

Unidad 8. Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos

Competencias de la Unidad

- Utilizar los instrumentos de geometría para hacer traslación, reflexión y rotación de figuras planas.
- Aplicar las características de los círculos que se intersecan para determinar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
- Aplicar la regla de tres simple directa para calcular la longitud de arco y el área de un segmento circular.
- Desarrollar el plano de un prisma, pirámide y cilindro para calcular su área total.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos

- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono

- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos

- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros

- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos

- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes

- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras

- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central

- Ángulo central e inscrito
- Aplicación del ángulo central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Movimiento de figuras en el plano	1	1. Puntos y rectas
	1	2. Patrones de figuras
	1	3. Traslación
	1	4. Simetría
	1	5. Rotación
	1	6. Resolución de problemas de movimiento de figuras
2. Círculos, segmentos y ángulos	1	1. Características y elementos del círculo
	1	2. Características de círculos que se intersecan
	1	3. Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás
	1	4. Rectas perpendiculares
	1	5. Distancia entre un punto y una línea recta
	1	6. Mediatriz de un segmento
	1	7. Bisectriz de un ángulo
	1	8. Tangente a una circunferencia
	1	9. Longitud de arco de un sector circular
	1	10. Área de un sector circular
	1	11. Incentro de un triángulo
3. Planos, cuerpos geométricos, área total de prisma, pirámide y cilindro	1	1. Clasificación de cuerpos geométricos
	1	2. Características de poliedros regulares
	1	3. Relación de posición entre rectas y planos
	1	4. Perpendicularidad entre un plano y una recta

Lección	Horas	Clases
	1	5. Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas
	1	6. Proyección ortogonal
	1	7. Desarrollo plano de un prisma y su área total
	1	8. Desarrollo plano de una pirámide y su área total
	1	9. Desarrollo plano de un cilindro y su área total
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

27 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre.

Lección 1: Movimiento de figuras en el plano

En esta lección se aborda la notación para un segmento, rectas perpendiculares, rectas paralelas y también se trabajan los tipos de movimientos de una figura en el plano: la traslación, la simetría y la rotación.

Lección 2: Círculos, segmentos y ángulos

Al inicio de la lección se hace un recordatorio de los elementos de un círculo y de un sector circular, para posteriormente utilizarlos cuando se presentan las características de dos círculos que se intersecan. Las características de los dos círculos intersecados básicamente hacen referencia a ciertas propiedades que guardan sus circunferencias. Dichas características son utilizadas para construir figuras con regla y compás, con el fin de que el estudiante visualice algunas propiedades de esas figuras intuitivamente, es decir, a partir de la construcción de ellas. Como ejemplo de estas figuras se tiene, un hexágono, un triángulo equilátero, rectas perpendiculares, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta tangente a una circunferencia e incentro de un triángulo. Al finalizar la lección se utiliza la proporcionalidad directa para deducir las fórmulas de la longitud de arco y área de un sector circular.

Lección 3: Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro

En esta lección se comienza haciendo una clasificación de los cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos, para posteriormente abordar las características de los poliedros regulares; se introducen los planos y la relación de posición que tienen dos o más rectas en ellos. Otro aspecto importante de esta lección es introducir la perpendicularidad de una recta con un plano, para retomar este concepto al introducir la altura de prismas, cilindros, pirámides y conos; también se presentan los cuerpos geométricos como el movimiento de una figura plana a través de una recta perpendicular a ella.

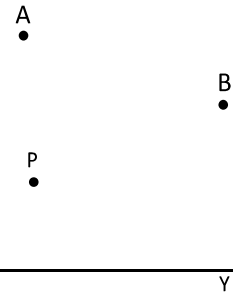
Como anteriormente se presentó el concepto de plano, se trabaja con la proyección ortogonal de un cuerpo geométrico como la sombra de un cuerpo geométrico en tres planos representados por paredes cuya posición es diferente: vista frontal, vista lateral y vista sobre el piso; cuando es alumbrado con una lámpara, considerando que los rayos de luz generados por la lámpara son perpendiculares a las paredes, es decir, a los planos. Para finalizar la lección se hace el desarrollo plano de prismas, pirámides y cilindros para deducir sus respectivas fórmulas para calcular su área total.

Lección 1 Movimiento de figuras en el plano

1.1 Puntos y rectas

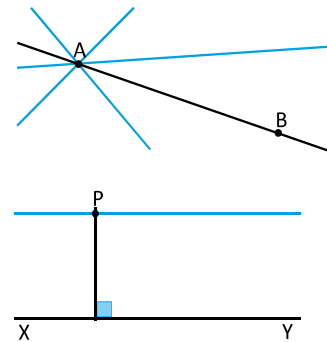
P

- En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
 - Traza líneas rectas que pasen solo por A.
 - Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.
- En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
 - Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
 - Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.



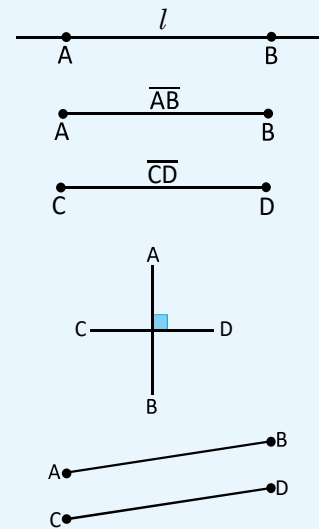
S

- Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
 - Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.
- De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
 - La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.



C

- La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m , etc.
- A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como \overline{AB} y se lee "segmento AB".
- Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como \overline{AB} y \overline{CD} , entonces se simboliza como $AB = CD$. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo ($\overline{\quad}$) en la escritura. La longitud de \overline{AB} es AB.
- Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (\perp) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".
- A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (\parallel). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".

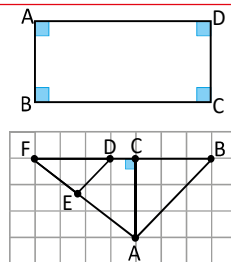


- Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (\parallel) o (\perp) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.

La relación entre \overline{AB} y \overline{CD} . $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

La relación entre \overline{AB} y \overline{AD} . $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

La relación entre \overline{AB} y \overline{BC} . $\overline{AB} \perp \overline{BC}$



- En la siguiente figura utiliza los símbolos (\parallel) o (\perp) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.

$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

Indicador de logro

1.1 Representa con lenguaje matemático la relación entre segmentos o rectas.

Secuencia

Los estudiantes ya dominan los conceptos de línea recta, rectas paralelas y perpendiculares, por lo que para esta clase se hace un recordatorio; se establecen algunos conceptos nuevos y sus respectivas notaciones. La línea recta es denotada por letras como l, m , el segmento denotado con " $\overline{\quad}$ ", rectas perpendiculares denotadas por " \perp " y rectas paralelas denotadas por " \parallel ". En el caso de los segmentos se hace la aclaración de que al referirse a su longitud se omite el símbolo " $\overline{\quad}$ " en su escritura. De igual manera se hace una relación de las rectas con puntos, por ejemplo, se señala el hecho de que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta.

Propósito

- Ⓐ Destacar que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta. También que existe una única recta paralela a otra dada y que pasa por un punto dado fuera de esta.
- Ⓒ Definir la terminología y presentar sus notaciones. En este punto se debe resaltar que al omitir el símbolo " $\overline{\quad}$ " en la escritura de un segmento se hace referencia a su longitud.

Solución de algunos ítems:

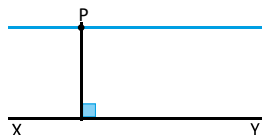
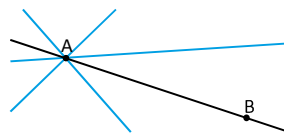
$$\begin{array}{l} 1. \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AB} \perp \overline{AD} \\ \overline{AB} \perp \overline{BC} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2. \overline{AB} \parallel \overline{ED} \\ \overline{AC} \perp \overline{BF} \end{array}$$

Fecha:

U8 1.1

- Ⓐ 1. Para dos puntos A y B. Traza líneas rectas que
 - a) Pasen solo por A.
 - b) Pasen a la vez por A y por B.
- 2. Para una recta XY y un punto P. Traza líneas rectas que
 - a) Pasen por P y que corten a la recta XY.
 - b) Pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

- Ⓒ 1. a) Se pueden trazar infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
- b) Hay una única línea recta que pasa por los dos puntos.
- 2. a) De todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
- b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.



- Ⓐ 1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

- 2. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
 $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

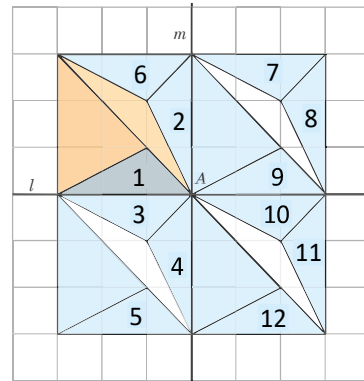
Lección 1

1.2 Patrones de figuras

P

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

- ¿Con cuál de las figuras se superpondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
- Si se dobla la imagen por la recta l , ¿sobre cuál figura se superpondrá la figura 1?
- Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se superpone?



S

- Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede superponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
- Si se dobla la imagen por la recta l , la figura 1 se superpondrá sobre la figura 3.
- Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° , y el giro es en sentido antihorario, se superpondrá sobre la figura 4.

C

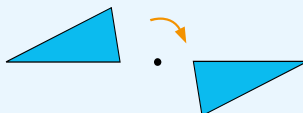
El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

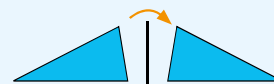
Traslación



Rotación



Simetría



E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.



Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com



Retrato de Escher en Roma. De M. C. Escher.

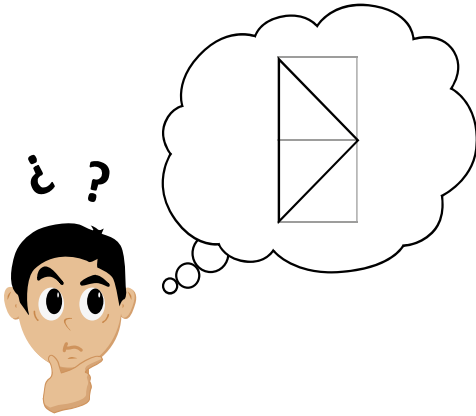


Unidad 8

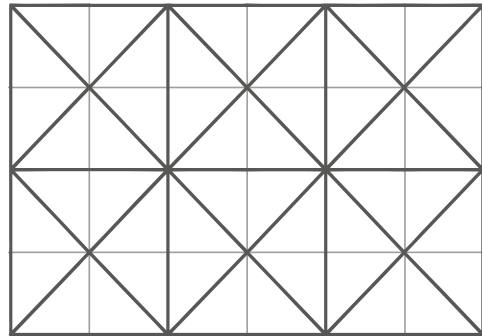
153

Lección 1

Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.



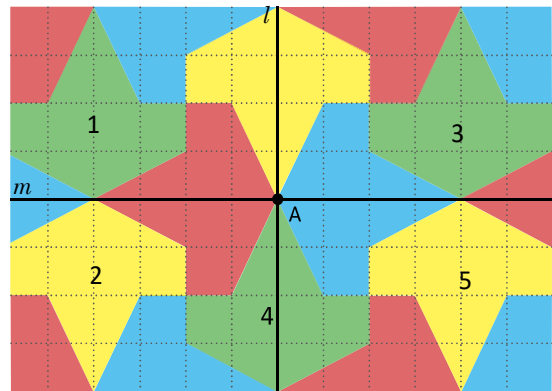
Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.



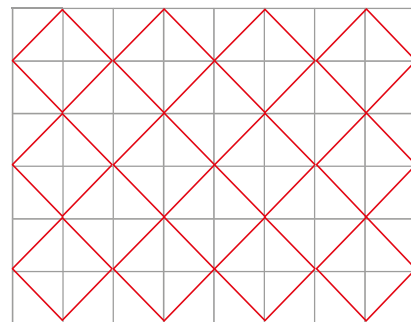
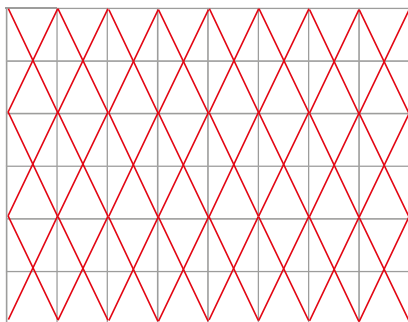
1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.

Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A .

- ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5? **a) Rotación**
- ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación? **b) 3 y 4**
- Si se dobla la imagen por la recta m , ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l ? **c) 2 y 3**



2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.



