Unidad 3

Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero

El planteamiento formal de las reglas de multiplicación y división fue establecido por primera vez por el matemático Suizo Leonhard Euler, y la justificación de las reglas para la multiplicación fueron replanteadas por diferentes matemáticos como MacLaurin, Laplace, D'Alembert, Lacroix, Klein, y en el año 1985 la justificación se hizo a partir de patrones numéricos por Crowley y Dunn.

A partir de las reglas de la multiplicación de números negativos, se ha podido facilitar el trabajo algebraico y la modelación de situaciones del entorno, para solucionar problemas de la vida cotidiana.

Los contenidos que conocerás son la multiplicación de números con diferente signo, la multiplicación de un número negativo por otro negativo, las propiedades de la multiplicación, el concepto de potencia, y las operaciones con potencias; además de abordar las operaciones combinadas de las cuatro operaciones básicas con números positivos, negativos y el cero.

$(-4) \times (+3) = -12$

$(-4) \times (+2) = -8$

$(-4) \times (+1) = -4$

$(-4) \times 0 = 0$

$(-4) \times (-1) = \boxed{}$

$(-4) \times (-2) = \boxed{}$

$(-4) \times (-3) = \boxed{}$

Modelo de patrones numéricos de Crowley y Dunn.

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

El menor número que se puede expresar como suma de dos cubos de maneras diferentes es el 1 729. (Ramanujan, matemático hindú del siglo XX).

1.1 Multiplicación de números con diferente signo

P

Escribe el número que corresponde a los recuadros en cada literal.

a) $(+2) \times (+3) = +6$

$(+2) \times (+2) = +4$

$(+2) \times (+1) = +2$

$(+2) \times 0 = 0$

$(+2) \times (-1) = \boxed{}$

$(+2) \times (-2) = \boxed{}$

$(+2) \times (-3) = \boxed{}$

b) $(+3) \times (+3) = +9$

$(+2) \times (+3) = +6$

$(+1) \times (+3) = +3$

$0 \times (+3) = 0$

$(-1) \times (+3) = \boxed{}$

$(-2) \times (+3) = \boxed{}$

$(-3) \times (+3) = \boxed{}$

S

a) $(+2) \times (+3) = +6$

-2

$(+2) \times (+2) = +4$

-2

$(+2) \times (+1) = +2$

-2

$(+2) \times 0 = 0$

-2

$(+2) \times (-1) = \boxed{-2}$

-2

$(+2) \times (-2) = \boxed{-4}$

-2

$(+2) \times (-3) = \boxed{-6}$

b) $(+3) \times (+3) = +9$

-3

$(+2) \times (+3) = +6$

-3

$(+1) \times (+3) = +3$

-3

$0 \times (+3) = 0$

-3

$(-1) \times (+3) = \boxed{-3}$

-3

$(-2) \times (+3) = \boxed{-6}$

-3

$(-3) \times (+3) = \boxed{-9}$

C

Para multiplicar dos números con diferentes signos se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (–).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Por ejemplo:

a) $(+2) \times (-3) = -(2 \times 3)$
$= -6$

b) $(-2) \times (+3) = -(2 \times 3)$
$= -6$

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-6) \times (+3)$

b) $(-5) \times (+2)$

c) $(+7) \times (-4)$

d) $(+10) \times (-6)$

e) $(+25) \times (-2)$

f) $(-2.1) \times (+2)$

g) $(+4.2) \times (-4)$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{1}{5}\right)$

i) $\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

1.2 Multiplicación de números con igual signo

P

Escribe el número que corresponde a los recuadros en cada literal.

a)
$(-4) \times (+3) = -12$
$(-4) \times (+2) = -8$
$(-4) \times (+1) = -4$
$(-4) \times 0 = 0$
$(-4) \times (-1) = \boxed{}$
$(-4) \times (-2) = \boxed{}$
$(-4) \times (-3) = \boxed{}$

b)
$(+3) \times (-5) = -15$
$(+2) \times (-5) = -10$
$(+1) \times (-5) = -5$
$0 \times (-5) = 0$
$(-1) \times (-5) = \boxed{}$
$(-2) \times (-5) = \boxed{}$
$(-3) \times (-5) = \boxed{}$

S

a)
$(-4) \times (+3) = -12$
+4
$(-4) \times (+2) = -8$
+4
$(-4) \times (+1) = -4$
+4
$(-4) \times 0 = 0$
+4
$(-4) \times (-1) = \boxed{+4}$
+4
$(-4) \times (-2) = \boxed{+8}$
+4
$(-4) \times (-3) = \boxed{+12}$

b)
$(+3) \times (-5) = -15$
+5
$(+2) \times (-5) = -10$
+5
$(+1) \times (-5) = -5$
+5
$0 \times (-5) = 0$
+5
$(-1) \times (-5) = \boxed{+5}$
+5
$(-2) \times (-5) = \boxed{+10}$
+5
$(-3) \times (-5) = \boxed{+15}$

C

Para multiplicar dos números con igual signo se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (+).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Al multiplicar un número negativo por cero el producto es cero.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-6) \times (-4)$

b) $(-8) \times (-2)$

c) $(+5) \times (+4)$

d) $(-9) \times (-3)$

e) $(-8) \times (-9)$

f) $(-3.2) \times (-2)$

g) $(+4.1) \times (+3)$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

i) $\left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{7}{11}\right)$

1.3 Multiplicaciones que incluyen –1, 0 y 1

P

1. Escribe el número que corresponde en el recuadro.

$(+3) \times (-2) = -6$

$(+2) \times (-2) = -4$

$(+1) \times (-2) = -2$

$0 \times (-2) = \square$

2. Escribe el número que corresponde en cada recuadro.

$(+1) \times (-3) = \square$ $(-1) \times (+3) = \square$ $(+2) \times (-1) = \square$

$(-2) \times (+1) = \square$ $(-1) \times (-3) = \square$ $(-2) \times (-1) = \square$

S

1. $(+3) \times (-2) = -6$
$\quad \xrightarrow{+2}$
$(+2) \times (-2) = -4$
$\quad \xrightarrow{+2}$
$(+1) \times (-2) = -2$
$\quad \xrightarrow{+2}$
$0 \times (-2) = \boxed{0}$

2. $(+1) \times (-3) = -(1 \times 3) = \boxed{-3}$ $(-1) \times (+3) = -(1 \times 3) = \boxed{-3}$ $(+2) \times (-1) = -(2 \times 1) = \boxed{-2}$

$(-2) \times (+1) = -(2 \times 1) = \boxed{-2}$ $(-1) \times (-3) = +(1 \times 3) = \boxed{+3}$ $(-2) \times (-1) = +(2 \times 1) = \boxed{+2}$

C

Al multiplicar un número por –1, 0 y 1 se tendrá:

- $0 \times a = 0$
- $a \times 0 = 0$
- $1 \times a = a$
- $a \times 1 = a$
- $(-1) \times a = -a$
- $a \times (-1) = -a$

Donde a es cualquier número.

