

3 Unidad

Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero

El planteamiento formal de las reglas de multiplicación y división fue establecido por primera vez por el matemático Suizo Leonhard Euler, y la justificación de las reglas para la multiplicación fueron replanteadas por diferentes matemáticos como MacLaurin, Laplace, D'Alembert, Lacroix, Klein, y en el año 1985 la justificación se hizo a partir de patrones numéricos por Crowley y Dunn.

A partir de las reglas de la multiplicación de números negativos, se ha podido facilitar el trabajo algebraico y la modelación de situaciones del entorno, para solucionar problemas de la vida cotidiana.

Los contenidos que conocerás son la multiplicación de números con diferente signo, la multiplicación de un número negativo por otro negativo, las propiedades de la multiplicación, el concepto de potencia, y las operaciones con potencias; además de abordar las operaciones combinadas de las cuatro operaciones básicas con números positivos, negativos y el cero.

$$(-4) \times (+3) = -12$$

$$(-4) \times (+2) = -8$$

$$(-4) \times (+1) = -4$$

$$(-4) \times 0 = 0$$

$$(-4) \times (-1) = \square$$

$$(-4) \times (-2) = \square$$

$$(-4) \times (-3) = \square$$

*Modelo de patrones numéricos
de Crowley y Dunn.*

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

El menor número que se puede expresar como suma de dos cubos de maneras diferentes es el 1729. (Ramanujan, matemático hindú del siglo XX).

1.1 Multiplicación de números con diferente signo



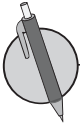
Para multiplicar dos números con diferentes signos se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (-).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a) } (+2) \times (-3) &= -(2 \times 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-2) \times (+3) &= -(2 \times 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+2) \times (-3)$

b) $(-2) \times (+3)$

c) $(+4) \times (-3)$

d) $(-5) \times (+3)$

e) $(+6) \times (-2)$

f) $(-3) \times (+5)$

g) $(+6) \times (-7)$

h) $(-8) \times (+6)$

i) $(-6) \times (+1)$

j) $(-17) \times (+3)$

k) $(+5) \times (-5)$

l) $(-8) \times (+8)$

m) $(+0.2) \times (-3)$

n) $(-0.3) \times (+3)$

ñ) $(+0.4) \times (-0.3)$

o) $(-0.8) \times (+2)$

p) $(+\frac{2}{3}) \times (-\frac{4}{5})$

q) $(-\frac{3}{7}) \times (+\frac{5}{2})$

r) $(-\frac{3}{4}) \times (+6)$

s) $(+\frac{2}{9}) \times (-\frac{9}{8})$

1.2 Multiplicación de números con igual signo



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+3) \times (-5)$

b) $(-4) \times (+6)$

c) $(+6) \times (-2)$

d) $(-5) \times (+3)$

e) $(+2) \times (-0.4)$

f) $(-0.3) \times (+0.7)$

g) $(+\frac{3}{7}) \times (-\frac{3}{5})$

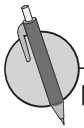
h) $(-6) \times (+\frac{2}{5})$



Para multiplicar dos números con igual signo se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (+).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Al multiplicar un número negativo por cero el producto es cero.



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+5) \times (+2)$

b) $(-4) \times (-2)$

c) $(+3) \times (+4)$

d) $(-3) \times (-4)$

e) $(+8) \times (+5)$

f) $(-7) \times (-6)$

g) $(+0.6) \times (+0.3)$

h) $(-\frac{5}{9}) \times (-\frac{1}{2})$

1.3 Multiplicaciones que incluyen -1 , 0 y 1



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+7) \times (-9)$

b) $(-6) \times (+5)$

c) $(-3) \times (-8)$

d) $(-6) \times (-4)$

e) $(+0.5) \times (-0.3)$

f) $(-0.2) \times (+0.3)$

g) $(+0.6) \times (-0.4)$

h) $(-0.2) \times (+0.7)$

i) $(+\frac{1}{2}) \times (-9)$

j) $(+\frac{1}{3}) \times (-6)$

k) $(-5) \times (-\frac{4}{3})$

l) $(-7) \times (-\frac{4}{7})$



Al multiplicar un número por -1 , 0 y 1 , se tendrá que

- $0 \times a = 0$

- $a \times 0 = 0$

- $1 \times a = a$

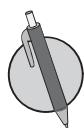
- $a \times 1 = a$

- $(-1) \times a = -a$

- $a \times (-1) = -a$

Donde a es cualquier número.

