Unidad 6

Longitud de una circunferencia y área del círculo

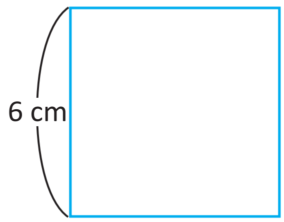
En esta unidad aprenderás a

- Calcular la longitud de una circunferencia a partir de su radio o su diámetro
- El significado de π y su uso
- Calcular el área de un círculo
- Calcular el área de regiones en figuras diversas

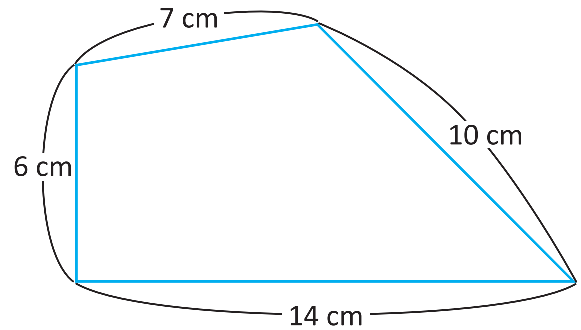
1.1 Practica lo aprendido

Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

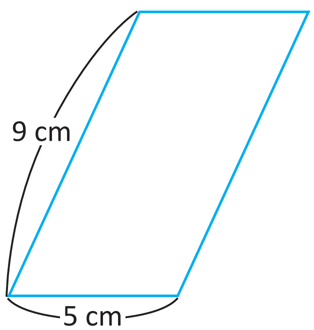
a. Cuadrado



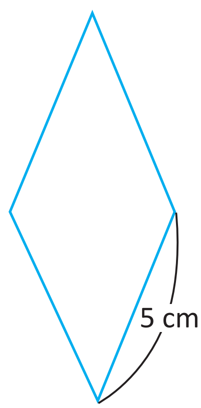
b. Cuadrilátero



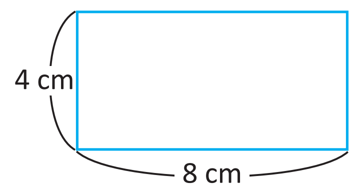
c. Paralelogramo



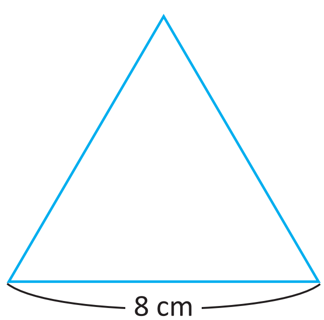
d. Rombo



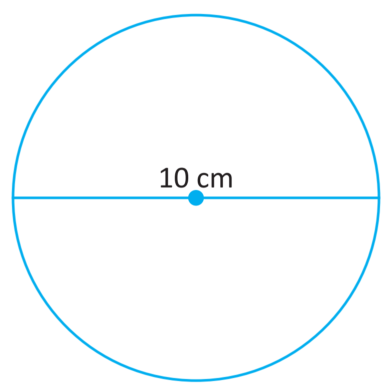
e. Rectángulo



f. Triángulo equilátero



g. Circunferencia

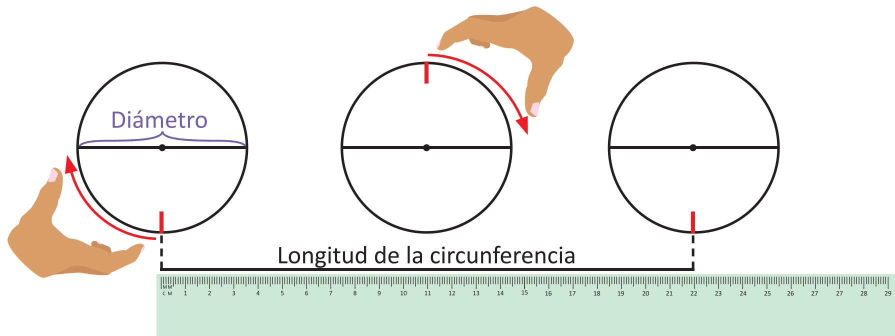


Al contorno de una figura geométrica se le conoce como perímetro, en el caso del contorno de un círculo, se le llama **circunferencia**.
En esta unidad aprenderás a calcular la medida de la circunferencia y el área de un círculo.

