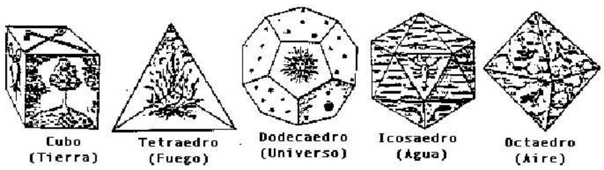
Unidad 8

Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos



Concepción platónica de los poliedros como regidores del Universo.

El conocimiento y uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos, algunos registros suponen el trabajo con los poliedros regulares desde el periodo neolítico (aproximadamente 1500 a. C.) en el cual se identificaron poliedros regulares labrados en piedra, estos cinco poliedros fueron considerados por los pitagóricos como perfectos y aunque no demostraron que eran los únicos, sí sabían que solo existían esos; con el aporte de Platón y la justificación de este resultado en el libro *Los elementos* de Euclides es que logra quedar establecido.

Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran las pirámides, cilindros, cubos, prismas, entre otros.

Gran Pirámide de Giza, construida por los antiguos egipcios.

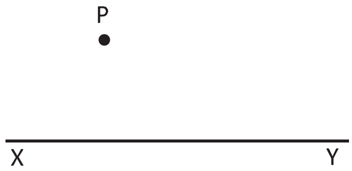
En esta unidad aprenderás sobre figuras planas, el estudio de los triángulos y la construcción de algunas rectas notables con regla y compás; el estudio de la circunferencia, además de lo correspondiente a los poliedros regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos. Se hará un análisis de las rectas y planos en el espacio para establecer los patrones y las proyecciones de los cuerpos geométricos.

1.1 Puntos y rectas

P

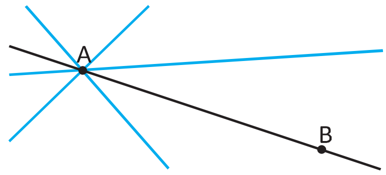
1. En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
   a) Traza líneas rectas que pasen solo por A.
   b) Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.

2. En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
   a) Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

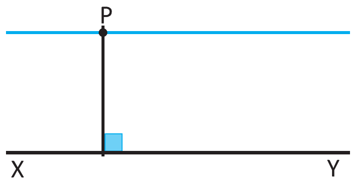


S

1. a) Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.

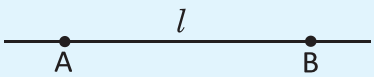


2. a) De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.

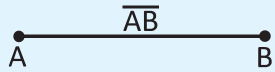


C

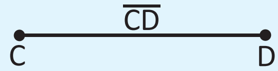
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.



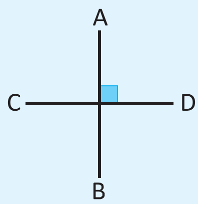
b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".



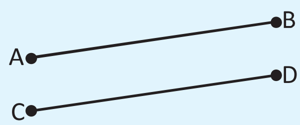
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo (‾‾) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.



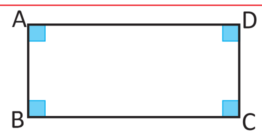
d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".



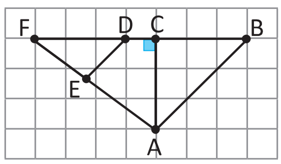
e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".



1. Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.

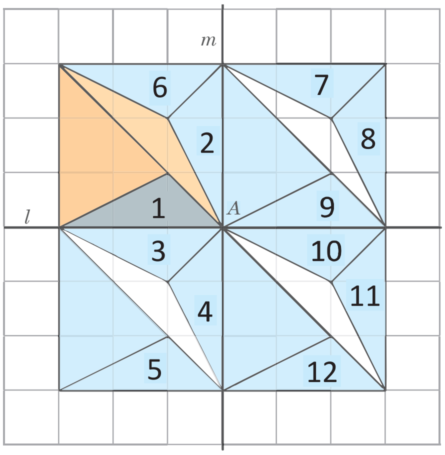


1.2 Patrones de figuras

P

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

a) ¿Con cuál de las figuras se sobrepondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por la recta l, ¿sobre cuál figura se sobrepondrá la figura 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?



S

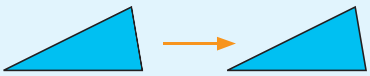
a) Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede sobreponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
b) Si se dobla la imagen por la recta l, la figura 1 se sobrepondrá sobre la figura 3.
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90°, y el giro es en sentido antihorario, se sobrepondrá sobre la figura 4.

C

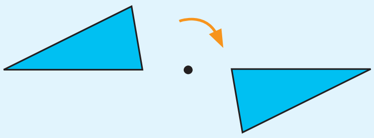
El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

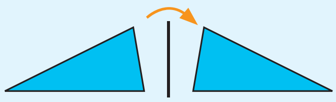
Traslación



Rotación



Simetría

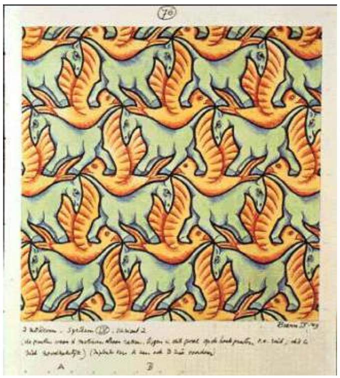


E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.

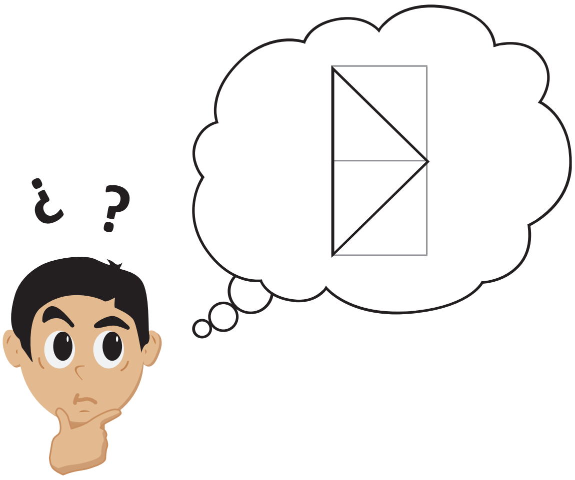


Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com

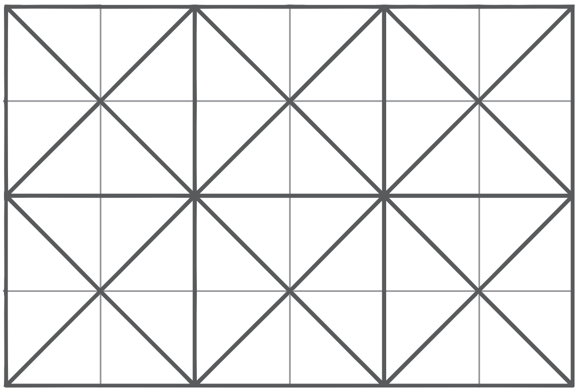
Retrato de Esher en Roma. De M. C. Escher.

Unidad 8

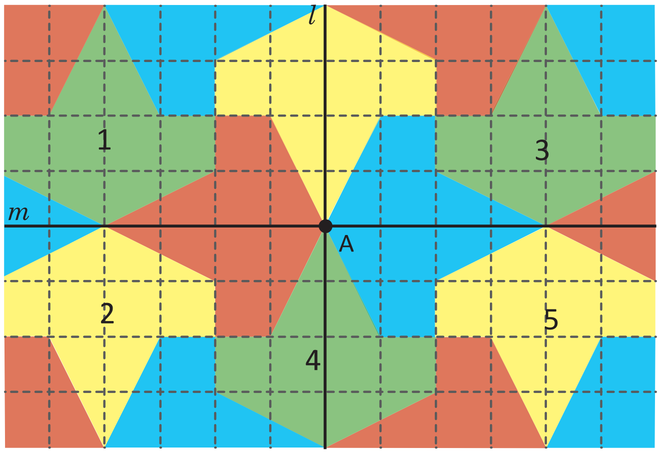
Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.



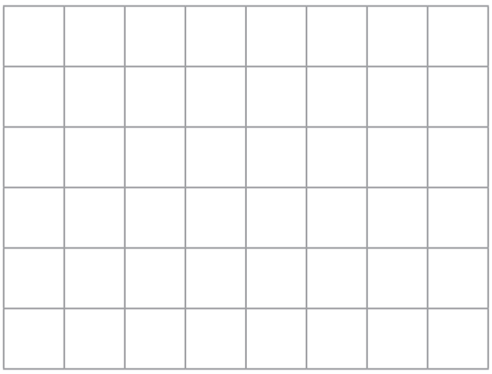
Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.

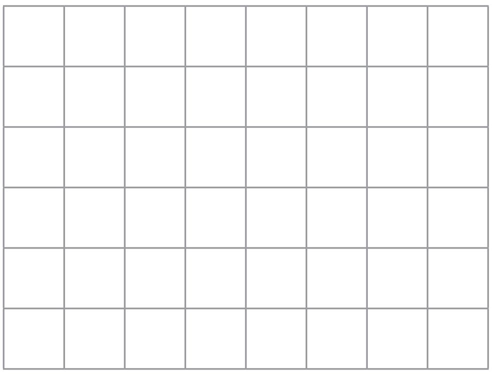


1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.
   Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A.
   a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5?
   b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación?
   c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l?



2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.

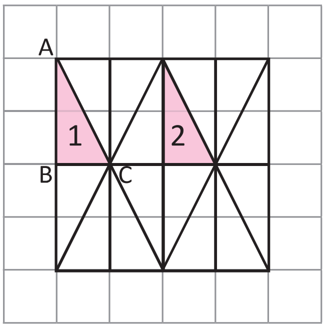




¡Compara con tus compañeros!

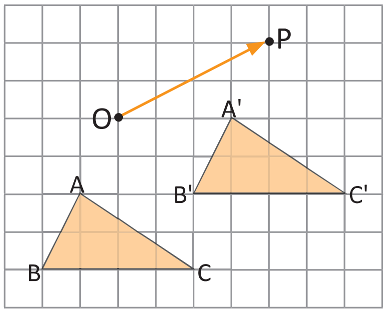
1.3 Traslación

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C.
   b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?

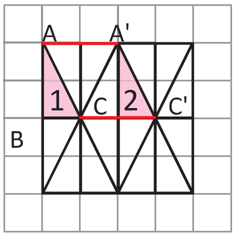


Para denotar un triángulo con vértices A, B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC, y se lee "el triángulo ABC".

2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP. Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
   a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
   b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



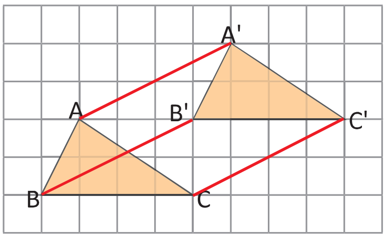
1. a) y b)



c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además AA'= CC'.

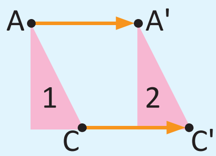
d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

2. a)

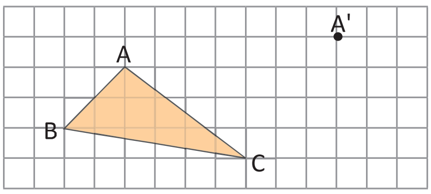


b) La relación entre los segmentos se expresa así:
$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y AA' = BB' = CC'.

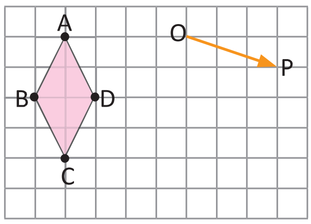
En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.



1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC.



2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP.

