Unidad 5

Proporcionalidad

En esta unidad aprenderás a

- Identificar si dos razones forman una proporción
- Aplicar las propiedades de las proporciones para encontrar razones equivalentes
- Encontrar la cantidad desconocida en una proporción
- Identificar cantidades directamente proporcionales
- Identificar cantidades inversamente proporcionales

1.1 Variación de cantidades para obtener la misma razón

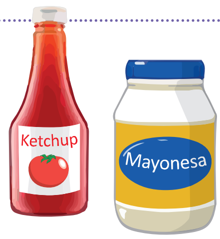
Recuerda

Completa escribiendo la razón y el valor de razón según el siguiente el ejemplo:

Situación	Razón (a : b)	Valor de razón
1. Juan mezcló 6 cucharadas de café y 2 de azúcar. ¿Cuál es la razón entre café y azúcar?	6 : 2	$\frac{6}{2} = 3$
2. De 5 tiros libres Juan logra anotar 3 goles. ¿Cuál es la razón entre tiros libres y goles?		
3. En un salón hay 10 niñas y 13 niños. ¿Cuál es la razón entre niñas y niños?		

Analiza

Según la receta de María, para aderezar un tazón de ensalada con salsa rosada se deben mezclar 2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa. ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se deben mezclar para obtener el mismo sabor, si se utilizan 6 cucharadas de ketchup? Representa la cantidad de cucharadas de mayonesa como x.



Soluciona

Ana

Represento en una tabla la cantidad de cucharadas de cada ingrediente relacionadas con la cantidad de tazones de ensalada que se pueden aderezar:

Para aderezar 1 tazón:

Ketchup	Mayonesa
2	3

2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa.

× 2   × 2

Para aderezar 2 tazones:

Ketchup	Mayonesa
4	6

4 cucharadas de ketchup y 6 cucharadas de mayonesa.

× 3   × 3

Para aderezar 3 tazones:

Ketchup	Mayonesa
6	x

6 cucharadas de ketchup y x cucharadas de mayonesa.

Ketchup: 6 cucharadas son 3 veces 2 cucharadas.
Mayonesa: 9 cucharadas son 3 veces 3 cucharadas. Es decir que $x = 9$.
R: Se necesitan 9 cucharadas de mayonesa.

Comprende

Cuando se tiene una razón entre dos cantidades $a : b$, la cual se quiere mantener para conservar el mismo sabor, tono, consistencia etc., se pueden aumentar los números a y b en la misma cantidad de veces hasta encontrar las cantidades que se necesitan.

Ejemplo: ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se necesitan si se utilizan 10 cucharadas de ketchup?

Recuerda que, en una razón $a : b$, a la cantidad a se le llama antecedente y a la cantidad b se le llama consecuente.

Ketchup	Mayonesa
2 cucharadas	3 cucharadas
10 cucharadas	x cucharadas

× 5 × 5

En 10 cucharadas de ketchup hay 5 veces 2 cucharadas. Entonces de mayonesa son 5 veces 3 cucharadas, es decir, $x = 15$.

R: 15 cucharadas.

Resuelve

1. En cada literal, encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor.

a.

Chocolate	Leche
3 tazas	2 tazas
12 tazas	x tazas

× $\square$ × $\square$

b.

Café	Leche
2 tazas	1 taza
x tazas	7 tazas

× $\square$ × $\square$

c.

Agua	Jugo de limón
7 vasos	2 vasos
14 vasos	x vasos

× $\square$ × $\square$

d.

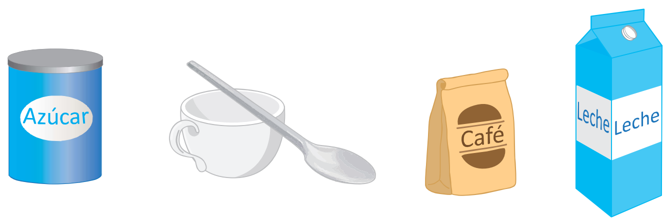
Ketchup	Mayonesa
2 cucharadas	5 cucharadas
x cucharadas	15 cucharadas

× $\square$ × $\square$

2. Cierta receta indica que la relación entre las tazas de agua y harina es 1 : 3
   a. Por 6 tazas de agua, ¿cuántas tazas de harina se deben utilizar?
   b. Por 15 tazas de harina, ¿cuántas tazas de agua se deben utilizar?

Desafíate

Para preparar café con leche el abuelo José dice: "por cada 2 tazas de café hay que agregar 1 taza de leche y 3 cucharadas de azúcar". Para preparar café con leche con el mismo sabor utilizando 8 tazas de café, ¿cuántas tazas de leche y cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar?

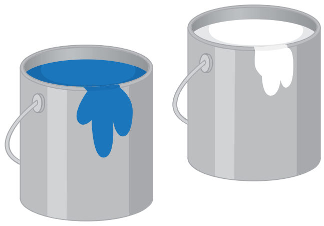


1.2 Razones equivalentes y proporciones

Analiza

Ana y Carlos mezclaron pintura azul y blanca para obtener un tono celeste. Ana utilizó 3 botes de pintura azul y 4 botes de pintura blanca; mientras que Carlos utilizó 6 botes de pintura azul y 8 botes de pintura blanca.

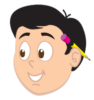
a. Encuentra el valor de razón entre los botes de pintura azul y blanca que utilizó cada uno.
b. ¿Obtuvieron el mismo tono de celeste?



Soluciona

a. La razón entre las cantidades de botes de pintura azul y blanca para el caso de Ana es 3 : 4, mientras que para Carlos es 6 : 8. Al calcular los valores de las razones obtengo:

$$\text{Ana} \longrightarrow \frac{3}{4} \qquad \text{Carlos} \longrightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{3}{4}$$


José

R: El valor de la razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75).

b. Sí, obtuvieron el mismo tono de celeste, porque en cada caso se obtuvo el mismo valor de razón $\frac{3}{4}$.

Comprende

- Cuando dos razones tienen el mismo valor de la razón se les llama **razones equivalentes**.
- A la igualdad entre dos razones equivalentes se le llama **proporción**. Es decir, si la razón $a : b$ es equivalente a la razón $c : d$ entonces la proporción se escribe:

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

y se lee "a es a b como c es a d"; a, b, c y d representan cualquier número.

Por ejemplo, las razones 3 : 4 y 6 : 8 son equivalentes porque su valor de razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75). Puede escribirse la proporción 3 : 4 = 6 : 8.

¿Sabías que...?

Una proporción también puede escribirse utilizando el símbolo "::" en lugar del símbolo "=". Así, 3 : 4 :: 6 : 8 representa una proporción.

Resuelve

1. ¿Son equivalentes las razones dadas en cada literal? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.
   a. 2 : 3 y 6 : 9
   b. 16 : 12 y 4 : 3
   c. 4 : 5 y 8 : 15

2. Carlos y Daniel prepararon salsa rosada. Escribe la razón de ketchup y mayonesa de cada una de las recetas y explica si tienen el mismo sabor.