En la multiplicación, como en la suma y la resta, se puede omitir el signo + de los números positivos. También se puede omitir el paréntesis del primer número de la operación, aún cuando sea negativo.

E

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) -1×5 b) $0 \times (-5)$ c) $1 \times (-7)$

Solución.

a) $-1 \times 5 = -5$ b) $0 \times (-5) = 0$ c) $1 \times (-7) = -7$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) -1×8 b) $8 \times (-1)$ c) $-1 \times (-3)$ d) $-1 \times (-1)$ e) -1×7

f) $10 \times (-1)$ g) $0 \times (-4)$ h) 9×0 i) $1 \times (-11)$ j) -3×1

1.4 Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

P

Compara el resultado de la multiplicación 1 y 2 en cada uno de los siguientes literales:

Multiplicación 1	Multiplicación 2
a) -5×4	$4 \times (-5)$

Multiplicación 1	Multiplicación 2
b) $(-3 \times 2) \times 4$	$-3 \times (2 \times 4)$

S

Multiplicación 1	Multiplicación 2	
a) $-5 \times 4 = -20$	$4 \times (-5) = -20$	Los resultados son iguales.

Multiplicación 1	Multiplicación 2	
b) $(-3 \times 2) \times 4 = -6 \times 4 = -24$	$-3 \times (2 \times 4) = -3 \times 8 = -24$	Los resultados son iguales.

C

Al igual que la suma, la multiplicación también cumple con la "propiedad conmutativa" y la "propiedad asociativa".

De forma general:

- $a \times b = b \times a$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Las propiedades permiten calcular el producto de varios números en cualquier orden, aunque hayan números negativos incluidos en la multiplicación.

E

Realiza la siguiente multiplicación:

$-5 \times 17 \times (-2)$

Solución.

$$\begin{aligned} -5 \times 17 \times (-2) &= -5 \times (-2) \times 17 && \text{Propiedad conmutativa} \\ &= [-5 \times (-2)] \times 17 && \text{Propiedad asociativa} \\ &= 10 \times 17 \\ &= 170 \end{aligned}$$

La propiedad conmutativa es válida para la multiplicación de −1, 0 y 1 por un número positivo o negativo. Es decir:

$$0 \times a = a \times 0$$
$$1 \times a = a \times 1$$
$$-1 \times a = a \times (-1)$$

Utilizando la propiedad conmutativa y asociativa se puede cambiar el orden de los factores para facilitar el cálculo.

Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $8 \times 13 \times 5$

b) $-5 \times 27 \times 4$

c) $0.25 \times 0.35 \times (-4)$

d) $0.5 \times (-0.6) \times 4$

e) $-24 \times 10 \times \left(-\frac{1}{8}\right)$

f) $-14 \times \left(-\frac{7}{11}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

1.5 Signo del producto según el número de factores de la multiplicación

P

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2 \times 3 \times 4 \times 10$　　b) $-2 \times 3 \times 4 \times 10$　　c) $-2 \times (-3) \times 4 \times 10$

d) $-2 \times (-3) \times (-4) \times 10$　　e) $-2 \times (-3) \times (-4) \times (-10)$

¿Qué relación existe entre la cantidad de números negativos y el signo del producto de la multiplicación?

S

a) $2 \times 3 \times 4 \times 10 = 6 \times 4 \times 10 = 24 \times 10 = 240$
b) $-2 \times 3 \times 4 \times 10 = -6 \times 4 \times 10 = -24 \times 10 = -240$
c) $-2 \times (-3) \times 4 \times 10 = 6 \times 4 \times 10 = 24 \times 10 = 240$
d) $-2 \times (-3) \times (-4) \times 10 = 6 \times (-4) \times 10 = (-24) \times 10 = -240$
e) $-2 \times (-3) \times (-4) \times (-10) = 6 \times (-4) \times (-10) = (-24) \times (-10) = 240$

Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el producto es negativo.

C

Es importante destacar que

- Cuando hay una cantidad par de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (+).
- Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (–).

E

Calcula el producto de la siguiente multiplicación:
$-2 \times 3 \times (-5) \times 10$

Solución.

$$-2 \times 3 \times (-5) \times 10 = +(2 \times 3 \times 5 \times 10)$$
$$= 300$$

Como hay una cantidad par de números negativos inmediatamente se colocó el signo + y luego se realizó la multiplicación.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times (-2) \times 15$　　b) $-2 \times 3 \times (-5)$　　c) $-2 \times (-6) \times (-3)$

d) $2 \times 5 \times 6 \times 10$　　e) $-1 \times 2 \times (-3) \times (-4)$　　f) $-11 \times 2 \times 3 \times (-5)$

g) $-1 \times (-5) \times (-3) \times (-6)$　　h) $-2 \times 4 \times (-3) \times 10 \times (-5)$　　i) $\frac{5}{4} \times (-8) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

1.6 Potencia de un número

P

El producto de multiplicar un número por sí mismo 2 o 3 veces se representa de la siguiente forma:
$4 \times 4 = 4^2$; $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

¿Cómo se representan las siguientes multiplicaciones?

a) $(-4) \times (-4)$

b) $(-4) \times (-4) \times (-4)$

S

a) $(-4) \times (-4) = (-4)^2$

$(-4)^2$ representa -4 multiplicado 2 veces.

b) $(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$

$(-4)^3$ representa -4 multiplicado 3 veces.

C

Cuando un número se multiplica por sí mismo 2 veces, se obtiene la potencia 2 del número, y cuando se multiplica 3 veces se obtiene la potencia 3 del número.

En las expresiones $(-4)^2$ y $(-4)^3$, el 2 y 3 se llaman exponentes y representan la cantidad de veces que aparece como factor el -4 en la multiplicación. Por ejemplo:

$$(-4)^{3} = \overbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}^{\text{3 veces el factor } (-4)}$$

A la potencia 2 de un número se le llama potencia **cuadrada**, y a la potencia 3 se le llama potencia **cúbica**. Así, por ejemplo: $(-4)^2$ se lee "el cuadrado de menos cuatro" y $(-4)^3$ se lee "el cubo de menos cuatro".

