Unidad 5

Proporcionalidad

En esta unidad aprenderás a

- Identificar si dos razones forman una proporción
- Aplicar las propiedades de las proporciones para encontrar razones equivalentes
- Encontrar la cantidad desconocida en una proporción
- Identificar cantidades directamente proporcionales
- Identificar cantidades inversamente proporcionales

1.1 Variación de cantidades para obtener la misma razón

Comprende

Cuando se tiene una razón entre dos cantidades $a : b$, la cual se quiere mantener para conservar el mismo sabor, tono, consistencia etc., se pueden aumentar los números a y b en la misma cantidad de veces hasta encontrar las cantidades que se necesitan.

Ejemplo: Para preparar salsa rosa se utilizan 2 cucharadas de ketchup y 3 de mayonesa. ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se necesitan si se utilizan 10 cucharadas de ketchup?

Recuerda que, en una razón $a : b$, a la cantidad a se le llama antecedente y a la cantidad b se le llama consecuente.

Ketchup	Mayonesa
2 cucharadas	3 cucharadas
10 cucharadas	x cucharadas

$\times 5$ $\times 5$

En 10 cucharadas de ketchup hay 5 veces 2 cucharadas. Entonces de mayonesa son 5 veces 3 cucharadas, es decir, $x = 15$

R: 15 cucharadas.

Resuelve

1. En cada literal, encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor:

a.

Chocolate	Leche
5 tazas	4 tazas
15 tazas	x tazas

$\times \boxed{}$ $\times \boxed{}$

b.

Agua	Jugo de limón
5 vasos	2 vasos
x vasos	12 vasos

$\times \boxed{}$ $\times \boxed{}$

2. Una receta de atol indica que la relación entre cucharadas de leche y cucharadas de avena es 5 : 3; si se utilizan 15 cucharadas de leche, ¿cuántas de avena se necesitan?

Desafíate

Encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor:

Leche en polvo	Azúcar
2 cucharadas	$\frac{1}{2}$ cucharada
x vasos	3 cucharadas

$\times \boxed{}$ $\times \boxed{}$

Firma de un familiar: ______________________

1.2 Razones equivalentes y proporciones

Recuerda

Encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor:

Harina	Azúcar
4 tazas	3 tazas
x tazas	18 tazas

× ☐   × ☐

Comprende

- Cuando dos razones tienen el mismo valor de la razón se les llama **razones equivalentes**.
- A la igualdad entre dos razones equivalentes se le llama **proporción**. Es decir, si la razón $a : b$ es equivalente a la razón $c : d$ entonces la proporción se escribe:

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

y se lee "a es a b como c es a d"; a, b, c y d representan cualquier número.

Por ejemplo, las razones 3 : 4 y 6 : 8 son equivalentes porque su valor de razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75). Puede escribirse la proporción 3 : 4 = 6 : 8

¿Sabías que...?

Una proporción también puede escribirse utilizando el símbolo "::" en lugar del símbolo "=". Así, 3 : 4 :: 6 : 8 representa una proporción.

Resuelve

1. ¿Son equivalentes las razones dadas en cada literal? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.

a. 3 : 4 | 12 : 16

b. 15 : 6 | 5 : 2

c. 4 : 9 | 20 : 45

d. 72 : 63 | 8 : 7

2. Una receta para preparar arroz en leche indica utilizar 150 g de arroz y 4 tazas de leche. Si Juan mezcla 300 g de arroz y 8 tazas de leche, ¿obtendrá el mismo sabor? Justifica tu respuesta.

1.3 Razón equivalente más simple

Recuerda

1. Carlos compró 3 libras de maíz y 2 de arroz. Si Pedro ha comprado 12 libras de maíz, ¿cuántas libras de arroz debe comprar para mantener la razón?

2. Une con una línea las razones equivalentes; luego, escribe las proporciones:

9 : 7	8 : 12	25 : 55	13 : 10
26 : 20	5 : 11	36 : 28	4 : 6

Comprende

Encontrar una razón equivalente con números menores es **simplificar el valor de la razón**; cuando se obtiene la razón equivalente con los números naturales menores posibles se obtiene la **razón equivalente más simple** o **simplificada**.

Por ejemplo, para las razones 6 : 10 y 9 : 15, su razón equivalente más simple es 3 : 5, pues si se simplifican los valores de las razones $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$ se obtiene $\frac{3}{5}$, que corresponde a la razón 3 : 5

¿Qué pasaría?

Para calcular la razón equivalente más simple de 12: 30, se simplifica el valor de la razón hasta su mínima expresión:

$$\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{30}}} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la razón equivalente más simple de 12 : 30 es 2 : 5.

Resuelve

1. Para cada razón, encuentra la razón equivalente más simple:

a. 10 : 8

b. 9 : 12

c. 24 : 42

d. 45 : 27

2. Un museo tiene dos salones para conferencias. El área del salón A es 100 m^2 y el del salón B es 125 m^2. En un mismo día, en el salón A habían 44 personas, mientras que en el salón B habían 55. ¿Cuál salón se encontraba más lleno?

Firma de un familiar: ________________________

1.4 Proporciones que incluyen números decimales

Recuerda

1. El profesor de Julia mezcla 2 botes de pintura amarilla con 3 de pintura azul para obtener un color verde oscuro. Julia necesita mucha pintura de color verde oscuro, entonces mezcla 14 botes de pintura amarilla con 21 botes de pintura azul. ¿Obtendrá el mismo tono que su profesor?

2. En cada caso, encuentra la razón equivalente más simple:

   a. 15 : 24 b. 100 : 20

Comprende

Una razón expresada con números decimales, se puede convertir en una razón equivalente con números naturales. Cuando los números solo tienen una cifra decimal se realiza lo siguiente:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por 10, para encontrar una razón equivalente con números naturales.

② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Por ejemplo, para encontrar una razón equivalente a la razón 2.4 : 3 que contenga solo números naturales, se multiplican el antecedente y el consecuente por 10:

$$2.4 : 3 = (2.4 \times 10) : (3 \times 10)$$
$$= 24 : 30$$

La razón equivalente más simple de 24 : 30 es 4 : 5; por lo tanto,

$$2.4 : 3 = 4 : 5$$

Resuelve

1. Encuentra la razón equivalente más simplificada, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales:

   a. 0.2 : 0.3 b. 0.7 : 0.5

   c. 0.9 : 2.4 d. 1.2 : 0.4

2. ¿Cuál es la razón equivalente más simplificada con números naturales, a la razón 1.05 : 0.5?

✶Desafíate

En una receta salvadoreña, para elaborar empanadas de leche se necesitan 5 plátanos maduros, 0.25 litros de leche y 0.5 tazas de maicena. Si únicamente puedes medir litros completos y tazas completas, ¿qué cantidades de cada ingrediente utilizarías?

Unidad 5

1.5 Proporciones que incluyen fracciones

Recuerda

1. Encuentra la razón equivalente más simple a la razón 120 : 180

2. Une con una línea las razones equivalentes (justifica tu respuesta):

0.6 : 1	*1.4 : 0.8*	*2.2 : 3.4*	*1.8 : 3.6*
2 : 3	*3 : 5*	*11 : 17*	*7 : 4*

Comprende

Una razón expresada con fracciones se puede convertir en una razón equivalente con números naturales siguiendo los pasos:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por el mcm de los denominadores, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Por ejemplo, para encontrar una razón equivalente a la razón $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$ que contenga números naturales, se multiplican el antecedente y el consecuente 10,

$$\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = \left(\frac{6}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{10}^{2}\right) : \left(\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times \cancel{10}^{5}\right)$$
$$= (6 \times 2) : (1 \times 5)$$
$$= 12 : 5$$

Por lo tanto, $\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = 12 : 5$

Resuelve

1. Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. $\frac{2}{5} : \frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2} : \frac{3}{2}$

c. $\frac{5}{6} : \frac{4}{7}$

d. $\frac{7}{10} : \frac{9}{10}$

2. En una receta para la elaboración de un pastel, se indica que deben utilizarse $\frac{13}{10}$ tazas de mantequilla y $\frac{21}{5}$ tazas de harina. Para elaborar 10 pasteles, ¿cuántas tazas de mantequilla y harina deben utilizarse?

Firma de un familiar: ________________________

1.6 Relación de aspecto

Recuerda

1. El día lunes, una motociclista recorría 0.75 km en 1 minuto; mientras que el día martes recorría 3 km en 4 minutos. ¿Qué día iba más rápido?

2. Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

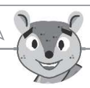
a. $\frac{5}{8} : \frac{7}{4}$

b. $\frac{21}{12} : \frac{11}{6}$

Comprende

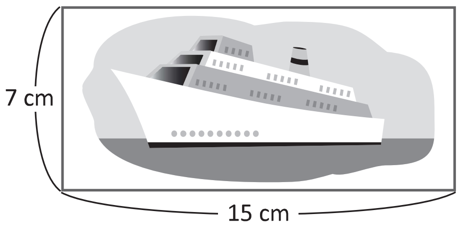
Se llama **relación de aspecto de una imagen** a la razón entre las medidas de su base y su altura. Dos imágenes tienen **la misma forma** si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

Aunque las dimensiones en los televisores sean distintas, la imagen se ve igual ya que la relación de aspecto es la misma. En televisiones tradicionales, la relación de aspecto es 4 : 3, y en los panorámicos es 16 : 9



Resuelve

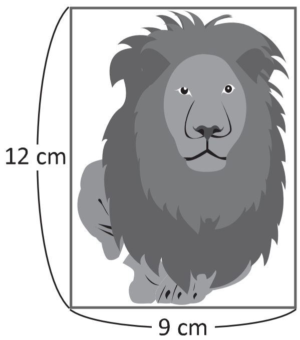
1. Si se amplía la fotografía del barco, determina cuáles de las siguientes medidas pueden utilizarse para mantener la forma:



a. Base 15 cm, altura 10 cm

b. Base 45 cm, altura 21 cm

2. Si se amplía la fotografía del león, determina cuáles de las siguientes medidas pueden utilizarse para mantener la relación de aspecto:



a. Base 21 cm, altura 28 cm

b. Base 18 cm, altura 27 cm

Firma de un familiar: ________________________

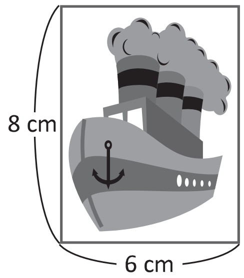
1.7 Propiedad de las proporciones

Recuerda

1. Une con una línea las razones equivalentes, y escríbelas en forma de proporción.

$\frac{9}{7} : \frac{4}{5}$	$4 : \frac{3}{8}$	$\frac{5}{12} : \frac{3}{10}$
25 : 18	45 : 28	32 : 3

2. ¿Cuáles de las siguientes medidas mantienen la relación de aspecto de la fotografía?



a. Base 24 cm, altura 32 cm.

b. Base 15 cm, altura 20 cm.

Comprende

Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por el mismo número se obtiene una razón equivalente, y por tanto, una proporción.

