la altura es 5 cm, el cociente es 5 ÷ 1 = 5:



Beatriz

②
5 ÷ 1 = 5
10 ÷ 2 = 5
15 ÷ 3 = 5
20 ÷ 4 = 5
25 ÷ 5 = 5
30 ÷ 6 = 5

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente	5	5	5	5	5	5	

¡El resultado del cociente es igual a 5 en todos los casos!

b. Como el cociente siempre resulta 5, significa que la altura aumenta 5 cm cada minuto.

Comprende

③ **Propiedad de la proporcionalidad directa**
Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente siempre resulta el mismo número.

Resuelve

④ 1. La siguiente tabla muestra la longitud y el peso de un tipo de alambre:

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (g)	7	14	21	28	35	42	...

a. Encuentra el cociente del peso entre la longitud.
b. ¿Cuál es el peso por metro de este tipo de alambre?

2. La siguiente tabla muestra el área (en hectáreas) sembrada de maíz y el peso cosechado.

Área (ha)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (ton)	3	6	9	12	15	18	...

a. Encuentra el cociente del peso entre el área sembrada.
b. ¿Cuál es el peso del maíz cosechado por hectárea?

Indicador de logro:

2.2 Calcula el cociente entre cantidades que son directamente proporcionales.

Propósito: Comprobar la propiedad de la proporcionalidad directa sobre el cociente constante entre cantidades que son directamente proporcionales.

Puntos importantes: En la situación presentada en ① se parte del hecho conocido que las cantidades son directamente proporcionales; los estudiantes deben identificar y concluir que el cociente entre ellas es constante, es decir, resulta ser siempre el mismo número, tal como lo hace Beatriz en ②. También debe recalcarse la interpretación de la solución en b. de ②, pues se relaciona con lo estudiado en la unidad anterior sobre el significado del valor de una razón. La definición en ③ se utilizará más adelante para escribir la relación de proporcionalidad directa y **= constante ×** x, pues la constante resulta ser el cociente entre las cantidades. Los problemas en ④ se resuelven de forma similar a lo realizado en ①.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. a. Se calculan los cocientes en cada caso:

7 ÷ 1 = 7 14 ÷ 2 = 7 21 ÷ 3 = 7
28 ÷ 4 = 7 35 ÷ 5 = 7 42 ÷ 6 = 7

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6
Peso (g)	7	14	21	28	35	42
Cociente	7	7	7	7	7	7

b. **R:** 7 g

2. a. Se calculan los cocientes en cada caso:

3 ÷ 1 = 3 6 ÷ 2 = 3 9 ÷ 3 = 3
12 ÷ 4 = 3 15 ÷ 5 = 3 18 ÷ 6 = 3

Área (ha)	1	2	3	4	5	6
Peso (ton)	3	6	9	12	15	18
Cociente	3	3	3	3	3	3

b. **R:** 3 ton

Anotaciones:

____

____

Fecha: **Clase:** 2.2

Ⓐ Antonio anotó la relación entre el tiempo y la altura del agua en un depósito.

a. Encuentra el cociente de la altura entre el tiempo. ¿Cuánto resulta?

b. ¿Cuánto aumenta la altura del agua cada minuto?

Ⓢ a. 5 ÷ 1 = 5 10 ÷ 2 = 5 15 ÷ 3 = 5
20 ÷ 4 = 5 25 ÷ 5 = 5 30 ÷ 6 = 5

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente	5	5	5	5	5	5	

b. La altura aumenta 5 cm cada minuto.

Ⓡ 1. a. Se calculan los cocientes en cada caso:

7 ÷ 1 = 7 14 ÷ 2 = 7 21 ÷ 3 = 7
28 ÷ 4 = 7 35 ÷ 5 = 7 42 ÷ 6 = 7

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6
Peso (g)	7	14	21	28	35	42
Cociente	7	7	7	7	7	7

b. **R:** 7 g

Tarea: página 105

Lección 2

2.3 Identificación de cantidades directamente proporcionales

Analiza

① ¿Cuáles de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

a. La longitud y el peso de una varilla de hierro.

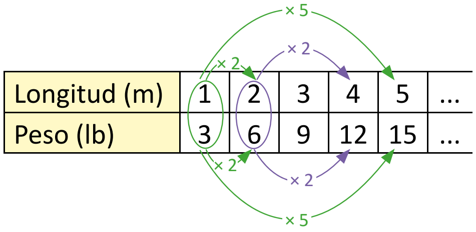
Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

b. El número de dulces de Ana y el número de dulces de Julia al repartirse 9 dulces.

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...

Soluciona

a. Verifico si al aumentar la longitud cierta cantidad de veces, el peso aumenta en esa misma cantidad de veces:



Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

¡Sí cumple con lo anterior!

R: La longitud y el peso de una varilla de hierro son directamente proporcionales.

b. Calculo en cada caso el cociente de la cantidad de dulces de Julia entre los de Ana:

②

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...
Cociente	**8**	**3.5**	**2**	**1.25**	**0.8**	...

¡El cociente no es igual en todos los casos! Es decir, no cumple la propiedad de la proporcionalidad directa.

R: Las cantidades de dulces de Ana y de Julia no son directamente proporcionales.

Comprende

③ Para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, etc., la otra también se multiplica por 2, por 3, por 4 respectivamente.
- El cociente entre las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad directa).

Resuelve

④ Identifica si las cantidades son directamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son directamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son; justifica tu respuesta.

a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

Cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
Peso (g)	2	4	6	8	10	...

b. La cantidad de galones de gasolina y el costo de la compra:

Cantidad (gal)	1	2	3	4	5	...
Costo ($)	3	6	9	12	15	...

c. La cantidad de cortes en una tira y el número de trozos obtenidos:

Número de cortes	1	2	3	4	5	...
Número de trozos	2	3	4	5	6	...

d. La base y altura de un rectángulo de 24 cm de perímetro:

Base (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura (cm)	11	10	9	8	2	...

Indicador de logro:

2.3 Identifica cantidades directamente proporcionales.

Propósito: Utilizar la definición o la propiedad de la proporcionalidad directa para identificar si dos cantidades son directamente proporcionales.

Puntos importantes: Tal como se menciona en el propósito de la clase, para identificar si dos cantidades son directamente proporcionales puede usarse o bien la definición dada en la clase 2.1 o la propiedad del cociente estudiada en la clase anterior (esta segunda resulta "más sencilla"). De acuerdo con ello, en ① los problemas pueden resolverse utilizando cualquiera de las dos; no es necesario que los estudiantes resuelvan aplicando la definición en un literal y la propiedad de la proporcionalidad en el otro, tal como lo hace Mario en ② (un estudiante podría solo calcular los cocientes en cada caso y verificar que en a. todos dan como resultado 3). Por lo tanto, para los problemas de ④ basta con verificar solamente UNO de los dos puntos descritos en ③ (usualmente, resulta más fácil el segundo).

Sugerencia metodológica: Si se utiliza la propiedad de la proporcionalidad directa, recordar a los estudiantes que para el cociente se divide la segunda cantidad (o la que está en la segunda fila) entre la primera (la que está en la primera fila).

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema a. del Resuelve.

Solución de problemas:

a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

Cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
Peso (g)	2	4	6	8	10	...
Cociente	2	2	2	2	2	✓

b. Cociente entre la cantidad de gasolina y el costo:

Cantidad (gal)	1	2	3	4	5	...
Costo ($)	3	6	9	12	15	...
Cociente	3	3	3	3	3	✓

c. Cociente entre el número de cortes y el de trozos:

Número de cortes	1	2	3	4	5	...
Número de trozos	2	3	4	5	6	...
Cociente	2	1.5	1.33...	1.25	1.2	✗

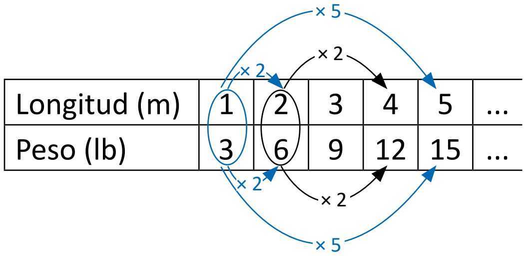
d. Cociente entre la altura y la base:

Base (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura (cm)	11	10	9	8	2	...
Cociente	11	5	3	2	0.4	✗

Fecha: **Clase:** 2.3

Ⓐ ¿Cuáles de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

Ⓢ a. La longitud y el peso de una varilla de hierro.



Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

Al multiplicar por cierto número la longitud, el peso también se multiplica por ese número.

R: Sí son directamente proporcionales.

b. El número de dulces de Ana y el número de dulces de Julia al repartirse 9 dulces.

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...
Cociente	8	3.5	2	1.25	0.8	...

El cociente no es igual.

R: No son directamente proporcionales.

Ⓡ

a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

Cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
Peso (g)	2	4	6	8	10	...
Cociente	2	2	2	2	2	✓

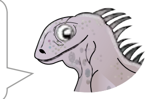
Tarea: página 106

2.4 Otras cantidades directamente proporcionales

Analiza

a. Completa la tabla escribiendo los valores del área de un rectángulo de base 5 cm cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	5×1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...



Recuerda que el área de un rectángulo se calcula:
área = base × altura

b. ¿Son la altura del rectángulo y su área cantidades directamente proporcionales?

c. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura (x) y el área (y).

Soluciona

1

a. Completo la tabla, utilizando la fórmula del área del rectángulo (**área = base × altura**):

Altura x (cm)	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...

b. Si para calcular el área realicé 5 × altura entonces el cociente área ÷ altura es igual a 5 en todos los casos. ¡Las cantidades son directamente proporcionales!

c. Como área = base × altura entonces la relación entre el área y y la altura x es:

$$y = 5 \times x$$

Comprende

La expresión $y = 5 \times x$ representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales; en este caso se dice que **y es directamente proporcional a x**, o simplemente que **y es proporcional a x**. Otros ejemplos de relaciones entre cantidades directamente proporcionales son $y = 2 \times x$, $y = 3 \times x$, etc.

Resuelve

2

1. La longitud de la base de un paralelogramo es 4 cm.

   a. Completa la tabla escribiendo los valores del área cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

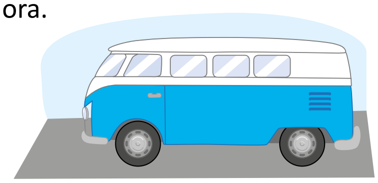
Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área del paralelogramo, representa la relación entre la altura x y el área y.

2. Un automóvil transita por una carretera a una rapidez de 60 km por hora.

   a. Completa la tabla:

Tiempo transcurrido x (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida y (km)						...



   b. Tomando en cuenta que **distancia = rapidez × tiempo**, representa la relación entre el tiempo transcurrido x con la distancia recorrida y.

Indicador de logro:

2.4 Utiliza fórmulas conocidas para escribir la relación de proporcionalidad directa entre dos cantidades.

Propósito: Escribir la relación de proporcionalidad directa utilizando las variables x y y, y fórmulas conocidas sobre áreas, perímetros o distancias.

Puntos importantes: Las situaciones abordadas en esta clase se basan en el conocimiento de ciertas fórmulas para calcular áreas de figuras planas o distancia, de tal forma que los estudiantes, al sustituir las cantidades correspondientes a las variables x y y, obtengan expresiones del tipo $y = a \times x$, donde a es un número conocido. En a. de ① debe tenerse cuidado de que se multiplique la base (5 cm) por las diferentes medidas para la altura, en ese orden, para poder obtener la expresión en c. presentada por Julia. Del mismo modo en ②, las expresiones deben escribirse en la forma $y = a \times x$ (esto servirá para los problemas de la siguiente clase y cuando se estudie la función lineal en octavo grado).

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. a.

Altura x (cm)	4 × 1	4 × 2	4 × 3	4 × 4	4 × 5
Área y (cm²)	4	8	12	16	20

b. La fórmula del área del paralelogramo es

área (y) = base (4) × altura (x)

R: $y = 4 \times x$

2. a.

Tiempo x (h)	60× 1	60× 2	60× 3	60× 4	60× 5
Distancia y (km)	60	120	180	240	300

b. Se utiliza la relación

distancia (y) = rapidez (60) × tiempo (x)

R: $y = 60 \times x$

Anotaciones:

____

____

____

Fecha: **Clase:** 2.4

Ⓐ a. Completa la tabla.

b. ¿Son la altura del rectángulo y su área directamente proporcionales?

c. Representa la relación entre la altura (x) y el área (y).

Ⓢ a.

Altura x (cm)	5 × 1	5 × 2	5 × 3	5 × 4	5 × 5	...
Área y (cm²)	5	10	15	20	25	...

b. Sí, porque el cociente área ÷ altura es igual a 5 en todos los casos.

c. Como área (y) = base (5) × altura (x), entonces:

$y = 5 \times x$

Ⓡ 1. a.

Altura x (cm)	4 × 1	4 × 2	4 × 3	4 × 4	4 × 5
Área y (cm²)	4	8	12	16	20

b. La fórmula del área del paralelogramo es

área (y) = base (4) × altura (x)

R: $y = 4 \times x$

2. a. Se multiplica 60 por cada tiempo.

b. **R:** $y = 60 \times x$

Tarea: página 107

Lección 2

2.5 Expresión y = constante × x

Analiza

La siguiente tabla muestra los datos de la clase anterior, sobre el área de un rectángulo de base 5 cm al variar su altura:

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la última fila de la tabla con el cociente del área entre la altura ($y \div x$). ¿Qué resultado obtuviste?

b. ¿Qué relación hay entre el número calculado en a. y la expresión $y = 5 \times x$?

Soluciona

a. Calculo el cociente:

Carlos

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$	$5 \div 1 = 5$	$10 \div 2 = 5$	$15 \div 3 = 5$	$20 \div 4 = 5$	$25 \div 5 = 5$	...

b. El cociente siempre es 5; esto significa que el área aumenta 5 cm^2 por cada centímetro que aumenta la altura.

c. El cociente 5 es el número que se encuentra en la expresión $y = 5 \times x$, es decir, el número de la expresión se obtiene calculando el cociente $y \div x$.

Comprende

① Cuando y es directamente proporcional a x, el cociente de $y \div x$ es siempre el mismo valor; a este valor se le llama **constante**. Cuando esto sucede, la relación entre x y y se puede expresar:

$$y = \textbf{constante} \times x$$

Algunas relaciones entre cantidades son de la forma x + constante = y, constante − x = y; pero estas cantidades no son directamente proporcionales.

Resuelve

② 1. La siguiente tabla muestra la cantidad de dinero que Juan acumula al ahorrar mensualmente:

Tiempo transcurrido x (meses)	1	2	3	4	5	...
Dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

b. Representa la relación entre el tiempo transcurrido en meses (x) y la cantidad de dinero ahorrado (y).

2. La siguiente tabla muestra el impuesto a las telefonías que se aplica según el monto de la recarga en El Salvador:

Monto de la recarga x ($)	1	2	3	4	5	...
Impuesto y (centavos)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

b. Representa la relación entre el monto de la recarga (x) y el impuesto (y).

Indicador de logro:

2.5 Escribe la relación de proporcionalidad directa $y = a \times x$ calculando la constante de proporcionalidad a.

Propósito: Obtener la constante de proporcionalidad directa de dos cantidades x y y a través del cálculo del cociente $y \div x$, para escribir la relación de proporcionalidad directa.

Puntos importantes: En esta clase se pretende fijar lo estudiado en la anterior sobre la relación de proporcionalidad directa, utilizando además situaciones donde no se tiene una "fórmula establecida". Por lo tanto, en ① se debe hacer énfasis en que para calcular la constante de proporcionalidad debe efectuarse el cociente $y \div x$, y la forma correcta de escribir la relación de proporcionalidad directa (indicar que en la relación siempre aparecerán las variables x y y). Tal como se describió anteriormente, para los problemas en ② no hay una fórmula establecida, los estudiantes deben razonar por qué las cantidades son directamente proporcionales (puede utilizarse el cociente).

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. a.

Tiempo transcurrido x (meses)	1	2	3	4	5	...
Dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20	...
Cociente $y \div x$	4	4	4	4	4	...

b. $y = 4 \times x$

2. a.

Monto de la recarga x ($)	1	2	3	4	5	...
Impuesto y (centavos)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$	5	5	5	5	5	...

b. $y = 5 \times x$

Anotaciones:

____

____

Fecha: **Clase:** 2.5

Ⓐ a. Completa la última fila de la tabla con el cociente del área entre la altura ($y \div x$). ¿Qué resultado obtuviste?

b. ¿Qué relación hay entre el número calculado en a. y la expresión $y = 5 \times x$?