E

Calcula las siguientes potencias:

a) $(-4)^2$

b) -4^2

c) $(3 \times 4)^2$

Solución.

a) $(-4)^2 = (-4) \times (-4)$
$= 16$

b) $-4^2 = -(4 \times 4)$
$= -16$

c) $(3 \times 4)^2 = (3 \times 4) \times (3 \times 4)$
$= 12 \times 12$
$= 144$

- $(-4)^2$ y -4^2 pueden ser parecidos, pero representan un producto diferente.
- Cuando se representa la potencia de un número negativo o fraccionario, el número debe escribirse entre paréntesis.

1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) 5×5

b) $5 \times 5 \times 5$

c) $(-3) \times (-3) \times (-3)$

d) $-(3 \times 3)$

e) $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

f) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

g) $(-1.5) \times (-1.5)$

h) $-(0.5 \times 0.5)$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-6)^2$

b) -6^2

c) $(-4)^3$

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^2$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

f) $(-3.1)^2$

g) -3.1^2

h) $(2 \times 3)^2$

i) $(2 \times 4)^3$

j) $(5 \times 2)^2$

Unidad 3

1.7 Multiplicaciones que incluyen potencias

P

Efectúa la siguiente multiplicación:

$$(-3)^2 \times (-4)$$

S

$(-3)^2 \times (-4) = [(-3) \times (-3)] \times (-4)$ Desarrollo de la potencia
$= 9 \times (-4)$
$= -36$

No es necesario desarrollar el paso en color rojo, se puede usar el hecho de que $(-3)^2 = 9$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(-3)^2 \times (-4) &= 9 \times (-4)\\ &= -36\end{aligned}$$

C

Para multiplicaciones que tienen al menos un número con potencia se tiene que hacer lo siguiente:

1. Calcular las potencias
2. Realizar la multiplicación

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(-3)^2 \times (-4) &= 9 \times (-4)\\ &= -36\end{aligned}$$

E

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) 2×3^2 b) $(2 \times 3)^2$

Solución.

a) $\begin{aligned}2 \times 3^2 &= 2 \times 9\\ &= 18\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}(2 \times 3)^2 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3)\\ &= 6 \times 6\\ &= 36\end{aligned}$

Se debe tener cuidado para no confundir expresiones tales como $(2 \times 3)^2$ y 2×3^2, ya que $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$ y $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$, pueden ser multiplicaciones muy parecidas pero su producto es diferente.

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times 3$ b) $4 \times (-3)^2$ c) -2×3^3 d) $(-1)^3 \times 2$

e) $2^2 \times 3^2$ f) $3^3 \times (-4)^2$ g) $(-2)^3 \times 3^3$ h) $(-3)^3 \times (-5)^2$

1.8 División de números enteros positivos, negativos y el cero

P

Escribe el número que corresponde en cada recuadro:

$(+6) \div (+2) = +3$ porque $(+2) \times (+3) = +6$

$(-6) \div (-2) = \boxed{}$ porque $(-2) \times \boxed{} = -6$

$(-6) \div (+2) = \boxed{}$ porque $(+2) \times \boxed{} = -6$

$(+6) \div (-2) = \boxed{}$ porque $(-2) \times \boxed{} = +6$

S

$(-6) \div (-2) = \boxed{+3}$ porque $(-2) \times \boxed{+3} = -6$

$(-6) \div (+2) = \boxed{-3}$ porque $(+2) \times \boxed{-3} = -6$

$(+6) \div (-2) = \boxed{-3}$ porque $(-2) \times \boxed{-3} = +6$

C

En la siguiente tabla se presenta el signo y el valor absoluto del cociente, dependiendo de los signos del dividendo y del divisor se tienen los siguientes casos:

Signo del dividendo y divisor	Signo del cociente	Valor absoluto del cociente
Igual	+	Cociente de los valores absolutos de los números
Diferente	–	

En la división se aplica la misma convención acerca del uso del signo + y los paréntesis como en la multiplicación.

Ejemplo:

a) $(+6) \div (+2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

b) $(-6) \div (-2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

c) $(-6) \div (+2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

d) $(+6) \div (-2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

E

Realiza la siguiente división: $0 \div (-2)$

Solución.

Si el recuadro $\boxed{}$ representa el cociente de $0 \div (-2)$ se tiene que $\boxed{} \times (-2) = 0$, por lo que $\boxed{} = 0$; de modo que $0 \div (-2) = 0$.

Si el recuadro $\boxed{}$ representa el cociente de $5 \div 0$, se tiene que $\boxed{} \times 0 = 5$, pero no existe ningún valor que multiplicado por 0 sea 5.

Al dividir 0 entre cualquier número diferente de 0, el cociente es 0. En caso de dividir cualquier número entre 0, la operación es indefinida, es decir, no se puede hacer.

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $6 \div (-3)$ b) $10 \div (-2)$ c) $18 \div 2$ d) $12 \div (-4)$ e) $-24 \div 3$

f) $-20 \div (-4)$ g) $-60 \div (-5)$ h) $0 \div 10$ i) $0 \div (-7)$ j) $-1 \div 2$

1.9 Fracciones negativas

P

Si una división se puede expresar en forma de fracción $5 \div 7 = \frac{5}{7}$, entonces $-(5 \div 7) = -\frac{5}{7}$.

Explica por qué es cierto que $\frac{-5}{7} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$.

S

Como

$$-\frac{5}{7} = -(5 \div 7) \qquad \frac{-5}{7} = -5 \div 7 \qquad \frac{5}{-7} = 5 \div (-7)$$

se tiene que

$$\frac{-5}{7} = -5 \div 7 = -(5 \div 7) = -\frac{5}{7}.$$

De igual forma:

$$\frac{5}{-7} = 5 \div (-7) = -(5 \div 7) = -\frac{5}{7}.$$

Por tanto:

$$-5 \div 7 = 5 \div (-7) = -(5 \div 7) \text{ o } \frac{-5}{7} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}.$$

C

Para cualquier fracción que tenga el signo (–) en el numerador o denominador, se puede escribir el signo (–) antes de la fracción. Es decir:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Siempre que se tenga una fracción negativa se representa en la forma $-\frac{a}{b}$, donde a y b representan números positivos.