¡Compara con tus compañeros!

Indicador de logro

1.2 Identifica diferentes tipos de movimientos de figuras geométricas.

Secuencia

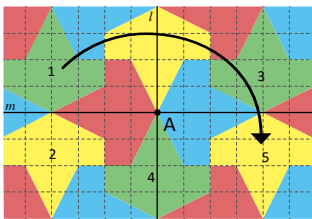
En grados anteriores se introdujeron los movimientos de figuras en el plano: traslación, rotación y simetría. Para esta clase se retoman los tres movimientos, abordándolos de una forma general, pero posteriormente se retomará cada uno. Para determinar la figura simétrica de otra, se hace respecto a rectas denotadas de la forma establecida en la clase anterior, por ejemplo l y m .

Propósito

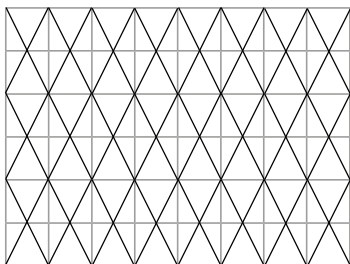
Ⓟ Identificar una figura que se sobrepone a otra al moverla. Si los estudiantes presentan dudas en a) respecto a la expresión “si se desplaza de forma paralela”, explicar que se refiere a tomar una figura de las presentadas y que esta puede moverse únicamente ya sea, a la izquierda, derecha, arriba, abajo o diagonalmente.

Solución de algunos ítems:

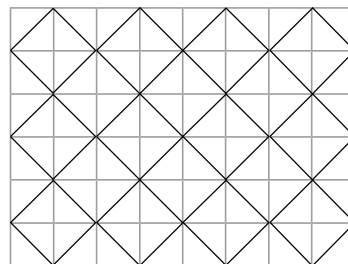
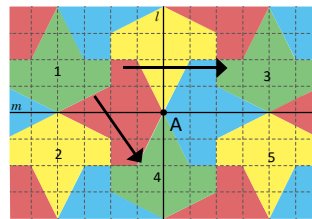
1. a) Rotación



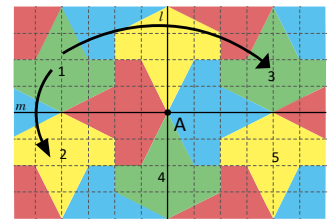
2.



b) 3 y 4



c) 2 y 3

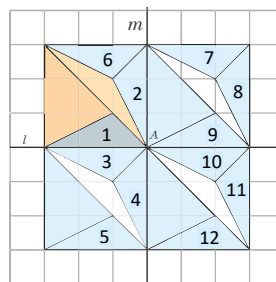


Fecha:

U8 1.2

Ⓟ Se movieron las figuras coloreadas con tono más fuerte para hacer la imagen. Responde:

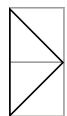
- ¿Con cuál figura se sobrepondrá la 1 al desplazarse de forma paralela?
- Si se dobla la imagen por l , ¿a cuál figura se sobrepondrá la 1?



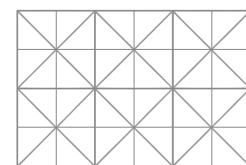
- Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario respecto a A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?

- Ⓢ
- Se puede sobreponer a las figuras 9, 5 y 12.
 - Se sobrepone a la figura 3.
 - Se sobrepondrá a la figura 4.

ⓔ Con la imagen:



Se llena una cuadrícula sin dejar espacio y sin traslaparse así:



- Ⓡ
- Rotación
 - 3 y 4
 - 2 y 3

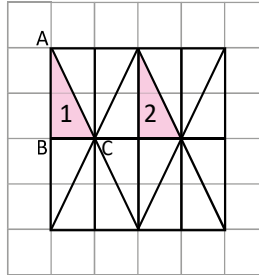
Tarea: página 163 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.3 Traslación

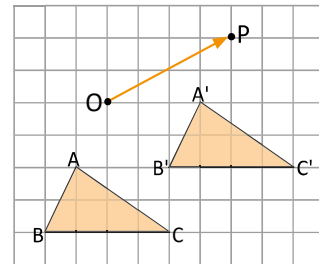
P

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
 - a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C .
 - b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
 - c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
 - d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?



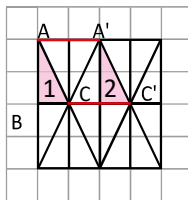
Para denotar un triángulo con vértices A , B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC , y se lee "el triángulo ABC ".

2. El $\Delta A'B'C'$ es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP . Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
 - a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
 - b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



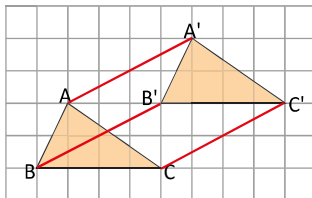
S

1. a) y b)



- c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además $AA' = CC'$.
- d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

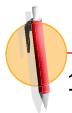
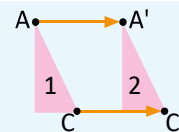
2. a)



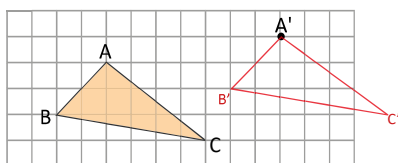
- b) La relación entre los segmentos se expresa así: $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = BB' = CC'$.

C

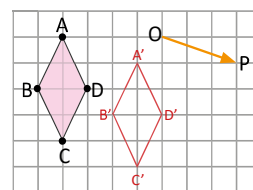
En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = CC'$.



1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el $\Delta A'B'C'$ con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC .



2. Dibuja la figura trasladada $A'B'C'D'$ del cuadrilátero $ABCD$, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP .



Indicador de logro

1.3 Traslada figuras mediante una dirección y un sentido de paralelismo.

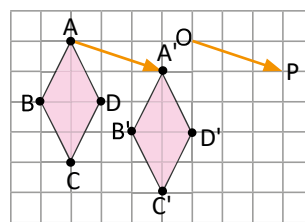
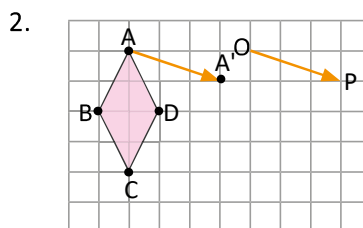
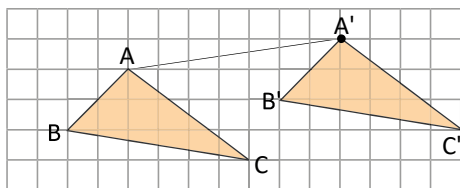
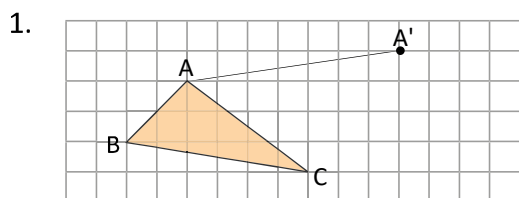
Secuencia

En esta clase se retoma el movimiento de traslación introducido en la clase anterior, también se usan con mayor frecuencia algunos conceptos y notaciones definidas en la clase 1.1 de esta unidad, tales como los segmentos, su longitud y la notación de dos rectas perpendiculares.

Propósito

Ⓟ Establecer que en una traslación todos los segmentos correspondientes tienen la misma longitud y son paralelos. Esto incluye a los segmentos que unen los puntos correspondientes. Para el ejemplo se refiere a $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = CC'$.

Solución de algunos ítems:

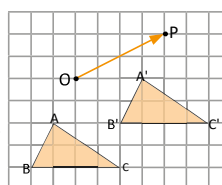
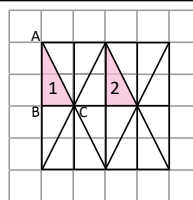


Hay que agregar una columna más a la cuadrícula.

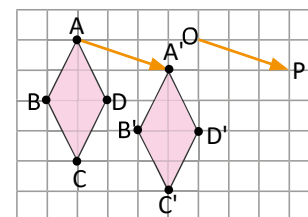
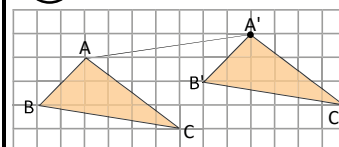
Fecha:

U8 1.3

- Ⓟ 1. Se puede trasladar y sobreponer el triángulo 1 al 2.
- Identifica los puntos A' y C' que son los trasladados de A y C .
 - Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
 - Expresa la relación entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
 - ¿Cómo hay que mover al triángulo 1 para sobreponerlo al 2?
2. El $\Delta A'B'C'$ es el trasladado del ΔABC en la dirección y longitud de la flecha OP .
- Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.
 - Expresa la relación entre los segmentos determinados en a).



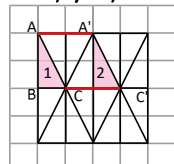
Ⓡ



Tarea: página 164 del Cuaderno de Ejercicios.

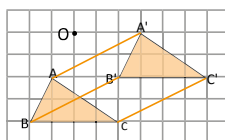
Ⓢ

1. a) y b)



- c) $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$.
Además
 $AA' = CC'$.
d) Traslación

2. a)



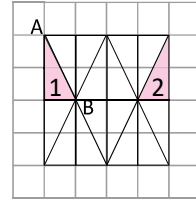
- b) $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$
y
 $AA' = BB' = CC'$

Lección 1

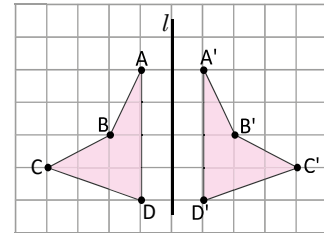
1.4 Simetría

P

- Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
 - Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
 - ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

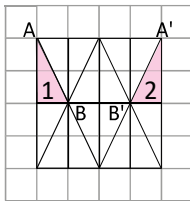


- El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
 - Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
 - Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l .
 - Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l .
 - Expresa simbólicamente la relación entre \overline{CM} y $\overline{C'M}$.



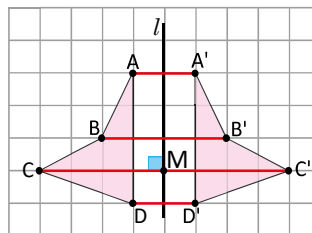
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



- La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo \perp . Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.
- La relación entre \overline{CM} y $\overline{C'M}$ se expresa como: $CM = C'M$.

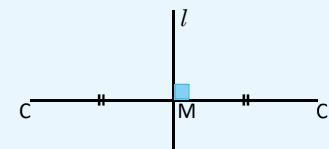
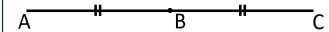
C

El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

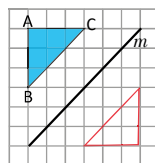
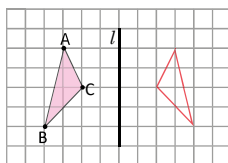
En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se interseca con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y $CM = C'M$.

En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

En geometría se utilizan símbolos como \parallel para denotar que dos o más segmentos son iguales, por ejemplo, para denotar que $AB = BC$ se hace:



Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.



Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m .

Indicador de logro

1.4 Refleja figuras respecto a una recta que es el eje de simetría.

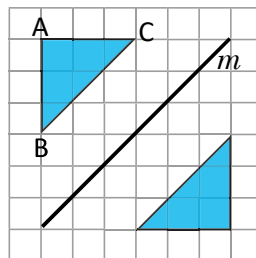
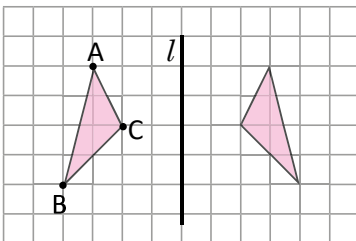
Secuencia

Se trabaja con la simetría para seguir con el abordaje individual de los movimientos de figuras en el plano que fueron establecidos en la clase 1.2 de esta unidad. Para esta clase se hace uso de la notación de la perpendicularidad entre dos rectas que se estableció en la clase 1.1. También se introduce el concepto de mediatriz de un segmento, el cual se retoma posteriormente. Vale aclarar que en grados anteriores se ha trabajado el concepto de eje de simetría, pero en esta clase se ha tomado a bien presentarlo nuevamente.

Propósito

Ⓟ Establecer el concepto de **simetría** y **eje de simetría**. En este momento de la clase es importante hacer hincapié en cómo se denotan los segmentos iguales. También se aprovecha para introducir el término de **mediatriz de un segmento** y sus características.