Ⓢ a.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25
Cociente $y \div x$	$5 \div 1 = 5$	$10 \div 2 = 5$	5	5	5

El resultado es igual a 5 en todos los casos.

b. El cociente 5 es el número que se encuentra en $y = 5 \times x$.

Ⓡ 1. a.

Tiempo x (meses)	1	2	3	4	5
Dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20
Cociente $y \div x$	4	4	4	4	4

b. $y = 4 \times x$

2. a.

Monto x ($)	1	2	3	4	5
Impuesto y (cts)	5	10	15	20	25
Cociente $y \div x$	5	5	5	5	5

b. $y = 5 \times x$

Tarea: página 108

Lección 2

2.6 Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales

Analiza

1

¿Cómo se puede empacar un paquete de 300 hojas de papel bond sin contarlas una a una? Utiliza la estrategia y la información de María y Antonio:

El peso es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando el peso de un paquete de 10 hojas.

La altura es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando la altura de un paquete de 100 hojas.

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	a

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	b

Soluciona

2

Utilizo la estrategia de María, que encontró el peso de un paquete de 10 hojas. Con eso puedo calcular el peso de una hoja, y luego el de las 300:

Peso de una hoja (g): 40 ÷ 10 = 4
Peso de 300 hojas (g): 4 × 300 = 1, 200

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	1, 200

R: Se prepara un paquete que pese 1, 200 g.

Utilizo la estrategia de Antonio, que encontró la altura de un paquete de 100 hojas. Así, puedo calcular la altura de las 300 hojas.

Si la cantidad de hojas se triplica de 100 a 300, el peso también se triplica:

× 3

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	3

× 3

R: Se prepara un paquete de 3 cm de altura.

Comprende

Se puede preparar la cantidad aproximada de papel utilizando lo siguiente:

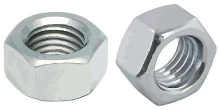
- El peso es directamente proporcional al número de hojas.
- La altura es directamente proporcional al número de hojas.

Así, no es necesario contar todas las hojas.

Resuelve

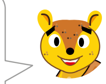
3

1. Al pesar 15 tuercas del mismo tipo se obtiene como resultado 32 g. ¿Cómo se pueden preparar 120 tuercas sin contarlas una a una?



n.° de tuercas	15	120
Peso (g)	32	a

¿El peso de las tuercas es directamente proporcional a la cantidad de tuercas? ¿Cuántas veces cabe 15 en 120?



2. En la librería “Papelitos” preparan paquetes de 750 pliegos de cartulina. Un paquete de 150 pliegos de cartulina mide 3 cm. ¿Cómo se puede preparar cada paquete de 750 pliegos sin contarlos uno a uno?

n.° de pliegos	150	750
Altura (cm)	3	b

¿La altura es directamente proporcional al número de pliegos?

Indicador de logro:

2.6 Resuelve situaciones – problema sobre cantidades directamente proporcionales.

Propósito: Utilizar la definición de proporcionalidad directa o la constante de proporcionalidad para resolver situaciones – problema.

Puntos importantes: En ① se debe indicar, desde el planteamiento del problema, que el peso o la altura es directamente proporcional a la cantidad de hojas, para que los estudiantes apliquen, ya sea la definición o la constante de proporcionalidad directa para resolverlo. Para aquellos que utilicen la constante de proporcionalidad su solución será parecida a la de Ana en ②, pues calcular el cociente 40 ÷ 10 correspondiente al peso de una hoja es, efectivamente, calcular la constante de proporcionalidad; el valor de la incógnita a será igual al resultado de 4 × 300. Por otra parte, los que usen la definición de proporcionalidad directa resolverán de forma parecida a José en ②, pues identifica que si el número inicial de hojas (100) se multiplica por 3 entonces la altura inicial (1 cm) también se multiplica por 3; el valor de la incógnita b será igual al resultado de 1 × 3. Finalmente, para los problemas en ③ indicar que pueden resolverse utilizando ya sea la definición o la constante de proporcionalidad directa.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. **Forma 1**, usando la definición.

× 8

n.° de tuercas	15	120
Peso (g)	32	a

× 8

Entonces, $a = 32 \times 8 = 256$

R: Se prepara una cantidad de tuercas que pesen 256 g en total.

Forma 2, usando la constante.

Peso de una tuerca: $32 \div 15 = \dfrac{32}{15}$

Peso de 120 tuercas: $a = \dfrac{32}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{\overset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{120}} = 32 \times 8 = 256$

R: Se prepara una cantidad de tuercas que pesen 256 g en total.

2. **R:** Se prepara un paquete de pliegos que mida 15 cm de altura.

Fecha: **Clase:** 2.6

Ⓐ ¿Cómo se puede empacar un paquete de 300 hojas de papel bond sin contarlas una a una?

- María: puedo resolver utilizando el peso de 10 hojas.
- Antonio: puedo resolver utilizando la altura de 100 hojas.

Ⓢ Estrategia de María:

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	a

Peso de una hoja (g): $40 \div 10 = 4$
Peso de 300 hojas (g): $a = 4 \times 300 = 1,200$

R: Se prepara un paquete que pese 1, 200 g.

Estrategia de Antonio:

× 3

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	b

× 3

$b = 1 \times 3 = 3$

R: Se prepara un paquete de 3 cm de altura.

Ⓡ

1.

× 8

n.° de tuercas	15	120
Peso (g)	32	a

× 8

Entonces, $a = 32 \times 8 = 256$

R: Se prepara una cantidad de tuercas que pesen 256 g en total.

Tarea: página 109

Lección 2

2.7 Proporcionalidad directa con un dato desconocido

Analiza

① Al pesar 90 clavos del mismo tipo en una báscula pesan 180 g; en la misma báscula se coloca un puñado de estos clavos y pesan 20 g. ¿Cuántos clavos hay sobre la báscula?

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

Soluciona

② El peso es directamente proporcional al número de clavos. Utilizo la propiedad de la proporcionalidad directa: 180 ÷ 90 = 2, es decir, 2 × 90 = 180.

n.° de clavos	2 × a	2 × 90
Peso (g)	20	180


Carmen

Como es constante, 2 × a = 20, es decir, a = 20 ÷ 2 = 10.

R: 10 clavos.

Encuentro el cambio en el peso de los clavos: 180 ÷ 20 = 9, es decir, 20 × 9 = 180.


Antonio

× 9

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

× 9

Como el peso aumenta 9 veces, el número de clavos también aumenta 9 veces, a × 9 = 90, o sea:

$$a = 90 \div 9 = 10$$

R: 10 clavos.

Comprende

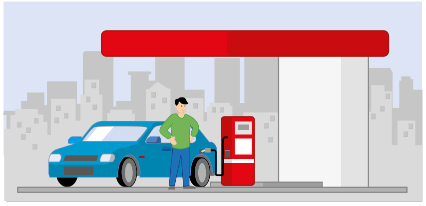
Aplicando la definición o la propiedad de proporcionalidad directa, se puede encontrar un valor desconocido de dos cantidades que son directamente proporcionales.

Resuelve

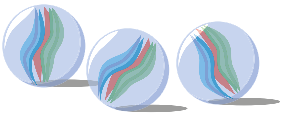
1. Don José pasó a una gasolinera y solicitó 4.5 galones de gasolina; el costo de la compra fue de $13.50. Otro señor pasó y el costo de la compra fue $27, ¿cuántos galones de gasolina compró el otro señor?

Cantidad de gasolina (gal)	4.5	a
Precio ($)	13.5	27

¿El número de galones de gasolina y el precio son cantidades directamente proporcionales?



2. Al pesar 36 chibolas iguales en una báscula se obtienen 324 g. En la misma báscula se pesa otro grupo de chibolas y pesan 81 g. ¿Cuántas chibolas se pesaron la segunda vez?



n.° de chibolas	a	36
Peso (g)	81	324

Indicador de logro:

2.7 Resuelve situaciones – problema sobre cantidades directamente proporcionales.

Propósito: Utilizar la definición de proporcionalidad directa o la constante de proporcionalidad para resolver situaciones – problema.