1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-5 \div 11$ b) $3 \div (-7)$ c) $-(11 \div 13)$

> Observa que
> $$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$
> Porque
> $$-a \div (-b) = +(a \div b) = a \div b$$

2. Representa la siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$.

a) $\frac{-2}{11}$ b) $\frac{7}{-13}$

3. Completa el recuadro $\boxed{}$ en los siguientes literales:

a) $-\frac{2}{5} = \boxed{} \div 5 = 2 \div \boxed{} = -(2 \div 5)$

b) $-\frac{3}{7} = \boxed{} \div 7 = 3 \div \boxed{} = -(3 \div 7)$

c) $-\frac{7}{9} = \boxed{} \div 9 = 7 \div \boxed{} = -(7 \div 9)$

d) $-\frac{5}{11} = \boxed{} \div 11 = 5 \div \boxed{} = -(5 \div 11)$

1.10 Recíproco de un número

P

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $3 \times \frac{1}{3}$

b) $-\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

El 3 se puede interpretar como $\frac{3}{1}$.

1. ¿Cuál fue el producto en los literales anteriores?

2. ¿Qué característica tienen los multiplicadores en cada multiplicación?

S

a) $3 \times \frac{1}{3} = \cancel{3}^{1} \times \frac{1}{\cancel{3}_{1}}$
$= 1$

b) $-\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right)$
$= 1$

1. En ambos literales el producto es 1.
2. El multiplicador es una fracción en la que se ha intercambiado la posición del numerador y denominador del multiplicando.

C

Un número es el **recíproco** de otro número, cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

Si a representa un número diferente de 0, el recíproco del número es $\frac{1}{a}$, porque $a \times \frac{1}{a} = 1$.

De igual manera, el recíproco de $\frac{1}{a}$ es a. En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

E

Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) -1 d) $-\frac{1}{3}$ e) 0 f) 0.4

Solución.

a) El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

b) El recíproco de $-\frac{4}{5}$ es $-\frac{5}{4}$.

c) El recíproco de -1 es -1.

d) El recíproco de $-\frac{1}{3}$ es -3.

e) El número cero no tiene recíproco, porque no existe un número $\boxed{}$ tal que $0 \times \boxed{} = 1$.

f) El recíproco de $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) 2 b) -5 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $-\frac{1}{8}$

f) $\frac{3}{5}$ g) $-\frac{7}{11}$ h) 0.25 i) -0.2 j) -0.6

1.11 Cálculo de una división como multiplicación

P

Efectúa las siguientes operaciones y compara los resultados.

a) $12 \div (-3)$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

S

a) $12 \div (-3) = -(12 \div 3)$
$= -4$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(\overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$
$= -4$

C

Hacer la división de un número por otro, es equivalente a hacer la multiplicación del número por el recíproco del divisor en la división. Por tanto, para realizar una división se puede convertir en una multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Por ejemplo:

a) $12 \div (-3) = -(12 \div 3)$
$= -4$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(\overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$
$= -4$

E

Realiza la siguiente división convirtiéndola en multiplicación.

a) $-\frac{4}{7} \div 2$

b) $\frac{12}{15} \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

Solución.

a) $-\frac{4}{7} \div 2 = -\frac{4}{7} \times \frac{1}{2}$

$= -\left(\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)$

$= -\frac{2 \times 1}{7 \times 1}$

$= -\frac{2}{7}$

b) $\frac{12}{15} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{15} \times \left(-\frac{5}{3}\right)$

$= -\left(\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$

$= -\frac{4 \times 1}{3 \times 1}$

$= -\frac{4}{3}$

Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones.

a) $-16 \div 4$

b) $18 \div (-9)$

c) $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right)$

d) $\frac{13}{14} \div \left(-\frac{39}{7}\right)$

e) $-\frac{2}{3} \div (-10)$

f) $-\frac{3}{5} \div (-6)$

g) $-10 \div \frac{2}{5}$

h) $15 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

1.12 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(-5) \times (-2)$ b) $(-7) \times (+4)$ c) $(+6) \times (-8)$ d) $(-6) \times (+7)$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-3.5) \times (-3)$ b) $\left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{9}{13}\right)$ c) $\left(-\frac{10}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{5}\right)$ d) $\left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) 8×1 b) -1.1×1 c) $1 \times \frac{7}{13}$ d) $1 \times (-11)$

e) -1×9 f) $-1 \times (-17)$ g) $\frac{7}{9} \times (-1)$ h) $-\frac{11}{12} \times (-1)$

i) 21×0 j) -3.6×0 k) $\frac{8}{15} \times 0$ l) $0 \times \left(-\frac{2}{29}\right)$

4. Aplica la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $0.5 \times (-0.16) \times 2$ b) $-36 \times 25 \times \left(-\frac{1}{12}\right)$ c) $-55 \times \left(-\frac{7}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

5. Efectúa las siguientes multiplicaciones determinando el signo del producto según el número de factores en la multiplicación:

a) $-3 \times (-4) \times (-5) \times (-2)$ b) $-6 \times 5 \times (-3) \times 10 \times (-1)$ c) $\frac{7}{3} \times (-6) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

6. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-5)^2$ b) -5^2 c) $(-2)^3$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ f) $(1.2)^2$

g) -0.6^2 h) 10×2^2 i) $(5 \times 2)^3$

7. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $2^2 \times (-3)^2$ b) $(-5)^3 \times 2^2$ c) $(-10)^3 \times (-5)^2$

8. Efectúa la siguientes divisiones:

a) $-36 \div 12$ b) $-60 \div (-15)$ c) $0 \div (-25)$

9. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $(-7) \div 9$ b) $5 \div (-11)$ c) $-(15 \div 17)$

10. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) -6 b) $\frac{1}{19}$ c) 0.6

11. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $-12 \div \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{7} \div \left(-\frac{5}{21}\right)$ c) $-\frac{6}{5} \div (-18)$

2.1 Operaciones con multiplicación y división

P

Realiza la siguiente operación que combina multiplicación y división:

$$6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5)$$

S

$$\begin{aligned} 6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\ &= \left(\overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{7}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) \\ &= 2 \times 7 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

C

Para realizar el cálculo de una operación que combina multiplicación y división, se debe plantear la operación solo con multiplicaciones, convirtiendo el divisor en su recíproco, luego se recomienda simplificar las fracciones que sean posibles antes de hacer la multiplicación, para facilitar el cálculo. Básicamente la operación se calcula de izquierda a derecha.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\ &= \left(\overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{7}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) \\ &= 2 \times 7 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

E

Realiza la siguiente operación:

$(-3)^2 \times (-10) \div (-24)$

Solución.