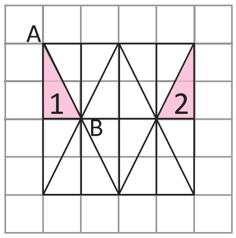


Unidad 8

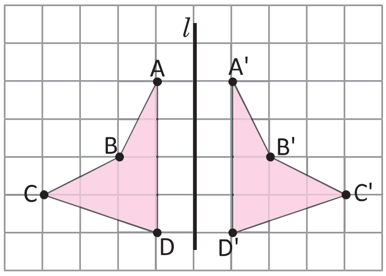
1.4 Simetría

P

1. Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
   b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

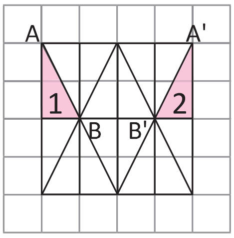


2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
   a) Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
   b) Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l.
   c) Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l.
   d) Expresa simbólicamente la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.



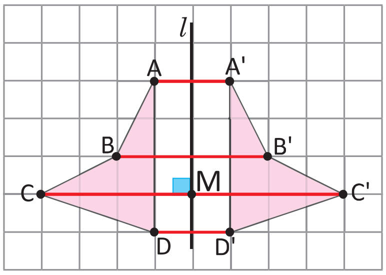
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



b) La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo (⊥). Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.

d) La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como: CM = C'M.

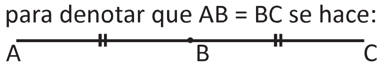
C

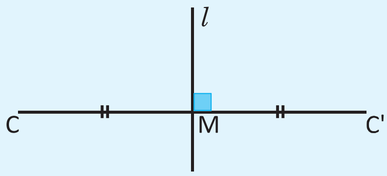
El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.

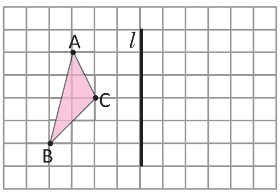
En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

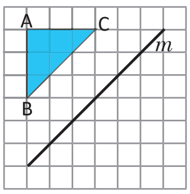
En geometría se utilizan símbolos como ∥ para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:





Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.





Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

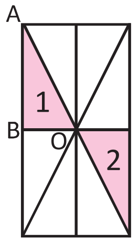
1.5 Rotación

P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.

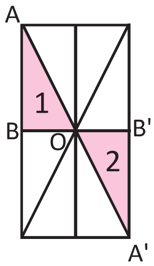
a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?



S

a)

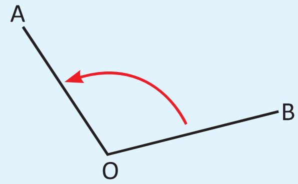


b) El triángulo 1 se puede sobreponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180°.

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

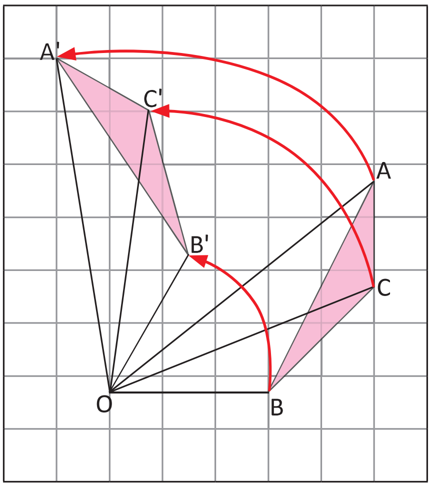


E

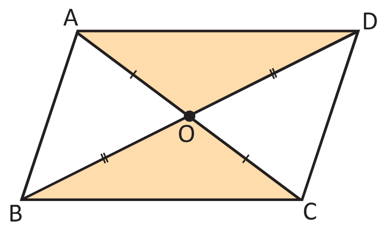
Tomando como centro de rotación el punto O, se ha rotado el ΔABC por un ángulo de 60° para llegar a ser el ΔA'B'C'.

a) ¿Qué relación hay entre $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$?

b) ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A'?



Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180°, se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el ΔAOD, respecto del punto O, este se puede sobreponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.

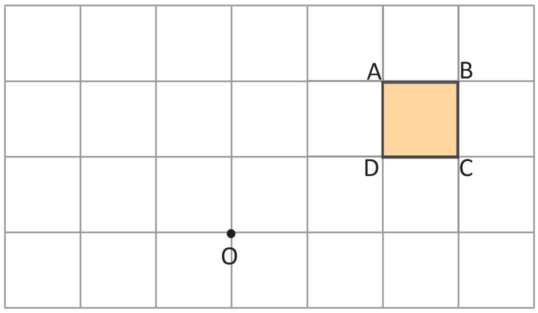


Solución.

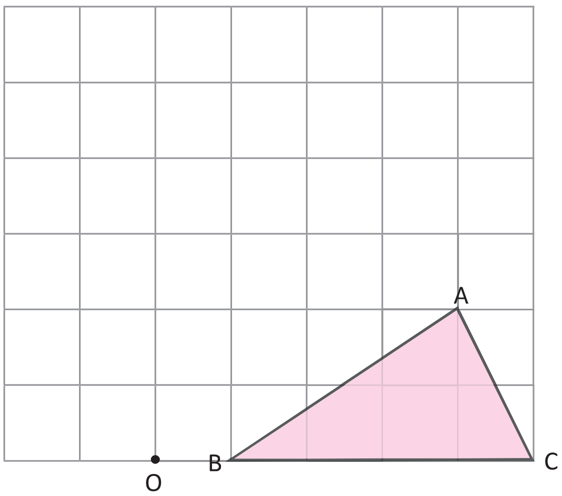
a) OA = OA'

b) Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O.

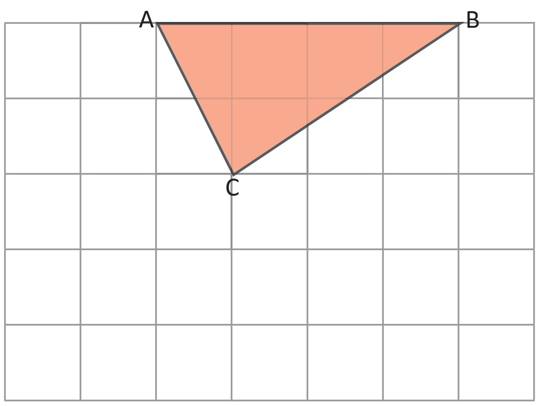
1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°.



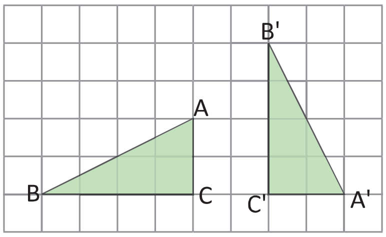
3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C:



1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

P

¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?



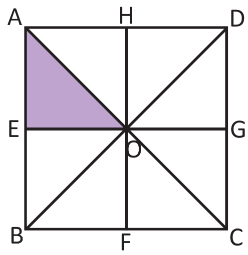
S

Un ejemplo de solución es, primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

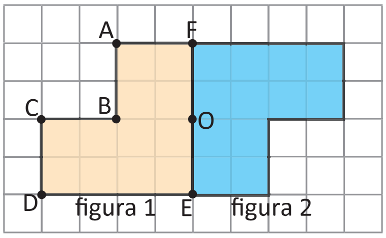
C

Como en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

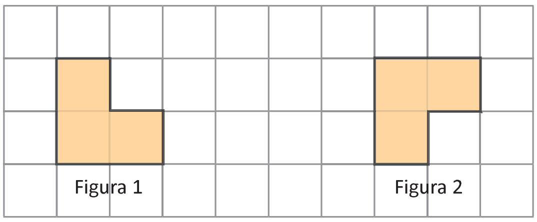
1. En la siguiente figura:
   a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?
   b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?
   c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?



2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.
   a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1.
   b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?



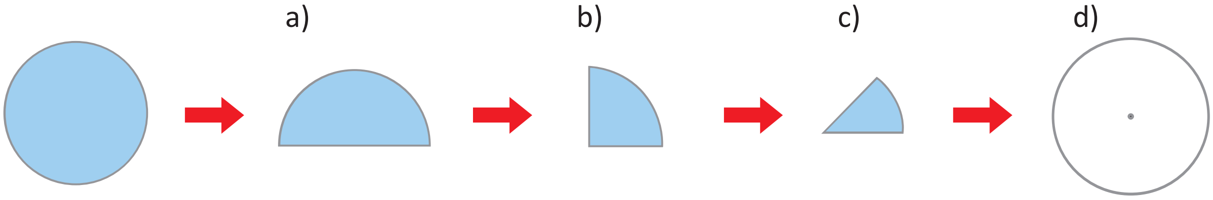
Unidad 8

2.1 Características y elementos del círculo

P

Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.

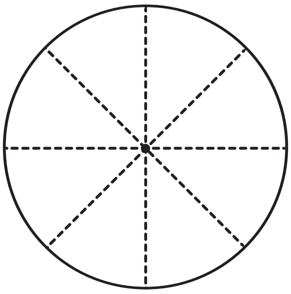
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S

1.



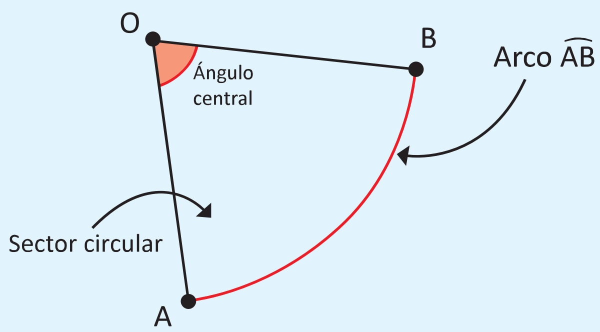
2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

C

Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\overset{\frown}{AB}$.

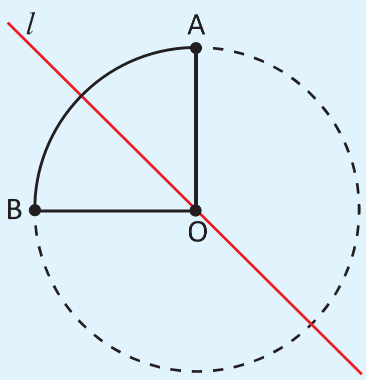
La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular.**

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**

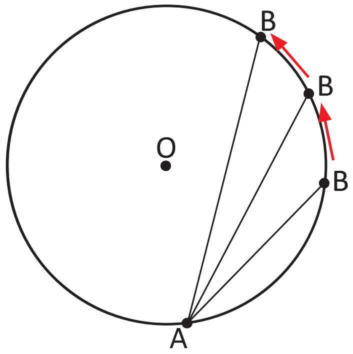


Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.



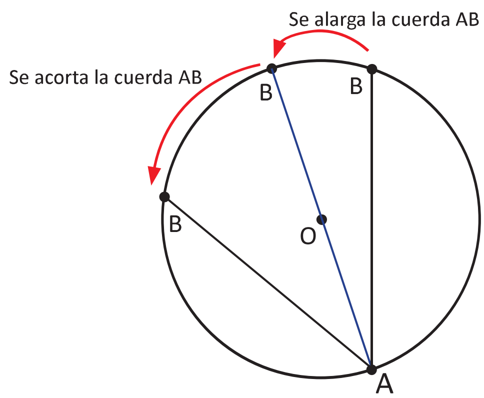
En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda AB, si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará $\overline{AB}$ su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



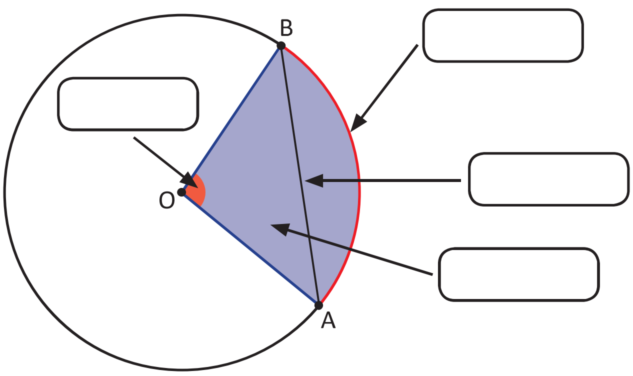
Elementos de un círculo
Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.
Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

$\overline{AB}$ alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O, es decir, cuando $\overline{AB}$ sea el diámetro de la circunferencia.