Puntos importantes: A diferencia de la clase anterior, las cantidades desconocidas se encuentran en la primera fila de la tabla, por lo tanto, debe tenerse clara la relación entre las operaciones de multiplicación y división; por ejemplo, si $2 \times a = 20$ entonces $a = 20 \div 2$. Los problemas presentados pueden ser resueltos usando la definición de proporcionalidad directa o la constante de proporcionalidad. Los estudiantes que resuelvan el problema en ① usando la constante tendrán soluciones similares a Carmen (ver ②): calcular el cociente del peso entre el número de clavos (que es la constante de proporcionalidad), deducir que ese resultado multiplicado por a da como resultado 20 y concluir que $a = 20 \div 2 = 10$ clavos. Por otro lado, los estudiantes que resuelvan el problema utilizando la definición de proporcionalidad realizarán un razonamiento similar al de Antonio: identificar que en la segunda fila se multiplica el primer dato (20 g) por 9 para obtener el segundo (180 g), deducir que $a \times 9 = 90$ y concluir que $a = 90 \div 9 = 10$ clavos.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. **Forma 1**, usando la definición.
Cambio en el precio ⟶ 27 ÷ 13.5 = 2

× 2

Cantidad de gasolina (gal)	4.5	a
Precio ($)	13.5	27

× 2

Entonces, $a = 4.5 \times 2 = 9$.

R: 9 gal de gasolina.

2. **Forma 1**, usando la definición.
Cambio en el peso ⟶ 324 ÷ 81 = 4

× 4

n.° de chibolas	a	36
Peso (g)	81	324

× 4

Entonces, $a \times 4 = 36$, es decir, $a = 36 \div 4 = 9$.

R: 9 chibolas.

Fecha: **Clase:** 2.7

Ⓐ Al pesar 90 clavos del mismo tipo en una báscula pesan 180 g; se coloca un puñado de estos clavos y pesan 20 g. ¿Cuántos clavos hay sobre la báscula?

Ⓢ

① 180 ÷ 90 = 2, es decir,
2 × 90 = 180

n.° de clavos	2 × a	2 × 90
Peso (g)	20	180

$2 \times a = 20$, es decir,
$a = 20 \div 2 = 10$

R: 10 clavos.

② 180 ÷ 20 = 9, es decir,
20 × 9 = 180

× 9

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

× 9

$a \times 9 = 90$, es decir,
$a = 90 \div 9 = 10$

R: 10 clavos.

Ⓡ 1. Cambio en el precio ⟶ 27 ÷ 13.5 = 2

× 2

Cantidad de gasolina (gal)	4.5	a
Precio ($)	13.5	27

× 2

Entonces, $a = 4.5 \times 2 = 9$

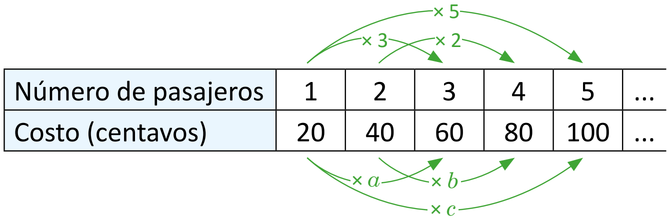
R: 9 gal de gasolina.

2. **R:** 9 chibolas.

Tarea: página 110

2.8 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de pasajeros de un autobús y el costo del pasaje, estas cantidades son directamente proporcionales. ¿Qué números corresponden a a, b y c?



Número de pasajeros	1	2	3	4	5	...
Costo (centavos)	20	40	60	80	100	...

2. Identifica si las siguientes cantidades son directamente proporcionales o no. Justifica tu respuesta.
   a. El número de cajas de lapiceros y la cantidad de lapiceros.

n.° de cajas	1	2	3	4	5	...
n.° de lapiceros	12	24	36	48	60	...

   b. Las edades de María y Juan al pasar los años.

Edad de María	15	16	17	18	19	...
Edad de Juan	12	13	14	15	16	...

3. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un rectángulo de base 4 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

4. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un triángulo de base 6 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	3					...
Cociente $y \div x$						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un triángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

5. En una fábrica de dulces se preparan minibolsas con 32 dulces, y se sabe que 8 dulces pesan 72 g. ¿Cómo se puede preparar una minibolsa sin contar los dulces uno a uno?

n.° de dulces	8	32
Peso (g)	72	a

6. Ana compró 36 platos por $108; su amiga compró otra cantidad de estos mismos platos y pagó $27. ¿Cuántos platos compró la amiga de Ana?

n.° de platos	a	36
Costo ($)	27	108

Indicador de logro:

2.8 Resuelve problemas sobre proporcionalidad directa.

Solución de problemas:

1. $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$

2. a. Usando la propiedad de la proporcionalidad directa, se calcula en cada caso el cociente entre el número de lapiceros y el número de cajas:

$12 \div 1 = 12$ $24 \div 2 = 12$ $36 \div 3 = 12$
$48 \div 4 = 12$ $60 \div 5 = 12$

n.° de cajas	1	2	3	4	5	...
n.° de lapiceros	12	24	36	48	60	...
Cociente	12	12	12	12	12	

R: Sí son directamente proporcionales, porque el cociente siempre es igual a 12.

b. Usando la propiedad de la proporcionalidad directa, se calcula en cada caso el cociente entre la edad de Juan y la de María:

$12 \div 15 = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{4}{5}$ $13 \div 16 = \frac{13}{16}$

$14 \div 17 = \frac{14}{17}$ $15 \div 18 = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{6}{\cancel{18}}} = \frac{5}{6}$

Edad de María	15	16	17	18	19	...
Edad de Juan	12	13	14	15	16	...
Cociente	$\frac{4}{5}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{17}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{16}{19}$	

R: No son directamente proporcionales, porque el cociente es diferente en cada caso.

3. a. Para el rectángulo, área = base × altura:

Altura x (cm)	4 × 1	4 × 2	4 × 3	4 × 4	4 × 5
Área y (cm^2)	4	8	12	16	20

b. Área (y) = base (4) × altura (x)
R: $y = 4 \times x$

4. a. Son cantidades directamente proporcionales. Al realizar el primer cociente ($3 \div 1$) el resultado es 3; por tanto, la constante de proporcionalidad es igual a 3:

Altura x (cm)	1	3 × 2	3 × 3	3 × 4	3 × 5	...
Área y (cm^2)	3	6	9	12	15	...
Cociente $y \div x$	3	3	3	3	3	...

b. **R:** $y = 3 \times x$

5. **Forma 1**, usando la definición:

× 4

n.° de dulces	8	32
Peso (g)	72	a

× 4

Entonces, $a = 72 \times 4 = 288$
R: Se prepara un conjunto de dulces que pese 288 g.

Forma 2, usando la propiedad de la proporcionalidad: $72 \div 8 = 9$

n.° de dulces	9 × 8	9 × 32
Peso (g)	72	a

Entonces, $a = 9 \times 32 = 288$
R: Se prepara un conjunto de dulces que pese 288 g.

6. **Forma 1**, usando la definición:

× 4

n.° de platos	a	36
Costo ($)	27	108

× 4

Entonces, $a \times 4 = 36$, es decir, $a = 36 \div 4 = 9$
R: 9 platos.

Forma 2, usando la propiedad de la proporcionalidad: $108 \div 36 = 3$

n.° de platos	3 × a	3 × 36
Costo ($)	27	108

Entonces, $3 \times a = 27$, es decir, $a = 27 \div 3 = 9$
R: 9 platos.

Lección 3 Proporcionalidad inversa

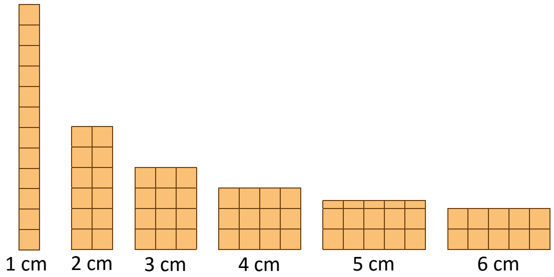
3.1 Relación de proporcionalidad inversa

Analiza

Carlos y Ana están dibujando rectángulos de área 12 cm^2. Realiza lo siguiente:

① a. Completa la tabla, ¿cómo cambia la longitud de la altura a medida que la longitud de la base, aumenta?

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...



b. Si la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, ¿cómo cambia la longitud de la altura?

