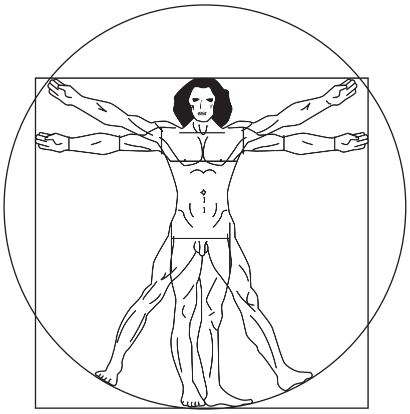
Proporcionalidad directa e inversa

Unidad 6

Los primeros aportes sobre matemática tienen en común que surgieron por la necesidad de resolver problemas; fue desde la época de los egipcios que se comenzaron a resolver algunos como "determinar la grasa que se necesita para un día, si para un año es necesaria cierta cantidad" esto con el fin de calcular las necesidades de un día en particular. Durante los primeros siglos, es en el escrito de *Los elementos* del matemático griego Euclides donde se formaliza en cierta medida el cálculo de proporciones; dicho concepto se ha ido estudiando y formalizando cada vez más a lo largo de la historia gracias a los aportes de diferentes matemáticos como los franceses Legendre o Lacroix.



Hombre de Vitruvio, pintura de Leonardo Da Vinci que representa proporciones en el cuerpo del ser humano.

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, es así que surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte, como es el caso del número de oro (proporción aurea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Ampliar los conocimientos en los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, partiendo de la motivación histórica de la resolución de un problema es uno de los objetivos, se profundizará en la representación gráfica en el plano cartesiano de la proporcionalidad directa e inversa, como una introducción al concepto de función. Además se estudiarán las aplicaciones de la proporcionalidad en diferentes contextos, hasta llegar a justificar la forma de aplicación en la regla de tres.

1.1 Conceptos de función

P

En cada situación donde hay dos variables x y y, identifica en las que se puede encontrar el valor de y cuando x toma un valor determinado.

Para identificarlo, se puede elaborar tablas, sustituyendo el valor de x por un número cualquiera.

a) Cuando la estatura de una persona es x cm, su peso es y kg.
b) Cuando la edad de una persona es x años, su estatura es y cm.
c) Cuando un vehículo recorre una velocidad a 40 km/h durante x horas, la distancia recorrida es y km.
d) Cuando se vierten x litros de agua en una cubeta de 0.75 kg, el peso total es y kg.
e) Cuando un rectángulo tiene 24 cm^2 de área, la base mide x cm y la altura mide y cm.

S

a) No. Aunque x sea 150 cm, no se sabe su peso y kg.
b) No. Aunque x es 13 años, no se sabe su estatura y cm.
c) Sí. x = 2 h, y = 40 × 2 = 80, 80 km.

x (h)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (km)	40	80	120	160	200	240	280	320

d) Sí. x = 3 l, y = 3 + 0.75 = 3.75, 3.75 kg.

x (l)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (kg)	1.75	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75

e) Sí. x = 4 cm, y = 24 ÷ 4 = 6, 6 cm.

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (altura, cm)	24	12	8	6	4.8	4	3.428...	3

C

Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es **función** de x.

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) x horas de estudio y el puntaje en el examen es y puntos.
   b) Cuando un diccionario pesa 2 libras, si hay x cantidad del mismo diccionario, el peso total es y libras.
   c) El recorrido entre dos municipios A y B cuya distancia es 50 km, la distancia recorrida es x km y la distancia faltante es y km.
   d) x años de experiencia en el trabajo y el sueldo es y dólares.
   e) Cuando se viaja 240 km con una velocidad de x km/h, y el tiempo es y horas.

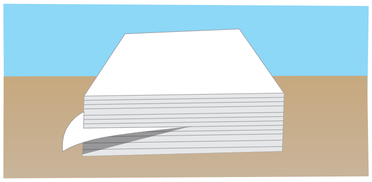
2. Redacta tres situaciones que involucren las variables x y y, donde y sea función de x.

El peso, cantidad de objetos, tiempo, velocidad, distancia, cantidad de agua en un recipiente, etc., son situaciones comunes para relacionar variables.

1.2 Concepto de proporcionalidad directa

P

Una resma de papel bond pesa 2 libras. Representa el peso y libras de x resmas de papel bond.



x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

a) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, 4,... ¿cómo cambia el valor de y?

b) ¿Cuál es el valor de $\frac{y}{x}$? ¿Es constante?

c) Representa y en términos de x.

Representar y en término de x es escribir $y = ax$, usando la variable x.

S

a) Tal como se muestra en la tabla, cuando el valor de x cambia multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente, también va cambiando al ser multiplicado por 2, 3, 4...

b) Tal como se muestra en la tabla, siempre resulta 2 y es constante.

c) Con el resultado de b), se sabe que el valor de y es x por 2, es decir $\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$.

	× 2	× 3	× 4				
x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
	× 2	× 2	× 2				
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...
	× 2	× 3	× 4				

C

En el Problema inicial, x y y se llaman **variables**, mientras la cantidad que no varía se llama **constante**, tal como es 2 en $y = 2x$. Cuando y es función de x y se expresa de la forma de $y = ax$, (a es constante) se dice que y es **directamente proporcional** a x. Al número a se le llama **constante de proporcionalidad**.

$$y = ax$$

constante

variables

Determina si y es directamente proporcional a x, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad.

a) Cuando un atleta camina por la playa 80 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.

x (minutos)	1	2	3
y (metros)	80		

b) Cuando una carnicería vende carne molida a \$2.50 por libra, el peso es x libras y el precio es y dólares.

x (libras)	1	2	3
y (dólares)	2.50		

c) Cuando se vierte agua a un ritmo de $\frac{3}{4}$ galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua es y galones.

x (minutos)	1	2	3
y (galones)			

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, y surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte como el caso del número de oro (proporción aúrea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Carrión, V., Llopis, L. y Queralt, T. *Música y matemática, La armonía de los números.*

Unidad 6

1.3 Valores que toman las variables

P

Piensa en los valores que pueden tomar las variables de la siguiente situación:

Para llenar una piscina rectangular a una altura (profundidad) de 120 cm, se vierte agua a un ritmo de 6 cm de altura (profundidad) por hora.

a) ¿Cuántas horas se necesitan para llenar 120 cm de altura?

b) Si el tiempo transcurrido del llenado de agua se expresa con x, ¿desde qué y hasta qué valor puede tomar la variable x?

c) Dado que la variable y representa la altura (profundidad) de agua, ¿desde qué y hasta qué valor tomaría la variable y?

x (horas)	0	1	2	3	4	...
y (cm)	0	6	12	18	24	...

S

a) Como cada hora se llena 6 cm; 120 ÷ 6 = 20, entonces, se necesitan 20 horas.

b) Desde 0 hasta 20 horas y esto se representa como $0 \leq x \leq 20$ y se lee "x es mayor o igual que 0 y menor o igual que 20".

c) Desde 0 hasta 120 esto se escribe $0 \leq y \leq 120$ y se lee "y es mayor o igual que 0 y menor o igual que 120".

x (horas)	0	1	2	3	4	...	20
y (cm)	0	6	12	18	24	...	120

C

En la proporcionalidad directa hay casos en que se limita el valor que pueden tomar las variables x y y, para representar ese límite se usan los signos de desigualdad (<, >, ≤, ≥).

Los valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** y los de y se llama **rango**. Estos término se retomarán en grados posteriores.