1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.



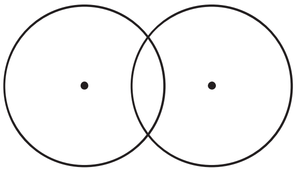
2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de
   a) 45°　　b) 180°　　c) 240°

2.2 Características de círculos que se intersectan

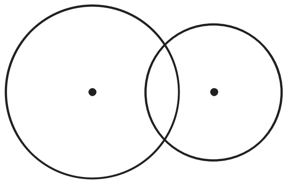
P

Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

a) Cuando los radios son iguales

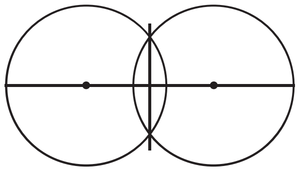


b) Cuando los radios son diferentes

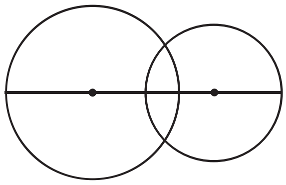


S

a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.



b) La recta que pasa por los centros.

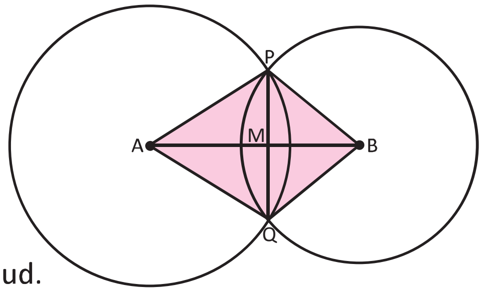


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

E

En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



Con respecto al cuadrilátero AQBP:

a) Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.

b) ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el $\sphericalangle PAB$?

c) ¿Qué relación hay entre $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$?

Solución.

Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:

a) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, $\overline{PM}$ y $\overline{QM}$

b) $\sphericalangle QAB$

c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.

1. En el problema anterior:

   a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB?

   b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP?

2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.

Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

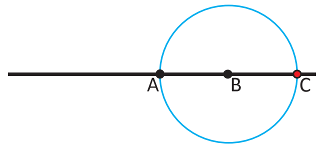
P

Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.

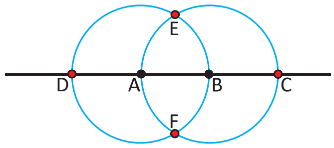
a)

b)

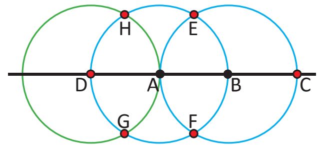
c)



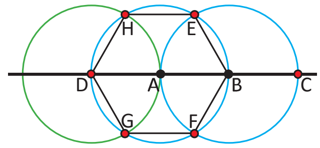
d)



e)

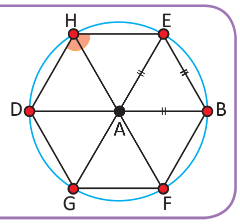


f)



S

Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono.



C

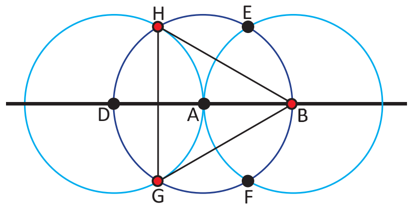
Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

E

Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

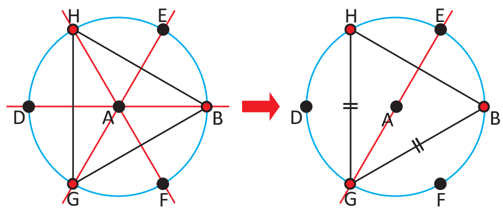
a) Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.

b) A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



Solución.

Como ∢GAH = 120° = ∢GAB (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el ΔGBH 120° respecto al punto A.



Cumpliéndose entonces, GH = GB = HB. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además ∢HGB = ∢GBH = ∢BHG = 60°.

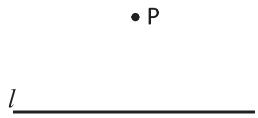
Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:

Unidad 8

2.4 Rectas perpendiculares

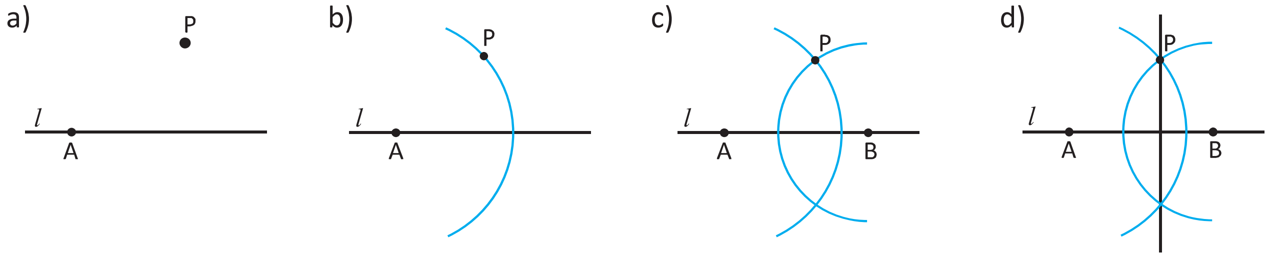
P

En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por el punto P.



S

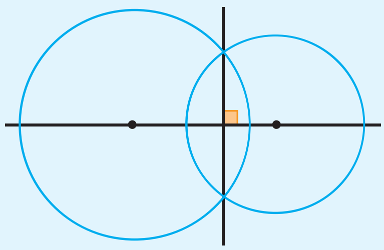
Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:



C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

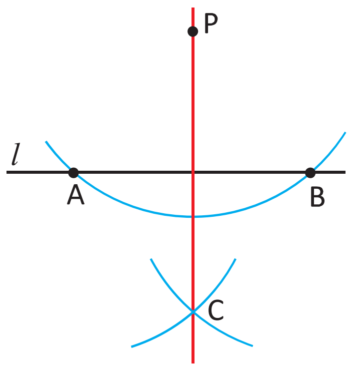
Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



E

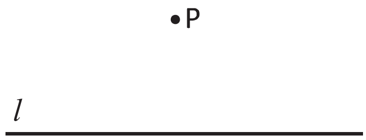
Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.

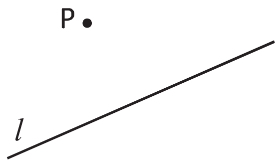


1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta l. Copia los segmentos en tu cuaderno.

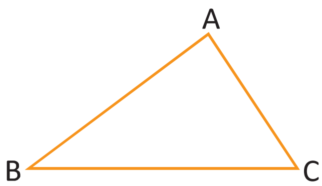
a)



b)



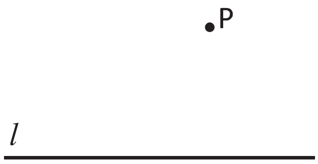
2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{AB}$.



2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

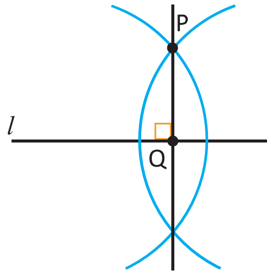
P

Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l.



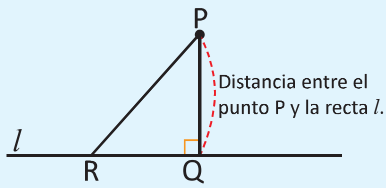
S

Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

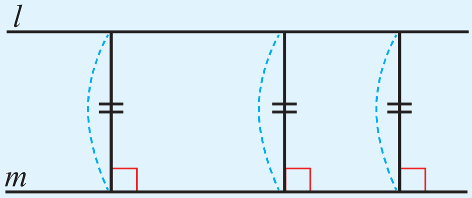


C

Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.

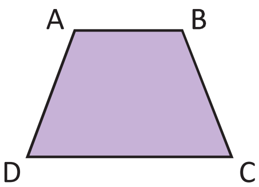


Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



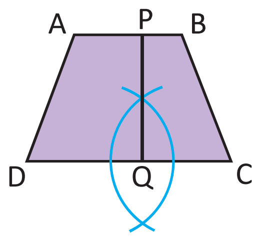
E

Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

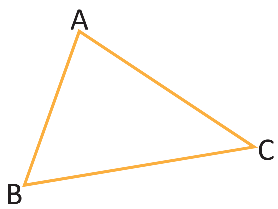


Solución.

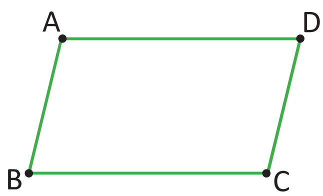
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



1. En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



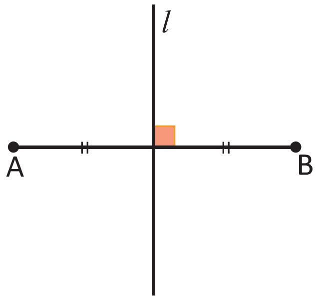
2. En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



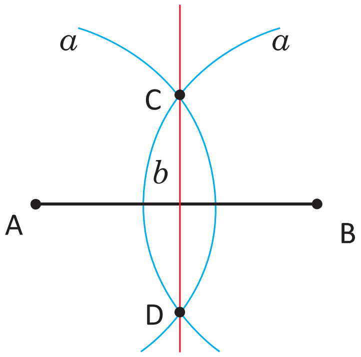
2.6 Mediatriz de un segmento

P

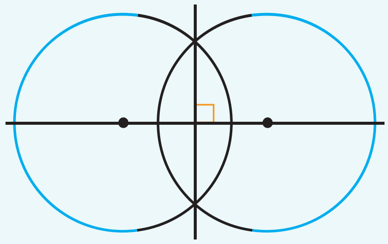
La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de $\overline{AB}$ es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.



S

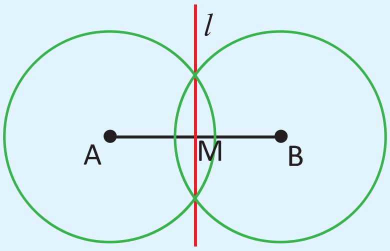
Para dibujar la mediatriz de $\overline{AB}$, se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C

Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

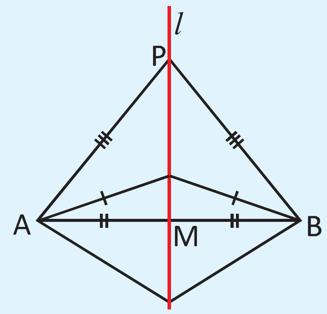
a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.



Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.

Por tanto, PA = PB.

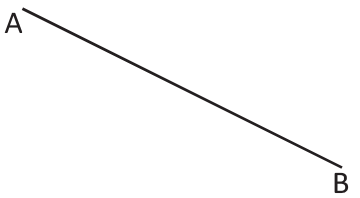
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.