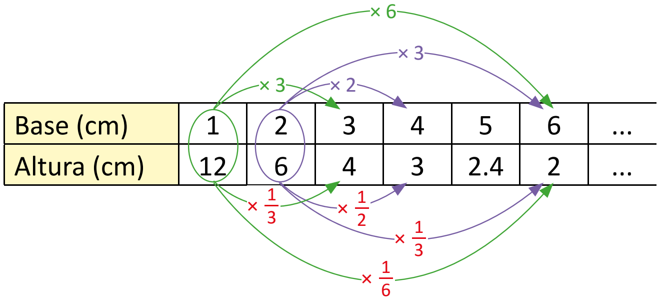
Soluciona

② a. Observo que al aumentar la longitud de la base, la longitud de la altura disminuye para mantener el área igual a 12 cm^2. Entonces:

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

b. Analizo la relación de la altura cuando la longitud de la base aumenta cierta cantidad de veces:

Cuando la longitud de la base se multiplica por 2, por 3, etc., la longitud de la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, etc., respectivamente.



Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

Comprende

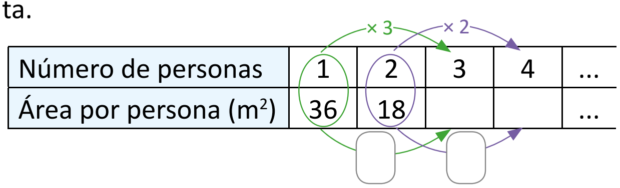
③ Cuando dos cantidades x y y cumplen que al multiplicarse una por 2, por 3, por 4, etc., la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, etc., respectivamente, se dice que las cantidades son **inversamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad inversa**.

Resuelve

④ 1. La tabla contiene la relación entre las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de área 18 cm^2. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa las longitudes que hacen falta.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...

2. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de personas en un salón de 36 m^2 de área y el área que corresponde por persona. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa los espacios que hacen falta.



Número de personas	1	2	3	4	...
Área por persona (m^2)	36	18			...

Indicador de logro:

3.1 Encuentra datos faltantes en cantidades que son inversamente proporcionales.

Propósito: Definir la proporcionalidad inversa y utilizarla para calcular los datos faltantes en situaciones con cantidades inversamente proporcionales.

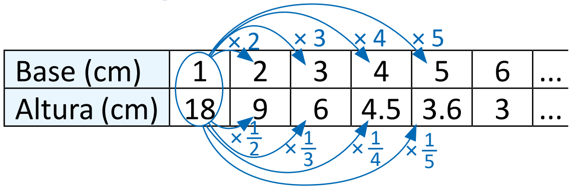
Puntos importantes: A diferencia de las clases anteriores donde se abordaron situaciones – problema sobre áreas de rectángulos, en el problema de ① lo que se mantiene fijo es el área del rectángulo (12 cm^2), y se desea encontrar la altura en función de la base; el dibujo muestra cómo diferentes rectángulos pueden tener la misma área pero diferentes dimensiones. En a. de ②, para calcular los valores correspondientes a la segunda fila los estudiantes pueden realizar la división del área total (12 cm^2) entre cada una de las longitudes para la base; por ejemplo, si la base mide 3 cm entonces la altura debe medir 12 ÷ 3 = 4 cm. Esto también puede encontrarse de forma más inmediata al identificar qué número debe multiplicarse por la base para obtener como resultado 12. En ③, debe hacerse énfasis en la diferencia con respecto a la proporcionalidad directa y relacionarlo con la solución de b. en ②, es decir, enfatizar que la altura se multiplica por el recíproco y no por el mismo número. Este hecho se utilizará para la solución de los problemas en ④.

Sugerencia metodológica: Para definir la proporcionalidad inversa, evitar utilizar expresiones del tipo "si al aumentar una la otra disminuye" ya que no se indica que la segunda cantidad varía de acuerdo al recíproco del factor que afecta la primera cantidad.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

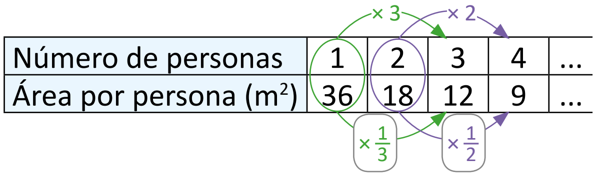
Solución de problemas:

1.



Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	18	9	6	4.5	3.6	3	...

2.



Número de personas	1	2	3	4	...
Área por persona (m^2)	36	18	12	9	...

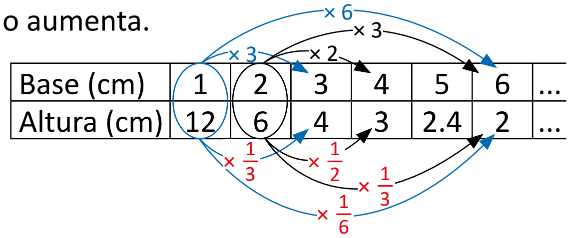
Fecha: **Clase:** 3.1

Ⓐ Carlos y Ana están dibujando rectángulos de 12 cm^2 área.

a. ¿Cómo cambia la longitud de la altura a medida que la longitud de la base, aumenta?

b. Si la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, ¿cómo cambia la longitud de la altura?

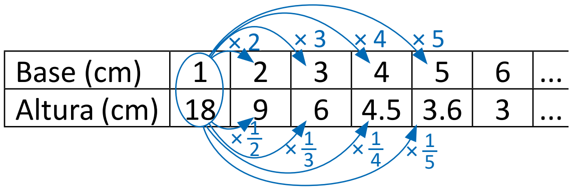
Ⓢ a. No aumenta.



Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

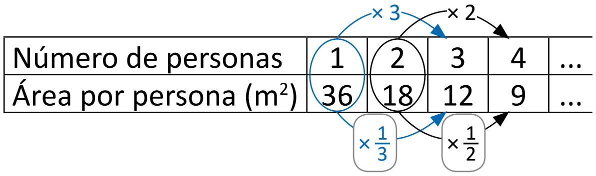
b. Cuando la base se multiplica por 2, 3, etc., la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, etc., respectivamente.

Ⓡ 1.



Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	18	9	6	4.5	3.6	3	...

2.



Número de personas	1	2	3	4	...
Área por persona (m^2)	36	18	12	9	...

Tarea: página 112

3.2 Propiedad de la proporcionalidad inversa

Analiza

① La siguiente tabla contiene los datos obtenidos en la clase anterior sobre la base y la altura de un rectángulo de área 12 cm^2. Calcula el producto de la base por la altura, ¿cuánto resulta?

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$							

Soluciona

Calculo el producto en cada caso. Por ejemplo, para 1 cm de base y 12 cm de altura, el producto es 1 × 12 = 12:

Mario

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$	12	12	12	12	12	12	

El producto de la base por la altura es igual al área, ¡siempre es igual a 12!

R: 12

Comprende

② **Propiedad de la proporcionalidad inversa**

Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales, el producto de estas cantidades siempre resulta el mismo número.

Resuelve

③ 1. Una botella con jugo se reparte en vasos. La tabla contiene la cantidad de líquido en cada vaso, dependiendo del número de vasos. Estas cantidades son inversamente proporcionales.

n.° de vasos x	2	4	8	10	...
Cantidad de líquido y (ml)	500	250			...
Producto $x \times y$					

a. Completa la tabla.
b. ¿Cuál es la capacidad de la botella?

2. La siguiente tabla muestra la relación entre los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un automóvil para ir de la ciudad A a la ciudad B.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60	...
Tiempo y (horas)	12	6	3	2	1	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la tabla.
b. ¿Cuál es la distancia que separa las ciudades A y B?

Indicador de logro:

3.2 Calcula el producto de cantidades que son inversamente proporcionales.

Propósito: Comprobar la propiedad de la proporcionalidad inversa sobre el producto constante entre cantidades que son inversamente proporcionales.

Puntos importantes: Para la proporcionalidad inversa, no es el cociente el que es constante sino el producto de las cantidades; en ① debe hacerse énfasis en la indicación y en la última fila de la tabla sobre este hecho. También relacionar el producto con el hecho de que el área del rectángulo es 12 cm^2. En ②, resaltar la diferencia entre la propiedad de la proporcionalidad inversa con respecto a la directa, recordando que en la primera se calcula el producto y en la segunda el cociente entre las cantidades. En los problemas de ③, analizar el sentido del producto constante con respecto a la respuesta para el literal b. de ambas situaciones. Por ejemplo, en 1. solo hay 1 botella que se reparte en diferentes cantidades de vasos, si hay 2 vasos entonces la cantidad de líquido en cada uno son 500 ml; lo anterior indica que la capacidad de la botella es 500 × 2 = 1,000 ml (o 1 litro).