$$\begin{aligned} (-3)^2 \times (-10) \div (-24) &= 9 \times (-10) \times \left(-\frac{1}{24}\right) \\ &= +\left(\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{5}{\cancel{10}} \times \frac{1}{\underset{\underset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{24}}}\right) \\ &= 3 \times 5 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $-10 \div 6 \times (-21)$

b) $-\frac{15}{4} \times \frac{7}{10} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

c) $(-3)^2 \times (-2) \div 6$

d) $(-2)^3 \times (-15) \div (-18)$

e) $-2^2 \times (-9) \div 6$

f) $-\frac{7}{3} \times \frac{5}{21} \div \frac{7}{9}$

2.2 Operaciones combinadas

P

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $10 + 5 \times (-3)$

b) $40 \div (-10 + 5)$

S

a) $10 + 5 \times (-3) = 10 + (-15)$
$= 10 - 15$
$= -5$

b) $40 \div (-10 + 5) = 40 \div (-5)$
$= -8$

C

Para realizar operaciones con números positivos y negativos que combinan suma, resta, multiplicación, división o que incluye otra operación al interior de paréntesis (operaciones anidadas), se trabaja de igual forma como se hace con los números positivos. El orden del cálculo es:

1. Operaciones al interior de los paréntesis (si los hay)
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

Ejemplos:

a) $10 + 5 \times (-3) = 10 + (-15)$
$= 10 - 15$
$= -5$

b) $40 \div (-10 + 5) = 40 \div (-5)$
$= -8$

Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $5 + 2 \times 3$

b) $-12 - 18 \div 3$

c) $4 \times (-5) - 7$

d) $-20 \div (-4) - 8$

e) $5 \times (-2) + 4 \times 3$

f) $-9 \div 3 + 8 \div 4$

g) $-12 \div 2 + 2 \times 3$

h) $5 \times (-12) - 16 \div 8$

i) $-8 \times (-5 + 17)$

j) $-24 \div (-6 - 2)$

k) $(-3 + 8) \div (-5)$

l) $(2 - 13) \div 22$

2.3 Operaciones combinadas que incluyen potencias

P

Realiza la siguiente operación:

$$32 \div (-2)^2 - 6$$

S

$$\begin{aligned} 32 \div (-2)^2 - 6 &= 32 \div 4 - 6 \\ &= 8 - 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

C

Cuando en la operación se incluyan potencias, operaciones anidadas, multiplicaciones o divisiones y sumas o restas, el orden para hacer los cálculos es:

1. Operaciones al interior de paréntesis (si los hay)
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

E

Realiza las siguientes operaciones:

$-4 \times (-7 + 4)^2 + 4^2$

Solución.

$$\begin{aligned} -4 \times (-7 + 4)^2 + 4^2 &= -4 \times (-3)^2 + 4^2 \\ &= -4 \times 9 + 16 \\ &= -36 + 16 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $5 - 4 \times (-3)^2$

b) $-4 - 5 \times (-2)^3$

c) $27 - 3^2 \times 4$

d) $-8 \times (1 - 3)^3 + 4^2$

e) $2 - 7 \times (-2^2)$

f) $(-2)^3 + 3^2 \div (-3)$

g) $-4^2 + (-2)^3 \div (-9 + 5)$

h) $(-5)^2 + 20^2 \div (7 - 17)$

2.4 Propiedad distributiva de la multiplicación

P

Compara los resultados de las operaciones 1 y 2 de cada literal.

Operación 1	**Operación 2**	**Operación 1**	**Operación 2**
a) $(-6 - 4) \times 3$;	$-6 \times 3 + (-4) \times 3$	b) $-4 \times (-15 + 10)$;	$-4 \times (-15) + (-4) \times 10$

S

Operación 1

a) $(-6 - 4) \times 3 = (-10) \times 3$
$= -30$

Operación 2

$-6 \times 3 + (-4) \times 3 = -18 + (-12)$
$= -18 - 12$
$= -30$

Los resultados son iguales, entonces $(-6 - 4) \times 3 = -6 \times 3 + (-4) \times 3$.

Operación 1

b) $-4 \times (-15 + 10) = (-4) \times (-5)$
$= 20$

Operación 2

$-4 \times (-15) + (-4) \times 10 = 60 + (-40)$
$= 60 - 40$
$= 20$

Los resultados son iguales, entonces $-4 \times (-15 + 10) = -4 \times (-15) + (-4) \times 10$.

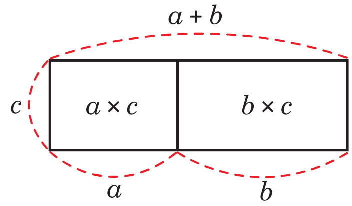
C

Para cualquier número a, b y c, se cumple que

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$
$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

Al hecho anterior se le conoce como **propiedad distributiva**.

La propiedad distributiva se puede representar de manera gráfica a través de áreas:



Cuando se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación $(a + b) \times c$ los paréntesis desaparecen obteniéndose $a \times c + b \times c$. A la acción de quitar los paréntesis a través de la aplicación de la propiedad distributiva también se le llama **suprimir paréntesis**.

E

Efectúa las siguientes operaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $\left(\frac{7}{9} - \frac{5}{6}\right) \times 18$

b) $47 \times (-9) + 13 \times (-9)$

Solución.

a) $\left(\frac{7}{9} - \frac{5}{6}\right) \times 18 = \left[\frac{7}{9} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] \times 18$
$= \frac{7}{9} \times 18 + \left(-\frac{5}{6}\right) \times 18$
$= 14 + (-15)$
$= 14 - 15$
$= -1$

b) $47 \times (-9) + 13 \times (-9) = (47 + 13) \times (-9)$
$= 60 \times (-9)$
$= -540$

Realiza las siguientes operaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $5 \times (-7 - 3)$

b) $(-23 + 3) \times (-2)$

c) $60 \times \left(\frac{5}{12} - \frac{13}{30}\right)$

d) $12 \times 13 + 88 \times 13$

e) $-21 \times 2 - 4 \times 2$

f) $99 \times (-15)$

En f) observa que $99 = 100 - 1$.

2.5 Conjuntos numéricos

Si a y b representan 2 números naturales cualesquiera, ¿en cuáles de las siguientes operaciones el resultado siempre es un número natural?

a) $a + b$　　b) $a - b$　　c) $a \times b$　　d) $a \div b$

La suma y la multiplicación de 2 números naturales siempre tiene como resultado un número natural. Al contrario, la resta y división de 2 números naturales no necesariamente tiene como resultado un número natural. Por ejemplo: $2 - 7$ y $3 \div 7$ no tienen como resultado un número natural.