Resuelve

1. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $3 : 10 = 12 : x$

b. $7 : 2 = 14 : x$

c. $36 : 6 = 6 : x$

d. $50 : 110 = 50 : x$

e. $8 : 9 = x : 63$

f. $\frac{1}{2} : 4 = x : 8$

2. Encuentra el valor del número y para que se forme una proporción.

a. $4 : 11 = 0.04 : y$

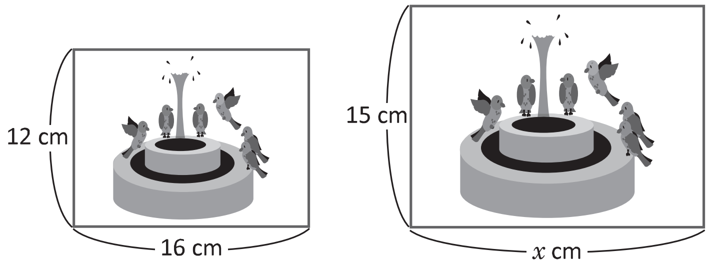
b. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = y : \frac{1}{5}$

Firma de un familiar: ________________________

1.8 Proporciones con un dato desconocido

Recuerda

1. Determina el valor del número x para que ambas fotografías tengan la misma relación de aspecto.



2. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.
   a. $24 : 16 = x : 2$
   b. $0.9 : 1.2 = 3 : x$

Comprende

Para encontrar un dato desconocido en una proporción se puede utilizar la propiedad de las proporciones, identificando la cantidad de veces que se ha aumentado uno de los datos.

Resuelve

1. Encuentra el valor de la cantidad que hace falta.

a.

Harina (g)	Vainilla (g)
7	4
350	x

b.

Leche (ml)	Chocolate (ml)
5	4
x	360

c.

Distancia (m)	Tiempo (s)
1.6	3
x	24

d.

Agua (l)	Arroz (tazas)
0.25	1.5
1	x

2. En una tienda se venden bolsas con chibolas rojas y verdes. La razón entre la cantidad de chibolas rojas y verdes en cada bolsa siempre debe ser 10 : 7; si una bolsa tiene 35 chibolas verdes, ¿cuántas rojas contendrá?

Unidad 5

1.9 Propiedad fundamental de las proporciones

Recuerda

1. Encuentra el valor del número y para que se forme una proporción $\frac{5}{18} : \frac{7}{12} = y : \frac{7}{2}$

2. La base de una fotografía mide 18 cm, y su altura mide 11 cm. Encuentra el valor de la cantidad que hace falta, si se amplía la fotografía.

Base (cm)	Altura (cm)
18	11
x	77

Comprende

Propiedad fundamental de las proporciones

En una proporción, el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda. Es decir, para la proporción $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$ se cumple

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ representan cualquier número.

¿Sabías que...?

En una proporción $a : b = c : d$, a los números a y d también se les conoce como "extremos" y, a b y c como "medios". Entonces, la propiedad de las proporciones indica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, refiriéndose a que $a \times d = b \times c$.

Resuelve

1. Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones en los siguientes casos.

a. 4 : 5 = 16 : 20

b. 9 : 2 = 18 : 4

c. 30 : 35 = 6 : 7

d. 24 : 18 = 8 : 6

2. Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones en los siguientes casos.

a. 0.8 : 0.5 = 1.6 : 1

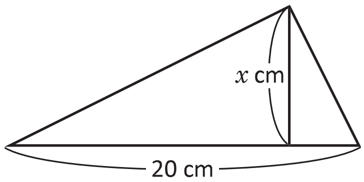
b. $\frac{5}{6} : \frac{3}{7} = \frac{10}{6} : \frac{6}{7}$

Firma de un familiar: ______________________

1.10 Resolución de problemas aplicando proporciones

Recuerda

1. Las medidas de la base y la altura de un triángulo se encuentran en una razón de 5 : 2. Para dibujar otro triángulo que mantenga la misma proporción y cuya base mida 20 cm, ¿cuál debería ser la medida de la altura?



2. Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones.
   a. 15 : 30 = 5 : 10
   b. 1.4 : 2.1 = 7 : 10.5

Comprende

Para resolver problemas de proporciones donde se desconoce algún dato y no es fácil identificar la cantidad de veces que aumenta una de las cantidades, se puede utilizar la propiedad fundamental de las proporciones.

Resuelve

1. Para crear cierto tono de color verde se deben mezclar 6 botes de pintura azul y 4 de pintura amarilla. Si se utilizan 10 botes de pintura amarilla, ¿cuántos deben usarse de pintura azul para conservar el tono de verde?

2. Carlos debe elaborar un plano de su casa; para ello es necesario que su dibujo conserve las razones entre las medidas de las habitaciones. El espacio para la sala tiene forma rectangular, el largo mide 4 m y el ancho mide 2.75 m; si en su dibujo el largo de la sala mide 8 cm, ¿cuánto debe medir el ancho?

1.11 Reparto proporcional

Recuerda

1. Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones para la proporción $\frac{9}{10} : \frac{8}{15} = 5\frac{2}{5} : 3\frac{1}{5}$

2. En 200 ml de agua de mar hay 7 g de sal. ¿Cuántos gramos de sal habrá en 700 ml de agua de mar?

Comprende

Para resolver problemas donde una cantidad debe repartirse en una razón determinada $a : b$, se puede utilizar un segmento dividido en $a + b$ partes iguales, encontrar el valor que representa cada parte y encontrar, ya sea a o b.

Resuelve

1. La razón entre las cantidades de dinero ahorradas por Beatriz y su hermano Juan están en razón 4 : 5. Si en total los dos tienen $63, ¿cuánto dinero ahorró cada uno?

2. La receta para una medicina indica diluir 10 ml de la misma en 25 ml de agua. En una solución de 105 ml, ¿cuántos corresponden a la medicina y cuántos al agua?

Desafíate

Las longitudes del largo y ancho de un rectángulo están a razón 9 : 4. Si el perímetro del rectángulo es 52 cm, ¿cuáles son las medidas del largo y del ancho?