En las siguientes situaciones, representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.

a) Una carnicería que tiene 20 libras de carne molida y el precio es \$2 por libra, el peso vendido es x libras y la venta es y dólares.

x (libras)	0	1	2	3	4	...	20
y (dólares)	0	2	4	6	8	...	

b) En una pila cuya capacidad máxima es de 20 galones se vierte agua a un ritmo de 0.5 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	
y (galones)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	...	

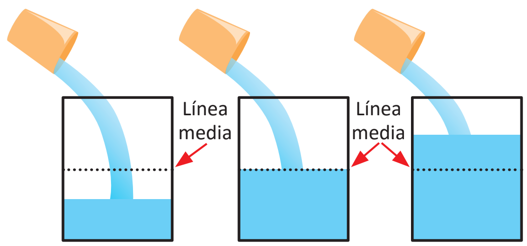
c) Cuando en una alcancía caben 200 monedas de \$0.25 como máximo, la cantidad de monedas de \$0.25 es x monedas y el monto de monedas es y dólares.

x (monedas)	0	1	2	3	4	...	
y (dólares)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	...	

1.4 La proporcionalidad directa con valores negativos en las variables

P

Tal como se muestra en el dibujo, se vierte agua a un ritmo de 2 cm de altura (profundidad) por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos, y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, encuentra la relación entre x minutos después y la altura y cm arriba de la línea media, y realiza lo siguiente:



Hace 3 min. (−3 min.) | Ahora (0 min.) | Dentro de 3 min. (+3 min.)

a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)				−2	0	2			

Cuando x es −4, significa 4 minutos antes, si y es negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente.

b) ¿Puede representarse la altura y cm de la forma $y = ax$?

c) ¿Se puede decir que y es directamente proporcional a x?

S

a)

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8

b) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

c) Sí, porque se pudo representar de la forma de $y = ax$, además, cumple que cuando el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia multiplicándose por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de −1 a −3 (−1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de −2 a −6 (−2 multiplicado por 3).

C

Aunque las variables tomen valores negativos, las características de proporcionalidad siempre se cumplen, es decir, en la proporcionalidad directa, las variables pueden tomar valores negativos.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se vierten 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)					0	4			

b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables x y y.

c) Determina si y es directamente proporcional a x.

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	3			

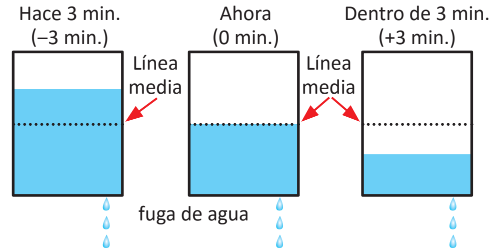
b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	2.5			

1.5 La proporcionalidad directa con constante negativa

P

Tal como se muestra en el dibujo, hay fuga de agua a un ritmo de 2 cm de altura por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, determina la relación entre x minutos después y la altura y cm, con respecto a la línea media. Además:



a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)			4	2	0	−2	−4		

b) Escribe la relación entre las variables de la forma de $y = ax$.
c) Determina si y es directamente proporcional a x.

Cuando x toma el valor −4, significa 4 minutos antes, si y toma un valor negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente. Recuerda que puedes encontrar la constante calculando $\frac{y}{x}$, ¿puede ser negativa?

S

a)

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

× 4 × 3 × 2 × 2 × 3 × 4 × (−2)

b) Como la constante es −2, entonces, $y = -2x$.

c) Como se pudo representar la relación en la forma $y = ax$, se concluye que y es directamente proporcional a x, además, cumple que si el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia siendo multiplicado por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de 1 a 3 (1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de −2 a −6 (−2 multiplicado por 3).

C

En la proporcionalidad directa, hay casos en que su constante es negativa. Es decir, en el valor de $y = ax$, a puede tomar valor negativo ($a < 0$).

Es por eso que en la proporcionalidad directa no se dice que si una cantidad aumenta la otra también aumenta, sino que se dice que **cambia**. Ya que, en este caso, una cantidad aumenta y la otra disminuye; sin embargo, siempre tienen una relación de proporcionalidad directa.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se pierden 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)					0	−4			

b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables.
c) Escribe si y es directamente proporcional a x.

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	−3			

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y					0	−1.5			

1.6 Representación en la forma $y = ax$ a partir de un par de valores para x y y

P

Si y es directamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 12$, representa en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente se necesita encontrar el valor de a.

S

Se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Se tiene que $x = 4$, $y = 12$, se sustituyen en $y = ax$.

$$12 = 4a$$
$$4a = 12$$
$$a = 3$$

Entonces, $y = 3x$.

C

Para representar la relación de la proporcionalidad directa en la forma de $y = ax$, a partir de un par de valores de variables, se realizan los siguientes pasos:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

   a) $x = 2$, $y = 14$ b) $x = 2$, $y = 5$ c) $x = 3$, $y = 12$

   d) $x = -3$, $y = -9$ e) $x = 2$, $y = -20$ f) $x = 6$, $y = -9$

2. Redacta para cada literal una situación de proporcionalidad directa que se represente con la siguiente expresión:

   a) $y = 5x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -2x$

Unidad 6

1.7 Practica lo aprendido

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) La edad de una persona es x años y el peso de la misma persona es y libras.
   b) El número de años que tiene un árbol de mango es x años y la cantidad de la cosecha de mango es y quintales.
   c) Para una persona que camina 40 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.
   d) Cuando un metro de varilla de hierro pesa 0.5 libras, la longitud es x metros y el peso y libras.
   e) Cuando en la alcancía hay $50.00, el dinero gastado es x dólares y el restante es y dólares.
   f) Un prisma rectangular cuya área de su base es de 6 cm^2, la altura es x cm y el volumen es y cm^3.

2. En cada tabla y es directamente proporcional a x. Realiza lo siguiente:
   a) Completa la tabla. b) Encuentra la constante. c) Representa la relación entre las variables como $y = ax$.

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	4	8			...	

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0			12		...	

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y						0	−2	−4			

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y					−5	0	5				

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	$\frac{3}{4}$				...	

3. En la siguiente situación, escribe los valores que toman las variables x y y:
   En una pila cuya capacidad máxima es de 30 galones, se vierte a un ritmo de 2 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.

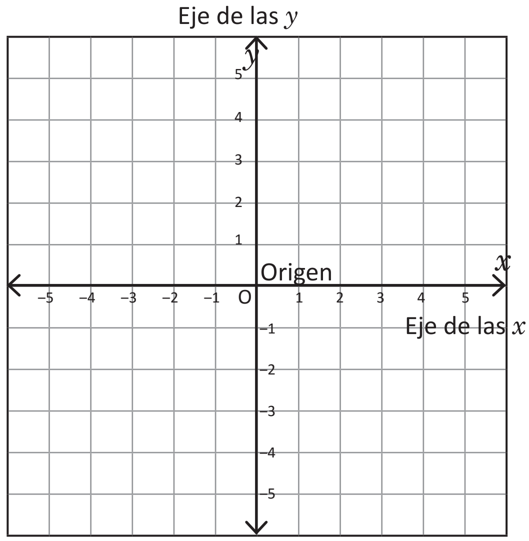
4. Si y es directamente proporcional a x, representa en la forma de $y = ax$, la información de cada literal.
   a) Cuando $x = 4$, $y = 12$
   b) Cuando $x = 4$, $y = -16$
   c) Cuando $x = -2$, $y = 12$
   d) Cuando $x = -12$, $y = -24$

5. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes oraciones sobre proporcionalidad directa. En caso que sea falso, corrígela para que sea verdadero.
   a) Cuando y es directamente proporcional a x, si la variable x aumenta, la otra variable y siempre aumenta.
   b) Cuando una función se representa por $y = -3x$, y no es directamente proporcional a x ya que la constante no puede ser negativa.
   c) Si y es directamente proporcional a x, y su relación se representa por $y = 3x$, entonces, cuando $x = 7$, $y = 10$.