Carlos	
Ketchup	Mayonesa
4 cucharadas	6 cucharadas

Daniel	
Ketchup	Mayonesa
6 cucharadas	9 cucharadas

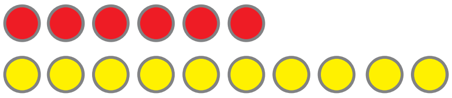
3. Para preparar charamuscas de café con leche, la mamá de Beatriz utiliza 4 vasos de café y 3 vasos de leche.
   a. Encuentra el valor de la razón de café y leche.
   b. Beatriz decidió preparar charamuscas y mezcló 12 vasos de café con 9 vasos de leche. ¿El sabor de estas charamuscas será el mismo de las que prepara su mamá?

1.3 Razón equivalente más simple

Analiza

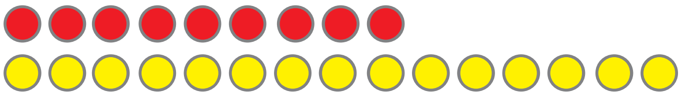
Carlos hizo una mezcla con 6 botes de pintura roja y 10 botes de pintura amarilla, y Beatriz con 9 botes de pintura roja y 15 botes de pintura amarilla. ¿Obtuvieron el mismo tono de anaranjado?

Carlos



6 : 10

Beatriz



9 : 15

Soluciona

Carmen

Será el mismo tono de anaranjado si las razones son equivalentes. Calculo el valor de la razón para cada caso:

Carlos ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}$ Beatriz ⟶ $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{3}{5}$

Entonces, las razones son equivalentes, es decir, 6 : 10 = 9 : 15.

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Esto significa que por cada 3 botes de pintura roja se utilizan 5 botes de pintura amarilla.

Calculo el valor de la razón en ambos casos:

Antonio

Carlos ⟶ 6 ÷ 10 = 0.6

Beatriz ⟶ 9 ÷ 15 = 0.6

Como el valor de la razón es el mismo, son razones equivalentes, 6 : 10 = 9 : 15

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Comprende

Encontrar una razón equivalente con números menores es **simplificar el valor de la razón**; cuando se obtiene la razón equivalente con los números naturales menores posibles se obtiene la **razón equivalente más simple** o **simplificada**.

Por ejemplo, para las razones 6 : 10 y 9 : 15, su razón equivalente más simple es 3 : 5, pues si se simplifican los valores de las razones $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$ se obtiene $\frac{3}{5}$, que corresponde a la razón 3 : 5

¿Qué pasaría?

Para calcular la razón equivalente más simple de 12: 30, se simplifica el valor de la razón hasta su mínima expresión:

$$\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{30}}} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la razón equivalente más simple de 12 : 30 es 2 : 5

Resuelve

1. Para cada razón, encuentra la razón equivalente más simple.
   a. 6 : 4 b. 16 : 20 c. 30 : 18 d. 10 : 35 e. 12 : 8

2. Juan y Ana quieren saber quién de ellos hace más goles al cobrar tiros libres. Juan hizo 14 tiros libres y de estos 6 fueron goles, y Ana logró 9 goles de 21 tiros libres. ¿Quién hace más goles?

Unidad 5

1.4 Proporciones que incluyen números decimales

Analiza

Juan quiere preparar una receta de pan dulce y otra de atol, por lo que utiliza las siguientes recetas:

Receta A
0.5 libras de azúcar
0.6 libras de harina

Receta B
2.4 cucharadas de canela molida
3 cucharadas de maicena

Juan quiere obtener el mismo sabor pero solo puede medir libras y cucharadas completas. ¿Qué cantidades debe usar para preparar las recetas?

Soluciona


Julia

En la receta A, la razón entre libras de azúcar y libras de harina es 0.5 : 0.6

Para mantener el mismo sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces (¡esto lo ví en la primera clase!).

Multiplico el antecedente y consecuente por 10

$$
\begin{aligned}
0.5 : 0.6 &= (0.5 \times 10) : (0.6 \times 10) \\
&= 5 : 6
\end{aligned}
$$

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta A utilizando 5 libras de azúcar y 6 libras de harina.

En la receta B, la razón entre cucharadas de canela y cucharadas de maicena es 2.4 : 3

Como en la receta A, multiplico el antecedente y consecuente por 10

$$
\begin{aligned}
2.4 : 3 &= (2.4 \times 10) : (3 \times 10) \\
&= 24 : 30
\end{aligned}
$$

La razón equivalente más simple de 24 : 30 es 4 : 5

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta B utilizando 4 cucharadas de canela y 5 cucharadas de maicena.

Juan obtendrá el mismo sabor, lo que cambiará es la cantidad de porciones de pan y de atol para los cuales se preparará la receta; por lo que obtendrá más porciones.

Comprende

Una razón expresada con números decimales, se puede convertir en una razón equivalente con números naturales. Cuando los números solo tienen una cifra decimal se realiza lo siguiente:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por 10, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Resuelve

1. Encuentra la razón equivalente más simplificada donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.
   a. 0.4 : 0.9   b. 0.9 : 1.5   c. 1.5 : 3   d. 2 : 3.5

2. Encuentra una razón equivalente donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.
   a. 0.56 : 0.31   b. 1.25 : 6

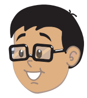
1.5 Proporciones que incluyen fracciones

Analiza

Una receta para elaborar crema de mantequilla para postres utiliza $\frac{6}{5}$ taza de mantequilla y $\frac{1}{2}$ onzas de queso crema.

a. Expresa la razón entre la cantidad de tazas de mantequilla y onzas de queso crema.
b. Si solo se tienen depósitos que pueden medir tazas y onzas completas, ¿cuántas tazas de mantequilla y queso crema se deben utilizar para mantener el mismo sabor?

Soluciona


Carlos

a. La razón entre las cantidades de mantequilla y queso crema es: $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$

b. Para conservar el sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces y obtener tazas y onzas completas.

Multiplico el antecedente y el consecuente por el mcm de 5 y 2, que es 10.

$$\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = \left(\frac{6}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \overset{2}{\cancel{10}}\right) : \left(\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \overset{5}{\cancel{10}}\right)$$
$$= (6 \times 2) : (1 \times 5)$$
$$= 12 : 5$$

R: Se deben utilizar 12 tazas de mantequilla y 5 onzas de queso crema.

Comprende

Una razón expresada con fracciones se puede convertir en una razón equivalente con números naturales siguiendo los pasos:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por el mcm de los denominadores, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Resuelve

Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. $\frac{1}{7} : \frac{3}{4}$ b. $\frac{4}{5} : \frac{7}{5}$ c. $\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$ d. $\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$

e. $\frac{3}{4} : \frac{9}{4}$ f. $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$ g. $\frac{3}{7} : 4$ h. $2 : \frac{4}{5}$

Recuerda que un número natural puede convertirse en fracción con el denominador 1, por ejemplo, $3 = \frac{3}{1}$.

✶ Desafíate

Miguel preparó su café con una razón entre azúcar y café $\frac{2}{5} : \frac{4}{3}$; Carmen preparó su café a una razón de $\frac{1}{2} : \frac{5}{3}$, ¿obtuvieron ambos el mismo sabor del café?