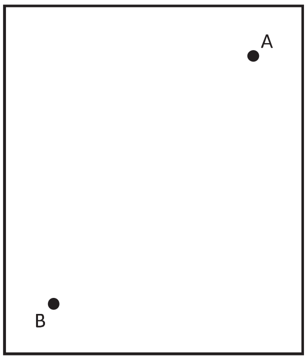
El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".

1. Dibuja la mediatriz del segmento AB.

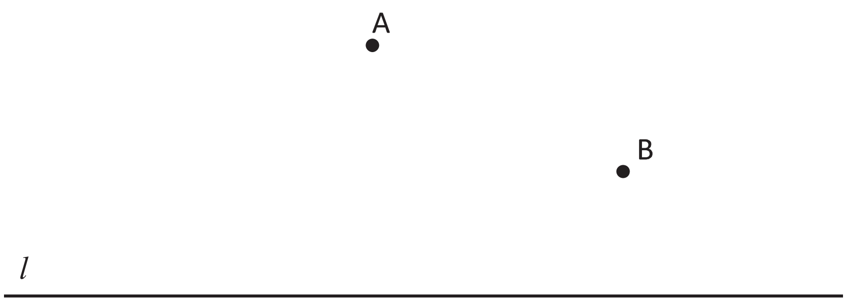
a) 

b) 

En una página escribe los puntos A y B, traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B.

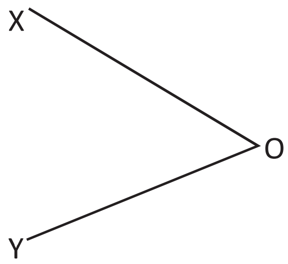


Unidad 8

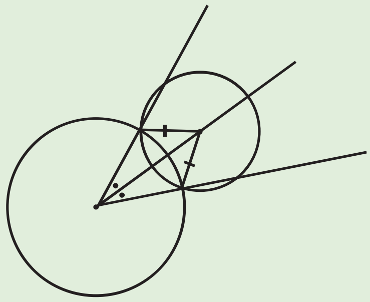
2.7 Bisectriz de un ángulo

P

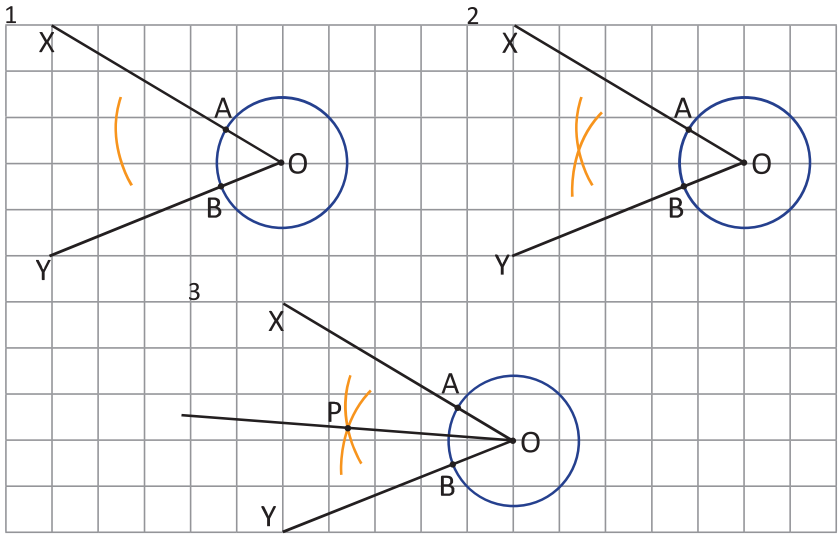
Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



S

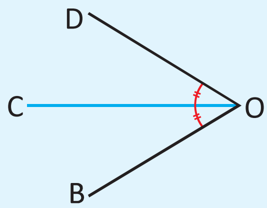


El compás se utiliza para trasladar distancias.

Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.
Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.
Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.
Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

C

La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.



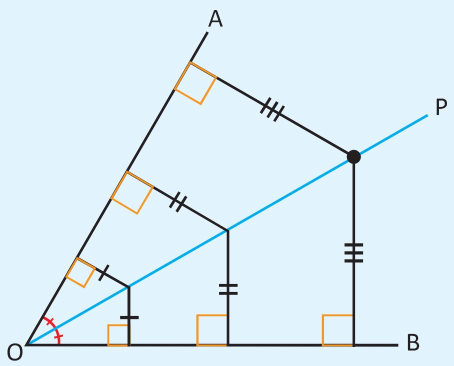
Por tanto, ∢DOC = ∢COB = $\frac{1}{2}$ ∢DOB.

Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirecta OP.

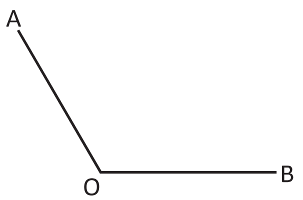
Dado que la bisectriz de ∢AOB es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:

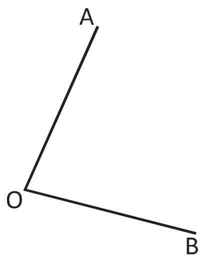


1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.

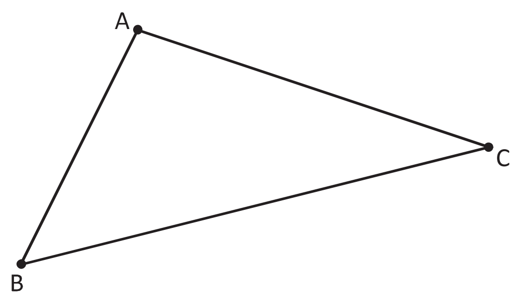
a)



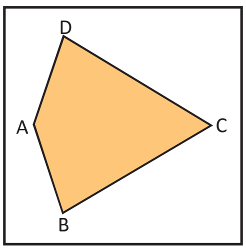
b)



2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC.



3. En la figura:
   a) Dobla de tal forma que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero se sobrepongan.
   b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.
   c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?

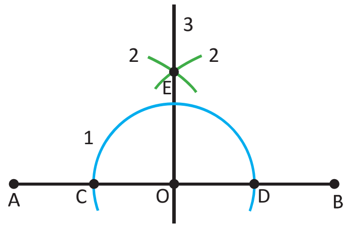


Unidad 8

2.8 Tangente a una circunferencia

P

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.



a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE.
b) Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a $\overline{AB}$.

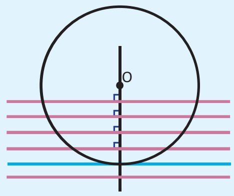
S

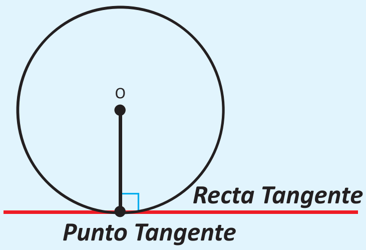
a) Se observan tres pasos:
1. Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D.
2. Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones como E.
3. Trazar la recta que pasa por EO.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, ∢AOE = 90°.

C

Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.

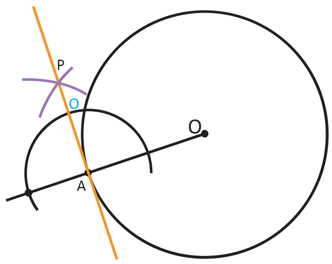




En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

E

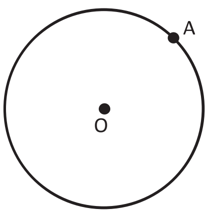
En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.



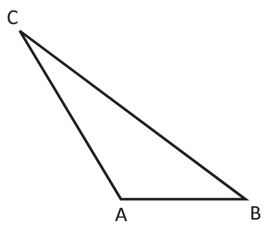
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
b) Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.

Solución.
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.



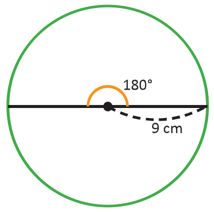
2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB.



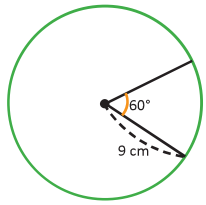
2.9 Longitud de arco de un sector circular

La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma: $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180°.



2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60°.



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.

Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$$l : 180 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 180$$
$$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{180}}}{\underset{2}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$$
$$l = 9\pi$$

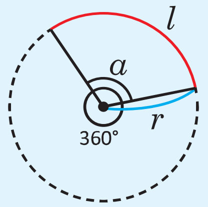
2.

Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

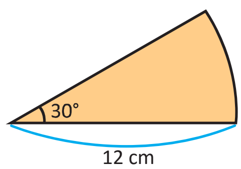
$$l : 60 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 60$$
$$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$$
$$l = 3\pi$$

Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.



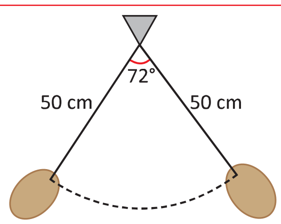
Solución.

En el problema: $a = 30°$ y $r = 12$.

La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.

2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo?



2.10 Área de un sector circular

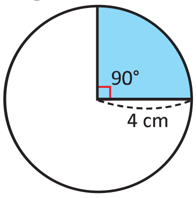
P

El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

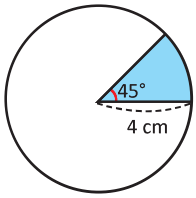
$$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90°.



2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45°.



El área del círculo se calcula como: $\mathbf{A} = \boldsymbol{\pi} \times r^2$. Donde r es el radio del círculo y $\boldsymbol{\pi}$ **= 3.14159...**

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$$S : 90 = 16\pi : 360$$
$$360S = 16\pi \times 90$$
$$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$$
$$S = 16\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{90}}}{\underset{4}{\cancel{360}}}$$
$$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$$
$$S = 4\pi$$

2.

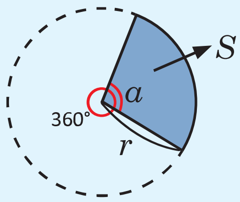
Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$$S : 45 = 16\pi : 360$$
$$360S = 16\pi \times 45$$
$$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$$
$$S = 16\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{45}}}{\underset{8}{\cancel{360}}}$$
$$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$$
$$S = 2\pi$$

C

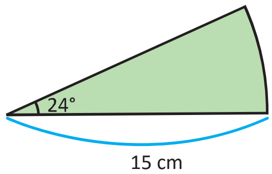
Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



E

Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



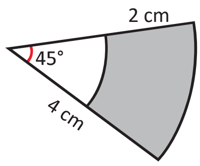
Solución.

Datos del problema: $a = 24°$ y $r = 15$

El área del sector circular es: $S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\,\pi$

1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura:



2.11 Incentro de un triángulo

En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 1

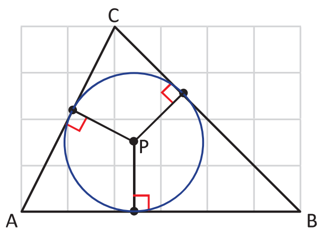
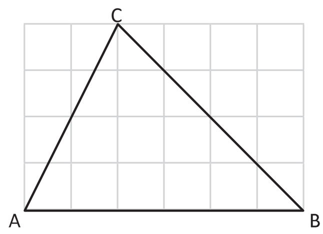


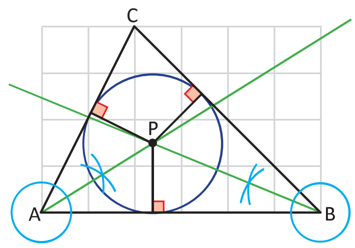
Imagen 2



Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

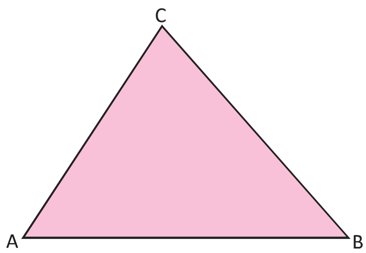
Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

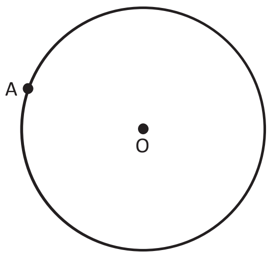
Este punto P cumple que está a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢ABC, también cumple estar a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢CAB. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

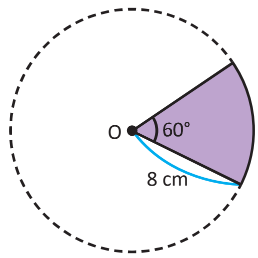
1. En el ΔABC, considerando AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
   a) El punto A hacia el segmento $\overline{BC}$.
   b) El punto B hacia el segmento $\overline{AC}$.
   c) El punto C hacia el segmento $\overline{AB}$.
   d) Determina en incentro de ΔABC.