1.8 El plano cartesiano

P

Al trazar dos rectas numéricas que se intersectan perpendicularmente en el punto O, y llamar a la recta horizontal **eje de las x** (o abscisas), a la recta vertical **eje de las y** (o de las ordenadas), y al punto de intersección de ambas rectas **origen**, representado por la letra O correspondiente al valor 0 en x y en y, se obtiene el siguiente plano:

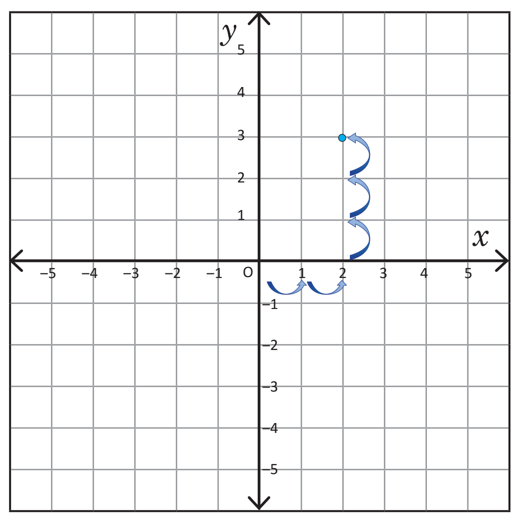


A este plano se le llama plano cartesiano.

¿Cómo se puede representar en el plano cartesiano el punto A, cuya posición está representada por $x = 2$ y $y = 3$?

S

Para ubicar el punto A, $x = 2$ y $y = 3$, partiendo del punto de origen O, primero se desplaza 2 posiciones hacia la derecha para ubicar el valor $x = 2$, y luego 3 posiciones hacia arriba para ubicar $y = 3$.



C

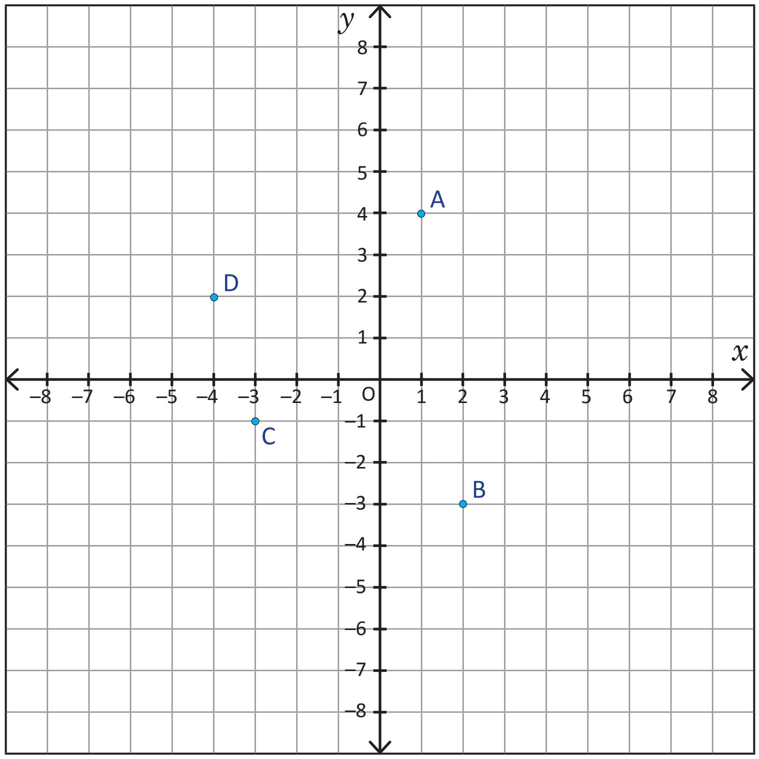
Este par de números del punto A, se escriben como A(2, 3) y se llama **par ordenado** del punto A. El punto de origen O siempre representa (0, 0).

En general, los valores que representan a un punto P en el plano cartesiano, se llaman **coordenadas** del punto P. En el problema anterior las coordenadas del punto A son $x = 2$ y $y = 3$.

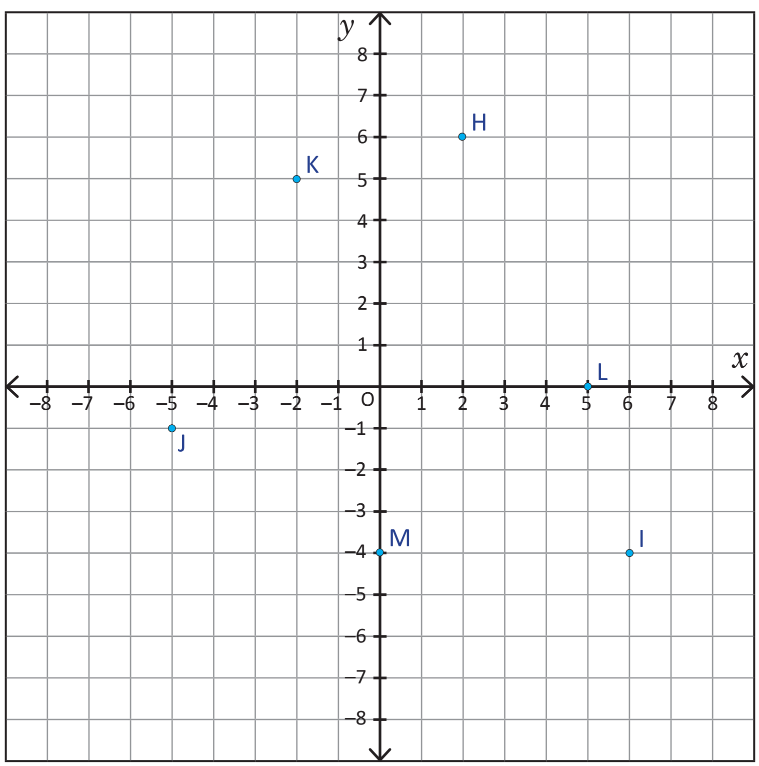
Para representar un punto en el plano cartesiano, se debe realizar el procedimiento presentado.

Unidad 6

1. En el plano cartesiano, lee y escribe los puntos A, B, C y D, y ubica los puntos E(3, 6), F(−4, 5) y G(−3, 5). Ejemplo: A(1, 4).



2. Escribe las coordenadas de los siguientes puntos: H, I, J, K, L y M.



3. En el plano cartesiano, ubica los siguientes puntos:

a) N(3, 4) b) P(3, −4) c) Q(−4, −5)

d) R(−2, 2) e) S(2, 0) f) T(0, 4)

1.9 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 1

P

En sexto grado aprendiste a graficar la proporcionalidad directa cuando el valor de x es mayor o igual que cero ($x \geq 0$). Ahora piensa cómo se grafica cuando x toma valores negativos.

En la siguiente tabla se muestran pares ordenados de x y y, que están en proporcionalidad directa: $y = 2x$.