Unidad 5

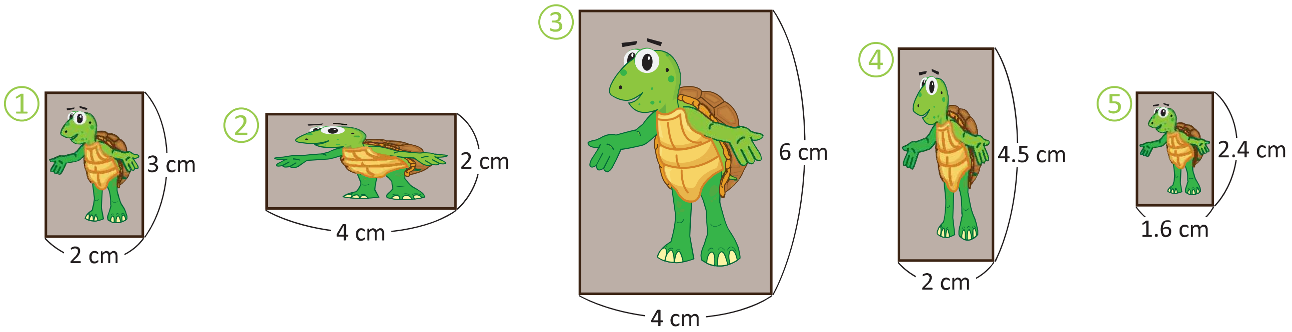
1.6 Relación de aspecto

Analiza

Observa las siguientes fotografías:

a. Para cada una encuentra el valor de la razón entre las medidas de la base y la altura, después simplifícalas.

b. Encuentra en cuáles de las fotografías la imagen se ve de la misma forma y contesta, ¿qué relación hay entre el valor de razón de estas fotografías?



Soluciona


Beatriz

a. Calculo los valores de las razones en cada caso:

Fotografía	Base (cm)	Altura (cm)	Valor de razón
1	2	3	$\frac{2}{3}$
2	4	2	$\frac{4}{2} = 2$
3	4	6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
4	2	4.5	$\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$
5	1.6	2.4	$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b. Las imágenes se ven de la misma forma en 1, 3 y 5. El valor de la razón entre las medidas de la base y la altura de estas fotografías es igual a $\frac{2}{3}$ lo que significa que la base es $\frac{2}{3}$ veces la altura.

Puedo escribir las relaciones en forma de proporción:

1 y 3 → 2 : 3 = 4 : 6
1 y 5 → 2 : 3 = 1.6 : 2.4
3 y 5 → 4 : 6 = 1.6 : 2.4

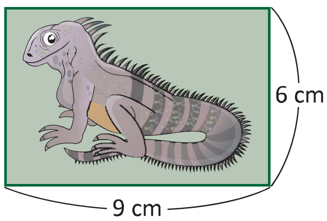
Comprende

Se llama **relación de aspecto de una imagen** a la razón entre las medidas de su base y su altura. Dos imágenes tienen **la misma forma** si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

Aunque las dimensiones en los televisores sean distintas, la imagen se ve igual ya que la relación de aspecto es la misma. En televisiones tradicionales, la relación de aspecto es 4 : 3, y en los panorámicos es 16 : 9

Resuelve

Carlos quiere imprimir la siguiente fotografía con otras dimensiones, manteniendo la misma forma. ¿Cuál o cuáles de los siguientes tamaños se pueden elegir?



a. Base 18 cm, altura 12 cm

b. Base $\frac{1}{2}$ cm, altura $\frac{1}{3}$ cm

c. Base 20 cm, altura 16 cm

d. Base 1.8 cm, altura 1.2 cm

1.7 Propiedad de las proporciones

Analiza

En cada caso, encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $3 : 5 = 24 : x$ b. $6 : 12 = 2 : x$

Recuerda que en las proporciones, las razones son equivalentes.

Soluciona

a. En la primera clase aprendí que el antecedente y consecuente de una razón pueden aumentarse la misma cantidad de veces para conservar la razón:

Mario

	Antecedente	Consecuente	
	3	5	
× 8	24	x	× 8

Como el antecedente aumentó 8 veces, el consecuente también debe aumentar 8 veces. Así:

$$x = 5 \times 8 = 40$$

R: 40

b. En $6 : 12 = 2 : x$ observo que $6 \times \frac{1}{3} = 2$. Entonces, 6 aumentó $\frac{1}{3}$ veces para obtener 2 y, por lo tanto, 12 también debe aumentar $\frac{1}{3}$ veces:

$$x = \overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4$$

R: 4

Comprende

Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por el mismo número se obtiene una razón equivalente, y por tanto, una proporción.

Resuelve

1. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.
   a. $1 : 5 = 5 : x$ b. $6 : 2 = 3 : x$ c. $3 : 1 = 30 : x$
   d. $8 : 16 = 1 : x$ e. $12 : 15 = 24 : x$ f. $20 : 35 = 4 : x$

2. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.
   a. $5 : 2 = x : 6$ b. $18 : 8 = x : 4$ c. $11 : 13 = x : 130$

Desafíate

Dos números se encuentran a una razón 1 : 4; si uno de ellos es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

1.8 Proporciones con un dato desconocido

Analiza

Para preparar galletas de chocolate, la razón entre la cantidad de harina y chocolate (en gramos) es 5 : 3 Si Beatriz utiliza un paquete de 150 g de harina, ¿cuántos gramos de chocolate debe utilizar? Representa esta cantidad como x gramos.

Soluciona

La razón 5 : 3 significa que, por cada 5 gramos de harina se necesitan 3 gramos de chocolate. Coloco los datos en una tabla:

× 30

Harina (g)	Chocolate (g)
5	3
150	x

× 30

Para mantener el sabor, 5 : 3 = 150 : x; observo que los 5 g de harina aumentaron 30 veces para obtener 150 g (5 × 30 = 150). Entonces:

$$x = 3 \times 30$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.

El valor de la razón de 5 : 3 es $\frac{5}{3}$. Como debe conservarse el sabor, este valor de razón debe ser el mismo para la razón 150 : x

Utilizo la relación:

consecuente = antecedente ÷ valor de razón

$$x = 150 \div \frac{5}{3}$$
$$x = \overset{30}{\cancel{150}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}}$$
$$x = 30 \times 3$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.

La ventaja del primer procedimiento es que no necesitas identificar antecedente o consecuente, o calcular el valor de la razón. Pero recuerda que debes mantener la correspondencia entre harina y chocolate.

Comprende

Para encontrar un dato desconocido en una proporción se puede utilizar la propiedad de las proporciones, identificando la cantidad de veces que se ha aumentado uno de los datos.

Resuelve

Encuentra el valor de la cantidad que hace falta.

a.

Harina (g)	Chocolate (g)
3	2
120	x

b.

Harina (g)	Chocolate (g)
14	10
140	x

c.

Harina (g)	Chocolate (g)
7	3
x	120

d.

Harina (g)	Chocolate (g)
50	40
x	200

Desafíate

Las dimensiones de la bandera salvadoreña son 3.25 m de largo por 1.89 m de ancho. Si Ana elabora una versión más pequeña con 1 m de largo, ¿cuánto debe medir el ancho?

1.9 Propiedad fundamental de las proporciones

Recuerda

Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $4 : 9 = 20 : x$ b. $11 : 10 = x : 100$

Analiza

Usando la proporción $6 : 10 = 9 : 15$, realiza lo siguiente:

a. Multiplica el antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda.
b. Multiplica el consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.
c. ¿Cómo son los resultados de a. y b.? ¿Qué puedes concluir sobre las proporciones?

Soluciona


Julia

a. El antecedente de la primera razón es 6 y el consecuente de la segunda razón es 15. Efectuando la multiplicación obtengo:

$$6 \times 15 = 90$$

b. El consecuente de la primera razón es 10 y el antecedente de la segunda razón es 9. Realizando la multiplicación obtengo:

$$10 \times 9 = 90$$

c. Observo que: ¡los resultados de a. y b. son iguales!
Esto quiere decir que en una proporción el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.