En la multiplicación, como en la suma y la resta, se puede omitir el signo $+$ de los números positivos. También se puede omitir el paréntesis del primer número de la operación, aún cuando sea negativo.



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) -1×9

b) $3 \times (-1)$

c) $-1 \times (-4)$

d) $-2 \times (-1)$

e) $0 \times (-5)$

f) 10×0

g) $1 \times (-12)$

h) -3×1

1.4 Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $-2 \times (-6)$

b) $-4 \times (-5)$

c) $-7 \times (-2)$

d) $-3 \times (-3)$

e) $-0.3 \times (-4)$

f) -0.4×0.2

g) $-\frac{3}{5} \times (-\frac{2}{7})$

h) $-\frac{7}{5} \times (-\frac{3}{4})$

i) -1×10

j) $4 \times (-1)$

k) -6×0

l) -4×1

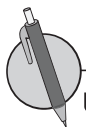


Al igual que la suma, la multiplicación también cumple con la "propiedad conmutativa" y la "propiedad asociativa".

De forma general:

- $a \times b = b \times a$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Las propiedades permiten calcular el producto de varios números en cualquier orden, aunque hayan números negativos incluidos en la multiplicación.



Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times 3 \times (-2)$

b) $-7 \times 10 \times 5$

c) $25 \times 3 \times (-4)$

d) $-15 \times 3 \times 4$

e) $0.5 \times (-3) \times (-2)$

f) $-21 \times (-\frac{2}{5}) \times \frac{2}{7}$

1.5 Signo del producto según el número de factores de la multiplicación



1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $13 \times (-1)$ b) $-1 \times \left(-\frac{11}{15}\right)$ c) $-\frac{13}{2} \times 0$ d) $0 \times (-31.2)$ e) -0.3×1 f) $1 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

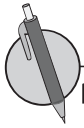
2. Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $20 \times (-15) \times 5$ b) $2.5 \times 13 \times (-4)$ c) $-32 \times 10 \times \left(-\frac{3}{8}\right)$ d) $-55 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$



Es importante destacar que

- Cuando hay una cantidad par de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (+).
- Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (-).



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2 \times (-4) \times 3$ b) $-2 \times 3 \times (-2) \times (-1)$ c) $-5 \times 4 \times 10 \times (-3)$

d) $-10 \times (-3) \times (-2) \times (-5)$ e) $-3 \times 2 \times (-1) \times 3 \times (-10)$ f) $\frac{7}{3} \times (-6) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

1.6 Potencia de un número

R 1. Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $-5 \times 9 \times 2$

b) $4 \times (-7) \times 5$

c) $-54 \times (-5) \times \frac{1}{6}$

d) $-35 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $-5 \times (-3) \times (-2) \times (-4)$

b) $-7 \times 3 \times (-5) \times 2 \times (-4)$

c) $\frac{11}{15} \times (-5) \times \left(-\frac{3}{11}\right)$

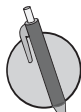
C Cuando un número se multiplica por sí mismo 2 veces, se obtiene la potencia 2 del número, y cuando se multiplica 3 veces se obtiene la potencia 3 del número.

En las expresiones $(-4)^2$ y $(-4)^3$, el 2 y 3 se llaman exponentes y representan la cantidad de veces que aparece como factor el -4 en la multiplicación.

Por ejemplo:

$$(-4)^{\textcircled{3}} = \overbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}^{\text{3 veces el factor } (-4)}$$

A la potencia 2 de un número se le llama potencia **cuadrada**, y a la potencia 3 se le llama potencia **cúbica**. Así, por ejemplo: $(-4)^2$ se lee "el cuadrado de menos cuatro" y $(-4)^3$ se lee "el cubo de menos cuatro".