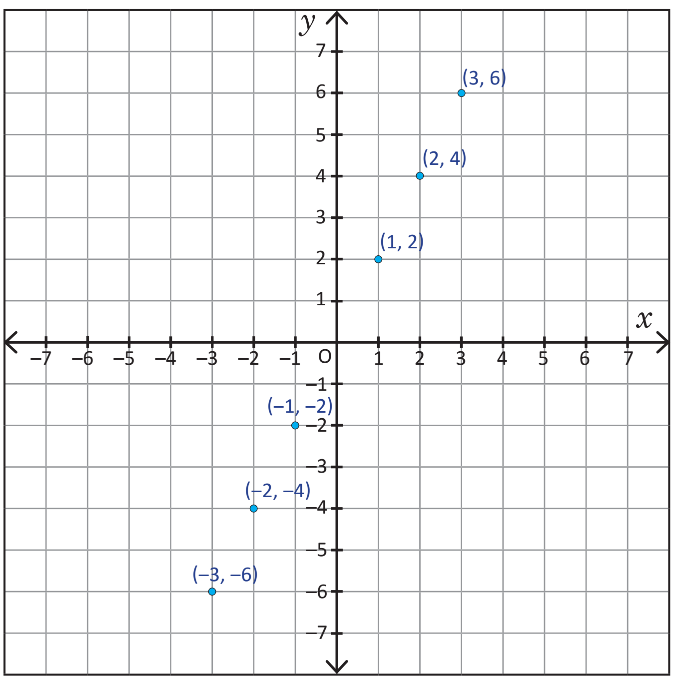
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

a) Ubica los pares ordenados de la tabla anterior en el plano cartesiano.
b) Ubica los siguientes pares ordenados en otro plano cartesiano.

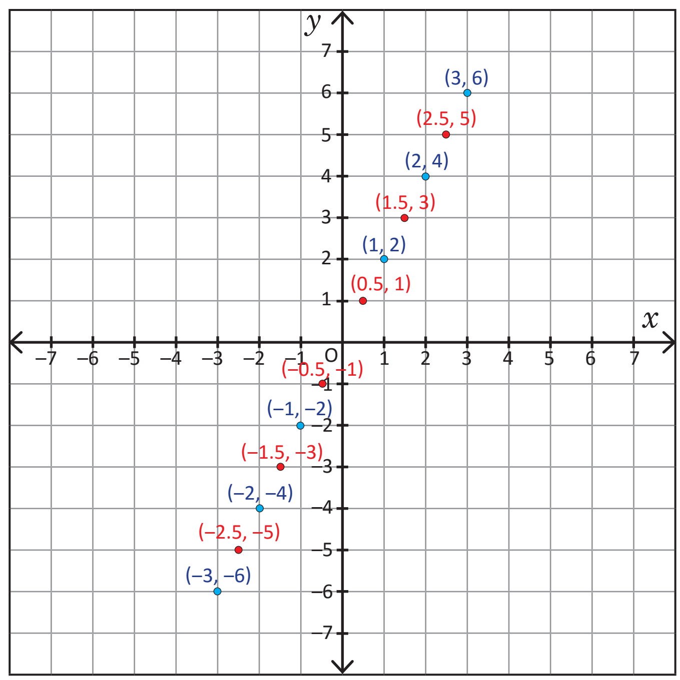
x	...	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	...
y	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...

S

a)



b)



C

Tal como se muestra en la Solución, al colocar los pares ordenados que corresponden a $y = 2x$, estos puntos se ubican en una línea recta y al colocar más puntos, se forma una línea recta. A esta recta se le llama gráfica de $y = 2x$.

Elabora la gráfica de $y = 3x$, a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...										...

1.10 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 2

P

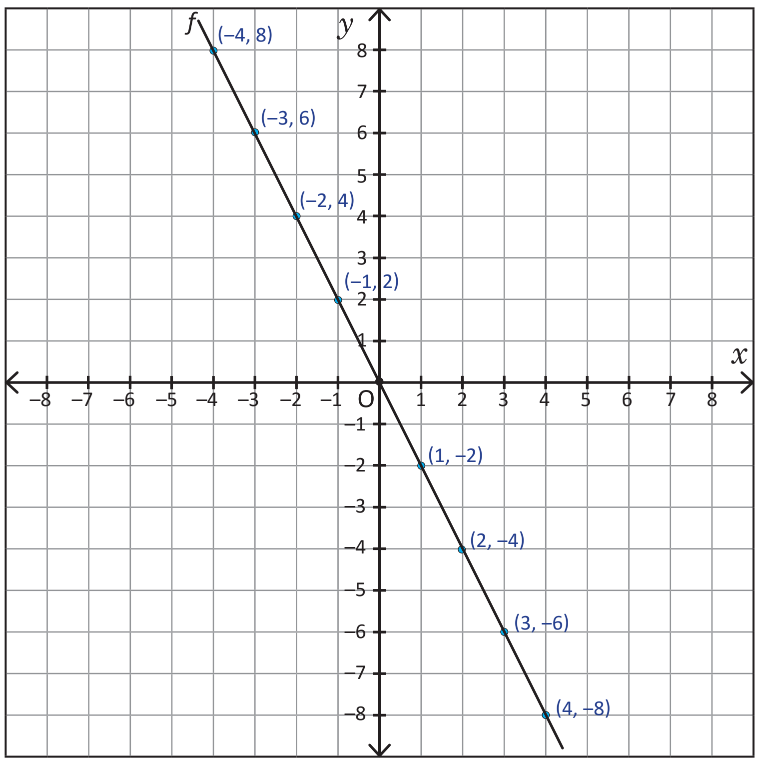
Elabora la gráfica de $y = -2x$ y luego responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto común por el que pasan las gráficas de proporcionalidad directa, comparado con las gráficas elaboradas en la clase anterior?

b) ¿Cuántos puntos se necesitan saber para elaborar la gráfica de una proporcionalidad directa? ¿Cuáles son?

S

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	...



Para encontrar un punto, se puede sustituir un valor entero de x en $y = ax$, y luego calcular y.

a) Los puntos se ubican en una línea recta y siempre pasan por el punto de origen O(0, 0).

b) Se necesitan 2 puntos, el punto de origen y otro punto.

C

Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen O(0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por estos puntos.

Elabora una gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = -4x$

b) $y = 4x$

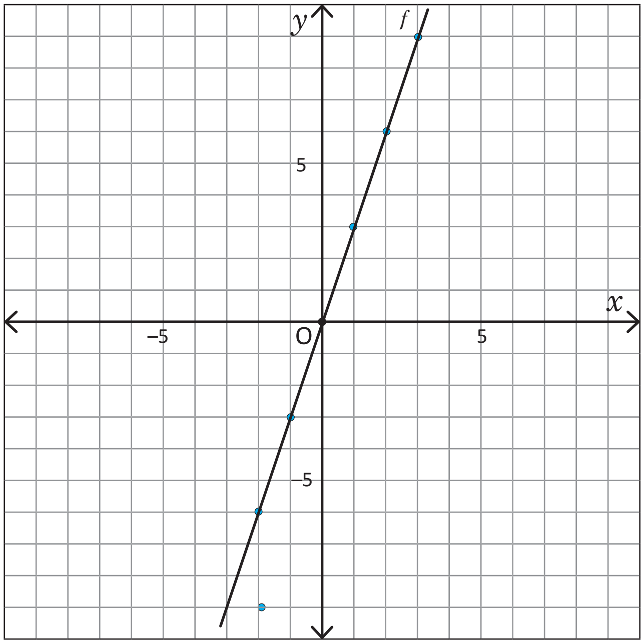
c) $y = -1.5x$

d) $y = -\frac{2}{3}x$

1.11 Representación $y = ax$ de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica

P

A continuación, se presenta la gráfica de la proporcionalidad directa. Escribe esta relación en forma de $y = ax$.



En la clase 6 de esta unidad aprendiste cómo expresar en la forma $y = ax$, la relación de dos variables a partir de un par ordenado.

Sustituyendo un par ordenado en $y = ax$, se puede encontrar la constante a.

S

Solución 1:
Como la gráfica pasa por el punto (1, 3), sustituye en x y y.

$$y = ax$$
$$3 = 1a$$
$$3 = a$$

Entonces, $y = 3x$.