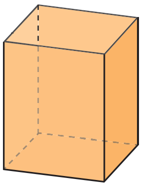
2. Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

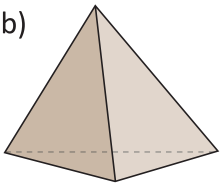
3. Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60°:
   a) Calcula la longitud de su arco.
   b) Calcula el área del sector circular.

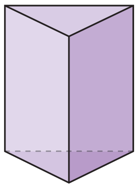


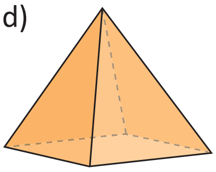
3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

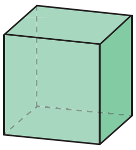
En los cuerpos geométricos se entiende como **cara** tanto las caras laterales como las bases. En las figuras del literal a) hasta el literal h) se observan algunos cuerpos geométricos.

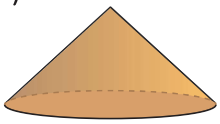
a) 

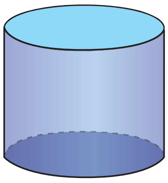
b) 

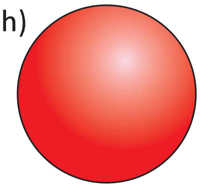
c) 

d) 

e) 

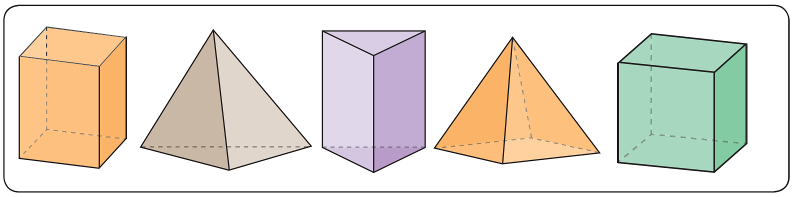
f) 

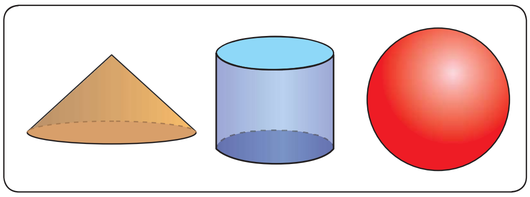
g) 

h) 

Clasifica los cuerpos geométricos según las similitudes de sus caras.

Se hace la siguiente clasificación de las figuras desde a) hasta h).

1.


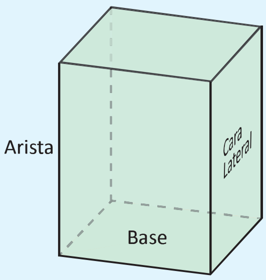
2.


Las figuras de a) hasta d) del grupo 1 son llamadas **poliedros**, la característica de estos cuerpos es que sus caras son figuras planas, por lo general polígonos, como rectángulos o triángulos.

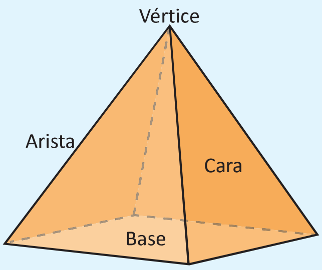
La palabra **poliedro** viene de las raíces griegas: πολύς (polys), "muchas" y de έδρα (edra), "base", "caras".

Dentro de estas, las figuras como a) y c) cuyas caras laterales son rectángulos, son llamadas **prismas**. Las figuras como b) y d), cuyas caras laterales son triángulos, reciben el nombre especial de **pirámides**. Si además, el prisma tiene todos sus lados iguales, se le llama **cubo**.

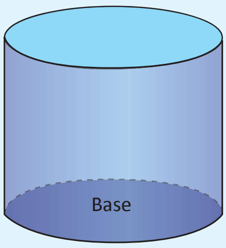
Las figuras desde f) hasta h) cuyas caras laterales son curvas, reciben el nombre de **cuerpos redondos**. En las imágenes de abajo se pueden observar los elementos de algunos cuerpos geométricos, a) es un prisma cuadrangular, b) es una pirámide de base rectangular, c) es un cilindro y d) es un cono.

a)


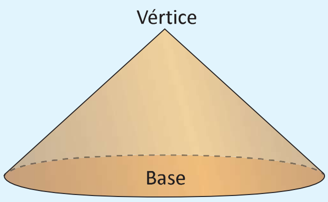
Prisma rectangular

b)


Pirámide rectangular

c)


Cilindro

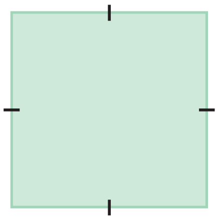
d)


Cono

E

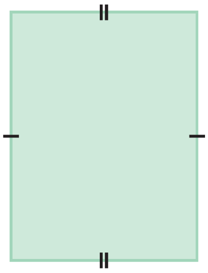
De la imagen anterior, se pueden obtener las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide, se resume a continuación.

Base del prisma mostrado en el literal a).



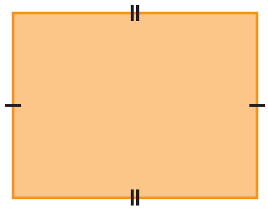
Cuadrado

Cara lateral del prisma mostrado en el literal a).



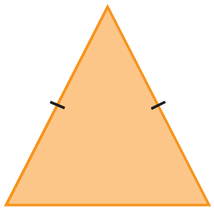
Rectángulo

Base de la pirámide mostrada en el literal b).



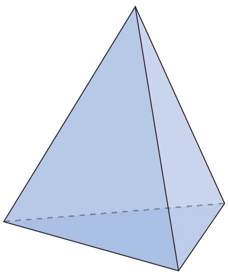
Rectángulo

Cara lateral de la pirámide mostrada en el literal b).

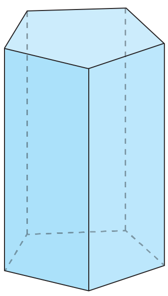


Triángulo isósceles

1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide.

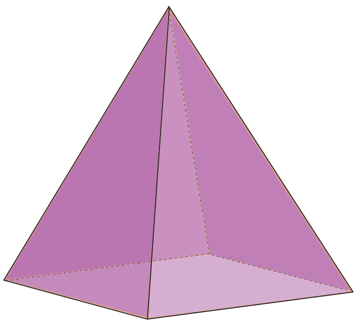


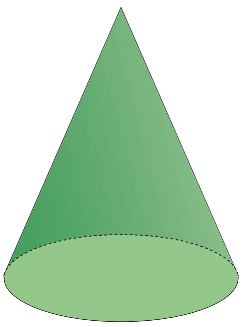
Base de la pirámide	Cara lateral de la pirámide

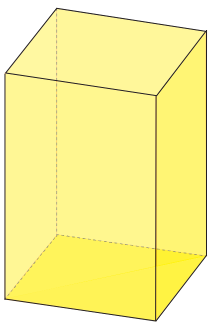


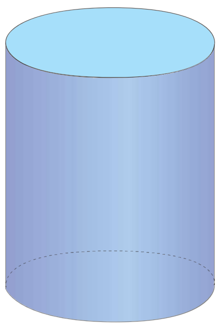
Base del prisma	Cara lateral del prisma

2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:
   a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono.
   b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro.





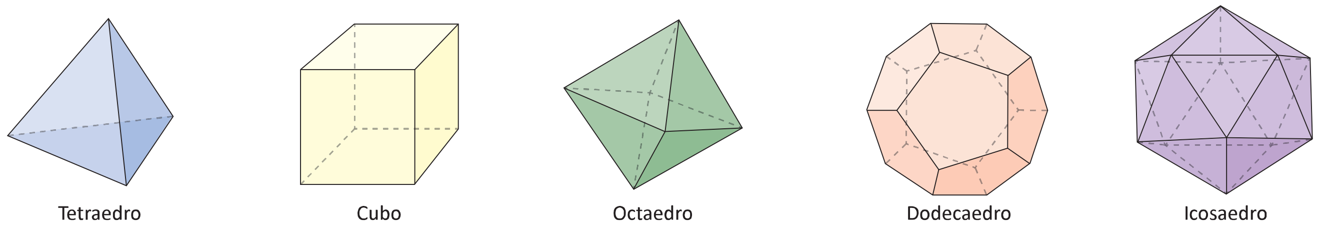




Unidad 8

3.2 Características de poliedros regulares

P Observa los siguientes poliedros. Luego responde.

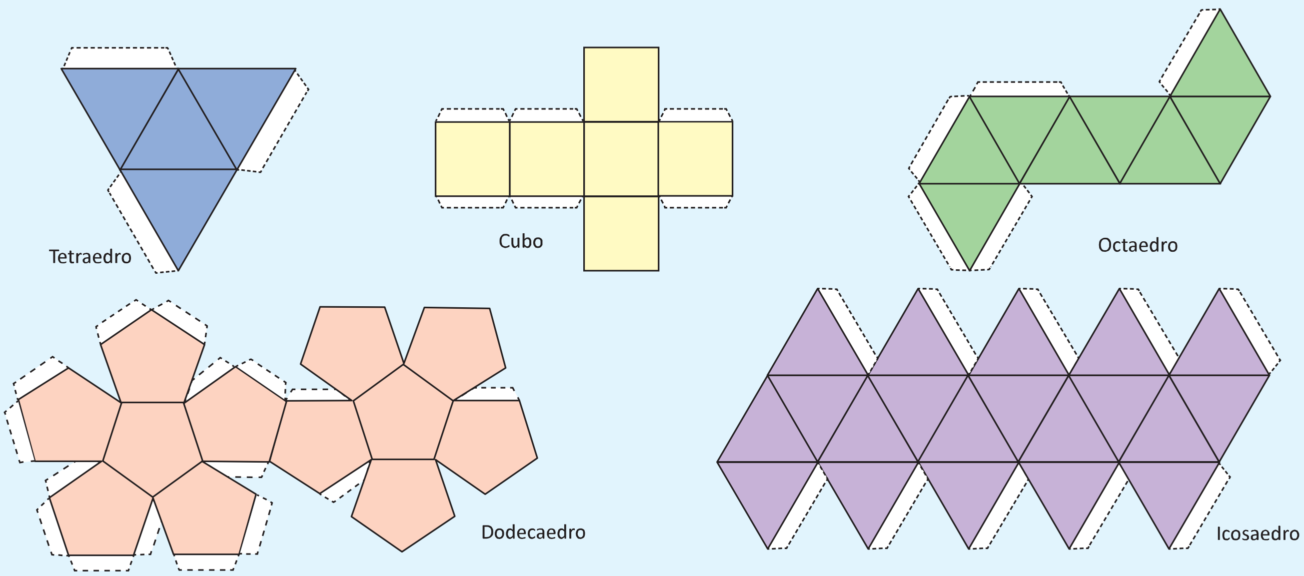


a) ¿Qué figuras forman las caras de la superficie de cada poliedro?
b) ¿Cuántas caras tiene cada poliedro?
c) ¿Qué característica es común en todos los poliedros?