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. a. Si el número de vasos es 2, la cantidad de líquido en cada uno es 500 y 2 × 500 = 1,000. Como son cantidades inversamente proporcionales, el producto debe ser igual a 1,000 en todos los casos:

n.° de vasos x	2	4	8	10
Cantidad de líquido y (ml)	500	250	125	100
Producto $x \times y$	1,000	1,000	1,000	1,000

b. **R:** 1,000 ml (o 1 litro).

2. a.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60	...
Tiempo y (horas)	12	6	3	2	1	...
Producto $x \times y$	60	60	60	60	60	

b. De la tabla se observa que si la rapidez es 60 km/h entonces el automóvil tardará solo 1 h en ir de la ciudad A a la ciudad B.

R: 60 km

Fecha: **Clase:** 3.2

Ⓐ Calcula el producto de la base por la altura, ¿cuánto resulta?

Ⓢ Se calcula el producto en cada caso:

1 × 12 = 12 2 × 6 = 12 3 × 4 = 12
4 × 3 = 12 5 × 2.4 = 12 6 × 2 = 12

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$	12	12	12	12	12	12	

¡Siempre es igual a 12!

R: 12

Ⓡ 1. a.

n.° de vasos x	2	4	8	10
Líquido y (ml)	500	250	125	100
Producto $x \times y$	1,000	1,000	1,000	1,000

b. **R:** 1,000 ml (o 1 litro).

2. a.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60
Tiempo y (horas)	12	6	3	2	1
Producto $x \times y$	60	60	60	60	60

b. **R:** 60 km

Tarea: página 113

3.3 Identificación de cantidades inversamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

a. La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...

b. Las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

Soluciona


Ana

①

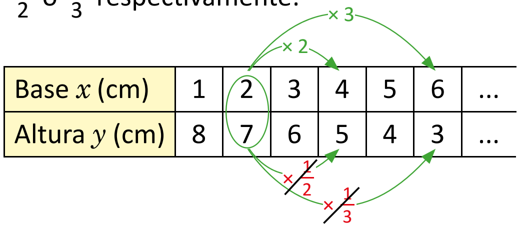
a. Verifico si cumple las propiedades de la proporcionalidad inversa, realizando los productos de la rapidez por el tiempo. Por ejemplo, para la rapidez 5 km/h y el tiempo 16 h, el producto es 5 × 16 = 80:

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

Como el producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta en 80, las cantidades son inversamente proporcionales.

R: La rapidez y el tiempo que tarda un auto en recorrer cierta distancia son inversamente proporcionales.

b. Verifico si cumple la condición de la proporcionalidad inversa, es decir, si al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ respectivamente:



Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

Al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura no se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$, por tanto las cantidades no son inversamente proporcionales.

R: La base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm no son inversamente proporcionales.

Comprende

②

Para identificar si dos magnitudes son inversamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, ..., la otra se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, ..., respectivamente.
- El producto de las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad inversa).

Resuelve

③

Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta.

a. El número de estudiantes para una excursión y el costo del pasaje por estudiante.

n.° de estudiantes	5	10	15	20	25	...
Pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...

b. El número de chocolates de Julia y Mario al repartirse 8 chocolates.

Chocolates de Julia	1	2	3	4	5	...
Chocolates de Mario	7	6	5	4	3	...

c. El número de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento en una granja.

n.° de gallinas	200	400	600	800	...
n.° de días	30	15	10	7.5	...

Indicador de logro:

3.3 Identifica cantidades inversamente proporcionales.

Propósito: Utiliza la definición o la propiedad de la proporcionalidad inversa para determinar si dos cantidades son inversamente proporcionales.

Puntos importantes: En esta clase se pretende identificar si las cantidades dadas son inversamente proporcionales o no, con un procedimiento similar al realizado en la clase 2.3, es decir, tal como lo hace Ana en ①; no es necesario que los estudiantes resuelvan usando la propiedad para un literal y la definición para el otro, pueden usar la misma estrategia para ambos llegando a la conclusión que en a. las cantidades son inversamente proporcionales y en b. no. Esto aplica también para los problemas de ③, donde se utiliza solo una de las dos condiciones descritas en ② para verificar la proporcionalidad inversa.

Sugerencia metodológica: Es posible que la propiedad de la proporcionalidad inversa resulte ser la estrategia más sencilla de usar respecto a los cálculos y evitar trabajar con fracciones.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

a. El número de estudiantes y el costo del pasaje por estudiante.

n.° de estudiantes	5	10	15	20	25	...
Pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...
Producto	150	150	150	150	150	✓

b. El número de chocolates de Julia y Mario al repartirse 8 chocolates.

Chocolates de Julia	1	2	3	4	5	...
Chocolates de Mario	7	6	5	4	3	...
Producto	7	12	15	16	15	✗

c. El número de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento en una granja.

n.° de gallinas	200	400	600	800	...
n.° de días	30	15	10	7.5	...
Producto	6,000	6,000	6,000	6,000	✓

Fecha: **Clase:** 3.3

Ⓐ ¿Cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

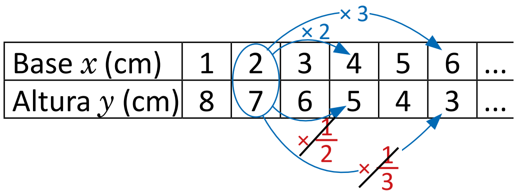
Ⓢ a. La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

El producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta en 80.

R: Sí son inversamente proporcionales.

b. Las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de 18 cm de perímetro.



Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

R: No son inversamente proporcionales.

Ⓡ a.

n.° de estudiantes	5	10	15	20	25	...
Pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...
Producto	150	150	150	150	150	✓

Tarea: página 114

Lección 3

3.4 Expresión $x \times y$ = constante

Analiza

① La siguiente tabla contiene los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la última fila de la tabla con el producto de la rapidez por el tiempo.
b. Utilizando la relación de **distancia** = **rapidez** × **tiempo**, representa la relación entre la rapidez x y el tiempo y.

Soluciona

a. Calculo el producto en cada caso:


José

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

② ¡Siempre resulta en 80!

b. Como x representa la rapidez, y el tiempo y el producto siempre es igual a 80 (significa que la distancia que recorre el auto es 80 km), entonces:

distancia = **rapidez** × **tiempo**

$$80 = x \times y$$

R: $80 = x \times y$ o $x \times y = 80$

La representación entre la rapidez y el tiempo también se puede escribir como $y = 80 \div x$.

Comprende

③ Cuando x y y son cantidades inversamente proporcionales, el producto $x \times y$ es constante (siempre es el mismo valor). La relación entre x y y se puede representar como:

$$\boldsymbol{x \times y} = \textbf{constante} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{y} = \textbf{constante} \div \boldsymbol{x}$$

Se dice que y **es inversamente proporcional** a x.

Resuelve

④ 1. La siguiente tabla contiene los datos de la base y la altura de un rectángulo de 18 cm^2 de área:

a. Completa la tabla.
b. Utilizando la fórmula del área del rectángulo, representa la relación entre la base x y la altura y (escríbelo de dos formas distintas).

Base x (cm)	1	2	3	6	9	...
Altura y (cm)	18					...
Producto $x \times y$						

2. Un grupo de alumnos para una excursión contratan un autobús a precio fijo. Observa los datos de la tabla que contienen las posibilidades del número de estudiantes y el costo que correspondería por estudiante.

Número de estudiantes x	24	18	12	8	6	...
Precio por estudiante y ($)	6	8	12	18	24	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la última fila de la tabla y responde, ¿cuál es el precio del autobús por hacer el viaje?
b. Representa la relación entre el número de estudiantes y el precio por estudiante.

Indicador de logro:

3.4 Escribe la relación de proporcionalidad inversa $x \times y$ = constante encontrando la constante de proporcionalidad inversa.

Propósito: Obtener la constante de proporcionalidad inversa de dos cantidades x y y a través del cálculo del producto $x \times y$, para escribir la relación de proporcionalidad inversa.