1.2 Relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro

Analiza

Para estimar la longitud de una circunferencia se realiza lo siguiente:



Para cada objeto en la siguiente tabla, calcula el cociente entre su longitud y su diámetro:

Objeto	Longitud de la circunferencia (cm)	Diámetro (cm)	**Longitud ÷ Diámetro** (aproximación)
base de una taza	25	8	
tirro	33.1	10.5	
tazón	46.8	14.9	

¿Cuántas veces (aproximadamente) es la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro?

Soluciona

Carlos

Objeto	Longitud de la circunferencia (cm)	Diámetro (cm)	**Longitud ÷ Diámetro** (aproximación)
base de una taza	25	8	25 ÷ 8 = 3.13
tirro	33.1	10.5	33.1 ÷ 10.5 = 3.15
tazón	46.8	14.9	46.8 ÷ 14.9 = 3.14

Luego de completar la tabla observo que la longitud de la circunferencia es aproximadamente 3.14 veces el diámetro.
R: 3.14 veces.

Comprende

El cociente **longitud de la circunferencia ÷ diámetro** no depende del diámetro. Se denota este número con letra griega π y se lee "pi":

longitud de la circunferencia ÷ diámetro = π

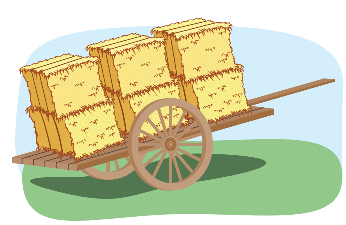
Redondeando a la centésima π es aproximadamete igual a 3.14 y se utiliza este valor en el cálculo.

Resuelve

1. Con los datos de la circunferencia de la ilustracion realiza el cociente:
   longitud de la circunferencia ÷ diámetro,
   y verifica que se cumple la relación.

2. Con los datos del diámetro y la longitud de la circunferencia de las ruedas de la carreta verifica que se cumple la relación.

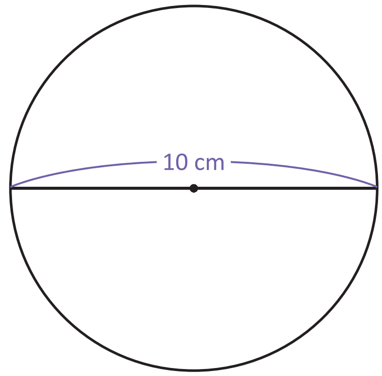
Diámetro: 100 cm
Longitud: 314 cm



1.3 Cálculo de la longitud de una circunferencia

Analiza

Encuentra la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 10 cm.



Soluciona

Represento la longitud de una circunferencia con ℓ,

José

$\ell \div 10 = 3.14$

$\ell = 10 \times 3.14$

$\ell = 31.4$

Recuerda que $a \div b = c$ equivale a $a = b \times c$.

Comprende

Si se conoce el diámetro de una circunferencia, su longitud se calcula efectuando lo siguiente:

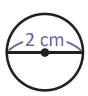
longitud de la circunferencia = diámetro × 3.14

La longitud de una circunferencia es proporcional al diámetro.

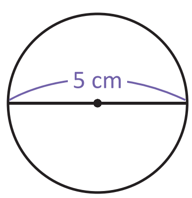
Resuelve

1. Encuentra la longitud de cada circunferencia:

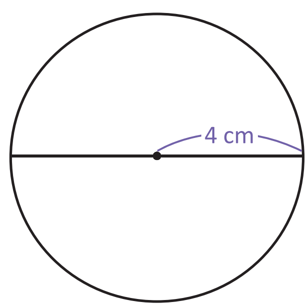
a.



b.



c.