S

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

C Un **poliedro regular** es el cuerpo geométrico en el cual todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama plano desarrollado de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico. Ejemplo:



1. Completa la siguiente tabla:

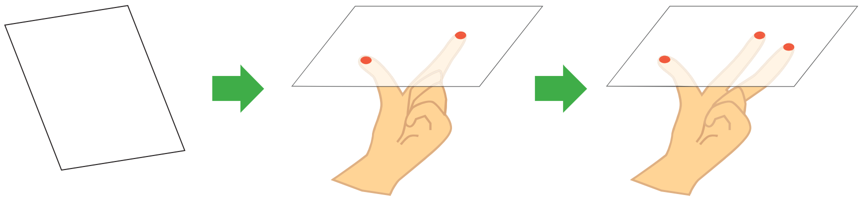
	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	Triángulos equiláteros	Cuadrados			
Número de caras			8		
Número de vértices	4				12

2. Construye polígonos regulares.

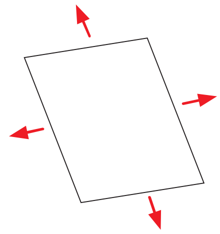
3.3 Relación de posición entre rectas y planos

Toma una hoja de papel, ¿cómo se puede sostener una hoja de papel de forma estable, sin que haya un desbalance?

a) Intenta sostenerla utilizando únicamente dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál de las formas la hoja de papel es más estable?



Se puede tomar la idea de un plano como una hoja de papel, la cual se extiende indefinidamente, hacia los lados.



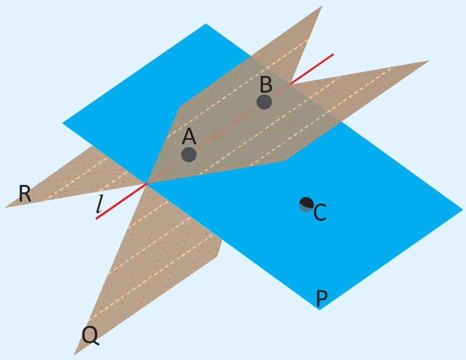
a) Si se toma con dos dedos la hoja de papel, queda siempre en desbalance.
b) Sin embargo, si se toma con tres dedos la hoja de papel queda firme, sin moverse.
c) Por tanto, una hoja de papel queda perfectamente sostenida utilizando tres dedos.

En la imagen se puede observar que la tapa del piano también está sostenida de forma estable por la base con forma de recta y un punto de soporte.

También se puede observar que el piano se mantiene estable con tres puntos de soporte.

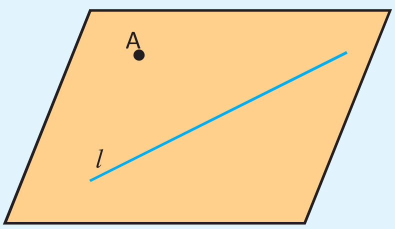
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

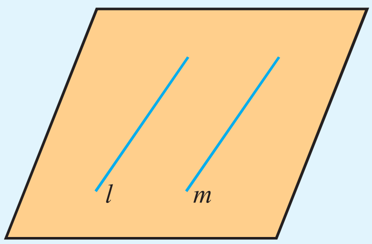


También, un plano queda determinado por:

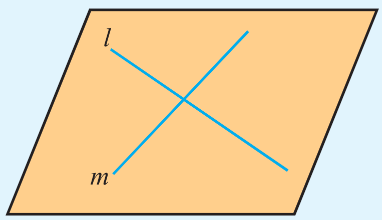
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



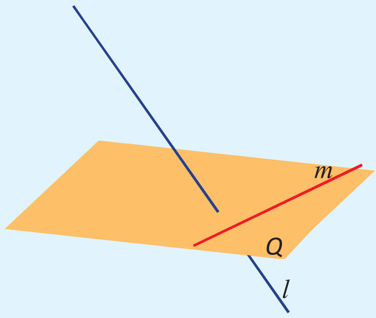
b) Dos rectas paralelas.



c) Dos rectas secantes que se cortan.

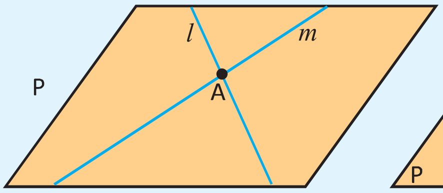


En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como l y m en la imagen.

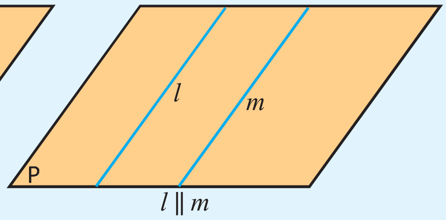


Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como lo siguiente:

Sobre un mismo plano

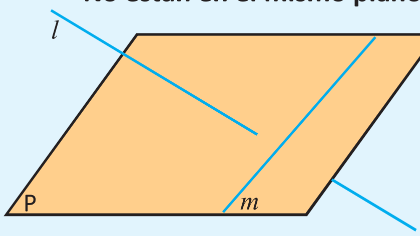


Rectas secantes



Rectas paralelas

No están en el mismo plano

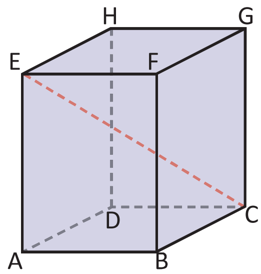


Rectas cruzadas

Observa el prisma rectangular y responde:

Qué lados del prisma están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:

a) $\overline{BC}$
b) $\overline{EC}$



El segmento $\overline{EC}$ se dice que es la diagonal del prisma rectangular.

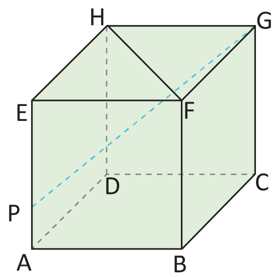
Solución.

a) Los lados: $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

1. Observa el cubo y responde:

Qué lados están sobre rectas:

a) Secantes a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
b) Paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
c) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.
d) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{PG}$.



2. Encuentra líneas rectas y objetos parecidos a planos en tu aula. Describe las relaciones de posición entre ellos, según lo aprendido.

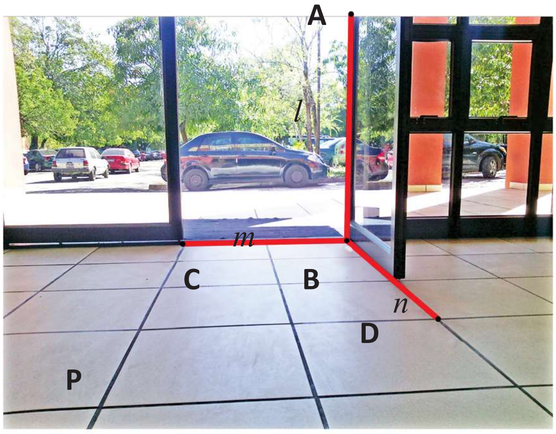
a) ¿Puedes observar objetos sobre rectas paralelas?
b) ¿Puedes observar objetos sobre rectas que se intersectan?
c) ¿Puedes observar objetos sobre rectas cruzadas?

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

P

En la siguiente imagen se muestra una puerta abierta.

a) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BC?
b) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BD?
c) ¿Qué relación tiene la línea recta que pasa por AB con el plano P?



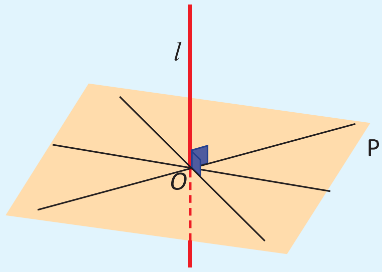
S

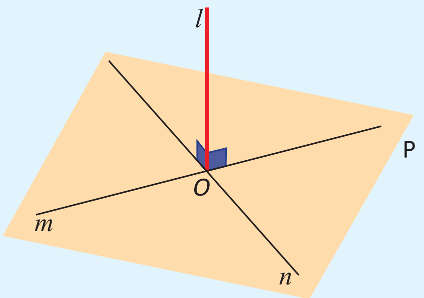
Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

C

Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O.

En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P.





Si una recta l es perpendicular a un plano P, entonces será perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto O que es la intersección entre la recta l y el plano P. Como se muestra en la imagen de la izquierda.

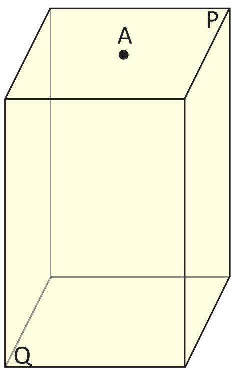
E

En la imagen, hay un punto A sobre el plano P que es una base del prisma rectangular.

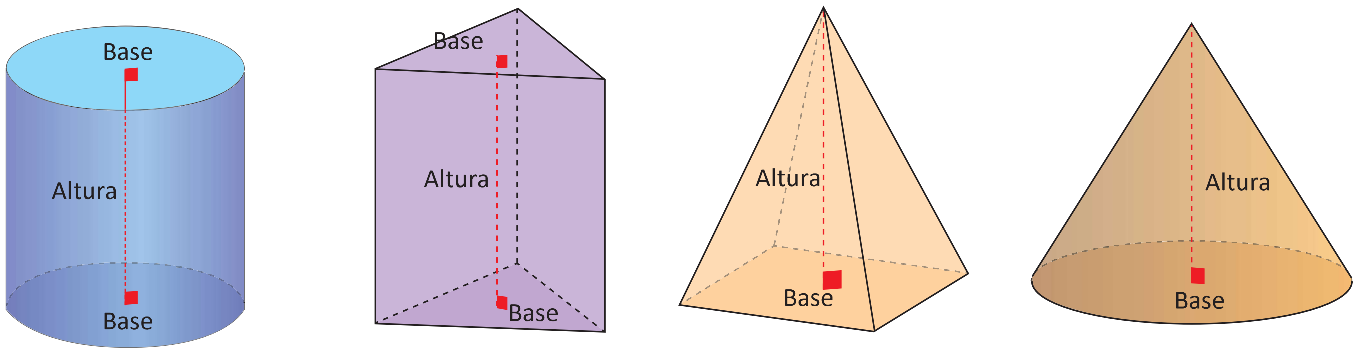
¿Cuál es el procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q?

Solución.

Se debe trazar un segmento desde el punto A hacia el plano Q, que está sobre una recta perpendicular al plano Q.



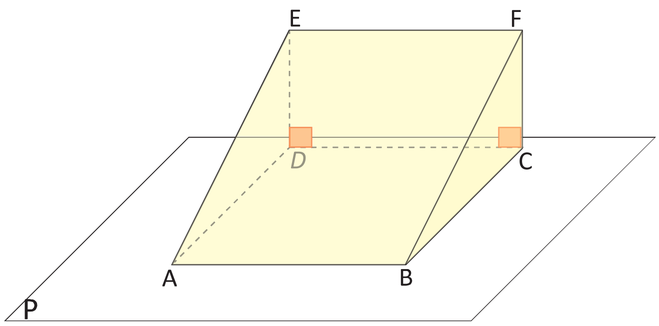
En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base es perpendicular a esta última.