Solución 2:
Como la gráfica pasa por el punto (–2, –6), sustituye por x y y.

$$y = ax$$
$$-6 = -2a$$
$$3 = a$$

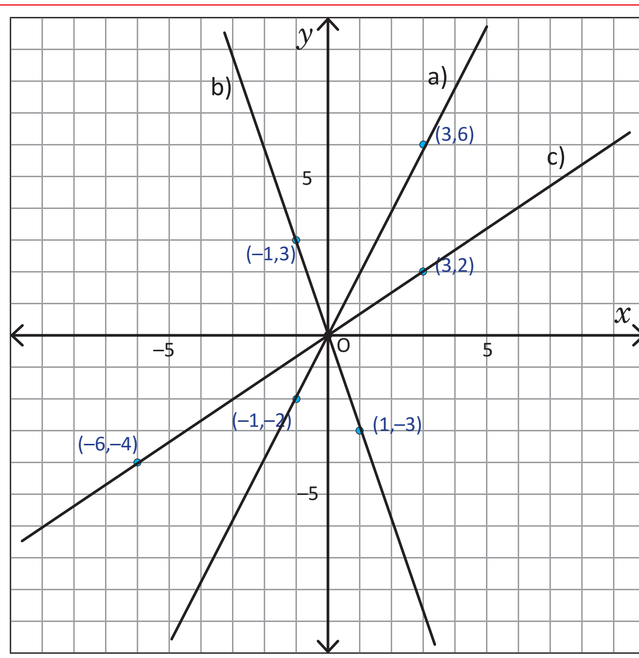
Entonces, $y = 3x$.

C

Para escribir $y = ax$ a partir de la gráfica:

1. Eligir un punto diferente del origen (par ordenado) por el que pasa la gráfica, cuyos valores sean números enteros.
2. Sustituir el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y encontrar el valor de la constante a.
3. Escribir $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado en 2.

Determina $y = ax$, para cada literal a partir de las siguientes 3 gráficas de proporcionalidad directa.



Unidad 6

1.12 Gráfica de proporcionalidad directa cuando las variables toman ciertos valores

P

En una pila cuya capacidad máxima es de 12 galones, se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto. Si se expresa el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila como y galones:

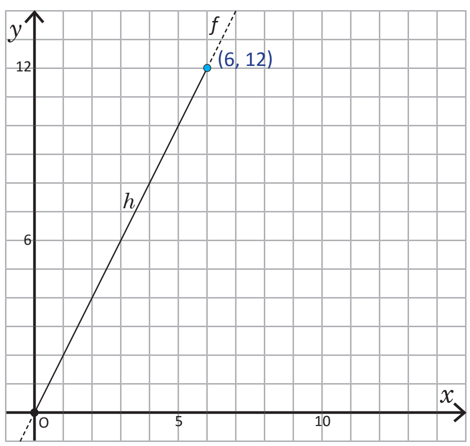
a) Escribe $y = ax$.
b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

S

a) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

b) Para verter los 12 galones, se tarda 6 minutos, por lo que el tiempo x toma los valores $0 \leq x \leq 6$; mientras que la cantidad de agua y, tiene los valores $0 \leq y \leq 12$.

c)



C

Para los valores de las variables que están limitados, se toma la parte correspondiente de la gráfica. Para los valores que están fuera del límite se pueden representar con una línea punteada.

Grafica las siguientes situaciones de proporcionalidad directa:

1. Para viajar 8 km se camina 2 km por hora. Dado que la hora se expresa como x horas y la distancia recorrida con y km:

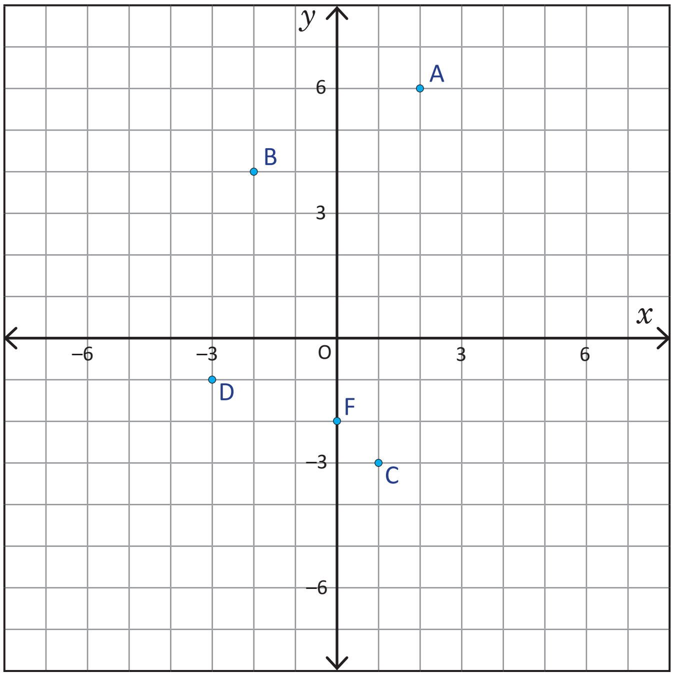
   a) Escribe $y = ax$.
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

2. Un recipiente en el cual caben 8 litros está lleno de agua, pero hay una fuga en la que se pierden 0.5 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como x minutos y la cantidad de agua que se ha fugado del recipiente como y litros, realiza lo siguiente:

   a) Escribe $y = ax$.
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

1.13 Practica lo aprendido

1. Escribe los siguientes puntos en pares ordenados.

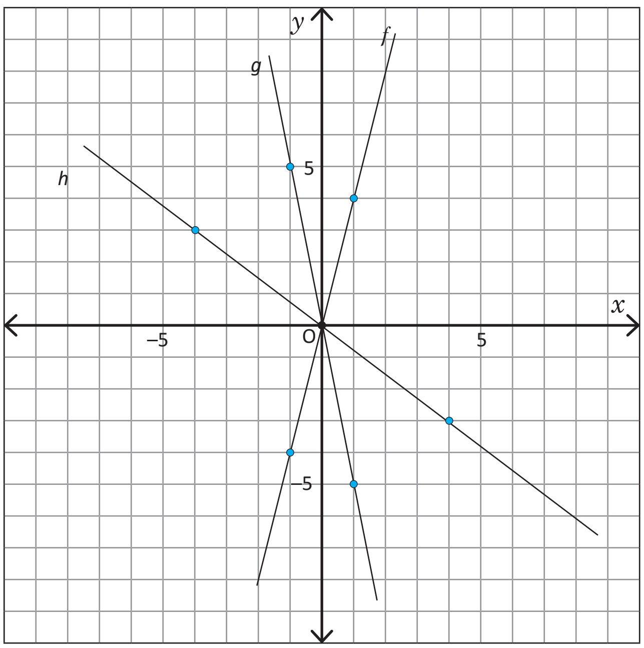


2. Elabora la gráfica a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	...

3. Si y es directamente proporcional a x, elabora la gráfica para los siguientes casos:
   a) $y = 3x$ b) $y = -3x$

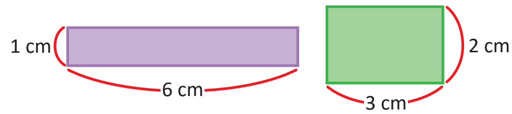
4. Para cada una de las gráficas de proporcionalidad directa, escribe en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.



2.1 Concepto de la proporcionalidad inversa

P

Se tienen varios cuadriláteros cuya área es de 6 cm², considerando que la medida de la base es x cm y la altura es y cm, haz lo siguiente:



a) Completa la tabla:

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6			1.5	1.2		...

b) Cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?
c) ¿Cómo se llama esta relación?
d) Expresa el área con x y y.
e) Despeja y en la expresión del inciso d).