Puntos importantes: En b. de ① se facilita la fórmula que relaciona la distancia con la rapidez y el tiempo; a diferencia de las clases de la lección 2 donde se trabajaron también situaciones de este tipo, la distancia es la que permanece constante, y varían la rapidez y el tiempo. Por lo tanto, al sustituir con los números y variables correspondientes, los estudiantes deben obtener o bien $80 = x \times y$, o $x \times y = 80$ (ver b. en ②). En ③ debe hacerse énfasis en las dos formas válidas para escribir la relación de proporcionalidad inversa, cualquiera de ellas puede ser utilizada para los problemas en ④.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. a. El producto de las cantidades es 18. Como son inversamente proporcionales, debe ser así para todos los casos (de esa forma pueden completarse los espacios de la segunda fila):

Base x (cm)	1	2	3	6	9	...
Altura y (cm)	18	9	6	3	2	...
Producto $x \times y$	18	18	18	18	18	

b. $x \times y = 18$ o $y = 18 \div x$

2. a. Como los valores de la segunda fila ya están dados, solo se calcula el producto en cada caso:

Número de estudiantes x	24	18	12	8	6	...
Precio por estudiante y ($)	6	8	12	18	24	...
Producto $x \times y$	144	144	144	144	144	

b. $x \times y = 144$ o $y = 144 \div x$

Fecha: **Clase:** 3.4

Ⓐ a. Completa la última fila de la tabla.

b. Representa la relación entre la rapidez x y el tiempo y.

Ⓢ a.

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

El producto siempre resulta en 80.

b. x representa la rapidez, y el tiempo y la distancia es 80:

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$
$$80 = x \times y$$

R: $80 = x \times y$ o $x \times y = 80$

Ⓡ 1. a. El producto de las cantidades es 18. Como son inversamente proporcionales, debe ser así para todos los casos:

Base x (cm)	1	2	3	6	9	...
Altura y (cm)	18	9	6	3	2	...
Producto $x \times y$	18	18	18	18	18	

b. $x \times y = 18$ o $y = 18 \div x$

Tarea: página 115

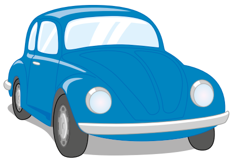
Lección 3

3.5 Proporcionalidad inversa con un dato desconocido

Analiza

① Un automóvil que circula a 60 km/h invierte 2 horas en cubrir la distancia que separa dos ciudades. Si vuelve a realizar el viaje a una rapidez de 20 km/h, ¿cuánto tiempo tardará?

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a



Soluciona

Como la rapidez y el tiempo son cantidades inversamente proporcionales, el producto siempre es constante:

②

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	1	a
Producto	120	120

Entonces, $20 \times a = 120$, es decir:

$$a = 120 \div 20 = 6$$

R: Tardará 6 horas.

Encuentro el cambio en la rapidez, observando que: $60 \times \frac{1}{3} = 20$, la rapidez se multiplica por $\frac{1}{3}$; entonces el tiempo se multiplica por 3:

$\times \frac{1}{3}$

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a

$\times 3$

$$a = 2 \times 3 = 6$$

R: Tardará 6 horas.

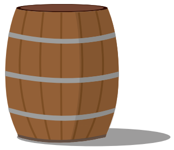
Comprende

Se puede encontrar un valor desconocido en situaciones sobre proporcionalidad inversa, utilizando la definición o la propiedad de proporcionalidad inversa.

Resuelve

③

1. Hay 8 barriles llenos de vino, con 200 litros cada uno. Se quiere envasar la misma cantidad de vino en 32 barriles iguales llenándolos completamente. ¿Cuál debe ser la capacidad de estos barriles?



Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a
Producto		

¿Son la capacidad y el número de barriles cantidades inversamente proporcionales?

2. Se llena un depósito en 6 horas, utilizando 4 grifos que vierten la misma cantidad de agua de forma constante. Si se usan 8 grifos con este mismo flujo de agua, ¿cuánto tiempo tardará en llenar el depósito?

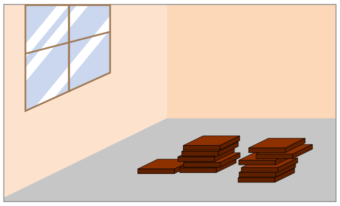
Número de grifos	4	8
Tiempo (horas)	6	a
Producto		

¿Son el número de grifos y el tiempo, cantidades inversamente proporcionales?

✶ Desafíate

Para enladrillar un piso se necesitan 40 ladrillos de 30 cm^2. ¿Cuántos ladrillos de 20 cm^2 se necesitarán para enladrillar la misma superficie?

Número de ladrillos	40	a
Área de cada ladrillo (cm^2)	30	20



Indicador de logro:

3.5 Resuelve situaciones – problema sobre cantidades inversamente proporcionales.

Propósito: Utilizar la propiedad o la definición de proporcionalidad inversa para encontrar el dato desconocido en una situación de proporcionalidad inversa.

Puntos importantes: En ① debe enfatizarse que, aunque las situaciones que involucran distancia, rapidez y tiempo fueron trabajadas también en la lección 2, para los problemas de esta quien se mantiene constante es la distancia, la cual resulta de multiplicar la rapidez por el tiempo; por tanto, las cantidades son inversamente proporcionales. En ②, los estudiantes pueden resolver ya sea aplicando la propiedad de la proporcionalidad inversa (como la solución de Carmen) o usando la definición (como Antonio); en el segundo caso debe tenerse cuidado con que si la rapidez se multiplica por cierto número, el tiempo lo hará con el recíproco. En ③ puede utilizarse cualquiera de las dos estrategias para resolver los problemas; en algunas ocasiones resulta más práctico usar la propiedad de la proporcionalidad inversa.

Materiales: Carteles con las tablas del Analiza y del problema 1. del Resuelve.

Solución de problemas:

1. **Forma 1**, usando la propiedad:

Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a
Producto	1, 600	1, 600

Como el producto es constante, $32 \times a = 1,600$

$a = 1,600 \div 32 = 50$

R: 50 litros.

2. **R:** 3 horas.

Forma 2, usando la definición:

× 4

Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a

× $\frac{1}{4}$

Entonces, $a = \overset{50}{\cancel{200}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 50 \times 1 = 50$

R: 50 litros.

★ Desafíate

R: 60 ladrillos.

Fecha: **Clase:** 3.5

Ⓐ Un automóvil que circula a 60 km/h invierte 2 horas en cubrir cierta distancia. Si vuelve a realizar el viaje a una rapidez de 20 km/h, ¿cuánto tiempo tardará?

Ⓢ

① El producto siempre es constante:

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a
Producto	120	120

Entonces $20 \times a = 120$:

$a = 120 \div 20 = 6$

R: Tardará 6 horas.

②

× $\frac{1}{3}$

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a

× 3

Entonces,

$a = 2 \times 3 = 6$

R: Tardará 6 horas.

Ⓡ 1. Usando la propiedad:

Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a
Producto	1, 600	1, 600

Como el producto es constante,

$32 \times a = 1,600$

$a = 1,600 \div 32 = 50$

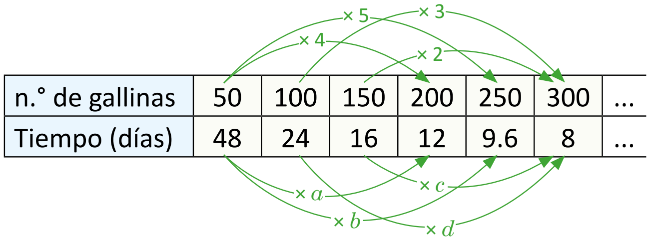
R: 50 litros.

2. **R:** 3 horas.

Tarea: página 116

3.6 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de gallinas en una granja y el tiempo que tardan en comer cierta cantidad de alimento.
   a. ¿Qué números se deben escribir en lugar de a, b, c y d?



n.° de gallinas	50	100	150	200	250	300	...
Tiempo (días)	48	24	16	12	9.6	8	...

   b. ¿Son el número de gallinas y el tiempo que tardan en comer el alimento, cantidades inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

2. Identifica cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales y explica tu respuesta:
   a. El número de estudiantes y la cantidad de cinta que les corresponde si se reparten 30 metros de cinta:

n.° de estudiantes	1	2	3	4	5	...
Cinta (m)	30	15	10	7.5	6	...

   b. El número de paletas que les corresponden a Carlos y María, si se reparten 9 paletas:

Paletas de Carlos	1	2	3	4	5	...
Paletas de María	8	7	6	5	4	...

3. a. Completa la tabla con los posibles valores que puede tomar la base y la altura de un paralelogramo de área 120 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	120					...

   b. Utilizando la fórmula del área de un paralelogramo **área** = **base** × **altura**, representa la relación entre la base x y la altura y.