Ten en cuenta que:
diámetro = radio × 2

2. Encuentra la longitud de la circunferencia en cada caso:

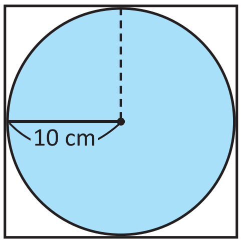
a. Diámetro = 6 cm b. Diámetro = 12 cm c. Radio = 20 cm

2.1 Comparación del área del círculo con el área de cuadrados

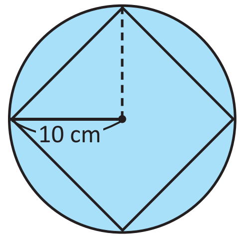
Analiza

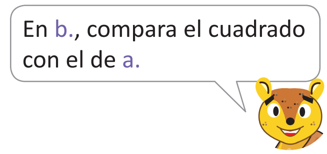
Se compara el área del círculo de radio 10 cm con dos cuadrados. En cada caso, encuentra el área del cuadrado:

a.



b.

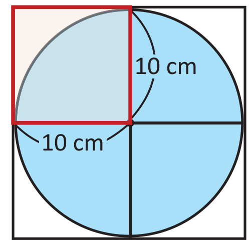




Soluciona

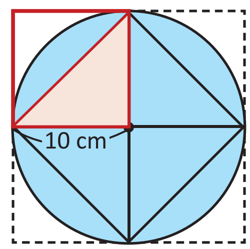
a. El área del cuadrado cuyo lado mide 10 cm es: 10 × 10 = 100 cm^2. Entonces, el área buscada es 100 × 4 = 400 cm^2; es mayor que el área del círculo.

R: 400 cm^2



b. Observo que el área del triángulo rectángulo es la mitad del área del cuadrado de lado 10 cm. Entonces, el área buscada es la mitad del área calculada en el literal anterior, o sea, 100 × 2 = 200 cm^2; es menor que el área del círculo.

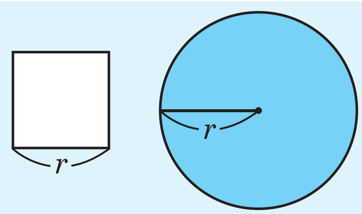
R: 200 cm^2



Comprende

El área del círculo de radio r cumple lo siguiente:

- Es mayor que dos veces el área del cuadrado de lado r.
- Es menor que cuatro veces el área del cuadrado de lado r.



Resuelve

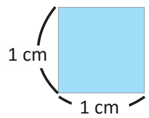
1. Completa lo siguiente:
   ① 2 veces el área del cuadrado de lado 5 cm es: _________ cm^2
   ② 4 veces el área del cuadrado de lado 5 cm es: _________ cm^2
   ③ Por lo tanto, el área del círculo de radio 5 cm está entre _________ cm^2 y _________ cm^2

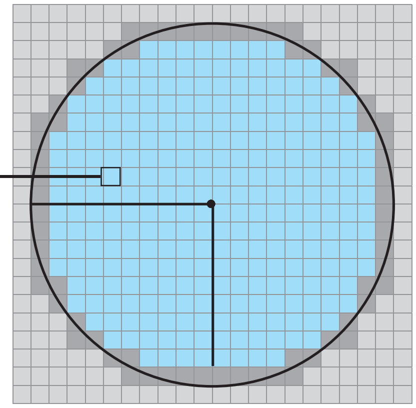
2. Completa lo siguiente:
   ① 2 veces el área del cuadrado de lado 7 cm es: _________ cm^2
   ② 4 veces el área del cuadrado de lado 7 cm es: _________ cm^2
   ③ Por lo tanto, el área del círculo de radio 7 cm está entre _________ cm^2 y _________ cm^2