Comprende

Propiedad fundamental de las proporciones

En una proporción, el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda. Es decir, para la proporción $a : b = c : d$ se cumple

$$a \times d = b \times c$$

a, b, c y d representan cualquier número.

¿Sabías que...?

En una proporción $a : b = c : d$, a los números a y d también se les conoce como "extremos" y, a b y c como "medios". Entonces, la propiedad de las proporciones indica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, refiriéndose a que $a \times d = b \times c$.

Resuelve

Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones en los siguientes casos.

a. $2 : 3 = 6 : 9$ b. $5 : 3 = 20 : 12$ c. $4 : 6 = 8 : 12$ d. $10 : 8 = 30 : 24$

★ Desafíate

Encuentra el valor de c para que se forme una proporción.

$$25 : 50 = c : 10$$

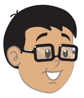
1.10 Resolución de problemas aplicando proporciones

Analiza

En una rifa, por cada 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados. Si se reduce la cantidad de papeles no premiados a 30, ¿cuántos papeles premiados deben colocarse?

Soluciona

Si al colocar 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados, entonces la razón es 60 : 100. Escribo los datos en una tabla (x representará la cantidad desconocida).



Carlos

Cantidad de premiados	Cantidad de no premiados
60	100
x	30

Como debe mantenerse la razón, entonces 60 : 100 = x : 30. En esta ocasión, no es fácil identificar por cuánto debe multiplicarse 100 para obtener 30, entonces uso la propiedad de las proporciones.

$$60 \times 30 = 100 \times x$$
$$1,800 = 100 \times x$$

Esto quiere decir que 100 veces x es igual a 1,800. Por lo tanto,

$$x = 1,800 \div 100 = 18$$

R: 18 papeles premiados.

Comprende

Para resolver problemas de proporciones donde se desconoce algún dato y no es fácil identificar la cantidad de veces que aumenta una de las cantidades, se puede utilizar la propiedad fundamental de las proporciones.

Resuelve

1. Para elaborar una receta de salsa agridulce se utilizaron 20 ml de salsa inglesa y 30 ml de salsa de tomate. Si ahora se utilizarán 50 mililitros de salsa inglesa, ¿cuántos mililitros de salsa de tomate deben usarse para mantener el mismo sabor?

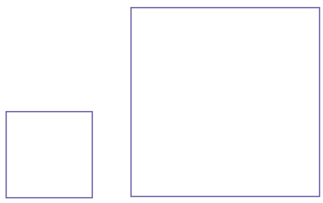
2. Una fotografía mide 10 cm de base y 15 cm de altura. Si se amplía para que la base sea 12 cm, ¿cuánto medirá la altura?

Recuerda que dos imágenes tienen la misma forma si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

3. Según un estudio, 500 ml de leche entera aportan 290 calorías. Si una persona consume 200 ml de leche entera, ¿cuántas calorías aporta esta cantidad?

Desafíate

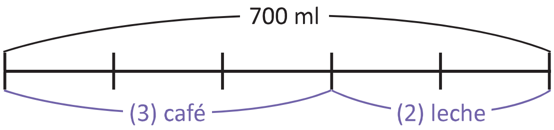
Las longitudes de los lados de dos cuadrados es 2 : 5, si el perímetro de uno de ellos es 24 cm, ¿cuál es la longitud del lado del otro cuadrado?



1.11 Reparto proporcional

Analiza

Antonio quiere preparar 700 ml de café con leche. Si la razón entre las cantidades de mililitros de café y leche debe ser 3 : 2, ¿cuántos mililitros de café necesita?

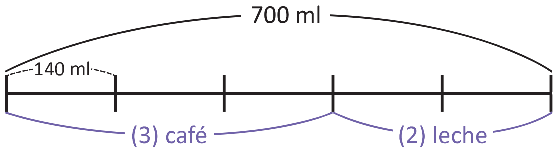


La razón 3 : 2 significa que por cada 3 ml de café se usan 2 ml de leche. El segmento representa el total (700 ml), se divide en 5 partes iguales donde tres de ellas representan los mililitros de café y las dos restantes los mililitros de leche.

Soluciona

El total de partes son 5, y representan 700 ml. Entonces, cada parte representa 700 ÷ 5 = 140 mililitros.

Ana



Como lo que corresponde al café tiene 3 partes entonces la cantidad de mililitros de café necesarios son:

$$140 \times 3 = 420$$

R: 420 ml

La cantidad de leche utilizada sería 700 – 420 = 280 mililitros. Entonces la razón entre café y leche es 420 : 280, y su equivalente más simple 3 : 2

Comprende

Para resolver problemas donde una cantidad debe repartirse en una razón determinada $a : b$, se puede utilizar un segmento dividido en $a + b$ partes iguales, encontrar el valor que representa cada parte y encontrar, ya sea a o b.

Resuelve

1. Doña María tiene un terreno de 300 m^2 de área. Ella quiere sembrar maíz y maicillo de manera que, la razón entre el área de maíz y maicillo sea 2 : 1; ¿cuántos metros cuadrados medirá el área para la siembra de maíz?

2. La razón entre la cantidad de niñas y niños en un salón es 5 : 3; si en total hay 32 alumnos, ¿cuántas niñas hay en el salón?

3. Para una rifa se han colocado 120 papelitos en una caja. Si la razón entre papeles premiados y no premiados es 1 : 7, ¿cuántos papeles no premiados hay en la caja?

Desafíate

1. María y Luis invirtieron dinero para la venta de yuca frita; María aportó $16 y Luis aportó $14. El dinero recolectado después de la venta fue de $60 y quieren repartirlo proporcionalmente según lo aportado. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

2. La razón entre la cantidad de dulces de Juan y Ana es 3 : 5 y la diferencia entre las cantidades es 8 dulces. ¿Cuántos dulces tiene cada uno?

1.12 Practica lo aprendido

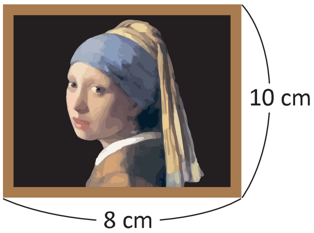
1. ¿Son equivalentes las razones dadas? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.
   a. 2 : 5 y 8 : 20
   b. 4 : 5 y 16 : 30

2. Encuentra la razón equivalente más simple de 30 : 50

3. Encuentra razones equivalentes a las siguientes, que involucren únicamente números naturales.
   a. 0.6 : 0.3
   b. $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$

4. ¿Cuáles de las siguientes dimensiones se pueden utilizar para imprimir la siguiente fotografía y conservar la forma de ella?

   a. Base 4 cm, altura 5 cm.
   b. Base 16 cm, altura 30 cm.



5. Encuentra el número x para que se forme una proporción.
   a. $2 : 5 = 12 : x$
   b. $10 : 6 = 15 : x$

1.13 Practica lo aprendido

1. Doña Beatriz es la dueña de una pupusería; considera que la razón entre la cantidad (en libras) de harina y queso es 5 : 3; si para vender pupusas el sábado en la tarde comprará 9 libras de queso, ¿cuántas libras de harina necesita?