Firma de un familiar: ________________________

1.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada, de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Identifico razones equivalentes para formar proporciones. Por ejemplo, en los siguientes casos a. 7 : 3 y 42 : 18 b. 5 : 6 y 35 : 36				
2. Calculo la razón equivalente más simple. Por ejemplo, para la razón 45 : 36				
3. Encuentro razones equivalentes, que involucren solo números naturales, a razones con números decimales o fracciones. Por ejemplo, para los siguientes casos a. 2.4 : 1.4 b. $\frac{3}{8} : \frac{1}{6}$				
4. Encuentro la cantidad desconocida en una razón, para formar una proporción. Por ejemplo, en los siguientes casos (el valor de x) a. $24 : 16 = 6 : x$ b. $9 : 15 = 36 : x$				

1.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada, de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

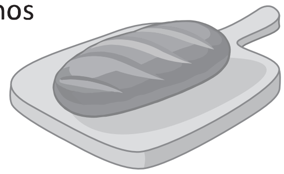
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo las propiedades de las proporciones para calcular valores desconocidos. Por ejemplo, en los siguientes problemas a. La razón entre la altura de un árbol y la longitud de su sombra (en cierta hora del día) es 3 : 2; si la altura del árbol es 12 metros, ¿cuánto mide su sombra? b. Las dimensiones de una fotografía son 12 cm de ancho por 18 cm de largo. Si se reduce el tamaño de tal forma que el largo mida 15 cm, ¿cuánto medirá el ancho?				
2. Encuentro las cantidades involucradas en una repartición proporcional. Por ejemplo, en el siguiente problema Se repartió cierta cantidad de dinero a dos personas, en una razón 5 : 6. Si la cantidad distribuida fue $110, ¿cuánto le corresponde a cada persona?				

Firma de un familiar: ________________________

2.1 Relación de proporcionalidad directa

Recuerda

Una receta para hacer pan utiliza 700 g de harina y 14 g de levadura. ¿Cuántos gramos de levadura se necesitarán, si se utilizan 1,000 g de harina?



Comprende

Cuando dos cantidades a y b cumplen que al multiplicarse a por 2, por 3, etc., la cantidad b también se multiplica por 2, por 3, etc., respectivamente, entonces se dice que las cantidades son **directamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad directa**.

Por ejemplo, la tabla muestra la relación entre el tiempo transcurrido después de abrir un chorro, y la altura que alcanza el agua que cae sobre un recipiente. Si el tiempo aumenta de 1 a 2 minutos, entonces la altura aumenta de 5 a 10 cm, es decir, ambas cantidades se multiplican por 2.

× 3, × 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2, × 3

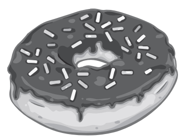
Resuelve

La tabla muestra la relación entre la cantidad de bandejas que tiene una panadería y la cantidad de donas que hornea; estas cantidades son directamente proporcionales.

a. Completa la tabla con la cantidad de donas horneadas al variar el número de bandejas:

Cantidad de bandejas	1	2	3	4	5	...
Cantidad de donas horneadas	12	24				...

b. ¿Cuántas donas se hornearán en 6 bandejas?



c. ¿Cuántas donas se hornearán en 8 bandejas?

Firma de un familiar: ________________________

2.2 Propiedad de la proporcionalidad directa

Recuerda

Un establecimiento cobra $20 por el alquiler de una docena de sillas.

a. Completa la tabla con el precio a pagar por el alquiler de sillas, al variar la cantidad de docenas que se solicitan:

Cantidad de docenas	1	2	3	4	5	...
Precio por el alquiler ($)	20	40				...

b. ¿Cuánto cuesta el alquiler de 6 docenas de sillas?, ¿y el de 10 docenas?

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad directa

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente siempre resulta el mismo número.

Por ejemplo, la tabla muestra la relación entre el tiempo transcurrido después de abrir un chorro, y la altura que alcanza el agua que cae sobre un recipiente. Al calcular el cociente de la altura entre el tiempo, el resultado siempre es igual a 5.

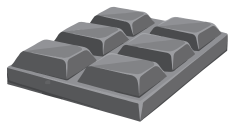
Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	

$5 \div 1$ $10 \div 2$ $15 \div 3$

Resuelve

1. Una empresa empaca chocolates en cajas para su distribución; la tabla muestra la relación entre la cantidad de cajas y la cantidad de chocolates:

Cantidad de cajas	1	2	3	4	5	...
Cantidad de chocolates	15	30	45	60	75	...
Cociente						

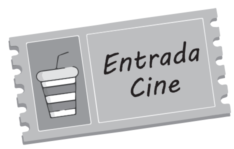


a. Encuentra el cociente entre la cantidad de chocolates y la cantidad de cajas; completa la tabla.

b. ¿Cuántos chocolates hay en una caja?

2. La tabla muestra la relación entre la cantidad de entradas para el cine y el precio total que debe pagarse por ellas:

Cantidad de entradas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	4	8	12	16	20	...
Cociente						



a. Encuentra el cociente entre la cantidad de entradas y el precio a pagar; completa la tabla.

b. ¿Cuál es el precio de una entrada para el cine?

2.3 Identificación de cantidades directamente proporcionales

Recuerda

La tabla muestra la cantidad de meses transcurridos y el dinero ahorrado por Ana durante ese tiempo.

a. Completa la tabla con el dinero ahorrado, al variar la cantidad de meses:

Cantidad de meses transcurridos	1	2	3	4	5				...
Dinero ahorrado ($)	5	10	15						...

b. ¿Cuánto dinero tendrá Ana al cabo de 10 meses?, ¿y al cabo de un año?

c. Encuentra el cociente entre el dinero ahorrado y la cantidad de meses transcurridos. ¿Cuánto dinero ahorra Ana cada mes?