Unidad 6

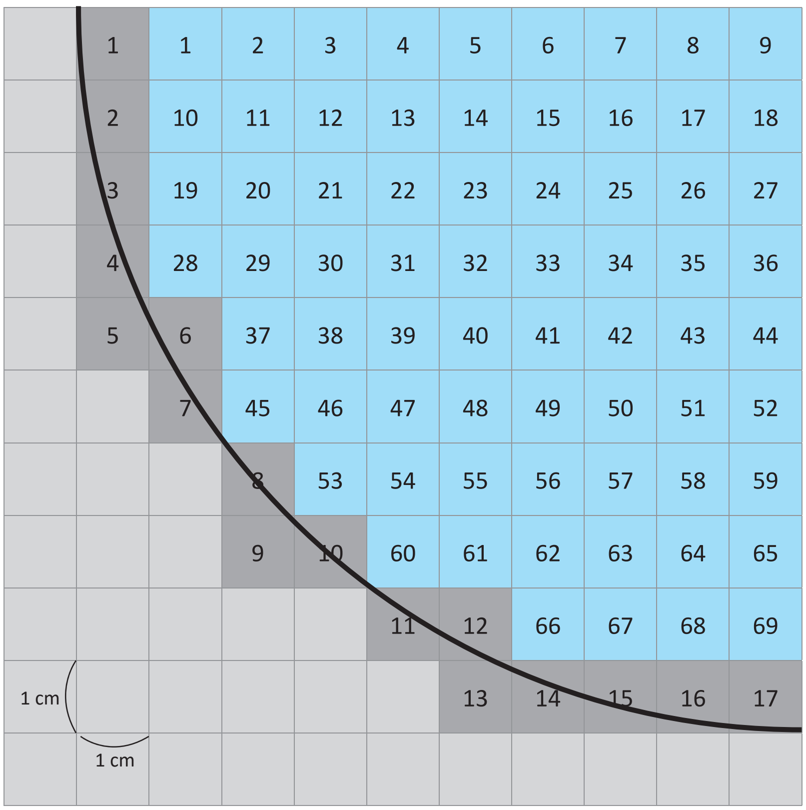
¿Sabías que...?

Utilizando cuadrados de 1 cm de lado, se puede estimar el área del círculo de 10 cm de radio.





Para hacerlo más fácil se trabaja con la cuarta parte, contando los cuadrados uno a uno.



Los cuadrados completos son los de color ; en total hay 69 de ellos, es decir 69 cm^2. Los cuadrados incompletos son los de color ; en total hay 17 de ellos, pero como son incompletos solo se toma la mitad de su área, 8.5 cm^2.

El área aproximada de la cuarta parte del círculo es: 69 + 8.5 = 77.5 cm^2. Por lo tanto, el área aproximada del círculo es: 77.5 × 4 = 310
R: 310 cm

Además, el área del círculo es siempre, aproximadamente, 3 veces el área del cuadrado cuyo lado mide lo mismo que el radio de la circunferencia. Esto lo verifico al calcular:

310 ÷ 100 = 3.1

También se puede calcular el área del círculo de radio de 10 cm, dividiéndolo en triángulos iguales.

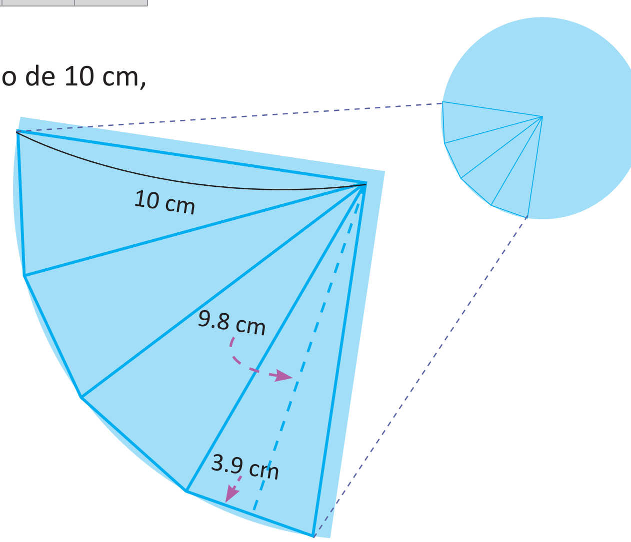
Usando, por ejemplo, el polígono regular que se divide en 16 partes iguales, se encuentra el área de uno de los triángulos: 3.9 × 9.8 ÷ 2 = 19.11 cm^2

En los 16 triángulos se tiene: 19.11 × 16 = 305.76; aproximadamente: 306 cm^2

Para la cantidad de veces efectúo:

306 ÷ 100 = 3.06

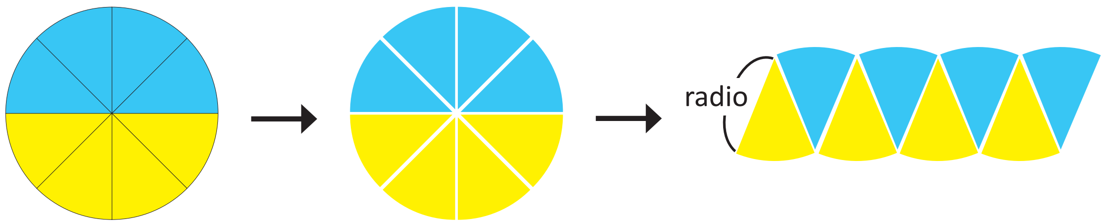
R: Aproximadamente 3 veces.