2. En una rifa, el organizador quiere que la razón entre papelitos premiados y no premiados sea 2 : 7; si se colocan 16 papelitos premiados, ¿cuántos papelitos no premiados se deben colocar?

3. Juan y Marta observan que doña Julia utiliza 9 cucharadas de azúcar y 21 cucharadas de harina para preparar atol de maíz tostado. Analiza el comentario de cada uno y explica si es falso o verdadero.

   Juan: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 12 cucharadas de azúcar y 28 cucharadas de harina.
   Marta: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 15 cucharadas de azúcar y 30 cucharadas de harina.

4. Don Juan quiere preparar 120 libras de mezcla para pegar ladrillos, manteniendo una razón entre las cantidades (en libras) de cemento y arena de 1 : 3. ¿Qué cantidades de cemento y arena debe usar?

Desafíate

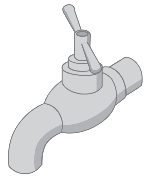
Don Miguel quiere repartir \$100 entre sus tres hijos, quienes tienen las edades de 10, 15 y 25 años. Si el dinero lo repartirá proporcionalmente a las edades de sus hijos, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

2.1 Relación de proporcionalidad directa

Analiza

Antonio abre un chorro y vierte agua en un recipiente; toma nota de la altura del agua al pasar 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, etc., y escribe los datos en una tabla.

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...



a. Partiendo de 1 minuto, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica o triplica?
b. Partiendo de 2 minutos, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica?
c. De acuerdo a los datos en la tabla, ¿cuál sería la altura del agua al pasar 5 minutos?

Soluciona

José

a. Usando la tabla, me ubico en la columna con tiempo 1 min y altura 5 cm. Duplicar o triplicar el tiempo significa efectuar 1 × 2 = 2 o 1 × 3 = 3. Observo que, si el tiempo se duplica o triplica, ¡la altura también se duplica o triplica!

× 3
× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2
× 3

b. Duplicar el tiempo a partir de 2 min significa efectuar 2 × 2 = 4. Observo que, si el tiempo se duplica a 4 minutos entonces la altura se duplica a 20 minutos.

× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2

c. De 1 a 5 minutos el tiempo ha aumentado 5 veces, entonces la altura también aumentará 5 veces, es decir, será igual a 5 × 5 = 25 cm.

Comprende

Cuando dos cantidades a y b cumplen que al multiplicarse a por 2, por 3, etc., la cantidad b también se multiplica por 2, por 3, etc., respectivamente, entonces se dice que las cantidades son **directamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad directa**.

El tiempo transcurrido y la altura del agua en un recipiente son cantidades directamente proporcionales.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de papayas y el precio. Estas cantidades son directamente proporcionales. Completa los precios que hacen falta.

Número de papayas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	2	4				...

2. Un automóvil recorre una carretera con una rapidez de 40 km por hora.
   a. Completa la tabla escribiendo la cantidad de kilómetros recorridos al variar la cantidad de horas.

Tiempo transcurrido (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida (km)						...

   b. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al transcurrir 6 horas?

Unidad 5

2.2 Propiedad de la proporcionalidad directa

Analiza

Antonio anotó la relación entre el tiempo y la altura del agua en un depósito.

a. Encuentra el cociente de la altura entre el tiempo. ¿Cuánto resulta?

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente							

b. ¿Cuánto aumenta la altura del agua cada minuto?

Soluciona

a. Calculo el cociente en cada caso. Por ejemplo, si el tiempo es 1 min y la altura es 5 cm, el cociente es $5 \div 1 = 5$:


Beatriz

$5 \div 1 = 5$
$10 \div 2 = 5$
$15 \div 3 = 5$
$20 \div 4 = 5$
$25 \div 5 = 5$
$30 \div 6 = 5$

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	

¡El resultado del cociente es igual a 5 en todos los casos!

b. Como el cociente siempre resulta 5, significa que la altura aumenta 5 cm cada minuto.

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad directa
Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la longitud y el peso de un tipo de alambre:

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (g)	7	14	21	28	35	42	...

a. Encuentra el cociente del peso entre la longitud.
b. ¿Cuál es el peso por metro de este tipo de alambre?

2. La siguiente tabla muestra el área (en hectáreas) sembrada de maíz y el peso cosechado.

Área (ha)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (ton)	3	6	9	12	15	18	...

a. Encuentra el cociente del peso entre el área sembrada.
b. ¿Cuál es el peso del maíz cosechado por hectárea?

2.3 Identificación de cantidades directamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

a. La longitud y el peso de una varilla de hierro.

Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

b. El número de dulces de Ana y el número de dulces de Julia al repartirse 9 dulces.

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...

Soluciona

a. Verifico si al aumentar la longitud cierta cantidad de veces, el peso aumenta en esa misma cantidad de veces:


Mario

Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

× 2 × 2 × 5

¡Sí cumple con lo anterior!

R: La longitud y el peso de una varilla de hierro son directamente proporcionales.

b. Calculo en cada caso el cociente de la cantidad de dulces de Julia entre los de Ana:

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...
Cociente	8	3.5	2	1.25	0.8	...

¡El cociente no es igual en todos los casos! Es decir, no cumple la propiedad de la proporcionalidad directa.

R: Las cantidades de dulces de Ana y de Julia no son directamente proporcionales.

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, etc., la otra también se multiplica por 2, por 3, por 4 respectivamente.
- El cociente entre las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad directa).

Resuelve

Identifica si las cantidades son directamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son directamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son; justifica tu respuesta.

a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

Cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
Peso (g)	2	4	6	8	10	...

b. La cantidad de galones de gasolina y el costo de la compra:

Cantidad (gal)	1	2	3	4	5	...
Costo ($)	3	6	9	12	15	...

c. La cantidad de cortes en una tira y el número de trozos obtenidos:

Número de cortes	1	2	3	4	5	...
Número de trozos	2	3	4	5	6	...

d. La base y altura de un rectángulo de 24 cm de perímetro:

Base (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura (cm)	11	10	9	8	2	...

2.4 Otras cantidades directamente proporcionales

Analiza

a. Completa la tabla escribiendo los valores del área de un rectángulo de base 5 cm cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	5 × 1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

Recuerda que el área de un rectángulo se calcula:
área = base × altura

b. ¿Son la altura del rectángulo y su área cantidades directamente proporcionales?
c. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura (x) y el área (y).

Soluciona

a. Completo la tabla, utilizando la fórmula del área del rectángulo (**área = base × altura**):


Julia

Altura x (cm)	5 × 1	5 × 2	5 × 3	5 × 4	5 × 5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...

b. Si para calcular el área realicé 5 × altura entonces el cociente área ÷ altura es igual a 5 en todos los casos. ¡Las cantidades son directamente proporcionales!

c. Como área = base × altura entonces la relación entre el área y y la altura x es:

$$y = 5 \times x$$

Comprende

La expresión $y = 5 \times x$ representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales; en este caso se dice que **y es directamente proporcional a x**, o simplemente que **y es proporcional a x**. Otros ejemplos de relaciones entre cantidades directamente proporcionales son $y = 2 \times x$, $y = 3 \times x$, etc.

Resuelve

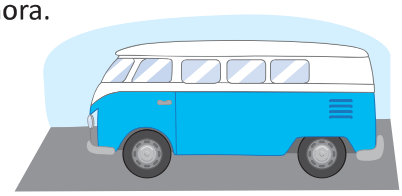
1. La longitud de la base de un paralelogramo es 4 cm.
   a. Completa la tabla escribiendo los valores del área cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área del paralelogramo, representa la relación entre la altura x y el área y.