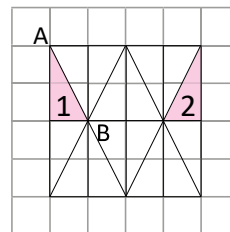
Solución de algunos ítems:



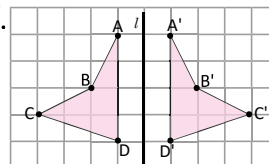
Fecha:

U8 1.4

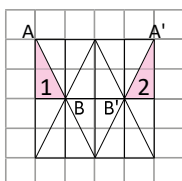
- Ⓟ 1. a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se sobreponen A y B .
b) ¿Cómo hay que mover el triángulo 1 para sobreponerlo al 2?



2. a) Une los vértices correspondientes con segmentos.
b) Escribe la relación de los segmentos hechos en a) y l .
c) Nombra con M la intersección de $\overline{CC'}$ y l .
d) Expresa la relación entre \overline{CM} y $\overline{C'M}$.

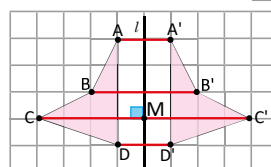


Ⓢ 1. a)



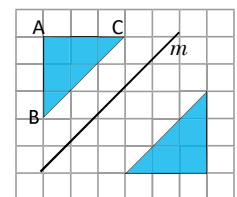
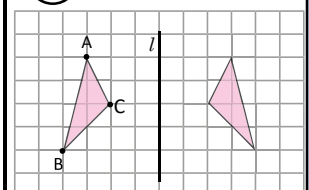
b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



- b) $\overline{AA'} \perp l$, $\overline{BB'} \perp l$,
 $\overline{CC'} \perp l$ y $\overline{DD'} \perp l$.
d) $CM = C'M$.

Ⓡ



Tarea: Página 165 del Cuaderno de Ejercicios.

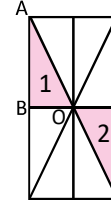
Lección 1

1.5 Rotación

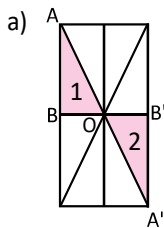
P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede superponer al triángulo 2.

- Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se superponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.
- ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para superponerse al triángulo 2?



S

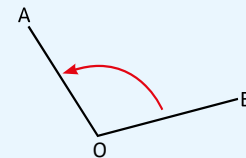


- El triángulo 1 se puede superponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180° .

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

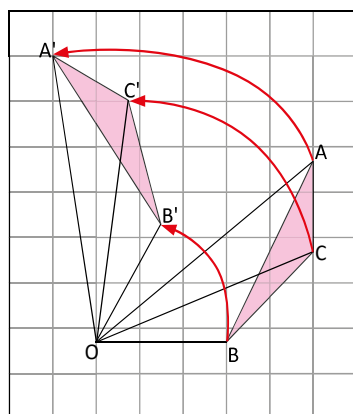
Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el $\sphericalangle BOA$.



E

Tomando como centro de rotación el punto O , se ha rotado el $\triangle ABC$ por un ángulo de 60° para llegar a ser el $\triangle A'B'C'$.

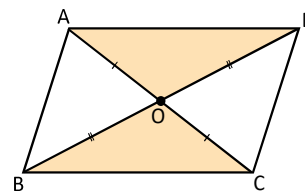
- ¿Qué relación hay entre \overline{OA} y $\overline{OA'}$?
- ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A' ?



Solución.

- $OA = OA'$
- Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O .

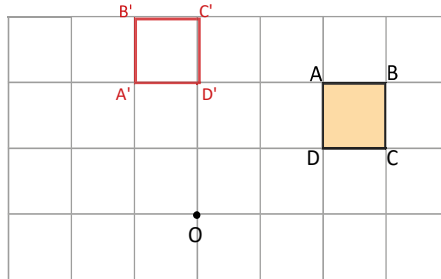
Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180° , se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el $\triangle AOD$, respecto del punto O , este se puede superponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.



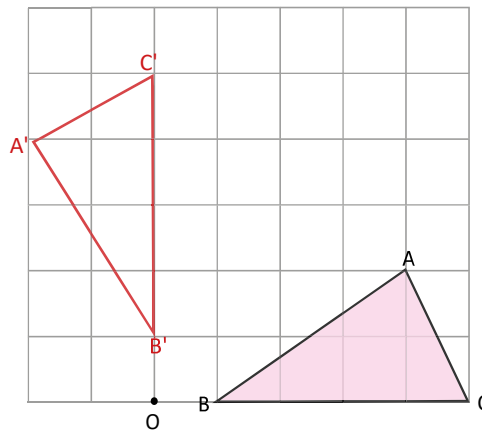
Lección 1



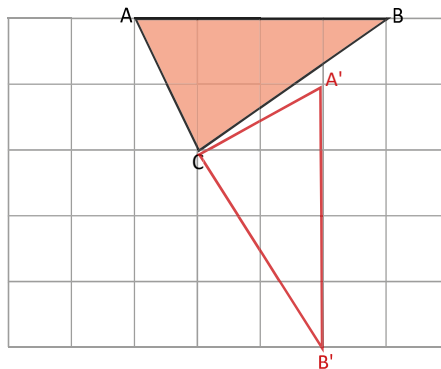
1. Dibuja el paralelogramo $A'B'C'D'$, que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo $ABCD$. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el $\Delta A'B'C'$ que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90° .



3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C :



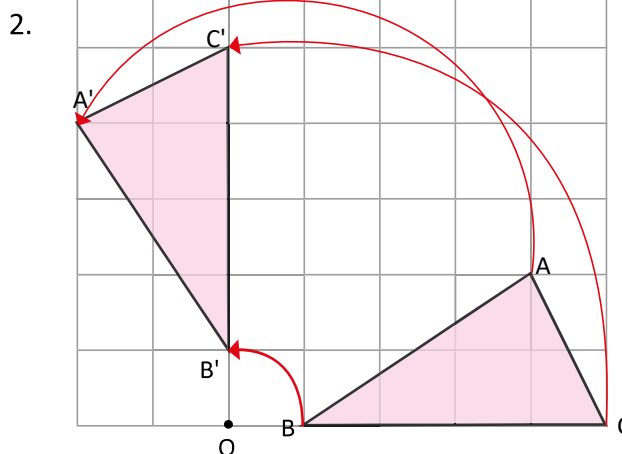
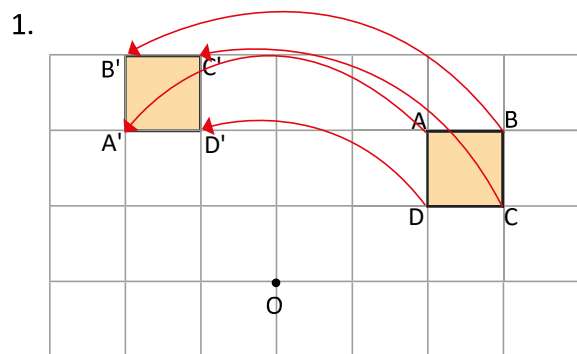
Indicador de logro

1.5 Rota figuras respecto a un punto utilizando un ángulo determinado.

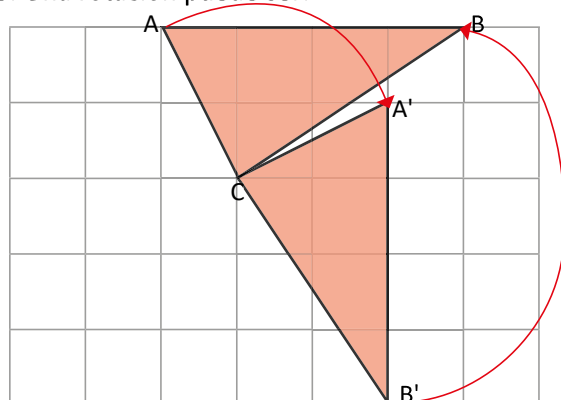
Secuencia

Para finalizar con el abordaje individual de los movimientos de las figuras en el plano se estudia la rotación.

Solución de algunos ítems:



3. Una rotación puede ser:

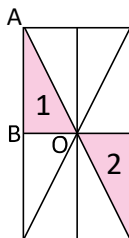


Fecha:

U8 1.5

(P) Al mover el triángulo 1, se puede superponer al 2.

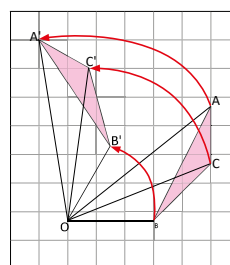
- Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se superponen los puntos A y B al trasladar el 1.
- ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para superponerse al 2?



(S)

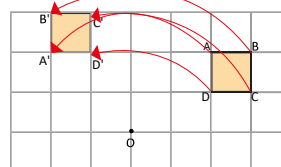
-
- El triángulo 1 se superpone al 2 con una rotación respecto al punto O con ángulo de 180° .

(E) Al rotar el ΔABC respecto a O en 60° , se obtiene el $\Delta A'B'C'$.



- La relación de \overline{OA} y $\overline{OA'}$ es $OA = OA'$
- Al mover el punto A hasta A' se forma una parte de la circunferencia de radio OA y centro O.

(R) 1.



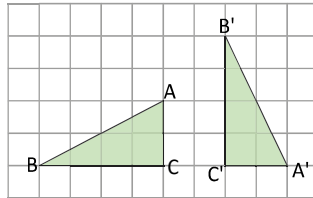
Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

P

¿Cómo debe moverse el $\triangle ABC$ para lograr sobreponerse al $\triangle A'B'C'$?



S

Un ejemplo de solución es, primero se mueve el $\triangle ABC$ con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

C

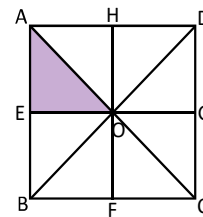
Como en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.



1. En la siguiente figura:

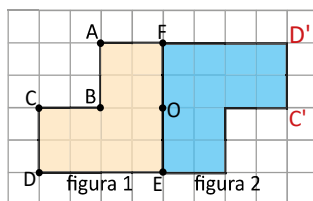
- ¿Qué movimiento se debe hacer al $\triangle OAE$ para sobreponerse al $\triangle ODG$?
- ¿Qué movimiento se debe hacer al $\triangle OAE$ para sobreponerse al $\triangle OBF$?
- ¿Qué movimiento se debe hacer al $\triangle OAE$ para sobreponerse al $\triangle OCF$?

- Simetría
- Rotación
- Traslación o simetría

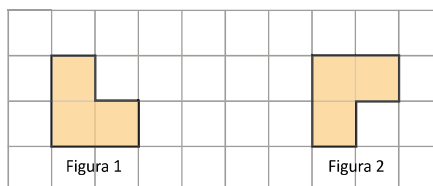


2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.

- Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1. **Rotación**
- ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?



- 1° Rotación
 - 2° Traslación
- El orden en que se hacen los movimientos puede cambiar.

Indicador de logro

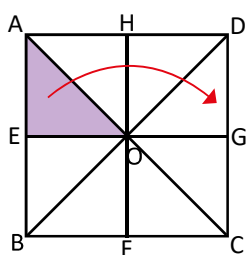
1.6 Utiliza los movimientos de una figura para sobreponerla en otra y determinar si son congruentes.

Secuencia

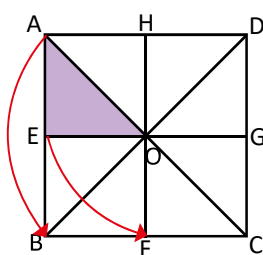
Anteriormente se abordaron a detalle cada uno de los movimientos de las figuras en el plano. Por tanto, en esta clase se presentan problemas en los que se deben aplicar los movimientos. También se aprovecha para introducir el concepto de **figuras congruentes**.

Solución de algunos ítems:

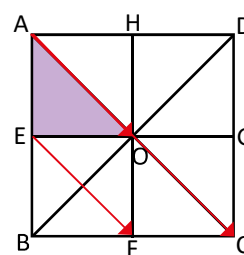
1. a) Simetría:



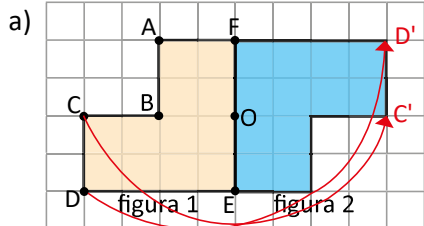
b) Rotación:



c) Traslación o simetría:



2.