S

a)

× 2 × 3 × 4

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6	3	2	1.5	1.2	1	...

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

b) Tal como se muestra, cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., y cambia por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... respectivamente.

c) A esta relación se le conoce como proporcionalidad inversa.

d) $6 = xy$.

e) Al despejar y, se obtiene $y = \frac{6}{x}$.

C

Cuando y es función de x y se expresa en forma de $y = \frac{a}{x}$ o ($xy = a$) (a es constante y x no se considera 0), se dice que y es inversamente proporcional a x. Al número a se le llama constante de la proporcionalidad. En la proporcionalidad inversa, cuando una variable x se multiplica por 2, 3, 4..., la otra variable y se multiplica por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... Y para encontrar la constante a, se multiplica xy.

Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.

a) En un recorrido de 12 km, la velocidad es x km/h y el tiempo es y horas.

b) Si se dispone de $20, el dinero que se gasta es x dólares y el que sobra es y dólares.

c) Cuando una cinta de 8 cm de longitud se reparte equitativamente entre x personas. El número de personas x y la longitud de la tira de cada persona es y cm.

2.2 Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables

P

Encuentra los valores de las variables que están en proporcionalidad inversa y realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla cuyos valores tienen la siguiente relación $y = \frac{12}{x}$ $(xy = 12)$, considera algunos valores negativos para x. Luego responde las preguntas.

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...					−6			12				2.4		...

b) Cuando $0 < x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

c) Cuando $0 > x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

d) Cuando x toma valores negativos, ¿se observan las mismas características de la proporcionalidad inversa descubiertas en la clase anterior?

S

a)

× 4 × 3 × 2 × 2 × 3 × 4

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	−2	−2.4	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	2.4	2	...

$\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

b) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

c) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

d) Aunque la variable x tome valores negativos, el valor de la variable y correspondiente va cambiando por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

C

Cuando y es inversamente proporcional a x, aunque x tome valores negativos, las características se mantienen.

E

Si $y = -\frac{6}{x}$, ¿es y inversamente proporcional a x?

× 3 × 2 × 2 × 3

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	2	3	6		−6	−3	−2	...

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$

$y = -\frac{6}{x}$ significa $y = \frac{-6}{x}$, es decir, la constante es negativa (−6).

En la proporcionalidad inversa la constante puede ser negativa.

Completa las tablas e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.

1.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...		−2.6...		−8		8		2.6...		...

2.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...						− 12				...

Unidad 6

2.3 Representación en la forma $y = \frac{a}{x}$ a partir de un par ordenado

P

Si y es inversamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 6$, representa en la forma $y = \frac{a}{x}$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente basta encontrar el valor de a.

S

Como se sabe se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Utilizando $y = \frac{a}{x}$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $6 = \frac{a}{4}$

$$a = 6 \times 4$$
$$a = 24.$$

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Utilizando $xy = a$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $4 \times 6 = a$

$$a = 24.$$

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

C

Para representar la relación de proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{a}{x}$, a partir de algunos valores determinados de las variables:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = \frac{a}{x}$.

1. Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

   a) Cuando $x = 3$, $y = 5$ b) Cuando $x = 4$, $y = 2$ c) Cuando $x = -2$, $y = 7$ d) Cuando $x = 6$, $y = -3$

   e) Cuando $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$ f) Cuando $x = -3$, $y = -\frac{2}{3}$ g) Cuando $x = -12$, $y = \frac{2}{3}$

2. Redacta una situación de proporcionalidad inversa, la cual se represente con

$$y = \frac{16}{x}.$$

2.4 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es positiva

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$ ($xy = 12$) haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

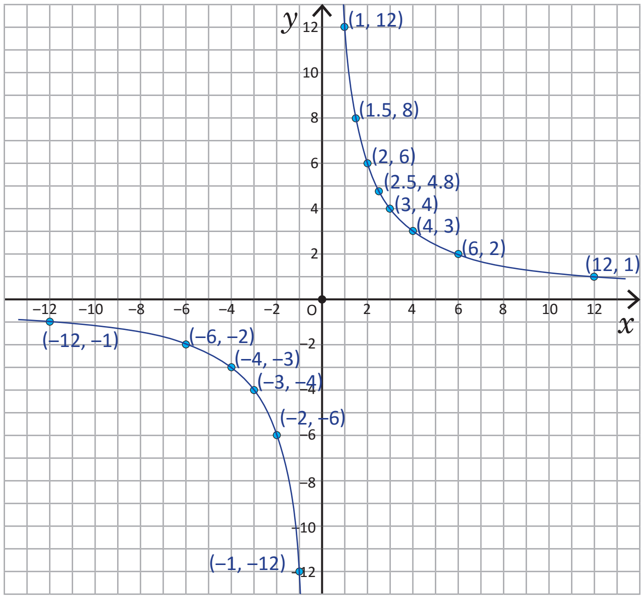
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			−6			12				...		...		...

S

a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	−1	...	−2	...	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	...	2	...	1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, 8), (2.5, 4.8), (−1.5, −8), (−1.25, −9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



C

La gráfica de proporcionalidad inversa consta de dos líneas curvas.

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = \frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...		...		−3			6			...		...

b) $y = \frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...		...		...			−9		9			...		...		...

Unidad 6

2.5 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es negativa

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = -\frac{12}{x}$ ($xy = -12$) haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

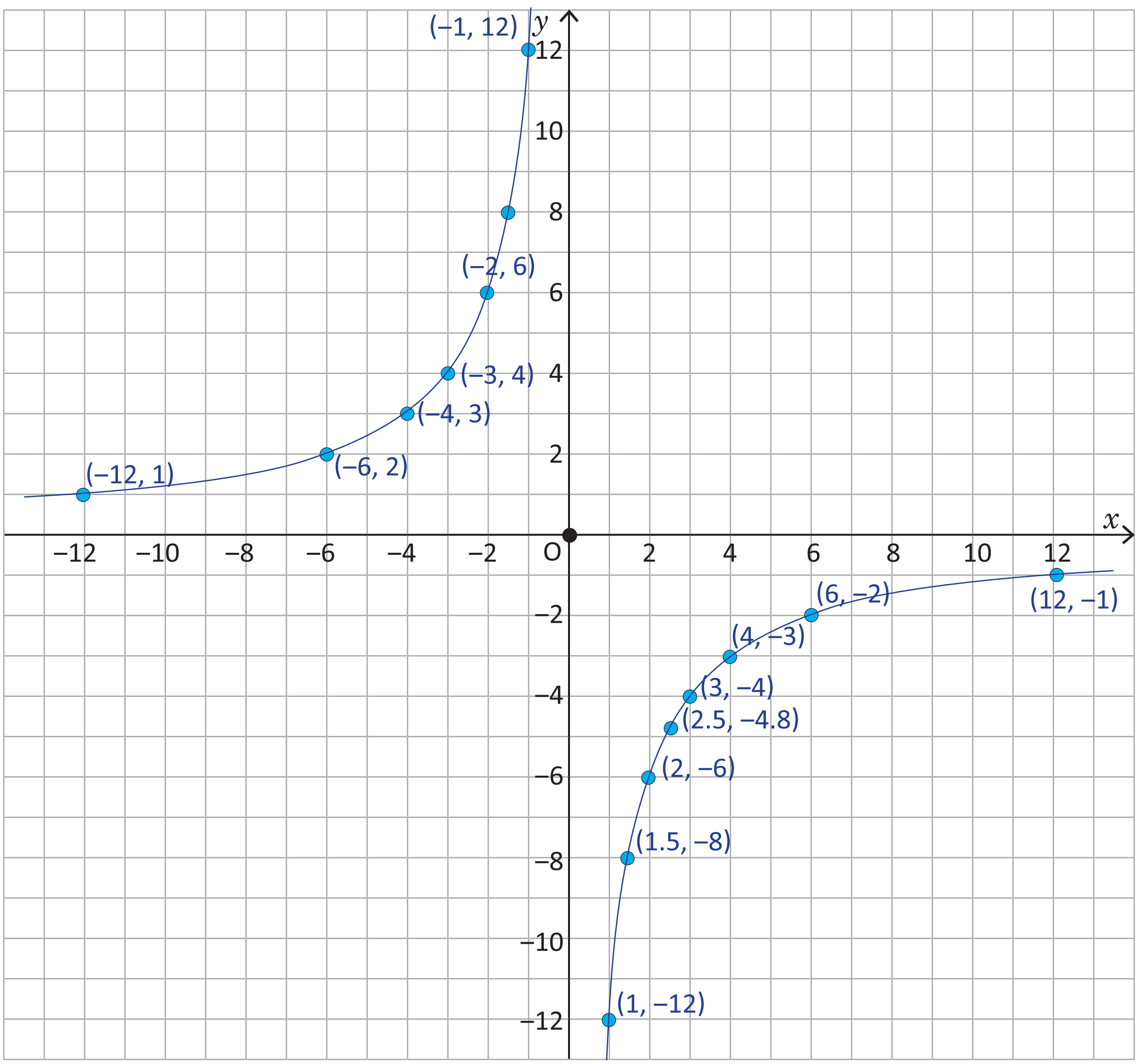
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			6			−12				...		...		...