 1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) 6×6

b) $6 \times 6 \times 6$

c) $(-2) \times (-2) \times (-2)$

d) $-(2 \times 2)$

e) $\left(-\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right)$

f) $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

g) $(-0.9) \times (-0.9)$

h) $-(0.6 \times 0.6)$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-7)^2$

b) -7^2

c) $(-2)^3$

d) $(-3)^3$

e) $(-1)^3$

f) $(-0.4)^2$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

h) $(3 \times 2)^2$

i) $(2 \times 5)^3$

1.7 Multiplicaciones que incluyen potencias



1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $3 \times (-2) \times (-7)$

b) $-3 \times (-2) \times (-5) \times (-10)$

c) $-\frac{36}{17} \times \frac{17}{6} \times 8$

2. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) $(-2) \times (-2)$

b) $(-2) \times (-2) \times (-2)$

c) $-\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})$

d) $-(30 \times 30)$

3. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-10)^2$

b) -10^2

c) $(5 \times 4)^2$

d) $(3 \times 2)^3$

e) $(-\frac{7}{9})^2$

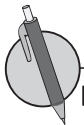
f) $(-\frac{2}{3})^3$



Para multiplicaciones que tienen al menos un número con potencia se tiene que hacer lo siguiente:

1. Calcular las potencias
2. Realizar la multiplicación

Por ejemplo: $(-3)^2 \times (-4) = 9 \times (-4)$
 $= -36$



Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times 4$

b) $5 \times (-2)^2$

c) -3×2^3

d) $(-2)^3 \times 3$

e) $5^2 \times 2^2$

f) $2^3 \times (-3)^2$

g) $(-3)^2 \times 2^3$

h) $(-1)^3 \times (-2)^2$

1.8 División de números enteros positivos, negativos y el cero



1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) $(-7) \times (-7)$

b) $-(5 \times 5)$

c) $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3})$

d) $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3})$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-6)^2$

b) -6^2

c) $(4 \times 2)^2$

d) $(5 \times 2)^3$

e) $(-\frac{9}{10})^2$

f) $(-\frac{3}{5})^3$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times (-2)^2$

b) -3×2^3

c) $(-3)^2 \times 2^2$

d) $(-1)^2 \times (-2)^3$



En la siguiente tabla se presenta el signo y el valor absoluto del cociente, dependiendo de los signos del dividendo y del divisor se tienen los siguientes casos:

Signo del dividendo y divisor	Signo del cociente	Valor absoluto del cociente
Igual	+	Cociente de los valores absolutos de los números
Diferente	-	

En la división se aplica la misma convención acerca del uso del signo + y los paréntesis como en la multiplicación.

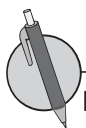
Ejemplo:

a) $(+6) \div (+2) = +(6 \div 2)$
 $= +3$
 $= 3$

b) $(-6) \div (-2) = +(6 \div 2)$
 $= +3$
 $= 3$

c) $(-6) \div (+2) = -(6 \div 2)$
 $= -3$

d) $(+6) \div (-2) = -(6 \div 2)$
 $= -3$



Realiza las siguientes divisiones:

a) $27 \div (-3)$

b) $-15 \div 5$

c) $36 \div (-9)$

d) $-49 \div (-7)$

e) $0 \div (-10)$

f) $3 \div (-1)$

1.9 Fracciones negativas



1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times (-6)$

b) $(-3)^2 \times 4$

c) $(-2)^3 \times (-5)^2$

d) $(-10)^3 \times (-3)^3$

2. Realiza las siguientes divisiones:

a) $9 \div (-3)$

b) $-42 \div 7$

c) $40 \div (-5)$

d) $-12 \div (-6)$

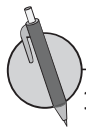
e) $-15 \div (-5)$



Para cualquier fracción que tenga el signo (-) en el numerador o denominador, se puede escribir el signo (-) antes de la fracción. Es decir:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Siempre que se tenga una fracción negativa se representa en la forma $-\frac{a}{b}$, donde a y b representan números positivos.



1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-7 \div 13$

b) $5 \div (-9)$

c) $-(12 \div 11)$

2. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-2}{3}$

b) $\frac{1}{-4}$

3. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{4}{5} = \square \div 5 = 4 \div \square = -(4 \div 5)$

b) $-\frac{7}{8} = \square \div 8 = 7 \div \square = -(7 \div 8)$

c) $-\frac{9}{11} = \square \div 11 = 9 \div \square = -(9 \div 11)$

d) $-\frac{14}{13} = \square \div 13 = 14 \div \square = -(14 \div 13)$

1.10 Recíproco de un número



1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $-15 \div (-3)$

b) $-54 \div 6$

c) $12 \div (-3)$

d) $-100 \div (-10)$

e) $0 \div (-97)$

2. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-4 \div 5$

b) $16 \div (-21)$

c) $-(19 \div 27)$

3. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-5}{8}$

b) $\frac{16}{-7}$

4. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{8}{9} = \square \div 9 = 8 \div \square = -(8 \div 9)$

b) $-\frac{13}{19} = \square \div 19 = 13 \div \square = -(13 \div 19)$

c) $-\frac{22}{23} = \square \div 23 = 22 \div \square = -(22 \div 23)$

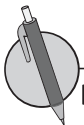
d) $-\frac{7}{29} = \square \div 29 = 7 \div \square = -(7 \div 29)$