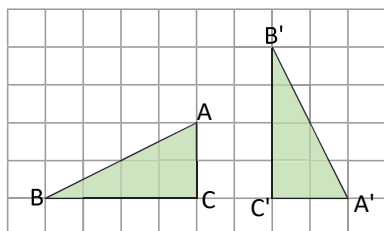


b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento, puede hacerse a través de una rotación y luego una traslación.

Fecha:

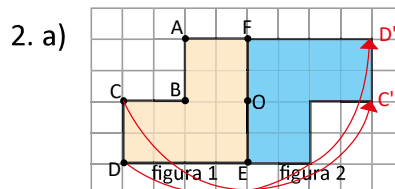
U8 1.6

P ¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al $\Delta A'B'C'$?



S Un ejemplo de solución es: primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

R 1. a) Simetría
b) Rotación
c) Traslación o simetría



b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento.

Tarea: página 167 del Cuaderno de Ejercicios.

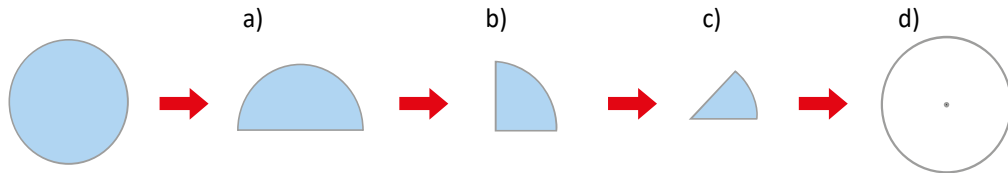
Lección 2 Círculos, segmentos y ángulos

2.1 Características y elementos del círculo

P

Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.

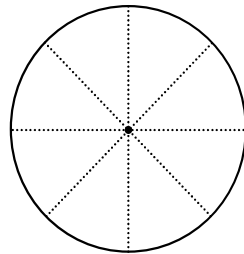
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S

1.



2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180° , b) 90° y c) 45° .

C

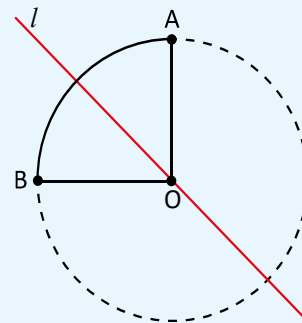
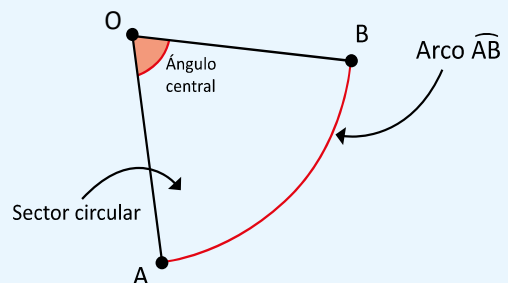
Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como \widehat{AB} .

La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular**.

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central**.

Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

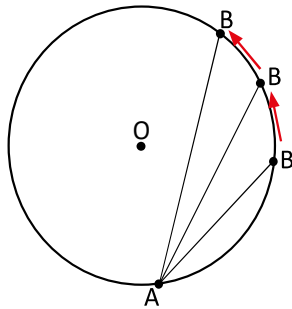
Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco \widehat{AB} .



Lección 2

E

En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda \overline{AB} , si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará \overline{AB} su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



Elementos de un círculo

Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.

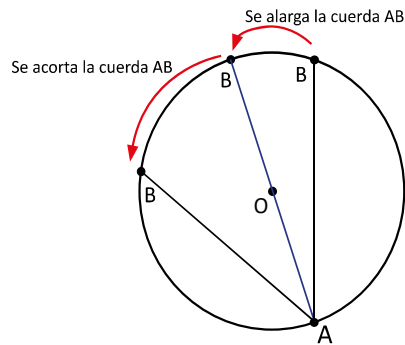
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.

Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.

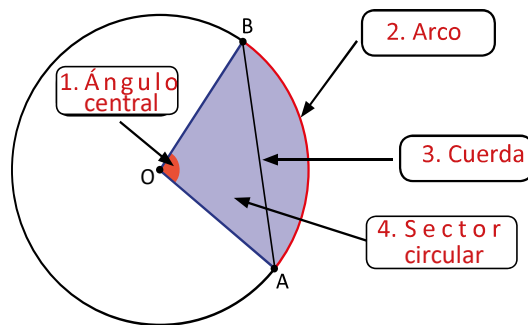
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

\overline{AB} alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O , es decir, cuando \overline{AB} sea el diámetro de la circunferencia.

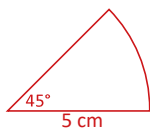


1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.

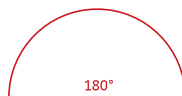


2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de

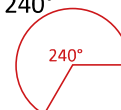
a) 45°



b) 180°



c) 240°



Indicador de logro

2.1 Identifica los elementos de un círculo.

Secuencia

Los estudiantes ya han trabajado el círculo, el sector circular y sus elementos. También es importante tener en cuenta que cuando se habla de circunferencia se hace referencia al contorno de un círculo, esto ya fue definido en sexto grado. Para esta clase se retoman las nociones básicas que los estudiantes tienen de estos contenidos para facilitar la comprensión de una explicación más detallada del sector circular; también se hace la presentación de la notación del arco. Como en la clase 1.4 se confirmó el significado de eje de simetría, ya se puede hacer uso de esa idea para establecer que un sector circular es simétrico respecto al eje que pasa por el punto en el que se unen sus radios (O) y por el punto medio de su arco. En esta clase también se explica que el diámetro representa un eje de simetría para la circunferencia.

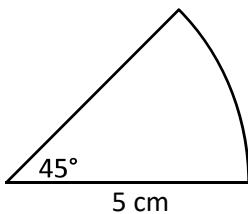
Propósito

Ⓐ Recordar a los estudiantes que el término circunferencia hace referencia al contorno de un círculo, en palabras sencillas, "el borde del círculo".

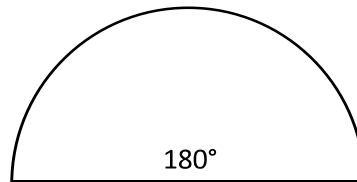
Ⓑ Determinar que la cuerda de mayor longitud que es un eje de simetría de la circunferencia es el diámetro. En este punto de la clase es importante recalcar que el radio es el segmento que conecta el centro del círculo con cualquier punto de la circunferencia; el diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro del círculo y la cuerda es el segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre la circunferencia.

2.

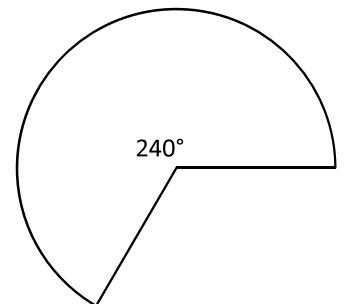
a)



b)



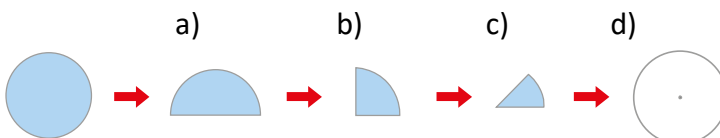
c)



Fecha: U8 2.1

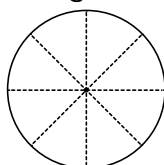
Ⓐ Se dobla un círculo con los pasos de a), b) y c), sobreponiéndose.

1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo de d).

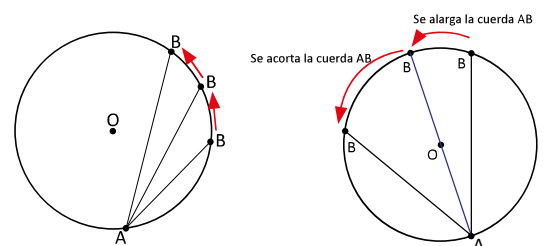


2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra sus ángulos.

Ⓑ 1.



Ⓔ Si A es fijo y B se mueve en la circunferencia, la mayor longitud de \overline{AB} es cuando pasa por O convirtiéndose en eje de simetría. Por tanto es diámetro del círculo.



Ⓕ 1. Ángulo central 3. Cuerda
2. Arco 4. Sector circular

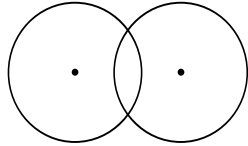
Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Características de círculos que se intersectan

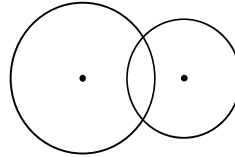
P

Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

a) Cuando los radios son iguales

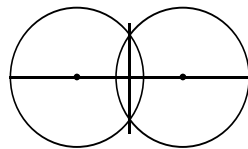


b) Cuando los radios son diferentes

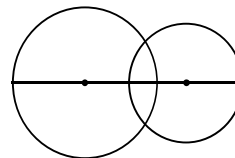


S

a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.



b) La recta que pasa por los centros.

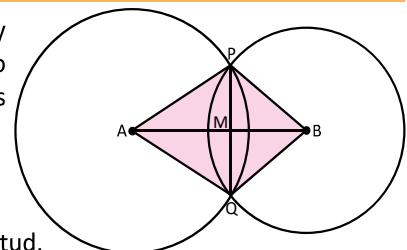


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

E

En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



Con respecto al cuadrilátero AQBP:

- Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.
- ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el $\sphericalangle PAB$?
- ¿Qué relación hay entre \overline{PQ} y \overline{AB} ?

Solución.

Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:

- \overline{AP} y \overline{AQ} , \overline{BP} y \overline{BQ} , \overline{PM} y \overline{QM}
- $\sphericalangle QAB$
- $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

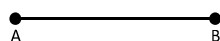
El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.



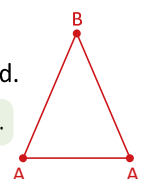
1. En el problema anterior:

- ¿En qué caso sucederá que $AM = MB$? **Los círculos son de igual radio.**
- Si se cumple que $AM = MB$, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP? **Rombo.**

2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.



Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.



Indicador de logro

2.2 Identifica las características de dos círculos que se intersecan.

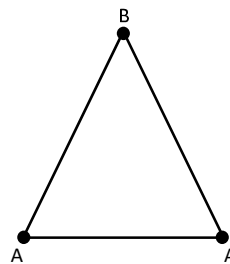
Secuencia

En sexto grado fue definido el concepto de circunferencia como el contorno de un círculo, en la clase 1.4 se introdujo el significado de eje de simetría, y en la clase anterior se utilizó para establecer que un sector es una figura simétrica; por tanto los estudiantes ya están familiarizados con los conceptos de circunferencia, eje de simetría y figura simétrica, de modo que ahora se puede presentar como característica la simetría de la figura de dos círculos que se intersecan, respecto a un eje. También se presentan como características de dos círculos que se intersecan, las consecuencias de la simetría, por ejemplo la igualdad en la longitud de algunos segmentos y abertura de algunos ángulos, y la perpendicularidad entre el segmento que une los radios con el que une las intersecciones de los círculos.

Propósito

Ⓟ Determinar que el segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular al que une sus centros y está dividido en dos partes iguales por este segmento. En la Ⓢ se hace referencia a que la recta que pasa por los centros es un eje de simetría de los círculos, por lo que se debe aclarar que en el Ⓧ el segmento que une los centros es eje de simetría por coincidir o estar incluido en la recta que pasa por los centros.

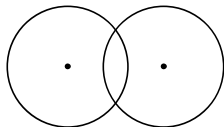
Se utiliza el compás para copiar la medida del segmento y hacer los lados del triángulo isósceles.



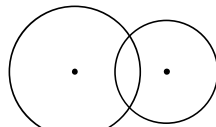
Fecha: U8 2.2

Ⓟ Dibuja los ejes de simetría para los círculos intersecados en a) y b).

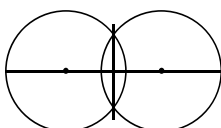
a) De igual radios



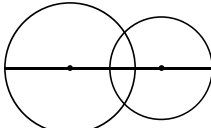
b) De diferentes radios



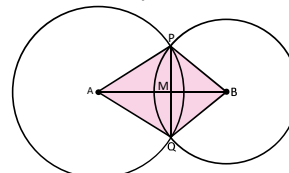
Ⓢ a) La recta que pasa por sus centros y la que pasa por las intersecciones de las circunferencias.



b) La recta que pasa por sus centros.



Ⓧ Círculos intersecados de centros A y B. Con puntos de intersección de las circunferencias P y Q. M es la intersección de \overline{AB} y \overline{PQ} .