2. Un automóvil transita por una carretera a una rapidez de 60 km por hora.
   a. Completa la tabla:

Tiempo transcurrido x (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida y (km)						...



   b. Tomando en cuenta que **distancia = rapidez × tiempo**, representa la relación entre el tiempo transcurrido x con la distancia recorrida y.

2.5 Expresión y = constante × x

Analiza

La siguiente tabla muestra los datos de la clase anterior, sobre el área de un rectángulo de base 5 cm al variar su altura:

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la última fila de la tabla con el cociente del área entre la altura ($y \div x$). ¿Qué resultado obtuviste?

b. ¿Qué relación hay entre el número calculado en a. y la expresión $y = 5 \times x$?

Soluciona

a. Calculo el cociente:

Carlos

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$	$5 \div 1 = 5$	$10 \div 2 = 5$	$15 \div 3 = 5$	$20 \div 4 = 5$	$25 \div 5 = 5$	...

b. El cociente siempre es 5; esto significa que el área aumenta 5 cm^2 por cada centímetro que aumenta la altura.

c. El cociente 5 es el número que se encuentra en la expresión $y = 5 \times x$, es decir, el número de la expresión se obtiene calculando el cociente $y \div x$.

Comprende

Cuando y es directamente proporcional a x, el cociente de $y \div x$ es siempre el mismo valor; a este valor se le llama **constante**. Cuando esto sucede, la relación entre x y y se puede expresar:

$$y = \textbf{constante} \times x$$

Algunas relaciones entre cantidades son de la forma x + constante = y, constante − x = y; pero estas cantidades no son directamente proporcionales.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la cantidad de dinero que Juan acumula al ahorrar mensualmente:

Tiempo transcurrido x (meses)	1	2	3	4	5	...
Dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

b. Representa la relación entre el tiempo transcurrido en meses (x) y la cantidad de dinero ahorrado (y).

2. La siguiente tabla muestra el impuesto a las telefonías que se aplica según el monto de la recarga en El Salvador:

Monto de la recarga x ($)	1	2	3	4	5	...
Impuesto y (centavos)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

b. Representa la relación entre el monto de la recarga (x) y el impuesto (y).

2.6 Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales

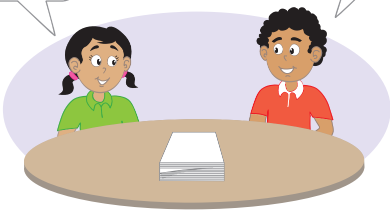
Analiza

¿Cómo se puede empacar un paquete de 300 hojas de papel bond sin contarlas una a una? Utiliza la estrategia y la información de María y Antonio:

El peso es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando el peso de un paquete de 10 hojas.

La altura es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando la altura de un paquete de 100 hojas.

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	a



n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	b

Soluciona


Ana

Utilizo la estrategia de María, que encontró el peso de un paquete de 10 hojas. Con eso puedo calcular el peso de una hoja, y luego el de las 300:

Peso de una hoja (g): $40 \div 10 = 4$
Peso de 300 hojas (g): $4 \times 300 = 1,200$

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	1, 200

R: Se prepara un paquete que pese 1, 200 g.


José

Utilizo la estrategia de Antonio, que encontró la altura de un paquete de 100 hojas. Así, puedo calcular la altura de las 300 hojas.

Si la cantidad de hojas se triplica de 100 a 300, el peso también se triplica:

× 3

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	3

× 3

R: Se prepara un paquete de 3 cm de altura.

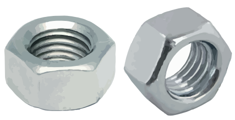
Comprende

Se puede preparar la cantidad aproximada de papel utilizando lo siguiente:
- El peso es directamente proporcional al número de hojas.
- La altura es directamente proporcional al número de hojas.

Así, no es necesario contar todas las hojas.

Resuelve

1. Al pesar 15 tuercas del mismo tipo se obtiene como resultado 32 g. ¿Cómo se pueden preparar 120 tuercas sin contarlas una a una?



n.° de tuercas	15	120
Peso (g)	32	a

¿El peso de las tuercas es directamente proporcional a la cantidad de tuercas? ¿Cuántas veces cabe 15 en 120?

2. En la librería “Papelitos” preparan paquetes de 750 pliegos de cartulina. Un paquete de 150 pliegos de cartulina mide 3 cm. ¿Cómo se puede preparar cada paquete de 750 pliegos sin contarlos uno a uno?

n.° de pliegos	150	750
Altura (cm)	3	b

¿La altura es directamente proporcional al número de pliegos?

2.7 Proporcionalidad directa con un dato desconocido

Analiza

Al pesar 90 clavos del mismo tipo en una báscula pesan 180 g; en la misma báscula se coloca un puñado de estos clavos y pesan 20 g. ¿Cuántos clavos hay sobre la báscula?

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

Soluciona

El peso es directamente proporcional al número de clavos. Utilizo la propiedad de la proporcionalidad directa: 180 ÷ 90 = 2, es decir, 2 × 90 = 180.


Carmen

n.° de clavos	2 × a	2 × 90
Peso (g)	20	180

Como es constante, 2 × a = 20, es decir, a = 20 ÷ 2 = 10.

R: 10 clavos.

Encuentro el cambio en el peso de los clavos: 180 ÷ 20 = 9, es decir, 20 × 9 = 180.


Antonio

× 9

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

× 9

Como el peso aumenta 9 veces, el número de clavos también aumenta 9 veces, a × 9 = 90, o sea:

$$a = 90 \div 9 = 10$$

R: 10 clavos.

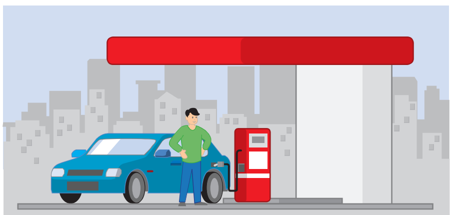
Comprende

Aplicando la definición o la propiedad de proporcionalidad directa, se puede encontrar un valor desconocido de dos cantidades que son directamente proporcionales.

Resuelve

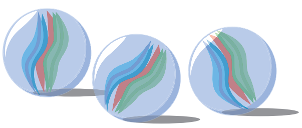
1. Don José pasó a una gasolinera y solicitó 4.5 galones de gasolina; el costo de la compra fue de $13.50. Otro señor pasó y el costo de la compra fue $27, ¿cuántos galones de gasolina compró el otro señor?

Cantidad de gasolina (gal)	4.5	a
Precio ($)	13.5	27



¿El número de galones de gasolina y el precio son cantidades directamente proporcionales?

2. Al pesar 36 chibolas iguales en una báscula se obtienen 324 g. En la misma báscula se pesa otro grupo de chibolas y pesan 81 g. ¿Cuántas chibolas se pesaron la segunda vez?



n.° de chibolas	a	36
Peso (g)	81	324

2.8 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de pasajeros de un autobús y el costo del pasaje, estas cantidades son directamente proporcionales. ¿Qué números corresponden a a, b y c?

$\times 5$ $\times 3$ $\times 2$

Número de pasajeros	1	2	3	4	5	...
Costo (centavos)	20	40	60	80	100	...