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, etc., la otra también se multiplica por 2, por 3, por 4 respectivamente.
- El cociente entre las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad directa).

Resuelve

En cada caso, identifica si las cantidades son directamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son directamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son; justifica tu respuesta.

a. El dinero (en dólares) y la cantidad de pupusas que se pueden comprar:

Cantidad de dinero ($)	1	2	3	4	5	...
Cantidad de pupusas	3	6	9	12	15	...

b. Las edades de José y Miguel, si Miguel es un año mayor que José:

Edad de José (años)	8	9	10	11	12	...
Edad de Miguel (años)	9	10	11	12	13	...

c. El tiempo transcurrido y el número de vueltas que da una rueda en ese tiempo:

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	...
n.° de vueltas	11	22	33	44	55	...

Firma de un familiar: ______________________

2.4 Otras cantidades directamente proporcionales

Recuerda

La tabla muestra la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida por una motocicleta.

Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6	...
Distancia (km)	55	110	165	220	275	330	...

a. Calcula el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo. ¿Qué distancia recorre la motocicleta cada hora?

b. ¿Son cantidades directamente proporcionales?, ¿por qué?

Comprende

La expresión $y = 5 \times x$ representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales; en este caso se dice que y **es directamente proporcional a** x, o simplemente que y **es proporcional a** x. Otros ejemplos de relaciones entre cantidades directamente proporcionales son $y = 2 \times x$, $y = 3 \times x$, etc.

Resuelve

Para calcular el perímetro de un cuadrado se multiplica la longitud de su lado por 4.

a. Completa la tabla escribiendo la medida del perímetro cuando la longitud del lado del cuadrado es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Perímetro y (cm)							...

b. Representa la relación entre la longitud del lado (x cm) y la medida del perímetro (y cm).

Unidad 5

Desafíate

La longitud de la base de un triángulo es 10 cm.

a. Completa la tabla escribiendo el área del triángulo cuando su altura mide 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.:

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Área y (cm)							...

b. Utilizando la fórmula para calcular el área de un triángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

2.5 Expresión y = constante × x

Recuerda

1. La tabla muestra la relación entre la cantidad de agua que se extrae de un barril y la cantidad que queda en él:

Cantidad de agua que se extrae (litros)	1	2	3	4	5	...
Cantidad que queda en el barril (litros)	158	157	156	155	154	...

¿Son las cantidades directamente proporcionales?, ¿por qué?

2. Una persona camina con una rapidez de 5 km por hora.
   a. Completa la tabla con la distancia recorrida después de cierto tiempo:

Tiempo transcurrido x (cm)	1	2	3	4	...
Distancia recorrida y (cm)					...

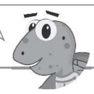
   b. Representa la relación entre el tiempo transcurrido x y la distancia recorrida y.

Comprende

Cuando y es directamente proporcional a x, el cociente de $y \div x$ es siempre el mismo valor; a este valor se le llama **constante**. Cuando esto sucede, la relación entre x y y se puede expresar:

$$y = \textbf{constante} \times x$$

Algunas relaciones entre cantidades son de la forma x + constante = y, constante – x = y; pero estas cantidades no son directamente proporcionales.



Resuelve

1. La tabla muestra los minutos que se ha retrasado un reloj después de cierta cantidad de años:

Años transcurridos x	1	2	3	4	5	...
Minutos y	6	12	18	24	30	...
Cociente $y \div x$						

   a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.
   b. Representa la relación entre los años transcurridos (x) y la cantidad de minutos que se ha retrasado el reloj (y).

2. La tabla muestra la cantidad de vasos que se obtienen con cierto número de litros de jugo de naranja:

Litros de jugo x	1	2	3	4	5	...
Cantidad de vasos y	8	16	24	32	40	...
Cociente $y \div x$						

   a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.
   b. Representa la relación entre los litros de jugo (x) y la cantidad de vasos (y).

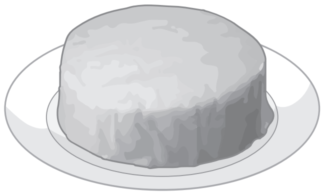
Firma de un familiar: ________________________

2.6 Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales

Recuerda

Una libra de quesillo cuesta $2.

a. Completa la tabla:



Libras de quesillo x	1	2	3	4	5	...
Precio y en dólares						...
Cociente $y \div x$						

b. Representa la relación entre la cantidad de libras de quesillo (x) y el precio (y).

Comprende

Para empacar un paquete de 300 hojas (aproximadamente) de papel bond sin contarlas una a una, puede utilizarse la siguiente información:

- El peso es directamente proporcional al número de hojas.
- La altura es directamente proporcional al número de hojas.

Si la altura de 100 hojas es 1 cm, entonces la altura (b cm) de 300 hojas será el triple de la de 100 hojas, o sea, 3 cm (b = 3). Se puede preparar un paquete que mida 3 cm de altura.

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	b

× 3

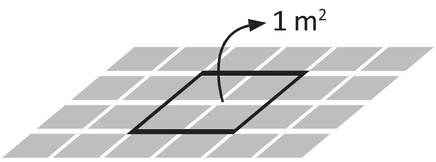
× 3

Resuelve

1. Al pesar 6 cajas de tachuelas se obtiene como resultado 450 g. ¿Cómo se pueden preparar 200 cajas de tachuelas sin contarlas una a una?

n.° de cajas	6	200
Peso (g)	450	a

2. Al embaldosar un piso se utilizan 4 baldosas por metro cuadrado. ¿Cuántos metros cuadrados cubrirán 36 ladrillos?



n.° de ladrillos	4	36
Metros cuadrados	1	b

2.7 Proporcionalidad directa con un dato desconocido

Recuerda

1. La tabla muestra la cantidad de cajas de bombones que se compran y el total de bombones que se obtienen:

Cantidad de cajas x	1	2	3	4	5	...
Cantidad de bombones y	25	50	75	100	125	...
Cociente $y \div x$						

a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.
b. Representa la relación entre la cantidad de cajas de bombones (x) y la cantidad de bombones (y).