2.2 Fórmula del área de un círculo

Analiza

Se recorta un círculo en 8 partes iguales y se reubican como se muestra en la figura:

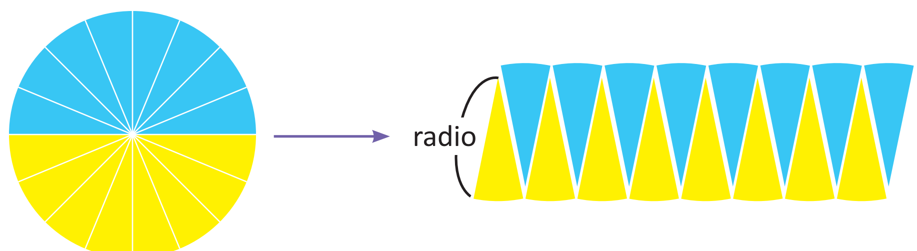


a. ¿Qué figura se va formando cuando se tienen más partes?
b. ¿Cómo puede calcularse el área del círculo?

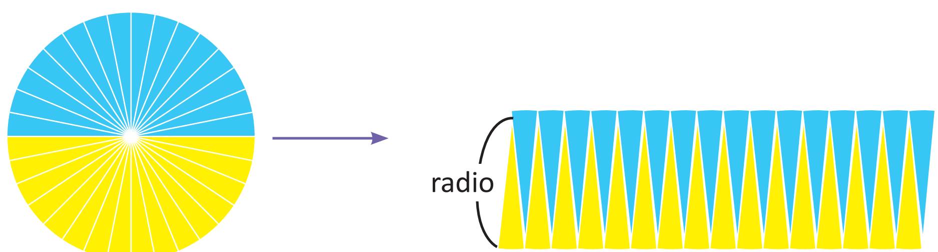
Soluciona

a. Si se hacen 16, 32 y 64 recortes como los anteriores, ¿cómo podemos encontrar la fórmula del área del círculo, utilizando la fórmula del área de la figura formada?

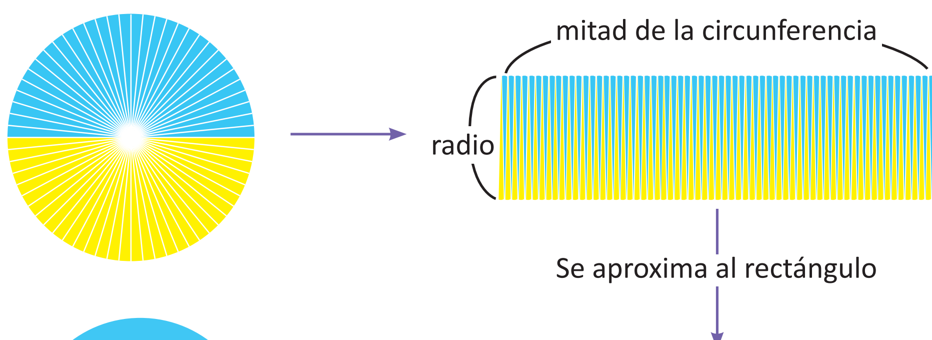
Para 16 sectores:

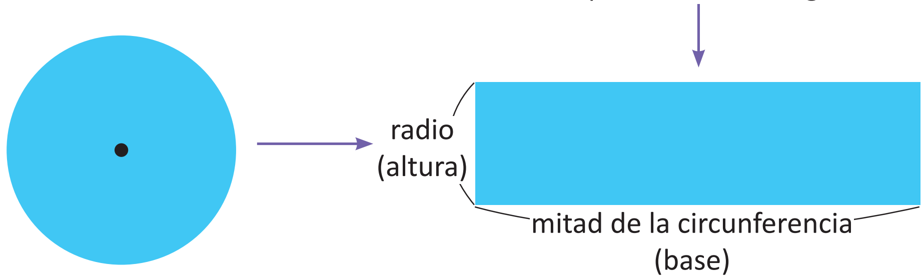


Para 32 sectores:



Para 64 sectores:





R: Se va formando un rectángulo.

b. El área del círculo puede calcularse utilizando el rectángulo del literal anterior:

El área del rectángulo = base × altura

El área del círculo = mitad de la longitud de la circunferencia × radio

= (radio × π) × radio

= radio × radio × π

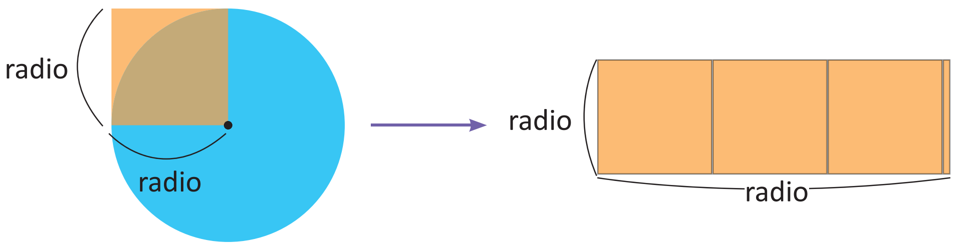
longitud de la circunferencia = diámetro × π

= radio × 2 × π

mitad de la longitud de la circunferencia:

= (radio × 2 × π) ÷ 2

= radio × π



R: El área del círculo es aproximadamente π veces el área del cuadrado cuyo lado es la misma longitud del radio.

Comprende

El área del círculo se calcula:

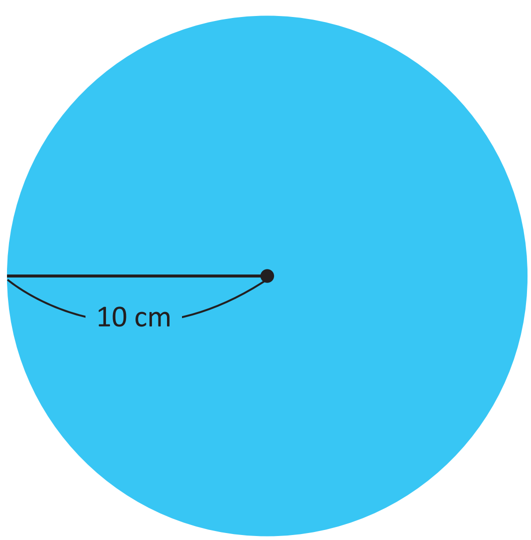
área del círculo = radio × radio × π

= radio × radio × 3.14

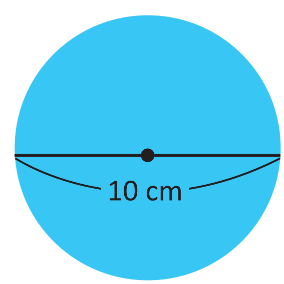
Resuelve

1. Encuentra el área de los círculos utilizando el valor 3.14

a. Radio = 10 cm



b. Diámetro = 10 cm



2. Encuentra el área del círculo con la condición dada en cada literal, utilizando el valor de 3.14.

a. Radio = 4 cm

b. Diámetro = 6 cm

¿Sabías que...?

También se puede encontrar la fórmula del área de un círculo utilizando la fórmula del área de un triángulo, tal como se muestra en la siguiente construcción.

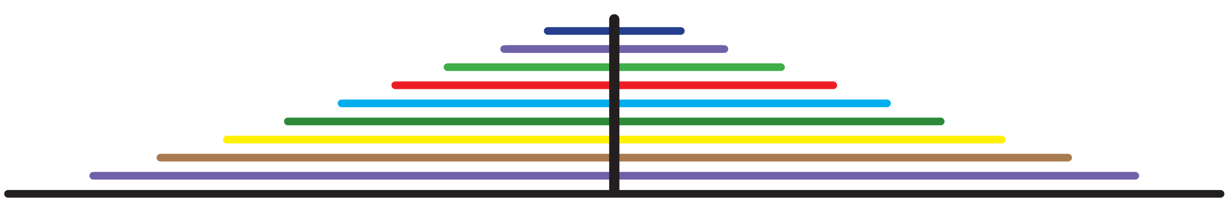
Se identifica con negro la circunferencia y el radio.