Un número es el **recíproco** de otro número, cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

Si a representa un número diferente de 0, el recíproco del número es $\frac{1}{a}$, porque $a \times \frac{1}{a} = 1$.

De igual manera, el recíproco de $\frac{1}{a}$ es a . En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.



Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{5}$

b) $-\frac{13}{8}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) 3

e) -8

f) 0.2

g) -0.5

h) -0.25

1.11 Cálculo de una división como multiplicación



1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-5 \div 2$

b) $7 \div (-3)$

c) $-(8 \div 3)$

2. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-11}{9}$

b) $\frac{23}{-30}$

3. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{5}{14} = \square \div 14 = 5 \div \square = -(5 \div 14)$

b) $-\frac{18}{13} = \square \div 13 = 18 \div \square = -(18 \div 13)$

4. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{8}$

b) $-\frac{13}{15}$

c) $-\frac{1}{11}$

d) 10

e) -12

f) 0.3

g) -0.4

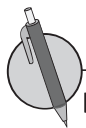


Hacer la división de un número por otro, es equivalente a hacer la multiplicación del número por el recíproco del divisor en la división. Por tanto, para realizar una división se puede convertir en una multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a) } 12 \div (-3) &= -(12 \div 3) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) &= -\left(\overset{4}{12} \times \frac{1}{\overset{3}{3}}\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$



Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $-20 \div 5$

b) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{7}{5}\right)$

c) $\frac{3}{7} \div \left(-\frac{9}{28}\right)$

d) $-\frac{4}{5} \div (-12)$

e) $-\frac{55}{3} \div \left(-\frac{11}{9}\right)$

f) $-15 \div \frac{3}{4}$

1.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo multiplicaciones como a) $5 \times (-6)$ b) -4×2 c) $-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$				
2. Realizo multiplicaciones como a) $-3 \times (-2)$ b) $-0.1 \times (-0.2)$ c) $-\frac{3}{5} \times (-\frac{4}{7})$				
3. Realizo multiplicaciones como a) 4×1 b) 0×1.3 c) $\frac{2}{5} \times (-1)$				
4. Aplico la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en multiplicaciones como a) $5 \times (-6) \times 4$ b) $-24 \times 10 \times (-\frac{1}{8})$ c) $-4 \times (-\frac{7}{11}) \times (-\frac{1}{2})$				
5. Determino el signo del producto según el número de factores en multiplicaciones como a) $-2 \times 2 \times 3 \times (-1)$ b) $\frac{5}{4} \times (-8) \times (-\frac{3}{5})$				
6. Calculo potencias como a) $(-6)^2$ b) -6^2 c) $(-\frac{3}{3})^3$ d) 0.1^2 e) $(2 \times 3)^2$				
7. Efectúo multiplicaciones como a) $2^2 \times 3^2$ b) $2^3 \times (-3)^2$ c) $(-1)^3 \times 2$ d) $(-3)^3 \times (-1)^2$				
8. Efectúo divisiones como a) $14 \div 2$ b) $-24 \div 3$ c) $18 \div (-2)$ d) $-30 \div (-5)$ e) $0 \div (-7)$				
9. Expreso como una fracción negativa las siguientes divisiones: a) $-2 \div 3$ b) $3 \div (-7)$ c) $-(2 \div 5)$				
10. Encuentro el recíproco de números como a) $\frac{4}{7}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 2 e) -5 f) 0.25 g) -0.6				
11. Convierto divisiones en multiplicaciones como a) $-16 \div 4$ b) $\frac{2}{5} \div (-\frac{4}{15})$ c) $-\frac{2}{3} \div (-8)$ d) $-10 \div \frac{2}{5}$				