2. Si 10 tarjetas de invitación para una graduación tienen una altura de 4 cm, ¿cómo se puede preparar un paquete de 110 tarjetas sin contarlas una a una?

n.° de tarjetas	10	110
Altura (cm)	4	b

Comprende

Aplicando la definición o la propiedad de proporcionalidad directa, se puede encontrar un valor desconocido de dos cantidades que son directamente proporcionales.

Resuelve

1. Carmen compró 2.5 yardas de tela y pagó \$7.50 en total. Mario fue a comprar la misma tela, al mismo lugar, y pagó \$30 en total. ¿Cuántas yardas de tela compró Mario?

Cantidad de tela (yardas)	2.5	a
Precio (dólares)	7.5	30

2. Se colocaron 20 cajas de botones en una báscula, resultando 1, 480 g. Si después se colocó otra cantidad de cajas en la misma báscula y pesaron 370 g, ¿cuántas cajas de botones se colocaron la segunda vez?

Cantidad de cajas	a	20
Peso (g)	370	1, 480

2.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada, de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Calculo los valores correspondientes a cantidades directamente proporcionales. Por ejemplo, en el siguiente caso: cantidad de mesas y la cantidad de personas en un salón.
<table>
<tr><td>Cantidad de mesas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Cantidad de personas</td><td>12</td><td>24</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Identifico si dos cantidades son directamente proporcionales. Por ejemplo, en los siguientes casos:
a. Meses transcurridos y los meses que faltan por transcurrir (en 1 año).
<table>
<tr><td>Meses transcurridos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Meses que faltan</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td></tr>
</table>
b. Número de pasajeros y costo del pasaje.
<table>
<tr><td>n.° de pasajeros</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Costo (dólares)</td><td>0.25</td><td>0.5</td><td>0.75</td><td>1</td><td>1.25</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Escribo la relación de proporcionalidad directa entre dos cantidades, usando las variables x y y. Por ejemplo, en el siguiente caso: la relación entre los litros de agua (x) y los gramos de café (y).
<table>
<tr><td>Litros de agua (x)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Gramos de café (y)</td><td>60</td><td>120</td><td>180</td><td>240</td><td>300</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Calculo el dato desconocido en situaciones sobre proporcionalidad directa. Por ejemplo, en el siguiente caso: determinar cuántas libras de carne compró Miguel si pagó $36 por ellas, mientras que Juan compró 4 libras en el mismo lugar y pagó $12.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Firma de un familiar: ______________________

3.1 Relación de proporcionalidad inversa

Comprende

Cuando dos cantidades x y y cumplen que al multiplicarse una por 2, por 3, por 4, etc., la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, etc., respectivamente, se dice que las cantidades son **inversamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad inversa**.

Por ejemplo, la tabla muestra la relación entre las medidas de la base y la altura de un rectángulo de área 12 cm^2. Si la base aumenta de 1 a 3 centímetros (se multiplica por 3) entonces la altura disminuye de 12 a 4 centrímetros (se multiplica por $\frac{1}{3}$).

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

Resuelve

1. Completa la tabla sobre la relación entre las longitudes de la base y la altura de un paralelogramo de área 30 cm^2; estas cantidades son inversamente proporcionales:

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	30						...

2. En una carrera se deben recorrer 600 metros, con la opción de que sea un solo competidor o un grupo de competidores que recorran la misma distancia hasta completar los 600 metros. Completa la tabla sobre la relación entre la cantidad de competidores y la distancia que debe completar cada uno (las cantidades son inveramente proporcionales):

Cantidad de competidores	1	2	3	4	5	6	...
Distancia (m)	600						...

3. Tres litros de jugo se reparten equitativamente en recipientes con diferentes medidas de capacidad. Completa los espacios en la siguiente tabla sobre la relación entre la cantidad de recipientes y la cantidad de jugo que contendrá cada uno (las cantidades son inversamente proporcionales):

Cantidad de recipientes	1	2	3	4	5	6	...
Cantidad de jugo (ml)	3, 000						...

Firma de un familiar: ________________________

3.2 Propiedad de la proporcionalidad inversa

Recuerda

Un terreno tiene 48 manzanas de área. Completa la tabla con los datos sobre la relación entre la cantidad de mozos y el número de manzanas que le corresponde trabajar a cada uno cuando, se reparten equitativamente:

Cantidad de mozos	1	2	3	4	5	6	...
n.° de manzanas	48						...

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad inversa
Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales, el producto de estas cantidades siempre resulta el mismo número.

Por ejemplo, la tabla muestra la relación entre las medidas de la base y la altura de un rectángulo cuya área es 12 cm^2. Debido a lo anterior, el producto de la base y la altura siempre resultará en 12.

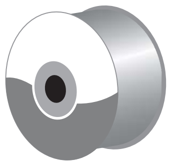
Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	

12 × 1 6 × 2 4 × 3

Resuelve

Una cinta de cierta medida de largo se divide en listones de igual tamaño. La tabla contiene la relación entre la cantidad de listones que pueden elaborarse y la medida (en centímetro) de cada uno:

Cantidad de listones	2	3	4	5	6	...
Longitud de cada listón (cm)	60	40				...



a. Completa los espacios que hacen falta en la tabla.

b. ¿Cuál es la medida del largo de la cinta?

c. ¿Son la cantidad de listones y la longitud de cada listón inversamente proporcionales?, ¿por qué?

d. Si la cantidad de listones fuera 10, ¿cuál sería la longitud de cada uno?, ¿y si fuera 100?