S

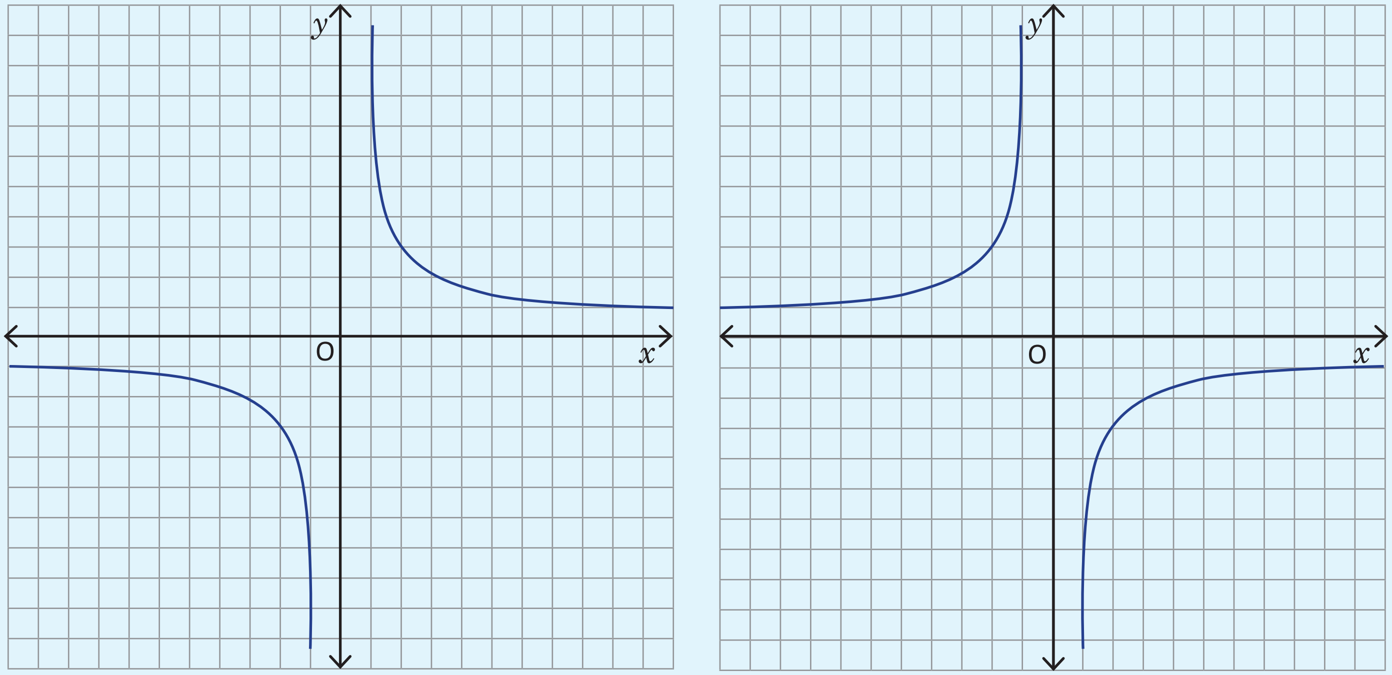
a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	1	...	2	...	3	4	6	12		−12	−6	−4	−3	...	−2	...	−1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, −8), (2.5, −4.8), (−1.5, 8), (−1.25, 9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



La gráfica de proporcionalidad inversa depende del valor de la constante a, tal como se muestra a continuación:



($a > 0$) ($a < 0$)

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = -\frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...		...		3			−6			...		...

b) $y = -\frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...		...		...					−9			...		...		...

Unidad 6

3.1 Regla de tres simple directa

P

La siguiente tabla representa dos variables directamente proporcionales, pero se han manchado ciertas partes con tinta negra. Encuentra el valor de y que corresponde a x = 6.

x		3		6			...
y		12				36	...

Puedes usar la idea de la propiedad fundamental de las proporciones:

si $\boldsymbol{a : b = c : d}$, entonces $\boldsymbol{ad = bc}$.

O también puedes usar la constante de proporcionalidad.

S

Usando la propiedad fundamental de proporcionalidad.

$$3 : 12 = 6 : d$$

$$3d = 12 \times 6$$

$$d = 24$$

Usando la constante de la proporcionalidad. Como x y y son directamente proporcionales, $\frac{y}{x} = a$ y a es constante, entonces:

$$\frac{12}{3} = \frac{d}{6}$$

$$d = \frac{12}{3} \times 6$$

$$d = 24$$

C

Cuando hay dos cantidades directamente proporcionales, y un dato desconocido, se puede encontrar el valor del dato desconocido usando las soluciones presentadas. A este proceso se le llama **regla de tres simple directa**. Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se puede hacer lo siguiente:
1. Formar una proporción $\boldsymbol{a : b = c : d}$.
2. Aplicar $\boldsymbol{ad = bc}$.
3. Despejar el dato desconocido.

E

En la tabla del Problema inicial, encuentra el valor de x que corresponde a y = 36, usando regla de tres simple directa.

Solución.

x	3	c
y	12	36

Forma 1

$$3 : 12 = c : 36$$

$$12c = 3 \times 36$$

$$c = 9$$

Forma 2

$$\frac{12}{3} = \frac{36}{c}$$

$$c = \frac{3 \times 36}{12}$$

$$c = 9$$

Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores a, b, c y d aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	a	...	8	9	...	12	...	c	...	25
y	...	28	...	56	b	...	84	...	147	...	d

3.2 Regla de tres simple directa con porcentaje

P

La tabla muestra el número de estudiantes y que corresponde al x%. Analiza si y es directamente proporcional a x, y en caso afirmativo, aplica la regla de tres simple directa para encontrar el número de estudiantes que corresponde al 90%.

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

S

× 5

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

× 5

Si son directamente proporcionales, entonces se aplica la regla de tres simple directa para encontrar la incógnita d.

$$10 : 5 = 90 : d$$
$$10d = 5 \times 90$$
$$d = 45$$

$$\frac{5}{10} = \frac{d}{90}$$
$$d = \frac{5 \times 90}{10}$$
$$d = 45$$

C

En situaciones que involucren porcentajes, se puede aplicar la regla de tres simple directa.