Recuerda que la longitud de la circunferencia es:

radio × 2 × π

Cortando hasta el centro de la circunferencia y separando

Se forma un triángulo, donde la base es la longitud de la circunferencia y la altura es el radio.



Luego el área de la circunferencia es la misma que la del triángulo:

Área = base × altura ÷ 2
= longitud de la circunferencia × radio ÷ 2
= (radio × 2 × π) × radio ÷ 2
= radio × radio × π

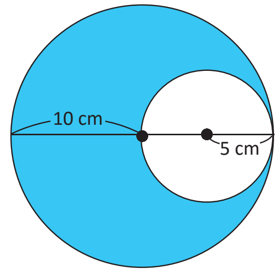
2.3 Cálculo de áreas con círculos

Analiza

Calcula el área de la parte coloreada de celeste.

a. Escribe el **PO**.

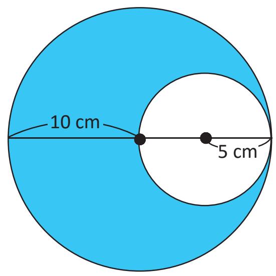
b. Encuentra el área.



Soluciona

Para encontrar el área coloreada, resto al área del círculo grande la del pequeño:


Ana



a. **PO:** $10 \times 10 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14$

b. Área $= 10 \times 10 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14$
$= 100 \times 3.14 - 25 \times 3.14$
$= (100 - 25) \times 3.14$
$= 75 \times 3.14$
$= 235.5$

R: 235.5 cm^2

Observa que en la línea 3, usar la propiedad distributiva de la resta sobre la multiplicación facilita los cálculos.

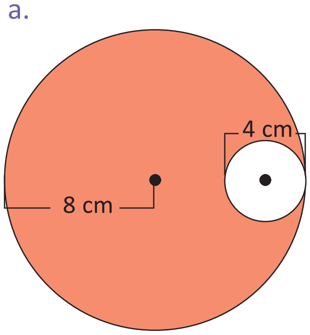
Comprende

Para calcular el área de una región se pueden identificar las figuras involucradas, calcular sus áreas y luego restarlas como corresponda.

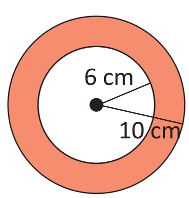
Resuelve

Calcula el área de la parte coloreada en los siguientes círculos:

a.

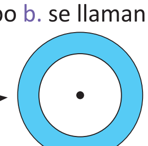


b.



Una región circular es una porción de área dentro de un círculo que puede estar en diferente posición, como en los literales a. y b.
Las regiones circulares del tipo b. se llaman coronas circulares.

corona circular

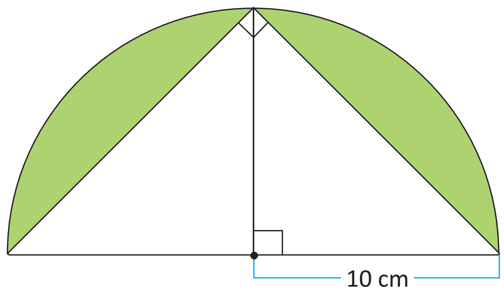


Observa que el centro de ambos círculos es el mismo.

2.4 Cálculo de áreas de regiones diversas

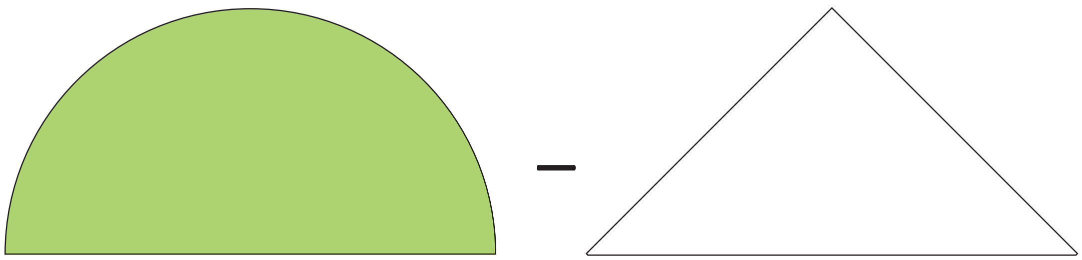
Analiza

Calcula el área de la región coloreada de verde.