2.1 Operaciones con multiplicación y división



1. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{5}{7}$

b) $-\frac{2}{3}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) 7

e) -8

f) 0.3

g) -0.2

2. Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $-27 \div 9$

b) $\frac{8}{15} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

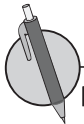
c) $-12 \div \frac{6}{5}$



Para realizar el cálculo de una operación que combina multiplicación y división, se debe plantear la operación solo con multiplicaciones, convirtiendo el divisor en su recíproco, luego se recomienda simplificar las fracciones que sean posibles antes de hacer la multiplicación, para facilitar el cálculo. Básicamente la operación se calcula de izquierda a derecha.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\ &= \left(\cancel{6}^2 \times \frac{7}{\cancel{15}_3} \times \cancel{5}^1\right) \\ &= 2 \times 7 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$



Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $-15 \div 5 \times 6$

b) $-\frac{25}{7} \div \frac{10}{7} \times \frac{2}{3}$

c) $\frac{12}{5} \times (-3) \div \frac{3}{2}$

d) $(-2)^2 \times (-1) \div 2$

e) $(-3)^3 \div 18 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$

f) $(-6^2) \times \left(-\frac{2}{7}\right) \div 8$

2.2 Operaciones combinadas



1. Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{15}\right)$

b) $-\frac{27}{32} \div \left(-\frac{9}{8}\right)$

c) $-15 \div \frac{3}{4}$

2. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $\frac{18}{7} \times \frac{9}{8} \div \left(-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{15}{7} \div \left(-\frac{6}{11}\right) \times \frac{14}{5}$

c) $(-4)^2 \times (-2) \div 8$

d) $(-5^2) \times (-4) \div 10$



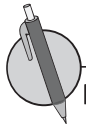
Para realizar operaciones con números positivos y negativos que combinan suma, resta, multiplicación, división o que incluye otra operación al interior de paréntesis (operaciones anidadas), se trabaja de igual forma como se hace con los números positivos. El orden del cálculo es:

1. Operaciones al interior de los paréntesis (si los hay)
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 10 + 5 \times (-3) &= 10 + (-15) \\ &= 10 - 15 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 40 \div (-10 + 5) &= 40 \div (-5) \\ &= -8 \end{aligned}$$



Realiza las siguientes operaciones:

a) $4 + 3 \times 2$

b) $-2 - 15 \div 3$

c) $2 \times (-3) - 1$

d) $-18 \div (-2) - 5$

e) $-3 \times 5 - 2 \times (-7)$

f) $15 \div 5 + (-24) \div 6$

g) $-35 \div 5 + 4 \times 3$

h) $3 \times (-2) - 48 \div 6$

i) $(9 - 6) \times (-4)$

j) $-7 \times (7 - 4)$

k) $(-5 - 3) \div 2$

l) $-35 \div (-3 - 2)$

2.3 Operaciones combinadas que incluyen potencias



1. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $\frac{7}{2} \div \left(-\frac{35}{26}\right) \times \left(-\frac{10}{9}\right)$

b) $-\frac{9}{14} \times \left(-\frac{7}{15}\right) \div \left(-\frac{4}{3}\right)$

c) $(-2^3) \div 4 \times (-2)^3$

d) $(-5)^2 \times (-2)^3 \div 20$

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $-8 - (-6) \times (-2)$

b) $3 + (-18) \div (-2)$

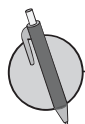
c) $(-6 - 3) \times (-8)$

d) $(-10 - 6) \div (-8)$



Cuando en la operación se incluyan potencias, operaciones anidadas, multiplicaciones o divisiones y sumas o restas, el orden para hacer los cálculos es:

1. Operaciones al interior de paréntesis (si los hay)
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas



Realiza las siguientes operaciones:

a) $8 + (-5) \times (-2)^2$

b) $25 - 5 \times (-3^2)$

c) $8^2 \div (-4) + 6$

d) $-2 \times (2 - 5)^3 + 4^2$

e) $10^2 + (-3)^3 \div (13 - 4)$

f) $(4 + 5)^2 - (-2)^2 \times (13 + 7)$

2.4 Propiedad distributiva de la multiplicación



Realiza las siguientes operaciones:

a) $-80 \div (-8) + (-10) \times (-2)$

b) $-6 \times (-5 - 15)$

c) $(-73 + 8) \div 13$

d) $-17 + 9^2 \div 3$

e) $-3 \times 10^3 + 100^2$

f) $-4 \times (40 - 45)^3 - 20^2$



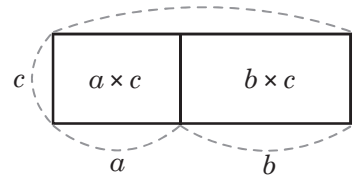
Para cualquier número a , b y c , se cumple que

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

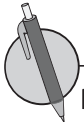
$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

Al hecho anterior se le conoce como **propiedad distributiva**.