Como \overline{AB} es eje de simetría de la figura, por tanto:

a) $AP = AQ$, $BP = BQ$, $PM = QM$

b) $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAB$

c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

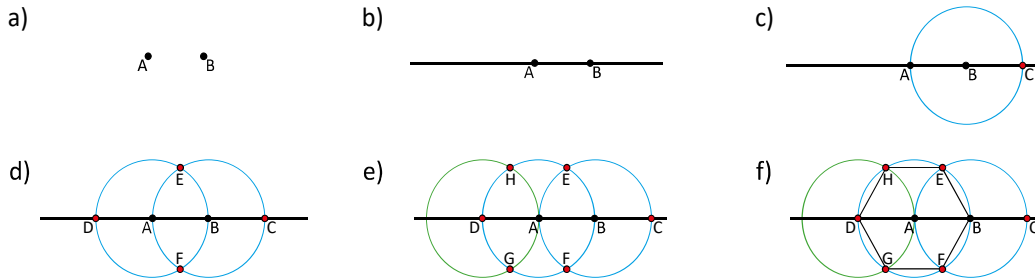
Ⓡ 1. a) Los círculos son de igual radio
b) Rombo

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

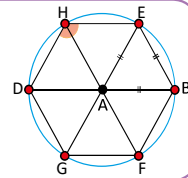
Lección 2

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

P Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.



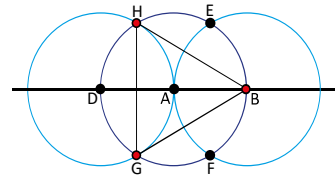
S Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120° . Por tanto, la figura es un hexágono.



C Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

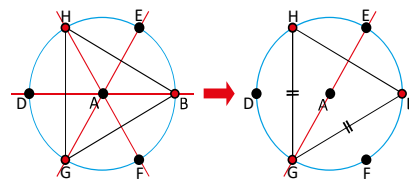
E Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

- Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.
- A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



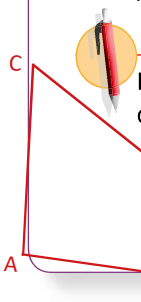
Solución.

Como $\sphericalangle GAH = 120^\circ = \sphericalangle GAB$ (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el $\triangle GBH$ 120° respecto al punto A.

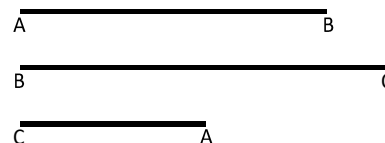


Cumplíndose entonces, $GH = GB = HB$. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además $\sphericalangle HGB = \sphericalangle GBH = \sphericalangle BHG = 60^\circ$.



Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:



Indicador de logro

2.3 Dibuja figuras geométricas utilizando regla y compás.

Secuencia

Con esta clase se busca que los estudiantes al construir con regla y compás diferentes figuras planas, intuitivamente confirmen o conozcan las propiedades de algunas de estas figuras. Además de lo anterior se establece que el compás puede ser utilizado para copiar longitudes de segmentos.

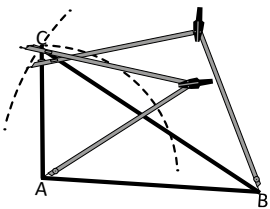
Propósito

Ⓟ Mostrar la construcción de un hexágono regular usando regla y compás. En este punto de la clase se establece que los triángulos que forman el hexágono son triángulos equiláteros, por tanto es un hexágono regular. A continuación se presenta la demostración utilizada para concluir que los triángulos que forman el hexágono son equiláteros.

1. $\overline{DH} = \overline{HA} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BA}$
2. $\triangle AEB$ y $\triangle AHD$ son equiláteros por 1.
3. $\sphericalangle EAB + \sphericalangle EAH + \sphericalangle HAD = 180^\circ$ por formar un ángulo llano.
4. $\sphericalangle EAB = \sphericalangle HAD = 60^\circ$ por 2.
5. $\sphericalangle EAH = 60^\circ$ por 3 y 4.
6. $\sphericalangle AHE = \sphericalangle AEH = 60^\circ$ por 1 y 5. Por tanto, $\triangle HAE$ es equilátero.

Dado que \overline{DB} es diámetro del círculo, también el $\triangle AGF$ es equilátero por la simetría respecto a \overline{DB} .

Solución de algunos ítems:



Puede haber varias soluciones, por lo que se presenta solo un ejemplo.

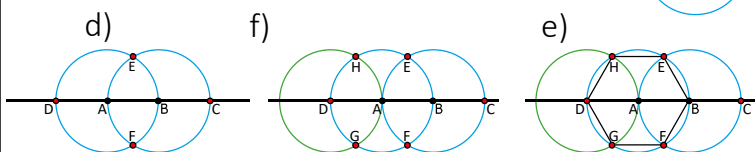
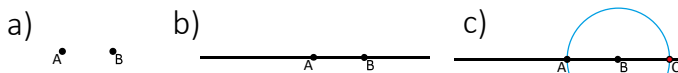
Se puede utilizar un compás para copiar las longitudes de los segmentos para dibujar el triángulo tal como se muestra en la ilustración.

Al desarrollar la clase y realizar el plan pizarra, los pasos descritos en Ⓟ y ⓔ pueden hacerse sobre una misma figura.

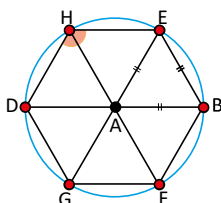
Fecha:

U8 2.3

Ⓟ Utilizando regla y compás, elabora un hexágono siguiendo los pasos y sin cambiar la abertura del compás.



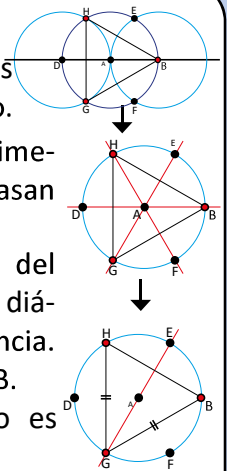
Ⓢ Se forman seis triángulos, la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Por tanto son equiláteros.



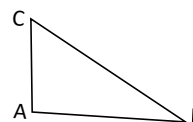
ⓔ Se eligen tres puntos para formar un triángulo.

Se trazan los ejes de simetría del triángulo que pasan por A.

Los ejes de simetría del triángulo resultan ser diámetros de la circunferencia. Entonces, $\overline{GH} = \overline{GB} = \overline{HB}$. Por tanto el triángulo es equilátero.



Ⓡ



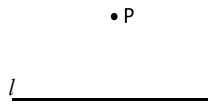
Tarea: página 170 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.4 Rectas perpendiculares

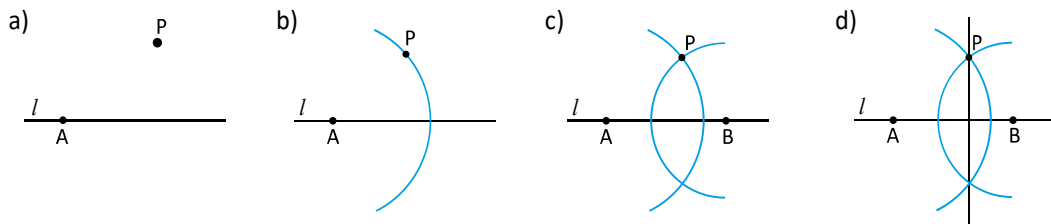
P

En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por el punto P .



S

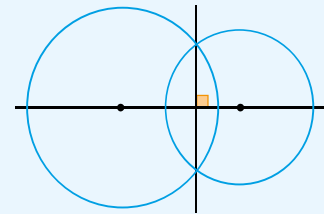
Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:



C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

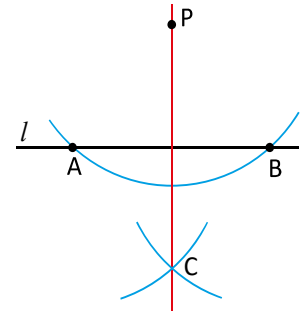
Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



E

Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l . Se coloca A, B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B , respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC .

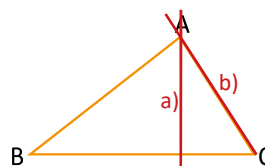


1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta l . Copia los segmentos en tu cuaderno.



2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:

- a) Desde el punto A hacia \overline{BC} .
- b) Desde el punto C hacia \overline{AB} .



Indicador de logro

2.4 Aplica características de dos círculos que se intersecan para trazar rectas perpendiculares.

Secuencia

En la clase 2.2 los estudiantes determinaron que dos círculos que se intersecan poseen algunas características, tales como la perpendicularidad del segmento que une sus centros y el segmento que une los puntos en las intersecciones de las circunferencias. También en la clase anterior los estudiantes dibujaron figuras planas utilizando regla y compás. Ahora se combinará lo aprendido en las clases antes mencionadas, para trazar rectas perpendiculares con regla y compás guiándose por el hecho de que la recta que se dibujará pasa por el segmento que une los puntos de las intersecciones de las circunferencias.

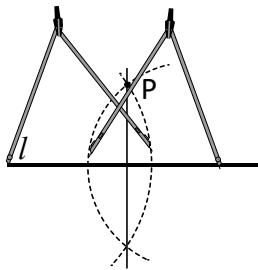
Propósito

Ⓟ Construir una recta perpendicular a la recta l utilizando las características de círculos que se intersecan. En este punto es adecuado recordar a los estudiantes que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular al segmento que une sus centros, a manera de aclaración, es igualmente válido decir que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias. La selección de la ubicación del punto B es arbitraria, es decir, puede ser cualquiera en la recta, lo importante es que sea el centro de una circunferencia que pase por P, sin importar si los dos círculos intersecados tienen radios diferentes.

Ⓢ Construir una recta perpendicular a la recta l , que pase por P; en este procedimiento siempre se utilizan las propiedades de círculos que se intersecan, con la diferencia de que a través de este proceso se asegura que los dos círculos tengan igual radio.

Solución de algunos ítems:

1. a)



Al desarrollar la clase y realizar el plan pizarra, los pasos descritos en Ⓢ y Ⓟ pueden hacerse sobre una misma figura.

Fecha:

U8 2.4

Ⓟ Con regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por P.

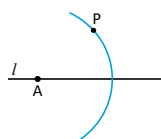
P

Ⓢ

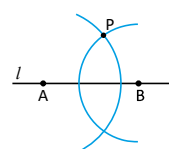
a)



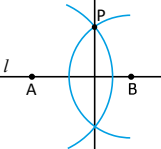
b)



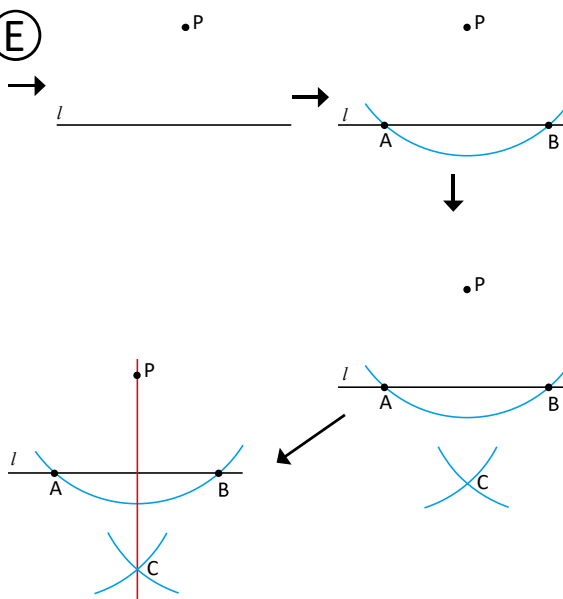
c)



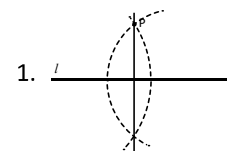
d)



Ⓟ



Ⓡ



Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

P

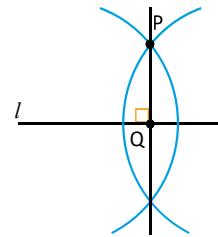
Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l .

•P

l _____

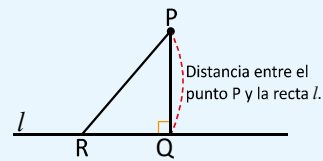
S

Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

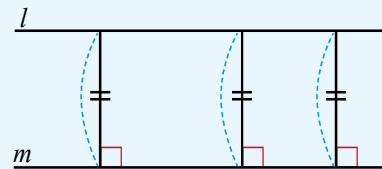


C

Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l , se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento \overline{PQ} se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l** . La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l . Por ejemplo, en la ilustración $PQ < PR$.