4. Si 6 trabajadores siembran una parcela con maíz en 4 días, ¿cuánto tardarían en sembrar la misma parcela 12 trabajadores trabajando al mismo ritmo?

n.° de trabajadores	6	12
Tiempo (días)	4	a

Indicador de logro:

3.6 Resuelve problemas sobre la proporcionalidad inversa.

Solución de problemas:

1. a. $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{1}{3}$

b. **R:** Sí, ya que si la primera cantidad se multiplica por 2, 3, 4, etc., la segunda se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, etc., respectivamente.

2. a. Se utiliza la propiedad de la proporcionalidad inversa, verificando si el producto del número de estudiantes y la cinta es constante en todos los casos:

n.° de estudiantes	1	2	3	4	5	...
Cinta (m)	30	15	10	7.5	6	...
Producto	30	30	30	30	30	✓

R: Sí son inversamente proporcionales, ya que el producto es constante (siempre es igual a 30).

b. Se utiliza la propiedad de la proporcionalidad inversa, verificando el producto de la cantidad de paletas de Carlos y la de María:

Paletas de Carlos	1	2	3	4	5	...
Paletas de María	8	7	6	5	4	...
Producto	8	14	18	20	20	✗

R: No son inversamente proporcionales, pues el producto no es constante (es diferente en cada caso).

3. a. En cada caso, la cantidad que corresponde a la altura debe ser tal que al multiplicarla por la base el resultado sea 120, ya que el área es un número fijo:

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	120	60	40	30	24	...

b. La base está representada con x, la altura con y y el área es 120 cm^2; entonces:

$$x \times y = 120$$

R: $x \times y = 120$ o $y = 120 \div x$

4. **Forma 1**, usando la propiedad de la proporcionalidad inversa:

n.° de trabajadores	6	12
Tiempo (días)	4	a
Producto	24	24

Como el producto es constante, $12 \times a = 24$

$$a = 24 \div 12 = 2$$

R: 2 días.

Forma 2, usando la definición de proporcionalidad inversa:

× 2

n.° de trabajadores	6	12
Tiempo (días)	4	a

$\times \frac{1}{2}$

Entonces, $a = \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 2$

R: 2 días.

Lección 3

3.7 Proporcionalidad directa e inversa

Analiza

① Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directa o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda en recorrer 120 km de distancia.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...

b. La longitud de un alambre y su peso.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...

c. La base y la altura de un rectángulo de perímetro 16 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...

Soluciona


Julia

Encuentro la relación entre x y y analizando, si el cociente o el producto es constante:

a. Al calcular el producto de la rapidez por el tiempo, el resultado siempre es 120. Las cantidades son inversamente proporcionales y $x \times y = 120$.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...
Producto $x \times y$	120	120	120	120	

b. Si calculo el cociente del peso entre la longitud, el resultado siempre es 9. Las cantidades son directamente proporcionales y $y = 9 \times x$.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...
Cociente $y \div x$	9	9	9	9	

c. No son cantidades directamente proporcionales, ni inversamente proporcionales, pues ni el cociente, ni el producto son constantes.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...
Cociente $y \div x$	7	3	1.66...	1	0.6	
Producto $x \times y$	7	12	15	16	15	

Comprende

② Se puede identificar si dos cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos, verificando si el producto o el cociente es constante.

Resuelve

③ Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directamente o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La base y la altura de un rectángulo de área 60 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	...
Altura y (cm)	60	30	20	15	...

b. Las edades de Marta y Beatriz.

Edad de Marta x	10	11	12	13	...
Edad de Beatriz y	7	8	9	10	...

c. El número de páginas de un libro y su peso.

n.° de páginas x	150	300	450	600	...
Peso y (lb)	2	4	6	8	...

d. El número de trabajadores y la cantidad de días que tardan en pintar una casa.

n.° de trabajadores x	4	8	12	16	...
n.° de días y	12	6	4	3	...

¿Sabías que...?

Existen dos algoritmos para encontrar un dato que falta en cantidades que son directamente proporcionales o inversamente proporcionales, llamados **regla de tres**.

Regla de tres directa

Dadas la cantidades A y B directamente proporcionales, entonces se cumple $a : b = c : d$. Por la propiedad fundamental de las proporciones se cumple $a \times d = b \times c$; esto significa que a veces d es igual a $b \times c$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$d = b \times c \div a$ o $d = \frac{b \times c}{a}$

Ejemplo de la regla de tres directa: Si 3 dulces pesan 18 g, ¿cuánto pesan 8 dulces?

El peso es directamente proporcional a la cantidad de dulces. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres directa:

n.° de dulces	3	8
Peso (g)	18	d

$$d = \frac{\overset{6}{\cancel{18}} \times 8}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 6 \times 8 = 48$$

R: 48 g

Regla de tres inversa

Dadas la cantidades A y B inversamente proporcionales, entonces, por la propiedad de la proporcionalidad inversa se cumple $a \times b = c \times d$; esto significa que c veces d es igual a $a \times b$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$d = a \times b \div c$ o $d = \frac{a \times b}{c}$

Ejemplo de la regla de tres inversa: Si 4 trabajadores pintan una casa en 2 días, ¿cuánto tardarán 8 trabajadores si trabajan al mismo ritmo?

El número de trabajadores y la cantidad de horas son inversamente proporcionales. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres inversa:

n.° de trabajadores	4	8
Tiempo (días)	2	d

$$d = \frac{4 \times 2}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

R: Tardarán 1 día.

Indicador de logro:

3.7 Identifica si dos cantidades son directa o inversamente proporcionales, o ninguna de las dos.

Propósito: Utilizar las propiedades de la proporcionalidad directa o inversa sobre el cociente o producto constante, para determinar si dos cantidades son directa o inversamente proporcionales, o ninguna de las dos.

Puntos importantes: En el enunciado del problema en ① se indica claramente que las cantidades pueden ser, en cada caso, directa o inversamente proporcionales, o ninguna de las dos. Con ello se muestra que la proporcionalidad directa y la inversa no son las únicas relaciones que pueden encontrarse en cantidades que varían; esto se estudiará en tercer ciclo y bachillerato en el bloque de funciones. Además, debe verificarse la correcta escritura de cada una de las relaciones usando las variables x y y. En ② se debe hacer énfasis en la estrategia para identificar si dos cantidades son directa o inversamente proporcionales: se utiliza el cociente o el producto entre ellas. Esta estrategia se aplica para resolver los problemas en ③, no es necesario que por cada problema los estudiantes calculen el cociente y el producto (ambos), si uno se cumple entonces el otro queda descartado; en el caso de c. recordar que el cociente puede ser escrito como fracción.

Solución de problemas:

a.

Base x (cm)	1	2	3	4	...
Altura y (cm)	60	30	20	15	...
Producto $x \times y$	60	60	60	60	

Como el producto es constante, son inversamente proporcionales: $x \times y = 60$

b.

Edad de Marta x	10	11	12	13	...
Edad de Beatriz y	7	8	9	10	...
Cociente $y \div x$	0.7	0.72...	0.75	0.76...	
Producto $x \times y$	70	88	108	130	

Ni el cociente ni el producto es constante, no son directa ni inversamente proporcionales.

c.

n.° de páginas x	150	300	450	600	...
Peso y (lb)	2	4	6	8	...
Cociente $y \div x$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{75}$	

Son directamente proporcionales: $y = \frac{1}{75} \times x$

d.

n.° de trabajadores x	4	8	12	16	...
n.° de días y	12	6	4	3	...
Producto $x \times y$	48	48	48	48	

Son inversamente proporcionales: $x \times y = 48$

Fecha: **Clase:** 3.7

Ⓐ Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos.

Ⓢ a. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda en recorrer 120 km de distancia.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...
Producto $x \times y$	120	120	120	120	

R: Son inversamente proporcionales, $x \times y = 120$

b. La longitud de un alambre y su peso.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...
Cociente $y \div x$	9	9	9	9	

R: Son directamente proporcionales, $y = 9 \times x$

c. La base y la altura de un rectángulo de 16 cm de perímetro.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...
Cociente $y \div x$	7	3	1.66...	1	0.6	
Producto $x \times y$	7	12	15	16	15	

R: No son directa ni inversamente proporcionales.

Ⓡ a. **R:** Son inversamente proporcionales, $x \times y = 60$.

Tarea: página 118