La propiedad distributiva se puede representar de manera gráfica a través de áreas:



Cuando se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación $(a + b) \times c$ los paréntesis desaparecen obteniéndose $a \times c + b \times c$. A la acción de quitar los paréntesis a través de la aplicación de la propiedad distributiva también se le llama **suprimir paréntesis**.



Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $(4 + 25) \times 2$

b) $-4 \times (40 + 2)$

c) $(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) \times 15$

d) $-21 \times (\frac{5}{7} + \frac{1}{3})$

e) $18 \times 2 + 12 \times 2$

f) $-3 \times 25 - 3 \times 15$

g) $61 \times (-4)$

h) 6×78

2.5 Conjuntos numéricos



1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $-75 + 4 \times (-5)^2$

b) $7 + 4^2 \div 2$

c) $-10 \times (-2)^3 - 9^2$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $(30 - 1) \times 7$

b) $-22 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{11}\right)$

c) $-3 \times 25 + (-3) \times 15$

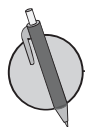
d) $5 \times (-68)$

e) $[(-20) + (-2)] \times 8$

f) $(-26) \times \left(-\frac{11}{13} - \frac{1}{2}\right)$



A un grupo de elementos, números u objetos se le llama **conjunto**, por ejemplo, al grupo de los números naturales se le llama **conjunto de los números naturales**. En general, a un conjunto de números se le llama conjunto numérico. En el conjunto de los números naturales no siempre se pueden hacer las operaciones resta y división, porque el resultado de ellas no necesariamente es un número natural. Por tanto, se hace necesario ampliar el conjunto de los números naturales.



De los conjuntos de números: **1) Naturales**, **2) Enteros** y **3) Números que se pueden expresar como fracción**, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $15 + 4$

b) $9 - 19$

c) 0.9×2

d) $11 \div (-13)$

e) $16 \div 4$

f) $-13 + 13$

2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Realizo operaciones que combinan multiplicación y división como</p> <p>a) $-12 \div 6 \times (-4)$ b) $(-2)^3 \times (-3) \div (-6)$</p>				
<p>2. Realizo operaciones como</p> <p>a) $7 - 4 \times (-5)$ b) $5 \times (-2) - 16 \div 8$ c) $(-7 - 8) \div (-5)$</p>				
<p>3. Realizo operaciones como</p> <p>a) $5 - 4 \times (-3^2)$ b) $4^2 + (-2)^3 \div (-9 + 5)$</p>				
<p>4. Realizo multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:</p> <p>a) $-21 \times 2 + (-4) \times 2$ b) $60 \times \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right)$ c) $96 \times (-15)$</p>				
<p>5. Escribo el conjunto de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal.</p> <p>a) $8 + 2$ b) $10 - 12$ c) $-5 \div 6$</p>				

3.1 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor



1. Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $-4 \times 13 - 6 \times 13$

b) $-7 \times (-68)$

c) $-37 \div 4^2 - 43 \div 4^2 - (-48 + 46)^3$

2. De los conjuntos de números: 1) Naturales, 2) Enteros y 3) Que se pueden expresar como fracción, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $12 + (-4)$

b) -0.36×0.1

c) 7×3

d) $0.5 + 2.0$

e) $-42 \div (-6)$

f) $12 - 4$



El menor de los múltiplos comunes de dos o más números se llama **mínimo común múltiplo** y su abreviatura es **mcm**.

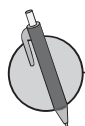
Los pasos para calcularlo son:

1. Escribir los múltiplos de cada número.
2. Encontrar los múltiplos comunes.
3. Encontrar el menor de los múltiplos comunes.

El mayor de los divisores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** y su abreviatura es **MCD**.

Los pasos para calcularlo son:

1. Escribir todos los divisores de cada número.
2. Encontrar los divisores comunes.
3. Encontrar el mayor de los divisores comunes.



1. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 4 y 6

b) 6 y 18

c) 2 y 10

d) 4 y 5

e) 2, 3 y 4

f) 2, 6 y 8

g) 4, 8 y 12

h) 3, 5 y 10

2. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 4 y 8

b) 6 y 9

c) 21 y 28

d) 32 y 48

e) 3, 9 y 12

f) 15, 20 y 25

g) 30, 42 y 60

h) 30, 42 y 70

3.2 Relación entre los múltiplos y divisores de un número

R 1. De los conjuntos de números: 1) Naturales, 2) Enteros y 3) Que se pueden expresar como fracción, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $-25 - 5$ b) $24 \div 8$ c) $2 \div 3$ d) $22 - 2$ e) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ f) $-25 \div 5$

2. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 2 y 7 b) 6 y 10 c) 2, 4 y 10

3. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 12 y 24 b) 35 y 49 c) 18, 42 y 60

C Con respecto a los múltiplos y divisores de un número, y el mcm y MCD de dos o más números, se cumple que

- Si un número es múltiplo de otro número, ese es divisor del primero.
- Cualquier número es múltiplo de 1 y 1 es divisor de cualquier número.
- Un número es tanto divisor como múltiplo de sí mismo.
- El mcm es múltiplo del MCD.

 Completa y responde:

1. 5 es divisor de 15. Entonces, 15 es _____ de 5.
2. 12 es múltiplo de 3. Entonces, 3 es _____ de 12.
3. Cualquier número es múltiplo de _____.
4. _____ es divisor de cualquier número.
5. ¿13 es múltiplo de 13? Explica por qué.
6. ¿6 es divisor de 6? Explica por qué.
7. Para los literales del ejercicio 1 de la clase anterior del cuaderno de ejercicios, expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Números primos y compuestos



1. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 6 y 7

b) 4, 13 y 26

c) 5, 7 y 10

2. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 21 y 56

b) 12, 20 y 28

c) 24, 56 y 80

3. Para los números en cada uno de los siguientes literales calcula el mcm y el MCD. Luego expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

a) 30 y 45

b) 20 y 25

c) 12, 18 y 24

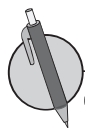
d) 10, 30 y 40



A los números que tienen solo dos divisores (el 1 y el mismo número) se llaman **números primos**.

Los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**.

El 1 solo tiene 1 como divisor. El 1 no es número primo ni compuesto.




Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

7, 10, 25, 29, 32, 35, 40, 43, 48, 52, 58, 61, 67, 73 y 89.

Primos:

Compuestos:

3.4 Descomposición en factores primos

 1. Para los números en cada uno de los siguientes literales calcula el mcm y el MCD. Luego expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

a) 42 y 63

b) 28 y 49

c) 15, 45 y 60


d) 10, 16 y 40


2. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

3, 5, 9, 13, 34, 38, 44, 56, 64, 75, 87, 90, 93 y 99.

Primos:

Compuestos:

 Cualquier número compuesto puede ser expresado como producto de números primos. A este procedimiento se le llama **descomposición en factores primos**.

 Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 45

b) 27

c) 63

d) 105

e) 77

f) 102

3.5 Máximo común divisor por descomposición en factores primos



1. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

11, 12, 17, 19, 22, 28, 37, 42, 50, 51, 53, 63, 70 y 100.

Primos:

Compuestos:

2. Descompone en factores primos los siguientes números.

a) 52

b) 63

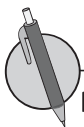
c) 75

d) 90



El MCD de dos números se determina realizando los siguientes pasos:

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos comunes en ambas descomposiciones que tengan el menor exponente.



Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 20 y 15

b) 4 y 8

c) 3 y 6

d) 25 y 35

e) 27 y 45

f) 10 y 14

g) 12 y 30

h) 14 y 8

i) 15 y 105

j) 25 y 45

3.6 Mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos



1. Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 48

b) 66

c) 72

d) 98

2. Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 13 y 26

b) 42 y 54

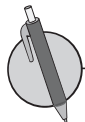
c) 7 y 77

d) 56 y 98



El mcm de dos números se determina por

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos no comunes en la descomposición, en caso de haber primos comunes, solo se toman las potencias de primos con mayor exponente (si los comunes tienen el mismo exponente se toman solo una vez).