Cilindro | Prisma Triangular | Pirámide | Cono

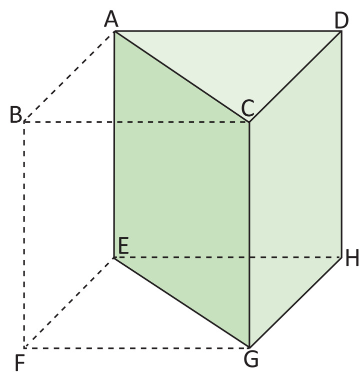
1. En la imagen hay un prisma triangular sobre un plano P:

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{BC}$?
   b) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{AE}$?
   c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?
   d) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base la cara que cae sobre el plano P.



2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo.

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AC}$?
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{DH}$?
   c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base $\overline{GH}$

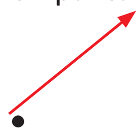


3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

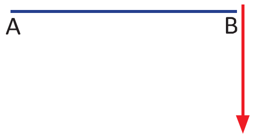
P

Observa las situaciones presentadas en los literales, cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña, ¿qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto



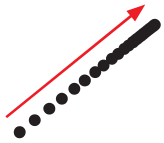
b) Una recta



c) Un plano

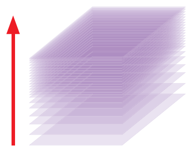
S

a) Se forma una recta



b) Se forma un plano

c) Se forma un prisma

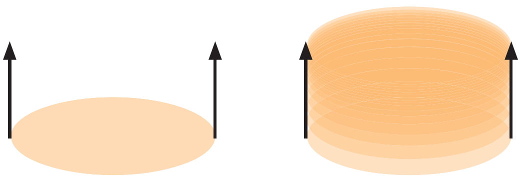


C

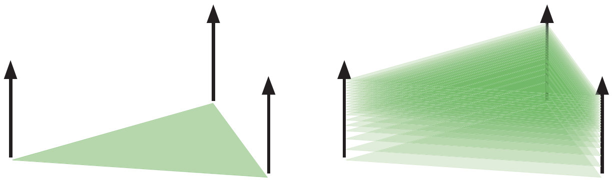
- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

E

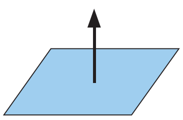
Si se desplaza el círculo verticalmente, como en la imagen, se obtiene un cilindro.

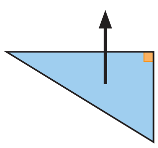


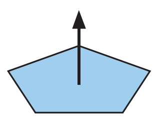
Si se desplaza verticalmente un triángulo, como en la imagen, se forma un prisma triangular.

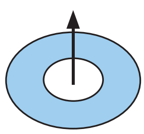


1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

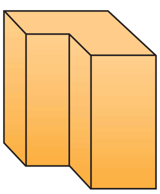
a) 

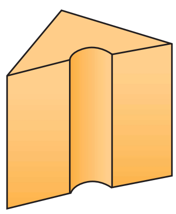
b) 

c) 

d) 

2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos, dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente, para lograr obtener el cuerpo geométrico.

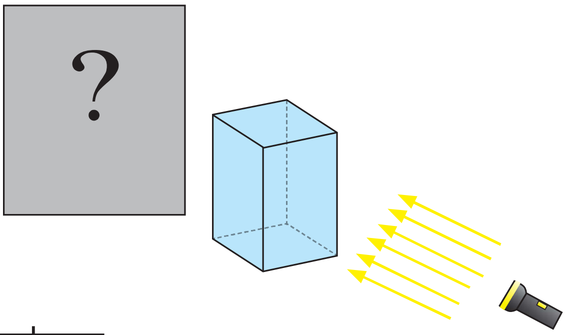
a) 

b) 

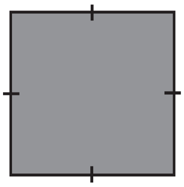
3.6 Proyección ortogonal

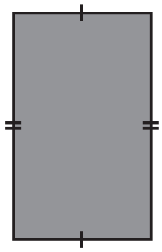
P

En la imagen, la lámpara proyecta rayos de luz que son perpendiculares a la pared gris. Entre la pared y los rayos de luz hay un prisma rectangular de base cuadrada, el cual proyecta una sombra sobre la pared. Según la forma en la que se gira el prisma se pude ver distintas sombras.



¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran a continuación?

a) 

b) 

S

a) Para obtener esta sombra, el prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.

b) Para obtener la sombra el prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

C

La **proyección ortogonal** de un cuerpo es aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Si se tiene un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos, se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, como lo muestra la imagen 3.

Se consideran tres tipos de perspectivas: **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

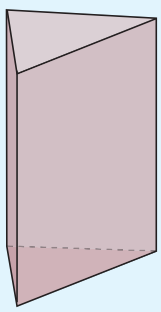


Imagen 1

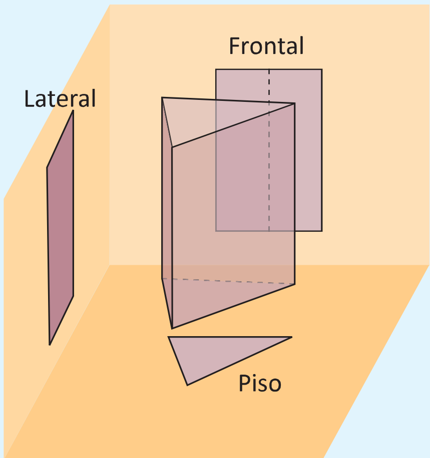


Imagen 2

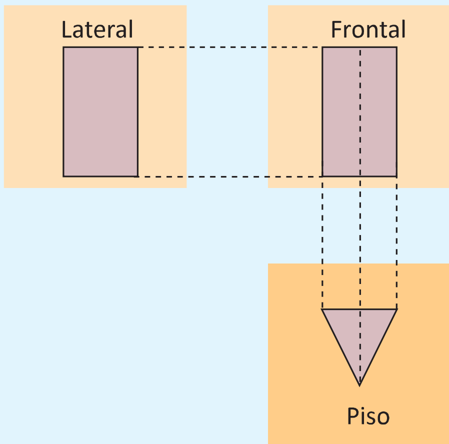
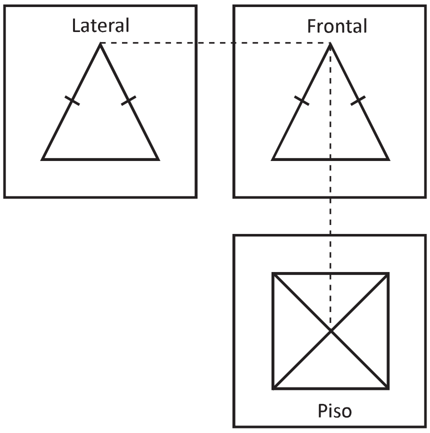


Imagen 3

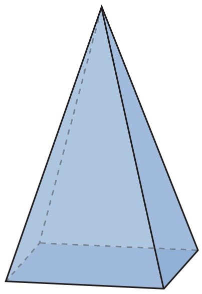
E

Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que corresponde a la proyección ortogonal mostrada y escribe el nombre del sólido.



Solución.
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

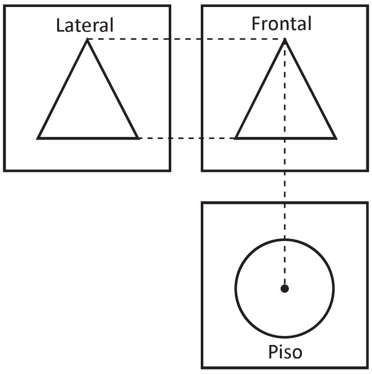
Por tanto, la figura es una pirámide.



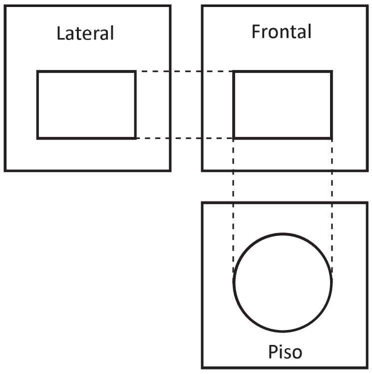
Pirámide

1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan la siguientes proyecciones ortogonales.

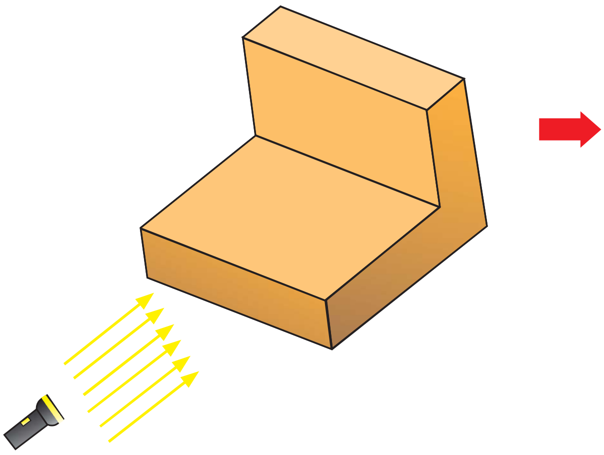
a)

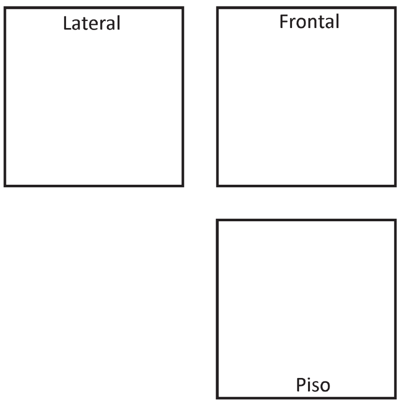


b)



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



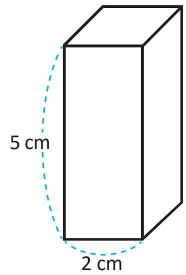


Unidad 8

3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

P

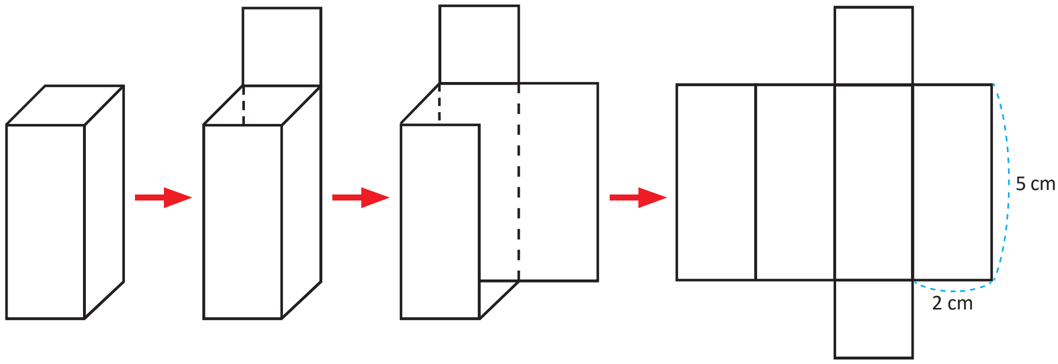
Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



Se le llama superficie a la parte más externa del cuerpo geométrico.

S

Como se muestra en la imagen, se puede descomponer el prisma cuadrangular como si fuese de papel.



La imagen final muestra el desarrollo plano del cuerpo geométrico. La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes, que son las bases del prisma.

El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm^2.
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2.

Por tanto, el área total de la superficie es: $\underbrace{10 \times 4}_{\text{Área lateral}} + \underbrace{4 \times 2}_{\text{Área de las bases}} = 40 + 8 = \underbrace{48 \text{ cm}^2}_{\text{Área total}}$.