A un grupo de elementos, números u objetos se le llama **conjunto**, por ejemplo, al grupo de los números naturales se le llama **conjunto de los números naturales**. En general, a un conjunto de números se le llama conjunto numérico. En el conjunto de los números naturales no siempre se pueden hacer las operaciones resta y división, porque el resultado de ellas no necesariamente es un número natural. Por tanto, se hace necesario ampliar el conjunto de los números naturales.

Resuelve:

a) ¿Qué conjunto de números debe agregarse a los naturales para que la resta se pueda realizar siempre?

b) ¿El conjunto de números agregados en a) será suficiente para que también la división se pueda hacer siempre?

Solución.

a) Debe agregarse el 0 y el conjunto de los números negativos para tener un conjunto numérico más amplio y poder hacer siempre la resta. A este nuevo conjunto se le llama **números enteros**, de aquí en adelante al referirse al conjunto de los números enteros se entenderá que es el conjunto de números: ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...

b) No es suficiente, es necesario agregar los **números que se pueden expresar como fracción**.
Los números enteros como por ejemplo 5, también se pueden escribir en forma de fracción, $\frac{5}{1}$, por lo que el conjunto de números enteros es parte del conjunto de números que se pueden expresar como fracción.
Considera que los números decimales también se pueden expresar como fracción, por ejemplo: $0.8 = \frac{8}{10}$.

Números que se pueden expresar como fracción
$\frac{1}{5}$, $\frac{3}{2}$, 0.222, $0.\overline{33}$, 0.1, −0.15

Enteros
..., −3, −2, −1, 0,

Naturales
1, 2, 3,...

1. ¿Cuáles son las operaciones que se pueden realizar en los diferentes conjuntos de números? Escribe una X si la operación se puede realizar siempre en cada uno de los conjuntos de números. No consideres la división por 0.

	Suma	Resta	Multiplicación	División
Natural				
Entero				
Números que se pueden expresar como fracción				

2. Escribe los conjuntos de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $8 + 2$　　b) -5×4　　c) $9 - 10$　　d) $5 \div 6$

2.6 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

1. Efectúa las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

   a) $-\frac{21}{2} \times \frac{6}{7} \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ b) $-1 \times (-6)^2 \div 8$ c) $-3^2 \times (-6) \div 2$

2. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación, división, suma o resta:

   a) $7 + 5 \times 2$ b) $-2 + (-32) \div 4$ c) $3 \times (-4) - 3$

   d) $6 \times (-4) + 7 \times 3$ e) $-12 \div 6 + 35 \div 7$ f) $13 \times (-2) - 30 \div 5$

3. Desarrolla las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división con operaciones anidadas:

   a) $(19 - 10) \times (-3)$ b) $-4 \times (8 - 5)$ c) $-5 \div (-5 - 20)$

4. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación, división, suma o resta e incluyen potencias.

   a) $2 - 3 \times (-5)^2$ b) $-3 - 7 \times (-3^2)$ c) $-2 \times (2 - 7)^3 + 3^2$

5. Efectúa las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

   a) $(-25 - 11) \times 4$ b) $42 \times \left(\frac{3}{14} - \frac{5}{6}\right)$ c) $17 \times 14 + 83 \times 14$

6. Escribe el conjunto de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

   a) $10 + 3$ b) -6×3 c) $12 - 15$

3.1 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

P

1. Escribe los primeros 12 múltiplos para cada uno de los siguientes números:
   2:
   5:

   Responde:
   a) ¿Cuáles son los múltiplos comunes de 2 y 5?
   b) ¿Cuál es el menor de los múltiplos en **a**?

2. Escribe los divisores para cada uno de los siguientes números:
   18:
   24:

   Responde:
   a) ¿Cuáles son los divisores comunes de 18 y 24?
   b) ¿Cuál es el mayor de los divisores en **a**?

S

1. 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24
   5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 y 60

   a) 10 y 20
   b) 10

2. 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
   24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24

   a) 1, 2, 3 y 6
   b) 6

C

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números se llama **mínimo común múltiplo** y su abreviatura es **mcm.**

Los pasos para calcularlo son:

1. Escribir los múltiplos de cada número.
2. Encontrar los múltiplos comunes.
3. Encontrar el menor de los múltiplos comunes.

El mayor de los divisores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** y su abreviatura es **MCD.**

Los pasos para calcularlo son:

1. Escribir todos los divisores de cada número.
2. Encontrar los divisores comunes.
3. Encontrar el mayor de los divisores comunes.

1. Encuentra el mcm para los siguientes números.
   a) 6 y 9
   b) 5 y 10
   c) 3 y 5
   d) 3, 6 y 9

2. Encuentra el MCD para los siguientes números:
   a) 6 y 9
   b) 12 y 8
   c) 18 y 3
   d) 14, 21 y 28

3.2 Relación entre los múltiplos y divisores de un número

P

Realiza lo que se pide en los siguientes numerales:

1. Copia y llena en tu cuaderno los espacios ___ con los divisores y múltiplos de 24 y 36.

Divisores de 24 — Múltiplos de 24

1, 2, 3, ___, ___, ___, ___, ___ **:24:** 24, 48, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ...

Divisores de 36 — Múltiplos de 36

1, 2, 3, ___, ___, ___, ___, ___, ___ **:36:** 36, 72, ___, ___, ___, ___, ___, ...

2. Según lo realizado en el numeral anterior, responde las siguientes preguntas:
   a) ¿Es 24 múltiplo de 4? ¿Es 4 divisor de 24?
   b) ¿Es 24 múltiplo de 1? ¿Es 1 divisor de 24?
   c) ¿Es 24 múltiplo de 24? ¿Es 24 divisor de 24?

3. Calcula el mcm y el MCD de 24 y 36.

4. ¿Es el mcm un múltiplo del MCD?

S

1.
Divisores de 24 — Múltiplos de 24

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **: 24 :** 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, ...

Divisores de 36 — Múltiplos de 36

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 **: 36 :** 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, ...

2. a) 24 es múltiplo de 4, 4 es divisor de 24.
   b) 24 es múltiplo de 1, 1 es divisor de 24.
   c) 24 es múltiplo de 24, 24 es divisor de 24.

3. mcm = 72, MCD = 12.