3.3 Identificación de cantidades inversamente proporcionales

Recuerda

1. En una tienda deben descargarse 24 cajas de un camión. Completa la tabla con la relación entre la cantidad de trabajadores y la cantidad de cajas que deberá descargar cada uno, si se distribuyen equitativamente (son cantidades inversamente proporcionales):

Cantidad de trabajadores	1	2	3	4	...
Cantidad de cajas a descargar					...

2. La tabla contiene la relación entre las medidas de la altura y la base de un paralelogramo (ambas en centímetros):

Altura (cm)	3	4	5	6	7	...
Base (cm)	140					...

a. Completa los espacios que hacen falta en la tabla.

b. ¿Cuál es el área del paralelogramo?, ¿por qué?

c. ¿Son la altura y la base inversamente proporcionales?, ¿por qué?

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son inversamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, ..., la otra se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, ..., respectivamente.
- El producto de las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad inversa).

Resuelve

Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta.

a. El número de pupusas y la cantidad de calorías consumidas.

n.° de pupusas	1	2	3	4	5	...
Cantidad de calorías	300	600	900	1, 200	1, 500	...

b. El número de porciones de un pastel y la cantidad de azúcar que contiene cada porción.

n.° de porciones	2	3	4	5	6	...
Cantidad de azúcar (g)	105	70	52.5	42	35	...

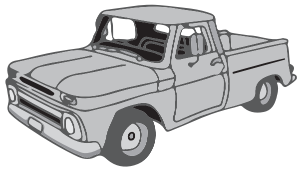
 Firma de un familiar: ________________________

3.4 Expresión $x \times y$ = constante

Recuerda

1. Un automóvil debe recorrer cierta distancia. La tabla contiene la relación entre la rapidez del automóvil y el tiempo que tardará en recorrer dicha distancia:

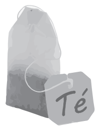
Rapidez (km/h)	3	6	12	24	48	...
Tiempo (h)	24	12				...



a. Completa los espacios en blanco. ¿Son cantidades inversamente proporcionales?, ¿por qué?

b. ¿Cuánto tardaría si la rapidez fuera 36 km/h?

2. Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta: número de bolsitas de té y valor energértico que aportan.



n.° de bolsitas de té	1	2	3	4	5	...
Valor energético (kcal)	2	4	6	8	10	...

Comprende

Cuando x y y son cantidades inversamente proporcionales, el producto $x \times y$ es constante (siempre es el mismo valor). La relación entre x y y se puede representar como:

$$\boldsymbol{x \times y = \textbf{constante}} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{y = \textbf{constante} \div x}$$

Se dice que y **es inversamente proporcional** a x.

Resuelve

Un vendedor de pefumes tiene depósitos de distintas capacidades. La tabla muestra la cantidad de mililitros que contiene un depósito y la cantidad de depósitos que puede obtener de 1 litro de perfume.

Capacidad x (ml)	1,000	500	250	200	125	...
Cantidad de depósitos y	1	2	4	5	8	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la tabla.

b. Representa la relación entre la capacidad del depósito (x) y la cantidad de depósitos (y).

Unidad 5

Firma de un familiar: ______________________

3.5 Proporcionalidad inversa con un dato desconocido

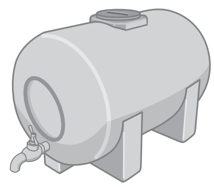
Recuerda

1. Determina si las cantidades son o no, inversamente proporcionales, justifica tu respuesta: el número de cuadraditos que se pueden formar de un cuadrado de 100 cm^2 de área, y el área de cada cuadradito.

n.° de cuadraditos	1	2	4	5	8	...
Área (cm^2)	100	50	25	20	12.5	...

2. Para llenar un tanque se verterá en él cierta cantidad de agua. La tabla muestra la relación entre la cantidad de agua por minuto que se vierte en el tanque y el tiempo que tardará en llenarse:

Cantidad de agua x (litros/min)	180	360	540	720	900	...
Tiempo y (min)	720	360	240	180	144	...
Producto $x \times y$						



a. Completa la última fila de la tabla. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

b. Representa la relación entre la cantidad de agua que se vierte por minuto (x) y el tiempo (y).

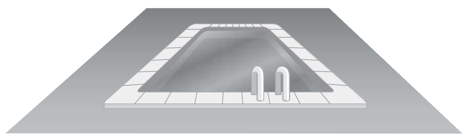
Comprende

Se puede encontrar un valor desconocido en situaciones sobre proporcionalidad inversa, utilizando la definición o la propiedad de proporcionalidad inversa.

Resuelve

El complejo turístico A tiene 5 piscinas que se llenan con 90 barriles con agua. Además, se construirá el complejo turístico B de manera que utilice la misma cantidad total de agua, pero que tenga 15 piscinas. ¿Con cuántos barriles con agua se llenarán las piscinas?

Cantidad de piscinas	5	15
Cantidad de barriles con agua	90	a
Producto		



Firma de un familiar: ________________________

3.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada, de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Calculo los valores correspondientes a cantidades inversamente proporcionales. Por ejemplo, en el siguiente caso: cantidad de bodegas que pueden construirse en un terreno de 120 m², y el área para cada bodega.

Cantidad de bodegas: 1, 2, 3, 4, 5
Área (m²): 120, 60, , , </td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Identifico si dos cantidades son inversamente proporcionales. Por ejemplo, en los siguientes casos:

a. Las edades de Miguel y Laura.
Edad de Miguel: 8, 9, 10, 11, 12
Edad de Laura: 10, 11, 12, 13, 14

b. La cantidad de ladrillos necesarios para cubrir un piso de 3,000 cm² y el área de cada ladrillo.
Cantidad de ladrillos: 50, 75, 100, 120, 150
Área (cm²): 60, 40, 30, 25, 20</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Escribo la relación de proporcionalidad inversa entre dos cantidades, usando las variables x y y. Por ejemplo, en el siguiente caso: la relación entre la base (x) y la altura (y) de un rectángulo de 3,600 cm² de área.