C

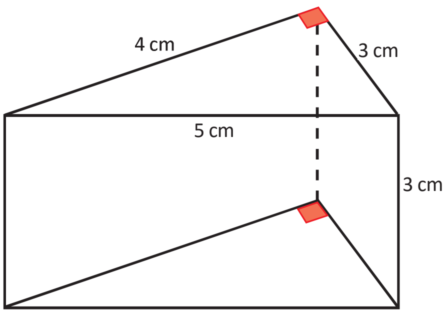
El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$A_T = A_l + A_b$$

Donde A_l: Área lateral y A_b: Área de la base.

E

Encuentra el área total del prisma triangular:

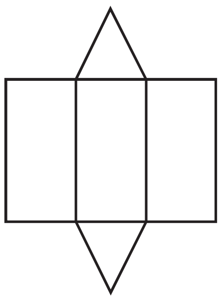


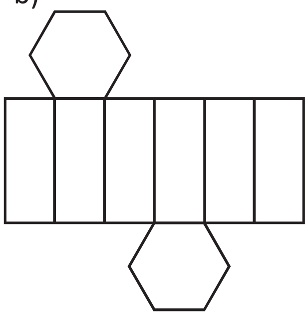
Solución.

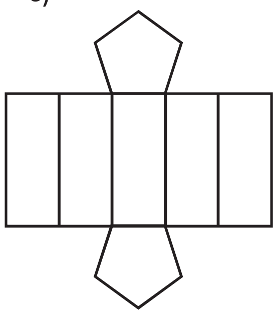
El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$.

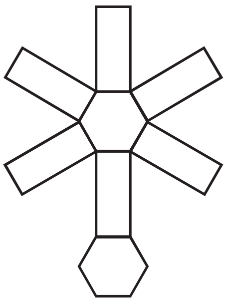
$$\mathbf{A}_l = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 15 + 12 + 9 = 36$$
$$\mathbf{A}_b = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2 = 6 + 6 = 12$$
$$\mathbf{A}_T = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

1. ¿Con cuál de los siguientes planos desarrollados se puede lograr construir un prisma hexagonal?

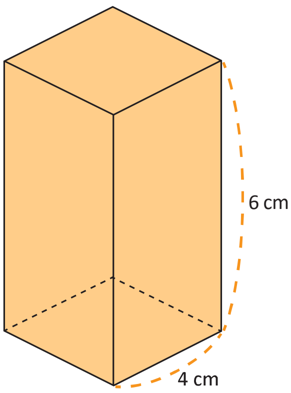
a) 

b) 

c) 

d) 

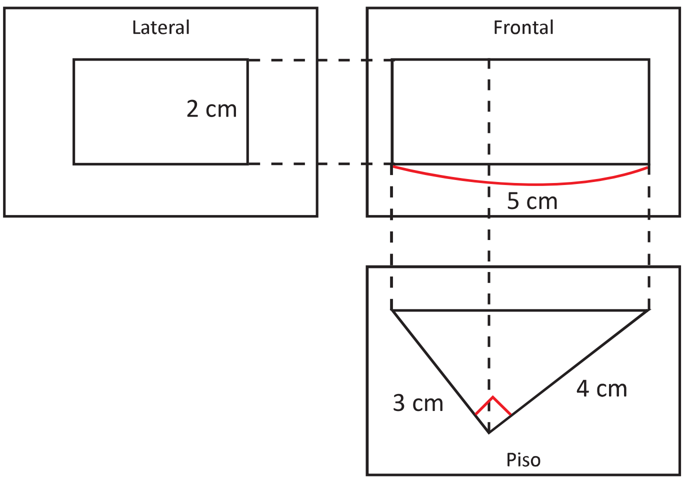
2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada.



3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto.

a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

b) Encuentra el área total del prisma formado.

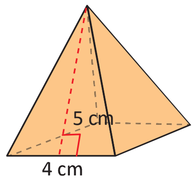


Unidad 8

3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

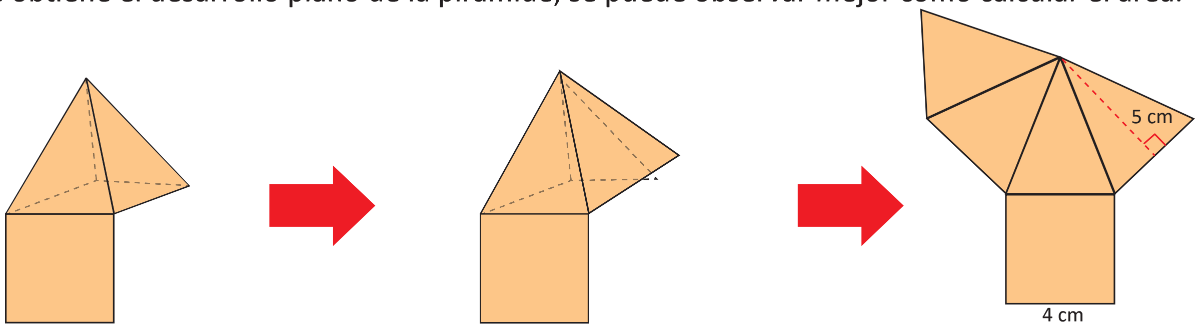
P

La imagen muestra una pirámide de base cuadrada.
Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



S

Si se obtiene el desarrollo plano de la pirámide, se puede observar mejor cómo calcular el área.



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm^2
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm^2
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm^2
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm^2

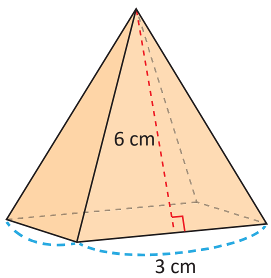
C

El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

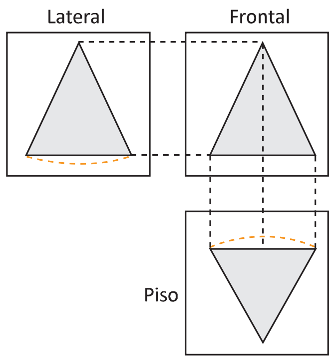
$$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$$

Donde $\mathbf{A_l}$: Área lateral y $\mathbf{A_b}$: Área de la base.

1. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada.



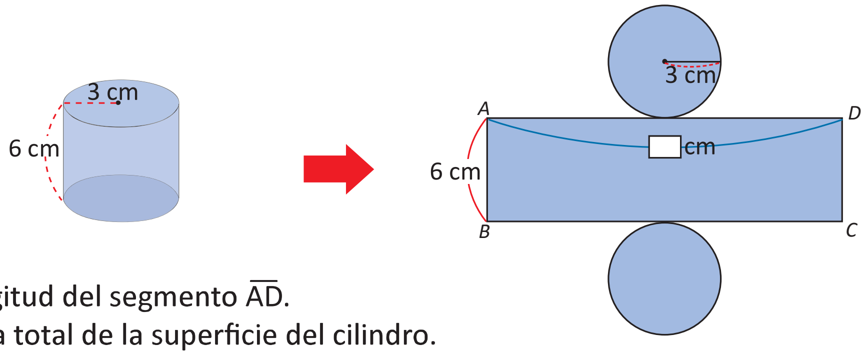
2. En la imagen de la derecha se observa la proyección ortogonal de una figura: Dibuja el cuerpo geométrico que se forma.



3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

P

Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

S

a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ coincide con la longitud de la circunferencia sobre él. Esta se puede obtener utilizando la fórmula para la longitud de la circunferencia: $l_c = 2\pi r$.

Por tanto: AD = 2π × 3 = 6π cm.

b) El área total del cilindro está formada por el área de las bases más el área lateral, la cual es el área del rectángulo.

Área de las bases: $A_b = 2\pi \times 3 \times 3 = 18\pi$ cm²
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm²
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm²

C

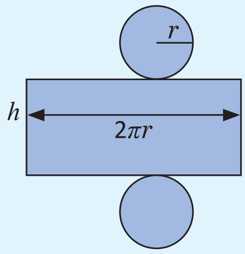
El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

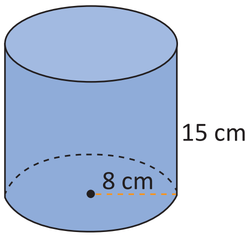
$$A_T = A_b + A_l$$

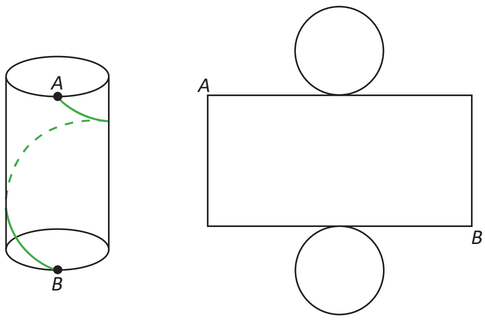
$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.



1. Encuentra el área total del cilindro.



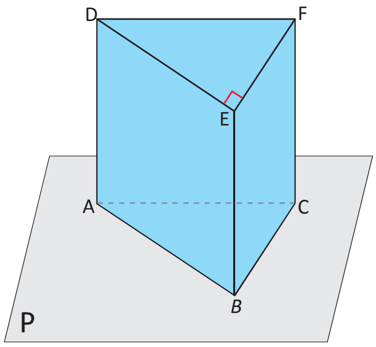


2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro:

Dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano.

3.10 Practica lo aprendido

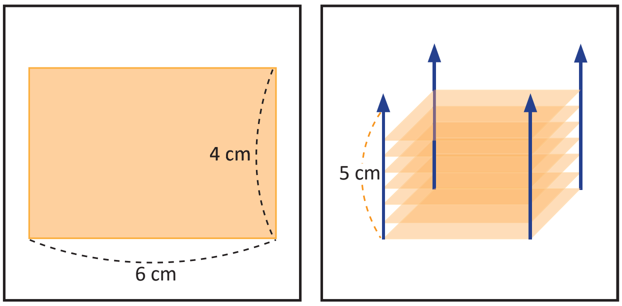
1. En la imagen se encuentra un prisma triangular sobre un plano P. Según lo que se observa en la imagen, responde:



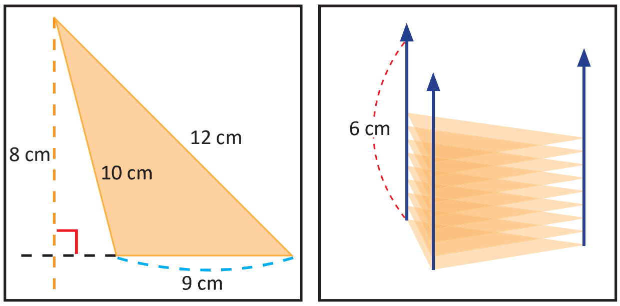
   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AB}$?
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{ED}$?
   c) ¿Qué segmentos del prisma están en posición cruzada con la recta que pasa por AB?
   d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?

2. Para cada literal, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico formado, al desplazar la figura verticalmente y encuentra el área total del cuerpo.

a)

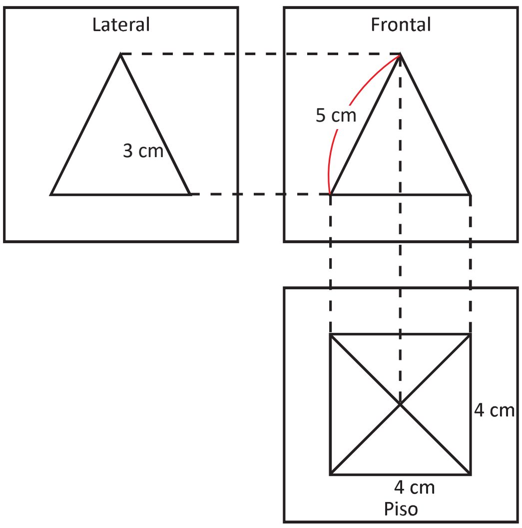


b)



3. En las siguientes proyecciones ortogonales dibuja en tu cuaderno el cuerpo formado y encuentra su área total.

a)



b)