4. Se puede expresar el mcm como múltiplo del MCD, mcm = MCD × 6 porque 72 = 12 × 6, el mcm es múltiplo del MCD.

C

Con respecto a los múltiplos y divisores de un número, y el mcm y MCD de dos o más números, se cumple que

- Si un número es múltiplo de otro número, ese es divisor del primero.
- Cualquier número es múltiplo de 1 y 1 es divisor de cualquier número.
- Un número es tanto divisor como múltiplo de sí mismo.
- El mcm es múltiplo del MCD.

Copia en tu cuaderno y completa.

1. 4 es divisor de 20. Entonces, 20 es ___________ de 4.
2. 8 es múltiplo de 2. Entonces, 2 es __________ de 8.
3. Cualquier número es múltiplo de _______.
4. _______ es divisor de cualquier número.
5. ¿6 es múltiplo de 6? Explica por qué.
6. ¿6 es divisor de 6? Explica por qué.
7. Para cada literal del ejercicio 2 de la clase anterior expresa el mcm de los números como un múltiplo de su MCD.

3.3 Números primos y compuestos

P

Copia la tabla en tu cuaderno y escribe todos los divisores de los números dados, después clasifica los números según la cantidad de divisores.

Número	Divisores	Número	Divisores
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

a) ¿Qué números tienen solo dos divisores?
b) ¿Qué números tienen más de dos divisores?

S

Número	Divisores	Número	Divisores
1	1	11	1, 11
2	1, 2	12	1, 2, 3, 4, 6, 12
3	1, 3	13	1, 13
4	1, 2, 4	14	1, 2, 7, 14
5	1, 5	15	1, 3, 5, 15
6	1, 2, 3, 6	16	1, 2, 4, 8, 16
7	1, 7	17	1, 17
8	1, 2, 4, 8	18	1, 2, 3, 6, 9, 18
9	1, 3, 9	19	1, 19
10	1, 2, 5, 10	20	1, 2, 4, 5, 10, 20

a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
b) 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 y 20.

C

A los números que tienen solo dos divisores (el 1 y el mismo número) se les llama **números primos**. Ejemplo de estos números son los del literal **a**.

Los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**. Ejemplos de estos números son los del literal **b**.

El 1 solo tiene 1 como divisor. El 1 no es número primo ni compuesto.

E

Eratóstenes ideó un método para encontrar números primos conocido como la Criba de Eratóstenes. Esta permite encontrar todos los números primos desde un valor inicial hasta un valor final. Se basa en eliminar de la lista los múltiplos de los números primos entre el valor inicial y final. Una vez acabado el proceso, los números que queden sin descartar serán primos. El proceso termina hasta llegar al primer número cuya potencia cuadrada es igual o mayor que el valor final.

a) Determina todos los números primos hasta el 100 utilizando la Criba de Eratóstones, auxiliándote de la tabla numerada del 1 al 100.

b) Clasifica los números 11, 23, 29, 42, 54, 75, 88, 91 en primos y compuestos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Solución.

a)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1. 1 no es un número primo. Se tacha.
2. 2 es primo.
3. Tachar todos los múltiplos de 2.
4. El siguiente número sin tachar es 3 y es primo.
5. Tachar todos los múltiplos de 3.
6. El siguiente número sin tachar es 5 y es primo.
6. Tachar todos los múltiplos de 5.
7. El siguiente número sin tachar es 7 y es primo.
8. Tachar todos los múltiplos de 7.
9. Los números que quedan sin tachar, son todos los números primos entre 1 y 100. Se termina el proceso porque el próximo primo será 11 el cuál supera a 10 y $10^2 = 100$.

b) Números primos: 11, 23 y 29.
Números compuestos: 42, 54, 75,88 y 91.

Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:
5, 9, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 41, 47, 49 y 53.

3.4 Descomposición en factores primos

P

Representa el número 24 como producto de números primos. Se pueden repetir números primos si se considera necesario.

El producto es el resultado de una multiplicación.

S

Para obtener los números primos de la multiplicación, se puede hacer el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Significa $24 \div 2 = 12$
$12 \div 2 = 6$
$6 \div 2 = 3$
$3 \div 3 = 1$

Y así se sigue consecutivamente.

Por tanto, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$; de forma equivalente puedes representarlo como $24 = 2^3 \times 3$.

A los números en un producto se les llama **factores**.

C

Cualquier número compuesto puede ser expresado como producto de números primos. A este procedimiento se le llama **descomposición en factores primos**.

E

Llena el recuadro $\square$ con el número correspondiente en la descomposición en factores primos de 36 y luego escribe el número como producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 36 & \square \\ 18 & \square \\ 9 & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 24 & \square \\ 12 & \square \\ 6 & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

Solución.

$$\begin{array}{r|l} 36 & \boxed{2} \\ 18 & \boxed{2} \\ 9 & \boxed{3} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 24 & \boxed{2} \\ 12 & \boxed{2} \\ 6 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2^2 \times 3^2$ $\qquad$ $24 = 2^3 \times 3$

Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 12 b) 16 c) 20 d) 30 e) 35

f) 56 g) 50 h) 54 i) 64 j) 100

3.5 Máximo común divisor por descomposición en factores primos

P

El cálculo del MCD de 8 y 12 se hace de la siguiente manera:

Número	Divisores
8:	1, 2, 4, 8
12:	1, 2, 3, 4, 6, 12

Por tanto, el MCD de 8 y 12 es 4.

El proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12 es:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

¿Cómo se calcula el MCD de 8 y 12 a partir de la descomposición de estos números?

S

$$8 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = \boxed{2} \times \boxed{2} \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

El MCD de 8 y 12 se puede calcular multiplicando los primos comunes con el menor exponente de ambas descomposiciones. Es decir, $2 \times 2 = 2^2 = 4$.

C

El MCD de dos números se determina realizando los siguientes pasos:

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos comunes en ambas descomposiciones que tengan el menor exponente.

E

Encuentra el MCD para 12 y 18 a través de la descomposición en factores primos.

Solución.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \quad = 2^2 \times 3$$
$$18 = \boxed{2} \quad \times \boxed{3} \times 3 = 2 \times 3^2$$
$$\text{MCD} = 2 \times 3 = 6$$

Calcula el MCD por descomposición en factores primos.

a) 12 y 15   b) 9 y 27   c) 8 y 20   d) 12 y 16   e) 15 y 25

f) 6 y 14   g) 7 y 14   h) 6 y 8   i) 5 y 15   j) 9 y 12

3.6 Mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos

P

El cálculo del mcm de 8 y 12 se hace de la siguiente manera:

Número	Múltiplos
8:	8, 16, 24, 32, 40, ...
12:	12, 24, 36, 48, ...