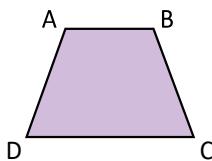


Si hay dos rectas paralelas l y m , para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



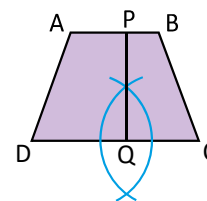
E

Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

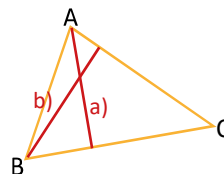


Solución.

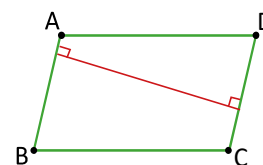
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



- En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
 - Entre A y \overline{BC} .
 - Entre B y \overline{AC} .



- En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre \overline{AB} y \overline{DC} .



Indicador de logro

2.5 Determina la distancia entre un punto y una recta y la distancia entre rectas paralelas.

Secuencia

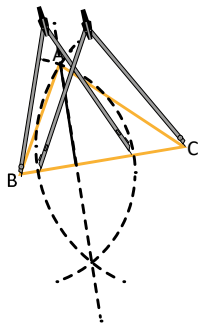
Anteriormente se trabajó, utilizando regla y compás, la forma en que se traza una recta que pasa por un punto determinado y es perpendicular a otra. Basado en esto, ahora se define la distancia de un punto a una recta, de modo que el estudiante utilice lo aprendido en la clase anterior. Análogamente se establece que el segmento que representa la distancia entre dos rectas paralelas es perpendicular a ellas y por tanto constante, desde cualquier punto.

Propósito

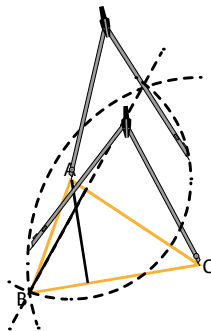
Ⓟ Establecer que a la longitud del segmento que une un punto y una recta y que es perpendicular a la recta, se le llama distancia. Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas se parte de la misma idea, es decir, se elige cualquier punto que esté sobre una de las rectas y se determina la distancia desde ese punto hacia la otra recta. Se debe destacar que el procedimiento para determinar la distancia entre un punto y un segmento o entre dos segmentos es el mismo que cuando se trabaja con rectas.

Solución de algunos ítems:

1. a)



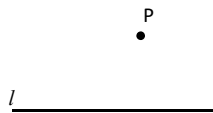
b)



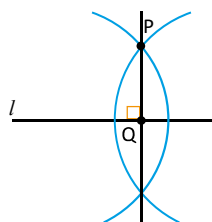
Fecha:

U8 2.5

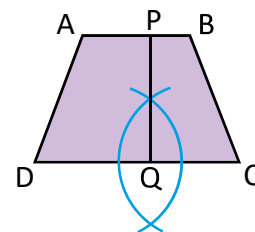
- Ⓟ Se le llama distancia entre un punto y una recta a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Traza la distancia entre el punto P y la recta l .



- Ⓢ Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

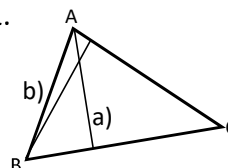


ⓔ



Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. \overline{PQ} es la distancia.

Ⓡ 1.



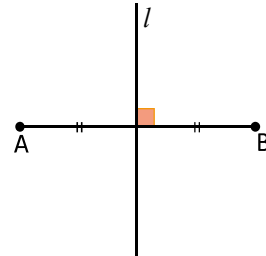
Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

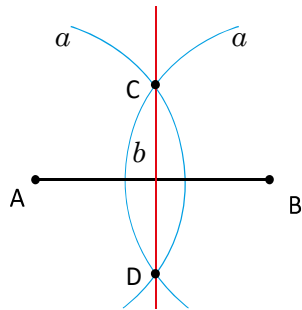
2.6 Mediatriz de un segmento

P

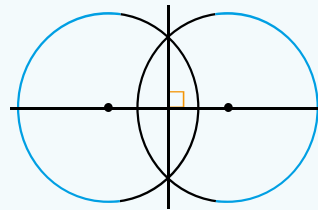
La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de \overline{AB} es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de \overline{AB} .



Se ha trazado la mediatriz de \overline{AB} , siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.



S

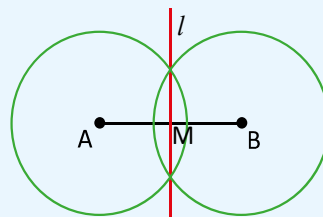
Para dibujar la mediatriz de \overline{AB} , se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C

Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

- Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
- El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego $AM = BM$.



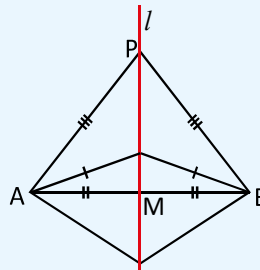
Lección 2



Si se establece un punto P sobre la mediatriz de \overline{AB} y se dobla el dibujo por la recta l , entonces \overline{PA} se sobrepone en \overline{PB} .

Por tanto, $PA = PB$.

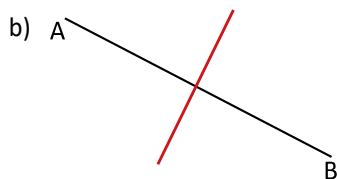
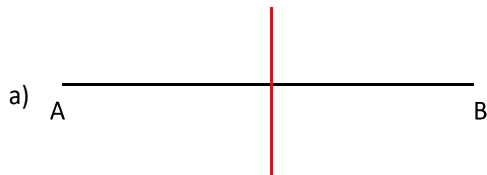
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B .



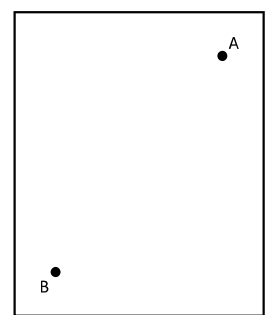
El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".



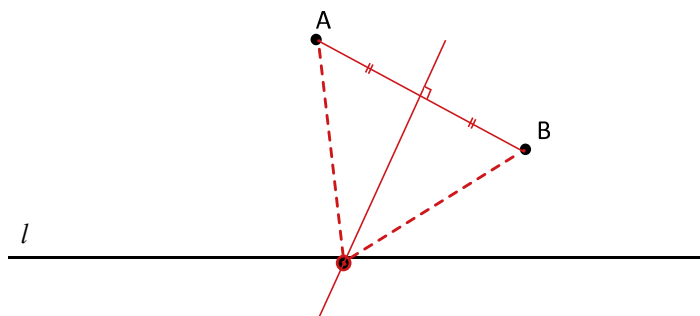
1. Dibuja la mediatriz del segmento AB .



En una página escribe los puntos A y B , traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B .



Indicador de logro

2.6 Dibuja la mediatriz de un segmento aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

Secuencia

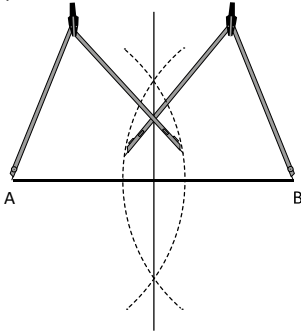
La construcción de la mediatriz resulta de la intersección de dos círculos con igual radio, es decir, la mediatriz coincide con el segmento que une los dos puntos de intersección de las circunferencias. También se aprovecha para establecer que todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.

Propósito

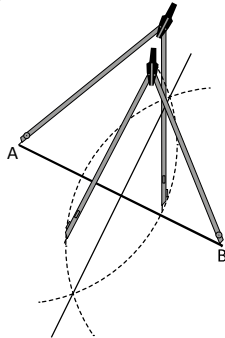
Ⓟ Establecer que la mediatriz es una recta que coincide con el segmento que une los puntos en los que las circunferencias con igual radio se intersecan. Se debe destacar que la mediatriz se encuentra en el punto medio del segmento ya que viene a ser un eje de simetría de los círculos (con igual radio) intersecados a partir de los cuales se construyó.

Solución de algunos ítems:

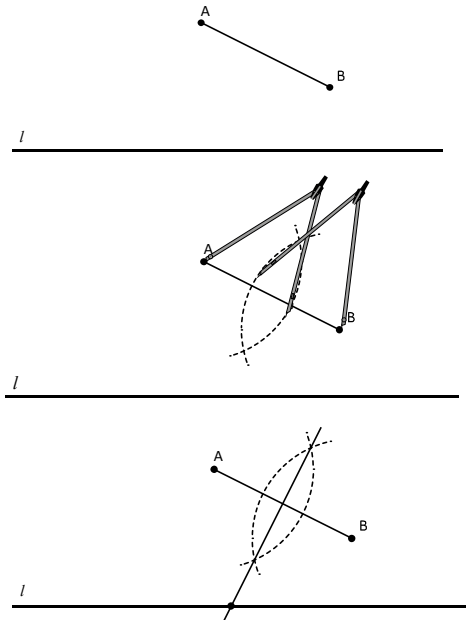
1. a)



b)



2.



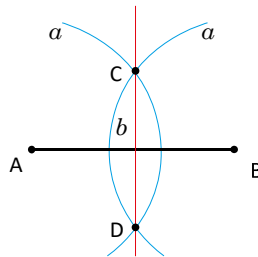
Todo punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento. Como el punto de intersección N está sobre la mediatriz y la recta l , entonces ese punto sobre la recta l equidista de A y B.

Fecha:

U8 2.6

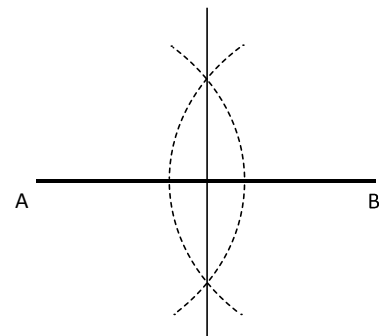
Ⓟ La recta perpendicular a un segmento que lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz**. La mediatriz es el eje de simetría del segmento.

Explica la forma de trazar una mediatriz, según los pasos.



Ⓢ Se dibujan dos círculos del mismo radio cuyos centros son A y B, y las intersecciones de las circunferencias C y D; luego, se traza la recta que pasa por C y D, obteniéndose la mediatriz del segmento.

Ⓡ 1. a

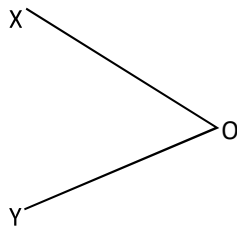


Tarea: página 173 del Cuaderno de Ejercicios.

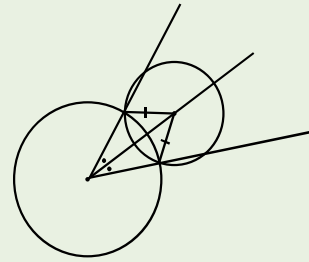
2.7 Bisectriz de un ángulo

P

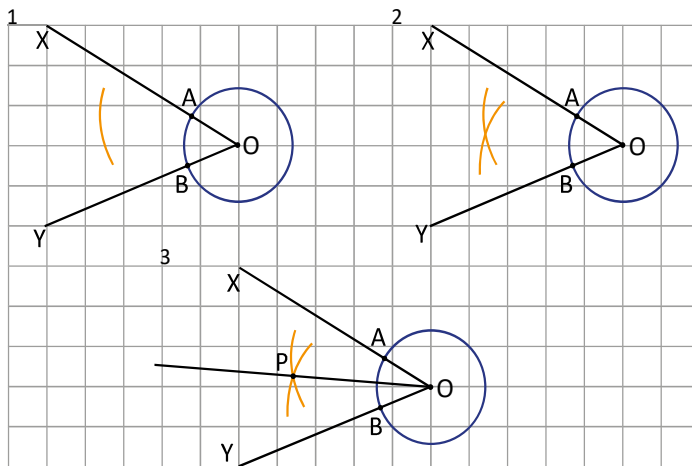
Para $\sphericalangle XOY$ construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirrecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



S



El compás se utiliza para trasladar distancias.

Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.

Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.

Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.

Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

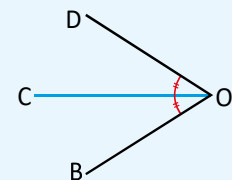
C

La semirrecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.

Por tanto, $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COB = \frac{1}{2} \sphericalangle DOB$.

Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

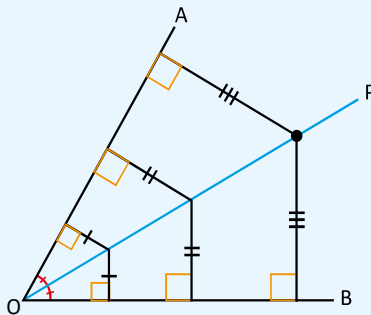
1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirrecta OP.