$\times a$ $\times b$ $\times c$

2. Identifica si las siguientes cantidades son directamente proporcionales o no. Justifica tu respuesta.
   a. El número de cajas de lapiceros y la cantidad de lapiceros.

n.° de cajas	1	2	3	4	5	...
n.° de lapiceros	12	24	36	48	60	...

   b. Las edades de María y Juan al pasar los años.

Edad de María	15	16	17	18	19	...
Edad de Juan	12	13	14	15	16	...

3. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un rectángulo de base 4 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

4. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un triángulo de base 6 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	3					...
Cociente $y \div x$						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un triángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

5. En una fábrica de dulces se preparan minibolsas con 32 dulces, y se sabe que 8 dulces pesan 72 g. ¿Cómo se puede preparar una minibolsa sin contar los dulces uno a uno?

n.° de dulces	8	32
Peso (g)	72	a

6. Ana compró 36 platos por $108; su amiga compró otra cantidad de estos mismos platos y pagó $27. ¿Cuántos platos compró la amiga de Ana?

n.° de platos	a	36
Costo ($)	27	108

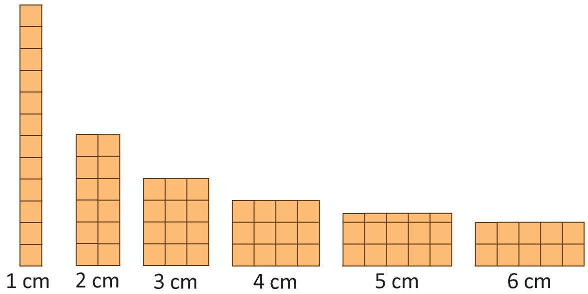
3.1 Relación de proporcionalidad inversa

Analiza

Carlos y Ana están dibujando rectángulos de área 12 cm². Realiza lo siguiente:

a. Completa la tabla, ¿cómo cambia la longitud de la altura a medida que la longitud de la base, aumenta?

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...



b. Si la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, ¿cómo cambia la longitud de la altura?

Soluciona

a. Observo que al aumentar la longitud de la base, la longitud de la altura disminuye para mantener el área igual a 12 cm². Entonces:

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

b. Analizo la relación de la altura cuando la longitud de la base aumenta cierta cantidad de veces:

Cuando la longitud de la base se multiplica por 2, por 3, etc., la longitud de la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, etc., respectivamente.

× 6, × 3, × 3, × 2

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

$\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{2}$, $\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{6}$

Comprende

Cuando dos cantidades x y y cumplen que al multiplicarse una por 2, por 3, por 4, etc., la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, etc., respectivamente, se dice que las cantidades son **inversamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad inversa**.

Resuelve

1. La tabla contiene la relación entre las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de área 18 cm². Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa las longitudes que hacen falta.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...

2. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de personas en un salón de 36 m² de área y el área que corresponde por persona. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa los espacios que hacen falta.

× 3, × 2

Número de personas	1	2	3	4	...
Área por persona (m²)	36	18			...

Unidad 5

3.2 Propiedad de la proporcionalidad inversa

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos obtenidos en la clase anterior sobre la base y la altura de un rectángulo de área 12 cm^2. Calcula el producto de la base por la altura, ¿cuánto resulta?

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$							

Soluciona

Calculo el producto en cada caso. Por ejemplo, para 1 cm de base y 12 cm de altura, el producto es $1 \times 12 = 12$:


Mario

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$	12	12	12	12	12	12	

El producto de la base por la altura es igual al área, ¡siempre es igual a 12!
R: 12

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad inversa
Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales, el producto de estas cantidades siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. Una botella con jugo se reparte en vasos. La tabla contiene la cantidad de líquido en cada vaso, dependiendo del número de vasos. Estas cantidades son inversamente proporcionales.

n.° de vasos x	2	4	8	10	...
Cantidad de líquido y (ml)	500	250			...
Producto $x \times y$					

   a. Completa la tabla.
   b. ¿Cuál es la capacidad de la botella?

2. La siguiente tabla muestra la relación entre los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un automóvil para ir de la ciudad A a la ciudad B.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60	...
Tiempo y (horas)	12	6	3	2	1	...
Producto $x \times y$						

   a. Completa la tabla.
   b. ¿Cuál es la distancia que separa las ciudades A y B?

3.3 Identificación de cantidades inversamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

a. La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...

b. Las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

Soluciona

Ana

a. Verifico si cumple las propiedades de la proporcionalidad inversa, realizando los productos de la rapidez por el tiempo. Por ejemplo, para la rapidez 5 km/h y el tiempo 16 h, el producto es 5 × 16 = 80:

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

Como el producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta en 80, las cantidades son inversamente proporcionales.

R: La rapidez y el tiempo que tarda un auto en recorrer cierta distancia son inversamente proporcionales.

b. Verifico si cumple la condición de la proporcionalidad inversa, es decir, si al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ respectivamente:

× 2 × 3

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

$\cancel{\times \frac{1}{2}}$ $\cancel{\times \frac{1}{3}}$

Al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura no se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$, por tanto las cantidades no son inversamente proporcionales.

R: La base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm no son inversamente proporcionales.

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son inversamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, ..., la otra se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, ..., respectivamente.
- El producto de las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad inversa).

Resuelve

Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta.

a. El número de estudiantes para una excursión y el costo del pasaje por estudiante.

n.° de estudiantes	5	10	15	20	25	...
Pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...

b. El número de chocolates de Julia y Mario al repartirse 8 chocolates.

Chocolates de Julia	1	2	3	4	5	...
Chocolates de Mario	7	6	5	4	3	...

c. El número de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento en una granja.

n.° de gallinas	200	400	600	800	...
n.° de días	30	15	10	7.5	...

3.4 Expresión $x \times y$ = constante

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la última fila de la tabla con el producto de la rapidez por el tiempo.
b. Utilizando la relación de **distancia** = **rapidez** × **tiempo**, representa la relación entre la rapidez x y el tiempo y.

Soluciona

a. Calculo el producto en cada caso:


José

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

¡Siempre resulta en 80!

b. Como x representa la rapidez, y el tiempo y el producto siempre es igual a 80 (significa que la distancia que recorre el auto es 80 km), entonces:

distancia = **rapidez** × **tiempo**
$80 = x \times y$

R: $80 = x \times y$ o $x \times y = 80$

La representación entre la rapidez y el tiempo también se puede escribir como $y = 80 \div x$.

Comprende

Cuando x y y son cantidades inversamente proporcionales, el producto $x \times y$ es constante (siempre es el mismo valor). La relación entre x y y se puede representar como:

$\boldsymbol{x \times y}$ **= constante** o $\boldsymbol{y}$ **= constante ÷** $\boldsymbol{x}$

Se dice que y **es inversamente proporcional** a x.

Resuelve

1. La siguiente tabla contiene los datos de la base y la altura de un rectángulo de 18 cm^2 de área:

   a. Completa la tabla.
   b. Utilizando la fórmula del área del rectángulo, representa la relación entre la base x y la altura y (escríbelo de dos formas distintas).

Base x (cm)	1	2	3	6	9	...
Altura y (cm)	18					...
Producto $x \times y$						

2. Un grupo de alumnos para una excursión contratan un autobús a precio fijo. Observa los datos de la tabla que contienen las posibilidades del número de estudiantes y el costo que correspondería por estudiante.