E

Encuentra el valor de la incógnita de cada caso, aplicando la regla de tres simple:

a) A una reunión donde se convocó a 125 personas, asistieron solamente el 80% de personas convocadas, ¿cuántas personas asistieron?

Porcentaje	80	100
Personas	b	125

$$80 : b = 100 : 125$$
$$100b = 80 \times 125$$
$$b = 100$$

$$\frac{b}{80} = \frac{125}{100}$$
$$b = \frac{80 \times 125}{100}$$
$$b = 100$$

b) En una escuela hay 750 estudiantes, ¿cuál es el porcentaje de niñas, si en total son 450?

Porcentaje	a	100
Personas	450	750

$$a : 450 = 100 : 750$$
$$750a = 450 \times 100$$
$$a = 60$$

$$\frac{450}{a} = \frac{750}{100}$$
$$a = \frac{450 \times 100}{750}$$
$$a = 60$$

Encuentra la cantidad desconocida en cada problema, aplicando la regla de tres simple directa.

a) En un estudio de preferencia entre mango verde y maduro, se encuestaron a 150 personas y el 60% prefiere mango verde. ¿Cuántas personas respondieron que prefieren mango verde?

b) Un recipiente de forma cilíndrica está lleno de agua hasta 16 cm de profundidad y corresponde al 40% de la profundidad del recipiente, ¿de cuántos centímetros es la profundidad de este recipiente?

3.3 Regla de tres simple directa en conversión de unidades

Existe relación de proporcionalidad directa en conversión de medidas. Aplica la regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada caso.

a) Peso (aproximado)

Libras	1	4
Gramos	454	d

b) Capacidad (aproximada)

Galones	1	2
Litros	b	7.58

c) Volumen

Litros	a	2
cm^3	1 000	2 000

En todos los casos existe una relación directamente proporcional entre las variables. Entonces, aplicando la regla de tres simple directa se tiene:

a) Peso (aproximado)

$$1 : 454 = 4 : d$$
$$d = 4 \times 454$$
$$d = 1\,816$$

Opcionalmente

$$\frac{454}{1} = \frac{d}{4}$$
$$d = \frac{4 \times 454}{1}$$
$$d = 1\,816$$

b) Capacidad (aproximada)

$$1 : b = 2 : 7.58$$
$$2b = 7.58$$
$$b = 3.79$$

Opcionalmente

$$\frac{b}{1} = \frac{7.58}{2}$$
$$b = \frac{7.58}{2}$$
$$b = 3.79$$

c) Volumen

$$a : 1\,000 = 2 : 2\,000$$
$$2\,000a = 2 \times 1\,000$$
$$a = 1$$

Opcionalmente

$$\frac{1\,000}{a} = \frac{2\,000}{2}$$
$$a = \frac{2 \times 1\,000}{2\,000}$$
$$a = 1$$

En situaciones de conversión de unidades se puede aplicar regla de tres simple directa, tanto en el mismo sistema métrico como entre diferentes sistemas de medidas.

1. Aplica regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada conversión.

a) Área (aproximada)

m^2	1	5
v^2	0.7	d

b) Longitud

m	1	c
cm	100	600

c) Tiempo

Horas	1	c
Minutos	60	150

d) Volumen

m^3	1	3
cm^3	a	3 000 000

2. Responde lo siguiente:

a) ¿A cuántos metros por minuto equivale la velocidad 36 km por hora?

b) ¿A cuántos kilómetros por hora corresponde la velocidad de un atleta que corre 100 m en 10 segundos?

3.4 Practica lo aprendido

1. En una tienda hay un rótulo que dice “Hoy nosotros pagamos el IVA”. Si se compra un artículo que cuesta $90.40, incluyendo el IVA que es 13%, ¿cuánto se debe pagar?

Porcentaje	100	113
Precio	b	90.40

IVA significa Impuesto al Valor Agregado. En El Salvador es del 13% y como es agregado, el precio incluyendo el IVA se expresa 113%. Como es una situación de porcentaje, se puede aplicar regla de tres simple directa.

2. En una tienda hay un rótulo que dice “El segundo artículo a mitad de precio”. Si una persona desea comprar un artículo con precio de $18 y otro con precio de $14, considerando que el descuento se hace al artículo de menor precio, ¿cuánto debe pagar la persona?

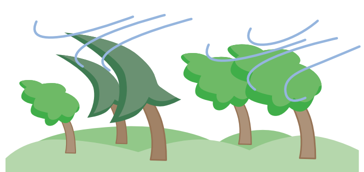
Por lo general, al artículo más barato se le dice segundo artículo. “A mitad de precio” significa que se descuenta el 50% o le toca pagar el 50% del precio.

3. Otra tienda tiene un rótulo que dice “El segundo artículo con el 20% de descuento y el tercer artículo con el 40% de descuento”. Si una persona compra el primer artículo, cuyo precio es $50, el precio del segundo es $40 y del tercero es $30, ¿cuánto debe pagar?

4. En un centro escolar se reparte un boletín informativo (una hoja por estudiante). Al profesor Carlos le toca separar las hojas por grado, según el número de estudiantes, pero quiere evitar el conteo de todas ya que es bastante. ¿Cómo puede separarlas, si el peso de 12 hojas es 5 gramos?

		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Boletín (hojas)	12	120	144	156	156	180	192	228	240	204
Peso (g)	5									

5. Si un frente frío provoca vientos con velocidad de 100 kilómetros por hora, ¿a cuántos metros por segundo equivale?



Recuerda que una hora es 60 minutos, 1 minuto es 60 segundos, 1 kilómetro es 1 000 metros.

6. La dueña de una pupusería, para asegurar la ganancia, quiere dejar el costo de los ingredientes en el 20% del precio de venta de una pupusa. Si para preparar 50 pupusas de quesillo se necesita $1.50 de harina de maíz, $1.50 de quesillo y $1.00 de aceite, ¿cuánto debe ser el precio de una pupusa con quesillo?

Se considera el precio de una pupusa con quesillo como el 100%.

3.5 Aplicación de la regla de tres simple inversa

P

Una cooperativa de café piensa comprar una maquinaria pequeña para lavar el café, asumiendo cada productor la misma cantidad de dinero. Si solo son 2 productores, a cada uno le toca pagar $600. Para que el costo por productor sea $75, ¿cuántos productores deben aportar?

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

S

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

El costo total es xy, que es constante, por lo tanto, es una relación de proporcionalidad inversa. Entonces:

$$2 \times 600 = 75c$$
$$75c = 1200$$
$$c = 16$$

C

Cuando hay dos cantidades inversamente proporcionales, y hay dos pares de ellas (4 cantidades) con tres conocidas y una desconocida, se puede encontrar el valor de este dato usando la solución presentada. A este proceso se le llama r**egla de tres simple inversa**.

Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se debe hacer lo siguiente:

1. Establecer una igualdad basándose en la idea de constante: $\boldsymbol{ab = cd}$.
2. Despejar el dato desconocido.

Aplica la regla de tres simple inversa para responder las siguientes preguntas, usando la misma situación del Problema inicial.

a) Para que el costo por productor sea $50, ¿cuántos productores se deben reunir?

b) Para que el costo por productor sea $30, ¿cuántos productores se deben reunir?

c) Cuando se reunen 60 productores, ¿cuánto dinero le toca a cada productor?

Productor (x)	2	...	a	...	b	...	60
Costo por productor (y)	600	...	50	...	30	...	c