Lección 2

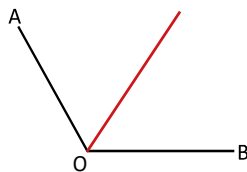
Dado que la bisectriz de $\angle AOB$ es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:

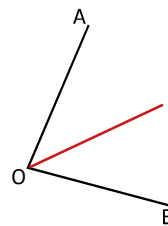


1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.

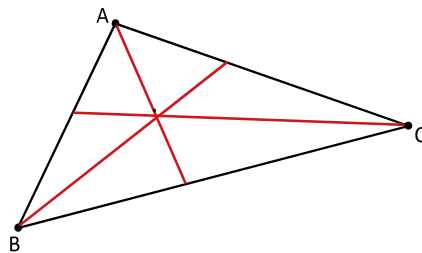
a)



b)

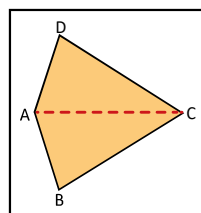


2. Traza las bisectrices de los ángulos del $\triangle ABC$.



3. En la figura:

- Dobla de tal forma que los lados \overline{BC} y \overline{DC} del cuadrilátero se sobrepongan.
- Marca con un lápiz la recta que forma el dobléz.
- ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el dobléz?



$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle CAD \\ \angle ACB &= \angle ACD \end{aligned}$$

Indicador de logro

2.7 Dibuja la bisectriz de un ángulo aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

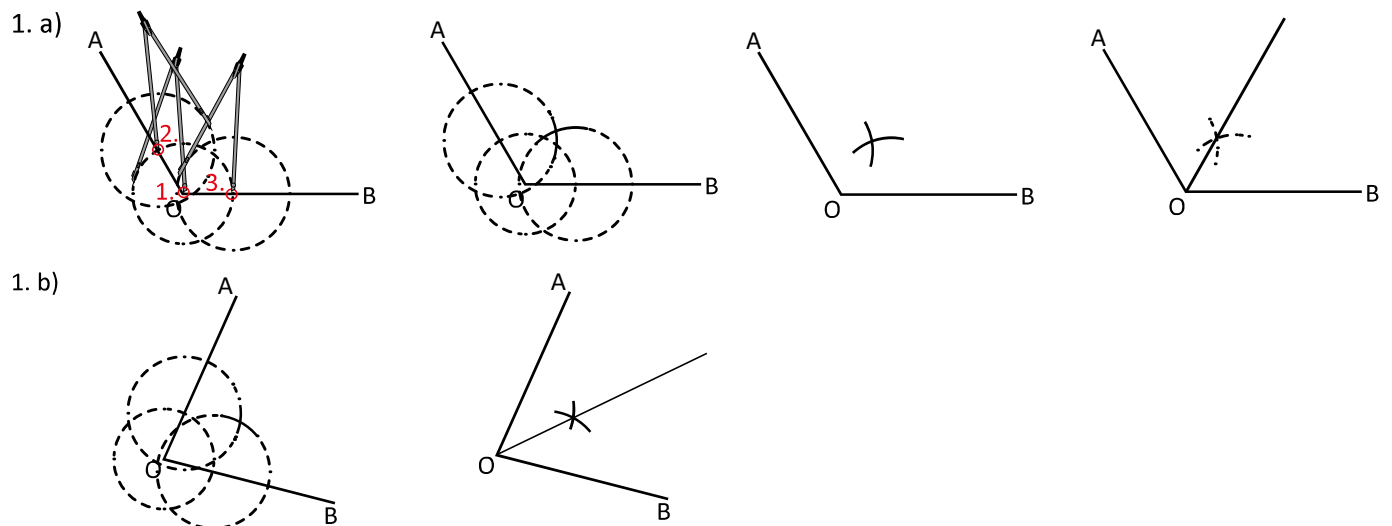
Secuencia

Para la construcción de la bisectriz de un ángulo se aplican las características de dos círculos que se intersecan. El uso de estas características para la construcción de la bisectriz consiste en el hecho de que es necesario construir dos círculos, para los cuales el centro del primero coincida con el vértice del ángulo y el centro del segundo sea la intersección de dos circunferencias auxiliares cuyos centros sean las intersecciones de la primera circunferencia con los lados del ángulo.

Propósito

Ⓟ Determinar que la semirrecta que inicia del centro del primer círculo y pasa por el centro del segundo será la bisectriz del ángulo. Esto es así porque dicha semirrecta coincide con la recta que representa un eje de simetría para los dos círculos intersecados, de manera que lo que se encuentra por arriba de este eje es idéntico a lo que se encuentra por debajo. Por tanto es importante hacer énfasis en que la bisectriz es un eje de simetría por lo que todo punto sobre ella equidista (está a la misma distancia) de los lados del ángulo.

Solución de algunos ítems:

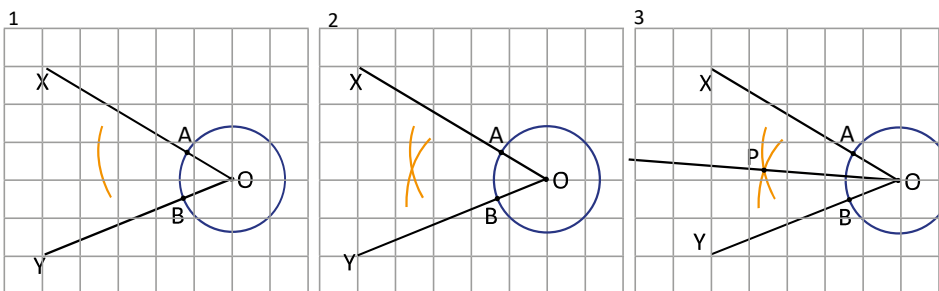


Fecha:

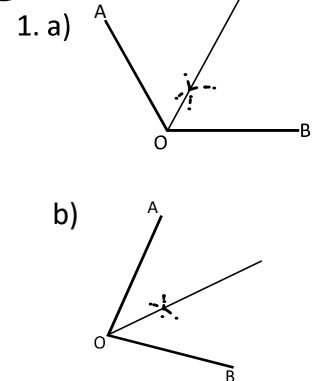
U8 2.7

Ⓟ Para $\angle XOY$ construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirrecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.

Ⓢ



Ⓡ



Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

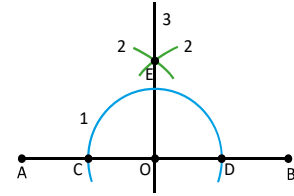
Lección 2

2.8 Tangente a una circunferencia

P

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta \overline{AB} pasando por el punto O .

- Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE .
- Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a \overline{AB} .

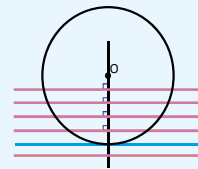
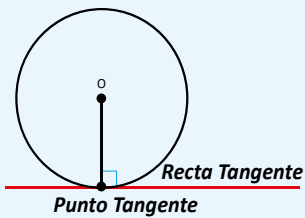


S

- Se observan tres pasos:
 - Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D .
 - Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D , luego marcar sus intersecciones como E .
 - Trazar la recta que pasa por EO .
- Si se considera \overline{AB} como un ángulo de 180° , la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, $\sphericalangle AOE = 90^\circ$.

C

Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O , hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.

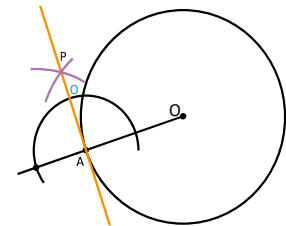


En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

E

En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A .

- Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
- Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.

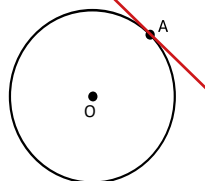


Solución.

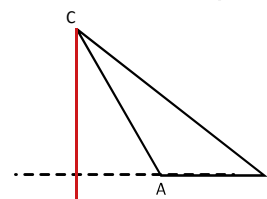
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A . Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA . Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP , esta es la tangente al punto A .



- Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A .



- Traza la altura del $\triangle ABC$ desde el punto C y tomando como base el segmento AB .



Indicador de logro

2.8 Dibuja una recta tangente a una circunferencia utilizando características de dos círculos que se intersecan.

Secuencia

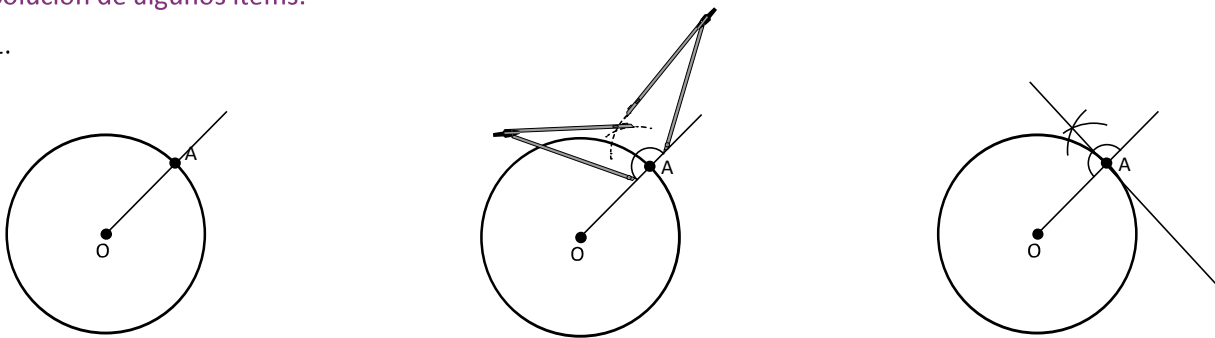
Para esta clase se aplican las características de círculos que se intersecan para la construcción de las rectas tangentes a una circunferencia, considerando que esta recta es perpendicular a la que pasa por el centro del círculo y el punto de intersección.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar que en el caso de que un ángulo sea de 180° la bisectriz y la mediatriz coinciden. Se espera que el estudiante para desarrollar el Ⓟ de la clase determine en a) que se ha realizado el proceso para construir la mediatriz, y en b) que asocie el hecho de que la mediatriz representa un eje de simetría del segmento AB, lo cual coincide con que la bisectriz también es un eje de simetría del ángulo AOB, considerando al segmento AB como el ángulo llano AOB.

Solución de algunos ítems:

1.

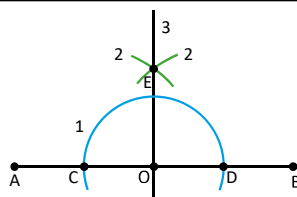


Fecha: U8 2.8

Ⓟ Una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.

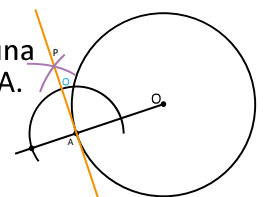
Explica:

- Los pasos para trazar la recta que pasa por O y E.
- La razón por la que la recta que pasa por O y E es perpendicular a \overline{AB} .



- Ⓢ
- Dibujar una circunferencia y nombrar con C y D sus intersecciones con el segmento.
 - Dibujar dos circunferencias con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones con E.
 - Trazar la recta que pasa por E y O.
 - Si se considera \overline{AB} como un ángulo de 180° , la recta que pasa por O y E es bisectriz del ángulo. Por tanto, $\sphericalangle AOE = 90^\circ$.

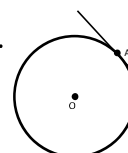
ⓔ Pasos para trazar una recta tangente en A.



- Trazar una circunferencia con centro en A.
- Dibujar dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la semirrecta OA.
- Marcar con P la intersección entre los dos arcos y trazar la recta AP.

Ⓡ

1.



Tarea: página 175 del Cuaderno de Ejercicios.

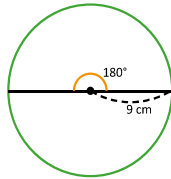
Lección 2

2.9 Longitud de arco de un sector circular

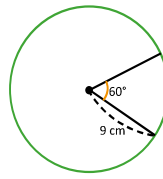
P

La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma: $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180° .



2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60° .



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.

Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159\dots$

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$$l : 180 = 18\pi : 360$$

$$360l = 18\pi \times 180$$

$$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$$

$$l = 18\pi \times \frac{180}{360} \times \frac{1}{2}$$

$$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$$

$$l = 9\pi$$

2.

Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

$$l : 60 = 18\pi : 360$$

$$360l = 18\pi \times 60$$

$$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$$

$$l = 18\pi \times \frac{60}{360} \times \frac{1}{6}$$

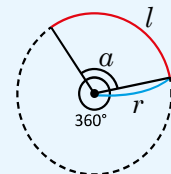
$$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$$

$$l = 3\pi$$

C

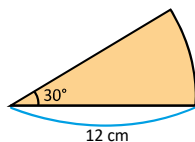
Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a , se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



E

Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.



Solución.

En el problema: $a = 30^\circ$ y $r = 12$.

La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

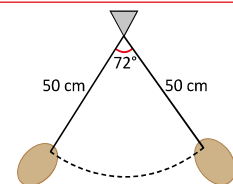


1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.

Longitud de arco: π

2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72° . ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo?

Longitud de arco: 20π



Indicador de logro

2.9 Calcula la longitud del arco de un sector circular.

Secuencia

Los estudiantes en sexto grado aprendieron a calcular la longitud de una circunferencia y análogamente la longitud de un sector circular. Este último se retoma en esta clase con la diferencia de que a partir de ahora se llamará longitud de arco de un sector circular. Para el cálculo de la longitud de arco se presentará a los estudiantes la fórmula:

$l = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360}$ que se deduce utilizando la regla de tres simple directa aprendida en la unidad 6.

Solución de algunos ítems:

1. Datos del problema: $\alpha = 45^\circ$ y $r = 4$
El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 4 \times \frac{45}{360} \\ &= 2\pi \times 4 \times \frac{1}{8} \\ &= \pi \text{ cm} \end{aligned}$$

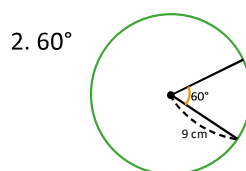
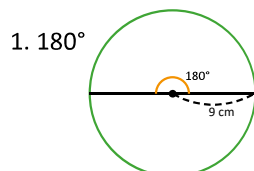
2. Datos del problema: $\alpha = 72^\circ$ y $r = 50$
El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 50 \times \frac{72}{360} \\ &= 2\pi \times 50 \times \frac{1}{5} \\ &= 20\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Fecha:

U8 2.9

P La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma:
 $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia y aplicando regla de tres simple directa, calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de

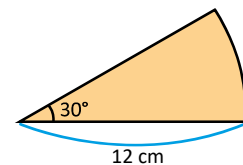


S

$$\begin{aligned} 1. \quad l : 180 &= 18\pi : 360 \\ 360l &= 18\pi \times 180 \\ l &= 18\pi \times \frac{180}{360} \\ l &= 18\pi \times \frac{1}{2} \\ l &= 9\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad l : 60 &= 18\pi : 360 \\ 360l &= 18\pi \times 60 \\ l &= 18\pi \times \frac{60}{360} \\ l &= 18\pi \times \frac{1}{6} \\ l &= 3\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

E Para el sector circular:



La longitud del arco es:

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} \\ &= 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} \\ &= 2\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

R

- π cm
- 20π cm

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.10 Área de un sector circular

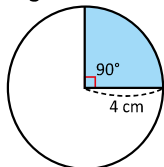


El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

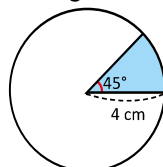
$$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2 \pi = 16\pi$$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90° .



2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45° .



El área del círculo se calcula como: $A = \pi \times r^2$.
Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$



Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$$S : 90 = 16\pi : 360$$

$$360S = 16\pi \times 90$$

$$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$$

$$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$$

$$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$$

$$S = 4\pi$$

2.

Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$$S : 45 = 16\pi : 360$$

$$360S = 16\pi \times 45$$

$$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$$

$$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$$

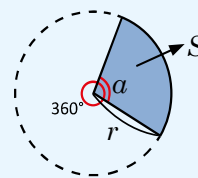
$$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$$

$$S = 2\pi$$

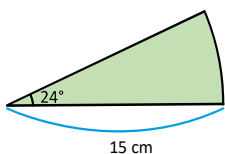


Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

$$\text{Área del sector circular: } S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$



Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



Solución.

Datos del problema: $a = 24^\circ$ y $r = 15$

$$\text{El área del sector circular es: } S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\pi$$

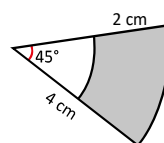


1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.

Área del sector circular: 27π

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura:

Área del sector circular: $\frac{3}{2}\pi$



Indicador de logro

2.10 Calcula el área de un sector circular.

Secuencia

En sexto grado los estudiantes aprendieron a calcular el área del círculo y de sectores circulares notables; en esta clase se retoma el tema del área de un sector circular, y se le presenta a los estudiantes la fórmula: $S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360}$.

Para deducirla se hace igual que en el caso de la longitud de arco del sector circular, utilizando la regla de tres simple directa.

Propósito

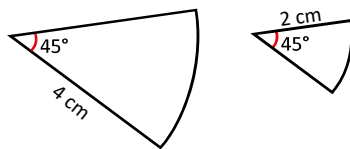
Ⓟ, Ⓢ Determinar que en el caso de que un ángulo sea de 180° la bisectriz y la mediatriz coinciden. Se espera que el estudiante para desarrollar el Ⓟ de la clase determine en a) que se ha realizado el proceso para construir la mediatriz, y en b) que asocie el hecho de que la mediatriz representa un eje de simetría del segmento AB, lo cual coincide con que la bisectriz también es un eje de simetría del ángulo AOB, considerando al segmento AB como el ángulo llano AOB.

Solución de algunos ítems:

1. Datos del problema: $\alpha = 120^\circ$
y $r = 9$
El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} S &= \pi \times 9^2 \times \frac{120}{360} \\ &= \pi \times 9^2 \times \frac{1}{3} \\ &= 27\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2. Para realizar este problema se debe calcular el área del sector circular de mayor radio y luego restar el área del sector con menor radio.



Área del sector circular más grande.

Datos: $\alpha = 45^\circ$ y $r = 4$

El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} S &= \pi \times 4^2 \times \frac{45}{360} \\ &= \pi \times 4^2 \times \frac{1}{8} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Área del sector circular más pequeño.

Datos: $\alpha = 45^\circ$ y $r = 2$

El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} S &= \pi \times 2^2 \times \frac{45}{360} \\ &= \pi \times 2^2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

El área sombreada es:

$$2\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \text{ cm}^2$$

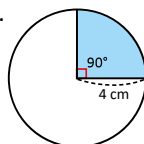
Fecha:

U8 2.10

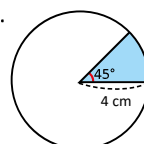
Ⓟ El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$. Pensando en un círculo del mismo radio, calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de:

1. 90° .



2. 45° .



Ⓢ 1. $S : 90 = 16\pi : 360$

$$360S = 16\pi \times 90$$

$$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$$

$$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$$

$$S = 4\pi \text{ cm}^2$$

2. $S : 45 = 16\pi : 360$

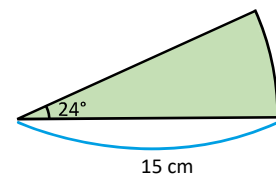
$$360S = 16\pi \times 45$$

$$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$$

$$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$$

$$S = 2\pi \text{ cm}^2$$

Ⓡ Para el sector circular:



El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} S &= \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} \\ &= \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} \\ &= 15\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ⓡ 1. $27\pi \text{ cm}^2$

2. $\frac{3}{2}\pi \text{ cm}^2$

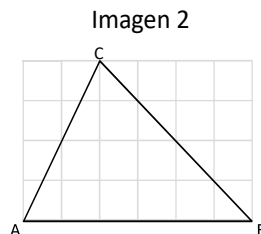
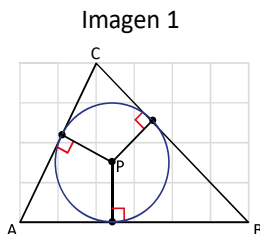
Tarea: página 177 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.11 Incentro de un triángulo

P

En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

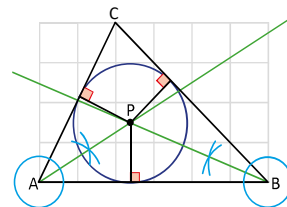


Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

S

Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

Este punto P cumple que está a igual distancia de \overline{AB} y \overline{BC} por estar sobre la bisectriz del $\sphericalangle ABC$, también cumple estar a igual distancia de \overline{AB} y \overline{AC} por estar sobre la bisectriz del $\sphericalangle CAB$. Por tanto, P está a igual distancia de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} . El punto P también está sobre la bisectriz de $\sphericalangle BCA$ por estar a igual distancia de \overline{BC} y \overline{AC} .

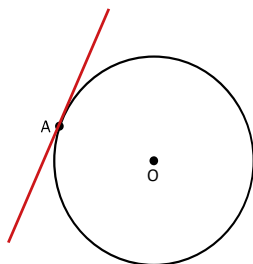
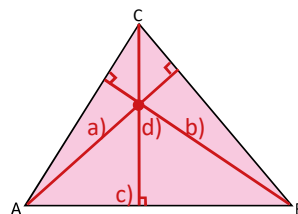


C

En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

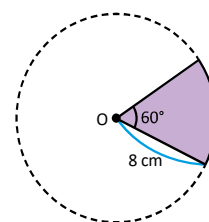


- En el $\triangle ABC$, considerando $AB = 4$ cm, $BC = 3.5$ cm y $AC = 3$ cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
 - El punto A hacia el segmento \overline{BC} .
 - El punto B hacia el segmento \overline{AC} .
 - El punto C hacia el segmento \overline{AB} .
 - Determina el incentro de $\triangle ABC$.



- Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

- Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60° :
 - Calcula la longitud de su arco. Longitud de arco: $\frac{8}{3}\pi$
 - Calcula el área del sector circular. Área del sector circular: $\frac{32}{3}\pi$



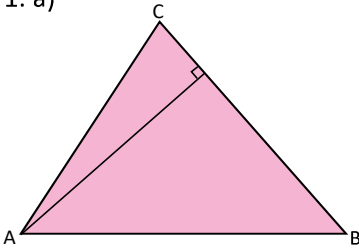
Indicador de logro

2.11 Determina el incentro de un triángulo.

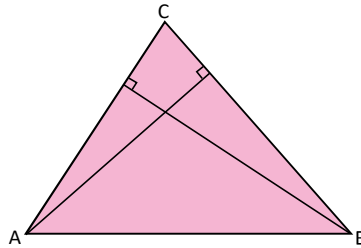
Secuencia

En la clase 2.7 de esta unidad se aprendió a trazar la bisectriz de un ángulo. En esta clase se trazan las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo, para observar que el punto en donde se cortan las bisectrices se encuentra a igual distancia de los lados del triángulo. Una vez determinado lo anterior se dice que ese punto se llama **incentro** puesto que es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo, es decir, tangente a sus tres lados.

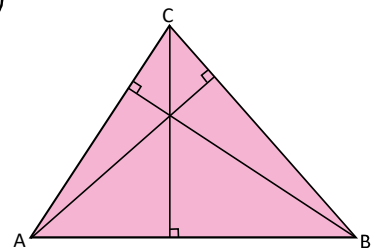
1. a)



b)

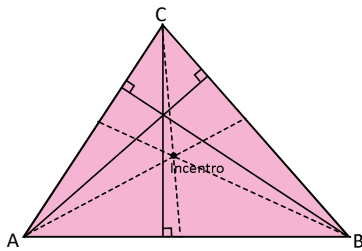


c)



Las tres rectas se intersecan en un punto.

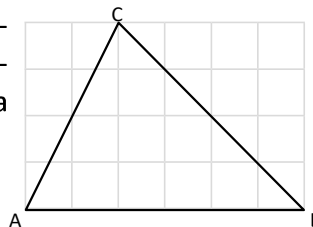
d)



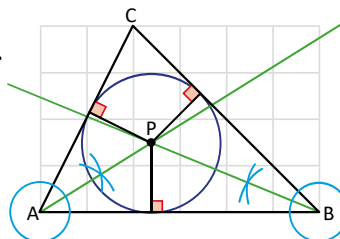
Fecha: U8 2.11

P En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba que es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

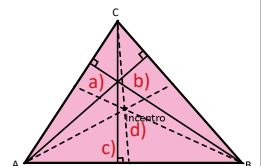
Imagen 2



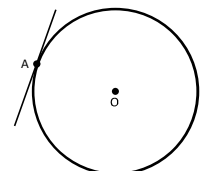
S Se trazan las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle CAB$.
Sea P la intersección de las bisectrices.



R 1.



2.



3. a) $\frac{8}{3}\pi \text{ cm}$

b) $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^2$

Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.