Número de estudiantes x	24	18	12	8	6	...
Precio por estudiante y (\$)	6	8	12	18	24	...
Producto $x \times y$						

   a. Completa la última fila de la tabla y responde, ¿cuál es el precio del autobús por hacer el viaje?
   b. Representa la relación entre el número de estudiantes y el precio por estudiante.

3.5 Proporcionalidad inversa con un dato desconocido

Analiza

Un automóvil que circula a 60 km/h invierte 2 horas en cubrir la distancia que separa dos ciudades. Si vuelve a realizar el viaje a una rapidez de 20 km/h, ¿cuánto tiempo tardará?

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a

Soluciona

Carmen

Como la rapidez y el tiempo son cantidades inversamente proporcionales, el producto siempre es constante:

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	1	a
Producto	120	120

Entonces, $20 \times a = 120$, es decir:

$$a = 120 \div 20 = 6$$

R: Tardará 6 horas.

Antonio

Encuentro el cambio en la rapidez, observando que: $60 \times \frac{1}{3} = 20$, la rapidez se multiplica por $\frac{1}{3}$; entonces el tiempo se multiplica por 3:

$\times \frac{1}{3}$

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a

$\times 3$

$$a = 2 \times 3 = 6$$

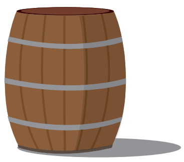
R: Tardará 6 horas.

Comprende

Se puede encontrar un valor desconocido en situaciones sobre proporcionalidad inversa, utilizando la definición o la propiedad de proporcionalidad inversa.

Resuelve

1. Hay 8 barriles llenos de vino, con 200 litros cada uno. Se quiere envasar la misma cantidad de vino en 32 barriles iguales llenándolos completamente. ¿Cuál debe ser la capacidad de estos barriles?



Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a
Producto		

¿Son la capacidad y el número de barriles cantidades inversamente proporcionales?

2. Se llena un depósito en 6 horas, utilizando 4 grifos que vierten la misma cantidad de agua de forma constante. Si se usan 8 grifos con este mismo flujo de agua, ¿cuánto tiempo tardará en llenar el depósito?

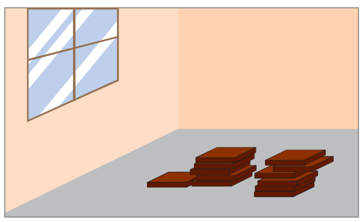
Número de grifos	4	8
Tiempo (horas)	6	a
Producto		

¿Son el número de grifos y el tiempo, cantidades inversamente proporcionales?

✶ Desafíate

Para enladrillar un piso se necesitan 40 ladrillos de 30 cm^2. ¿Cuántos ladrillos de 20 cm^2 se necesitarán para enladrillar la misma superficie?

Número de ladrillos	40	a
Área de cada ladrillo (cm^2)	30	20



3.6 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de gallinas en una granja y el tiempo que tardan en comer cierta cantidad de alimento.
   a. ¿Qué números se deben escribir en lugar de a, b, c y d?

n.° de gallinas	50	100	150	200	250	300	...
Tiempo (días)	48	24	16	12	9.6	8	...

   b. ¿Son el número de gallinas y el tiempo que tardan en comer el alimento, cantidades inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

2. Identifica cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales y explica tu respuesta:
   a. El número de estudiantes y la cantidad de cinta que les corresponde si se reparten 30 metros de cinta:

n.° de estudiantes	1	2	3	4	5	...
Cinta (m)	30	15	10	7.5	6	...

   b. El número de paletas que les corresponden a Carlos y María, si se reparten 9 paletas:

Paletas de Carlos	1	2	3	4	5	...
Paletas de María	8	7	6	5	4	...

3. a. Completa la tabla con los posibles valores que puede tomar la base y la altura de un paralelogramo de área 120 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	120					...

   b. Utilizando la fórmula del área de un paralelogramo **área** = **base** × **altura**, representa la relación entre la base x y la altura y.

4. Si 6 trabajadores siembran una parcela con maíz en 4 días, ¿cuánto tardarían en sembrar la misma parcela 12 trabajadores trabajando al mismo ritmo?

n.° de trabajadores	6	12
Tiempo (días)	4	a

3.7 Proporcionalidad directa e inversa

Analiza

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directa o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda en recorrer 120 km de distancia.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...

b. La longitud de un alambre y su peso.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...

c. La base y la altura de un rectángulo de perímetro 16 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...

Soluciona


Julia

Encuentro la relación entre x y y analizando, si el cociente o el producto es constante:

a. Al calcular el producto de la rapidez por el tiempo, el resultado siempre es 120. Las cantidades son inversamente proporcionales y $x \times y = 120$.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...
Producto $x \times y$	120	120	120	120	

b. Si calculo el cociente del peso entre la longitud, el resultado siempre es 9. Las cantidades son directamente proporcionales y $y = 9 \times x$.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...
Cociente $y \div x$	9	9	9	9	

c. No son cantidades directamente proporcionales, ni inversamente proporcionales, pues ni el cociente, ni el producto son constantes.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...
Cociente $y \div x$	7	3	1.66...	1	0.6	
Producto $x \times y$	7	12	15	16	15	

Comprende

Se puede identificar si dos cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos, verificando si el producto o el cociente es constante.

Resuelve

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directamente o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La base y la altura de un rectángulo de área 60 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	...
Altura y (cm)	60	30	20	15	...

b. Las edades de Marta y Beatriz.

Edad de Marta x	10	11	12	13	...
Edad de Beatriz y	7	8	9	10	...

c. El número de páginas de un libro y su peso.

n.° de páginas x	150	300	450	600	...
Peso y (lb)	2	4	6	8	...

d. El número de trabajadores y la cantidad de días que tardan en pintar una casa.

n.° de trabajadores x	4	8	12	16	...
n.° de días y	12	6	4	3	...

¿Sabías que...?

Existen dos algoritmos para encontrar un dato que falta en cantidades que son directamente proporcionales o inversamente proporcionales, llamados **regla de tres**.

Regla de tres directa

Dadas la cantidades A y B directamente proporcionales, entonces se cumple $a : b = c : d$. Por la propiedad fundamental de las proporciones se cumple $a \times d = b \times c$; esto significa que a veces d es igual a $b \times c$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$d = b \times c \div a$ o $d = \dfrac{b \times c}{a}$

Ejemplo de la regla de tres directa: Si 3 dulces pesan 18 g, ¿cuánto pesan 8 dulces?

El peso es directamente proporcional a la cantidad de dulces. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres directa:

n.° de dulces	3	8
Peso (g)	18	d

$d = \dfrac{\overset{6}{\cancel{18}} \times 8}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 6 \times 8 = 48$

R: 48 g

Regla de tres inversa

Dadas la cantidades A y B inversamente proporcionales, entonces, por la propiedad de la proporcionalidad inversa se cumple $a \times b = c \times d$; esto significa que c veces d es igual a $a \times b$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$d = a \times b \div c$ o $d = \dfrac{a \times b}{c}$

Ejemplo de la regla de tres inversa: Si 4 trabajadores pintan una casa en 2 días, ¿cuánto tardarán 8 trabajadores si trabajan al mismo ritmo?

El número de trabajadores y la cantidad de horas son inversamente proporcionales. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres inversa:

n.° de trabajadores	4	8
Tiempo (días)	2	d

$d = \dfrac{4 \times 2}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

R: Tardarán 1 día.