Como en la clase anterior, identifica las figuras que aparecen, recuerda cómo se calculan sus áreas y luego piensa en cómo obtener la que se te pide.

Soluciona



área de la mitad del círculo – área del triángulo

$= (10 \times 10 \times 3.14) \div 2 - (20 \times 10) \div 2$
$= 314 \div 2 - 200 \div 2$
$= 157 - 100$
$= 57$

R: 57 cm^2

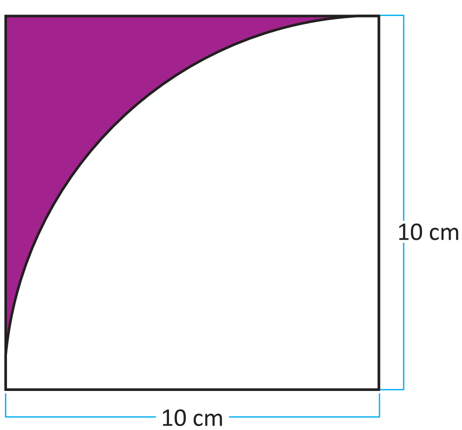
Comprende

Para calcular el área de figuras diversas, puedes encontrar el área de cada figura conocida y luego sumar o restar según la necesidad.

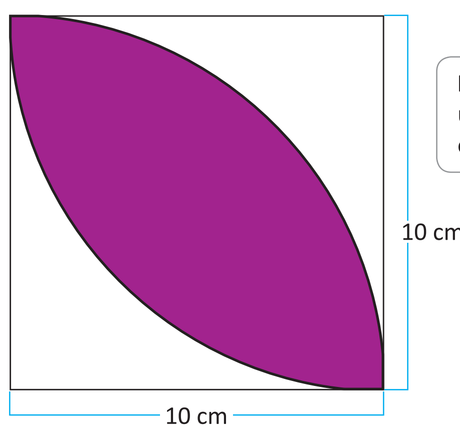
Resuelve

Calcula el área de la región coloreada.

a.



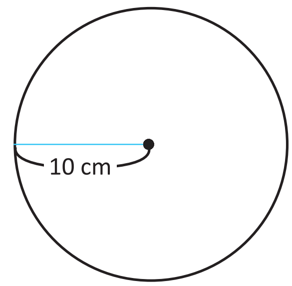
b.



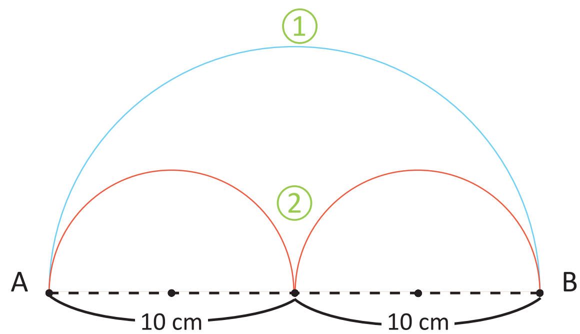
Para el literal b. utiliza el resultado encontrado en a.

2.5 Practica lo aprendido

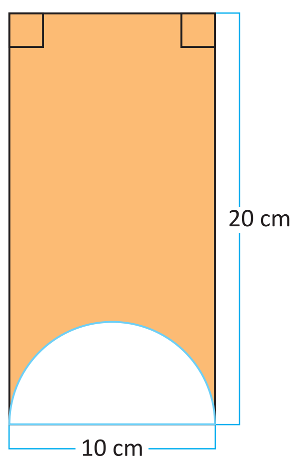
1. Calcula la longitud de la circunferencia, utiliza π en la respuesta.



2. Para llegar del punto A al B; ¿cuál es el camino más corto, ① o ②?



3. Calcula el área de la región coloreada.



4. La familia de Beatriz tiene un jardín con forma circular de 3 m de radio. Ellos construirán una acera alrededor del jardín cuyo ancho mide 1 m, ¿cuánto es el área de la acera? Utiliza π.