Por tanto, el mcm de 8 y 12 es 24.

Ahora observa el proceso de descomposición en factores primos de 8 y 12, luego escribe cómo calcular su mcm a partir de la descomposición:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo que la descomposición en factores primos es:

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times 3 = 2^2 \times 3$$

S

$$8 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \quad = 2^3$$
$$12 = 2 \times 2 \quad \times \boxed{3} = 2^2 \times 3$$

El mcm de 8 y 12 se puede calcular multiplicando los números primos diferentes en cada descomposición, en caso de haber primos comunes se toman solamente los de mayor exponente para la multiplicación. Es decir, $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3 = 24$.

C

El mcm de dos números se determina por

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos no comunes en la descomposición, en caso de haber primos comunes, solo se toman las potencias de primos con mayor exponente (si los comunes tienen el mismo exponente se toman solo una vez).

E

Encuentra el mcm de los números 20 y 24 a través de la descomposición en factores primos.

Solución.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2 \text{ x } 2 \quad \times \boxed{5} = 2^2 \times 5$$
$$24 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \text{ x } \boxed{3} \quad = 2^3 \times 3$$
$$\text{mcm} = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$= 120$$

Calcula el mcm por descomposición en factores primos:

a) 12 y 18 b) 9 y 27 c) 8 y 20 d) 12 y 16 e) 15 y 20

f) 6 y 21 g) 7 y 14 h) 6 y 8 i) 5 y 15 j) 9 y 12

3.7 Aplicación del mcm y MCD

P

Hay 126 niños y 12 maestros. Si se quiere formar la mayor cantidad de grupos y de manera equitativa (respecto a niños y maestros), ¿cuántos grupos se formarían?, ¿cuántos niños hay en cada grupo?

S

Como cada grupo debería de tener la misma cantidad de niños, entonces el número de grupos debe ser un divisor de la cantidad de niños, es decir, de 126. De la misma manera, el número de grupos debe ser divisor de la cantidad total de maestros, es decir, de 12. Por lo tanto, el número de grupos es un divisor común de 126 y 12, pero como se quiere la mayor cantidad de grupos, este divisor debe ser el máximo común divisor de 126 y 12.

La descomposición en factores primos es:

$$126 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$$
$$12 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} = 2^2 \times 3$$

Entonces, MCD $= 2 \times 3 = 6$.

Por lo tanto, se formarán 6 grupos y en cada grupo deben haber $126 \div 6 = 21$ niños.

C

Se puede utilizar el MCD y el mcm para resolver problemas del entorno.

E

Ana escribe a su abuela cada 15 días y a su tío cada 18 días. Si hoy le tocó escribirle a ambos, ¿dentro de cuántos días volverá a coincidir por primera vez en escribirles a su tío y su abuela?

Solución.
Si Ana escribe a su abuela cada 15 días, el número de días que deben pasar para que vuelva a escribirle debe ser un múltiplo de 15, de la misma forma si a su tío le escribe cada 18 días, el número de días que deben pasar para coincidir nuevamente, debe ser múltiplo de 18. Por lo tanto, el número de días que deben pasar es múltiplo de 15 y de 18; y como se quiere que sea la primera vez que coincida nuevamente, debe ser el mínimo común múltiplo.
Por lo que la descomposición en factores es:

$$15 = 3 \times \boxed{5} = 3 \times 5$$
$$18 = \boxed{2} \times \boxed{3 \times 3} = 2 \times 3^2$$

Entonces, el mcm $= 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

De tal forma que le tocará volver a escribirles el mismo día dentro de 90 días.

1. Se repartirán equitativamente 90 cuadernos y 72 lápices entre la mayor cantidad de niños que se pueda. ¿Entre cuántos niños se pueden repartir? ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices recibirá cada niño?
2. Carlos hornea galletas y las empaqueta para venderlas; si ha hecho 90 galletas de vainilla y 60 de chocolate, y cada paquete debe ser idéntico, ¿cuál es el máximo número de paquetes que se pueden hacer?, ¿cuántas galletas de cada sabor debe tener un paquete cualquiera?
3. José va a jugar fútbol cada 6 días y Carlos cada 21 días. Si hoy coincidieron en ir a jugar, ¿cuántos días pasarán para que vuelvan a coincidir?
4. Para la fiesta de cumpleaños de Julia se quieren comprar vasos y platos. Los vasos vienen en paquete de 6 unidades, mientras que los platos en paquetes de 8 unidades; considerando que el número de platos y vasos debe ser el mismo y el mínimo posible, ¿cuál es la cantidad de platos y vasos que se tendrán?

3.8 Practica lo aprendido

1. Para los siguiente literales:
   a) 2, 3 y 4 b) 3, 5 y 15

   1. Escribe los primeros 10 múltiplos de cada número.
   2. Escribe los múltiplos comunes.
   3. Encuentra el mcm.

2. Para los siguientes literales:
   a) 18, 24 y 36 b) 16, 24 y 32

   1. Escribe todos los divisores de cada número.
   2. Escribe los divisores comunes.
   3. Encuentra el MCD.

3. Completa el espacio en blanco y responde a la pregunta:
   6 es divisor de 12. Entonces, 12 es ___________ de 6.
   24 es múltiplo de 8. Entonces, 8 es ___________ de 24.
   ¿7 es múltiplo de 7? Explica por qué.

4. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:
   4, 7, 9, 13, 21, 27, 32, 37, 39 y 41.

5. Descompone en factores primos los siguientes números:
   a) 18 b) 40 c) 42 d) 60

6. Encuentra el MCD por descomposición en factores primos:
   a) 12 y 18 b) 9 y 15 c) 16 y 20 d) 24 y 36

7. Encuentra el mcm por descomposición en factores primos:
   a) 6 y 8 b) 5 y 10 c) 6 y 15 d) 12 y 15

8. Resuelve los siguientes problemas:
   a) Se tienen 20 dulces de fresa y 24 de piña y se reparten de tal manera que el número de dulces de cada sabor sea el mismo en cada bolsita, ¿cuál es el mayor número de bolsitas que se pueden hacer?, ¿cuántos dulces de cada sabor tiene cada bolsa?

   b) Hay una cinta que tiene una graduación en cada 8 cm y otra en cada 12 cm, ¿en cuántos cm coinciden las graduaciones por primera vez en ambas cintas?