Base x (cm): 90, 100, 120, 150, 160
Altura y (cm): 40, 36, 30, 24, 22.5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Calculo el dato desconocido en situaciones sobre proporcionalidad inversa. Por ejemplo, en el siguiente caso: calcular el tiempo que se tardaría un motociclista en llegar a su destino al manejar a una rapidez de 100 km/h, si tarda 3 horas cuando maneja a 50 km/h.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Unidad 5

3.7 Proporcionalidad directa e inversa

Comprende

Se puede identificar si dos cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos, verificando si el producto o el cociente es constante.

Por ejemplo:

a. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda en recorrer 120 km de distancia son cantidades inversamente proporcionales, porque el producto siempre resulta en 120.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...
Producto $x \times y$	120	120	120	120	

b. La longitud de un alambre y su peso son cantidades directamente proporcionales, porque el cociente siempre resulta en 9.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...
Cociente $y \div x$	9	9	9	9	

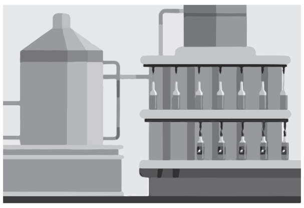
Resuelve

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directamente o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La cantidad de mecánicos y la cantidad de motores que revisa cada uno, si se distribuyen el trabajo equitativamente:

Cantidad de mecánicos x	4	7	8	16	28	...
Cantidad de motores y	56	32	28	14	8	...

b. La cantidad de máquinas embotelladoras y la cantidad de botellas que se obtienen:



Cantidad de máquinas x	1	3	6	8	10	...
Cantidad de botellas y	50	150	300	400	500	...

c. La cantidad de perros y los días para los que alcanza su comida:

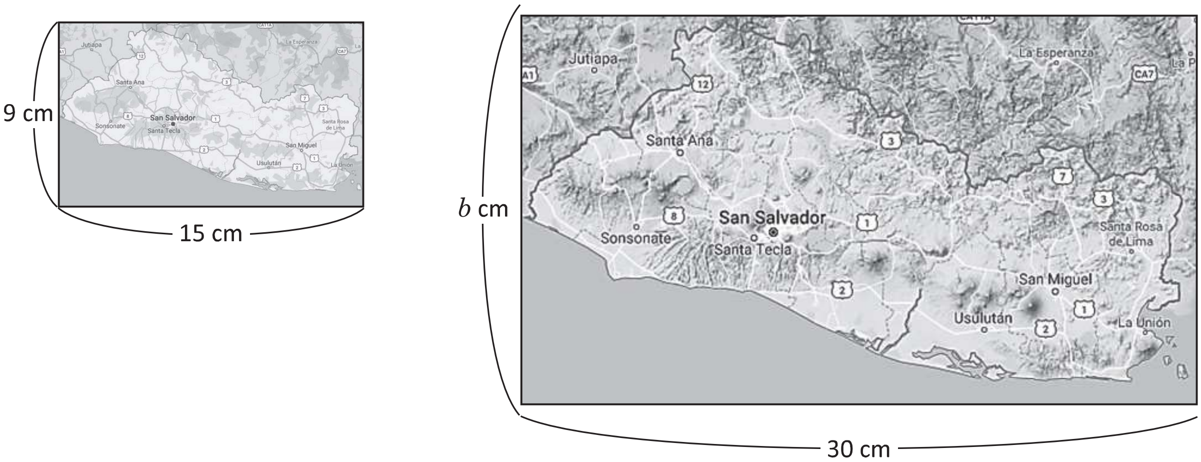
Cantidad de perros x	2	4	23	46	...
Cantidad de días y	46	23	4	2	...

Firma de un familiar: ________________________

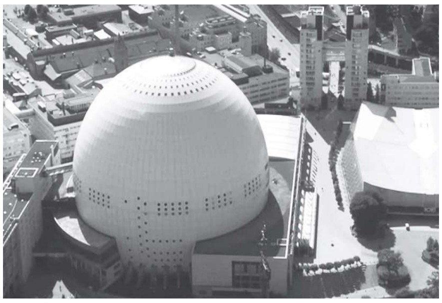
Problemas de aplicación

1. La **Cartografía** es el estudio y la práctica de la elaboración de mapas; la persona encargada de hacer esto se llama **cartógrafo**. De una forma más específica, la cartografía se considera el arte, la ciencia y la tecnología de la elaboración de mapas y el estudio de ellos como documentos científicos y obras de arte. En general, los mapas muestra la información de cierto territorio y son de utilidad para localizar una ciudasd encontrar un sitio en ella o ubicarse uno mismo.

   Los mapas mantienen la forma del lugar que ha sido representado en ellos, sin importar el tamaño que posea; por lo tanto, se puede decir que las dimensiones de El Salvador en dos mapas diferentes forman una proporción. Observa los mapas de nuestro país, ¿cuánto debe ser el valor del número b para que los mapas mantengan la relación de aspecto?



2. En la ciudad de Estocolmo, Suecia, construyeron un sistema solar a escala 1 : 20 millones. El edificio conocido como “Globe” funciona como el centro del sistema solar, es decir, El Sol; a 2.9 km del Globe se encuentra la maqueta de Mercurio con 25 cm de diámetro, y a 300 km del Globe se encuentra Plutón, cuya maqueta tiene 65 cm de diámetro.



   María y Juan desean elaborar una maqueta del sistema solar, guardando la proporción de las distancias desde el Sol a Mercurio, y del Sol a Plutón. Encuentra el dato faltante en la proporción 2.9 : 300 = a : 0.001