Encuentra el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 20 y 50

b) 4 y 8

c) 27 y 45

d) 16 y 20

e) 21 y 28

f) 10 y 35

g) 7 y 21

h) 8 y 10

i) 5 y 35

j) 20 y 25

3.7 Aplicación del mcm y MCD

R 1. Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 6 y 21

b) 8 y 22

c) 5 y 65

d) 44 y 110

2. Encuentra el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 30 y 50

b) 4 y 5

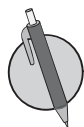
c) 8 y 20

d) 12 y 18

e) 7 y 11



Se puede utilizar el MCD y el mcm para resolver problemas del entorno.



Responde las preguntas en cada uno de los siguientes numerales:

1. Para una campaña de reforestación en El Salvador se compran árboles de Bálsamo y Maquilishuat, de manera que se tienen 49 y 294 unidades de cada uno respectivamente. Se quiere hacer el mayor número de grupos de árboles en los que se tenga el mismo número de cada tipo. ¿Cuántos grupos se harán? ¿Cuántos árboles de cada tipo tendrán los grupos hechos?
2. La dueña de una tienda quiere abastecerse de galletas y jugos para la semana, de manera que tenga el mismo número de unidades de cada producto. Las galletas vienen en paquetes de 8 unidades mientras que los jugos en paquetes de 10 unidades. ¿Cuál es el número total de unidades que tendrá por cada producto? ¿Cuántos paquetes de cada producto se debe comprar?
3. Para un torneo de ajedrez, la escuela A envía 45 estudiantes, la escuela B envía 105 y la escuela C envía 75. Si se quiere formar el máximo número posible de grupos idénticos en cuanto al número de estudiantes por escuela, ¿cuántos grupos se pueden formar?, ¿cuántos estudiantes de cada escuela hay en un grupo?
4. Para una biblioteca se comprarán paquetes de libros de álgebra, geometría y estadística, que solamente se venden en paquetes de 12, 10 y 14 unidades respectivamente. Se comprará el mínimo número de libros con el que se tenga la misma cantidad de cada asignatura. ¿Cuál es el número total de libros que se tendrán por asignatura? ¿Cuántos paquetes de cada asignatura se deben comprar?
5. El papá de Ana trabaja 5 días y descansa el sexto; el papá de Antonio trabaja 8 días y descansa el noveno. Si empiezan su trabajo el martes, ¿cuántos días tienen que transcurrir para que les toque descansar lunes a los dos?

3.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Encuentro el mcm de los números en los siguientes literales: a) 6 y 9 b) 5 y 10 c) 2,3 y 9</p> <p>Encuentro el MCD de los números en los siguientes literales: a) 6 y 9 b) 12 y 18 c) 10, 15 y 30</p>				
<p>2. Completo y respondo: a) 4 es divisor de 20. Entonces, 20 es _____ de 4.</p> <p>b) ¿6 es múltiplo de 6? Explica por qué.</p>				
<p>3. Clasifico los siguientes números en primos y compuestos: 5, 9, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 41, 47, 49 y 53</p>				
<p>4. Descompongo en factores primos los siguientes números: a) 12 b) 30 c) 50 d) 64</p>				
<p>5. Encuentro el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos. a) 12 y 15 b) 12 y 16 c) 6 y 8</p>				
<p>6. Encuentro el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos. a) 12 y 18 b) 12 y 16 c) 6 y 8</p>				
<p>7. Resuelvo ejercicios como</p> <p>Se repartirán 90 cuadernos y 72 lápices entre la mayor cantidad de niños que se pueda, de tal manera que todos reciban la misma cantidad de cuadernos como de lápices. ¿Entre cuántos niños se pueden repartir? ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices recibirá cada niño?</p>				

Problemas de aplicación

1. El submarino Akula tiene una velocidad de inmersión de -13.9 metros por segundo y la mayor profundidad que este alcanza es de -400 metros con respecto al nivel del mar.

a) Si el Akula se encuentra en la superficie y comienza a sumergirse, de cuánto es la variación de su posición con respecto al nivel del mar pasados 10 segundos.

b) ¿Puede el Akula hacer el proceso de inmersión durante 50 segundos?

c) Si en el proceso de inmersión que hacía el Akula en cierto momento se detuvo, y se considera ese momento como 0, a cuántos metros de su posición actual se encontraba hace 20 minutos.

2. Tres de los helicópteros más veloces del mundo son:

Eurocopter X3, helicóptero experimental híbrido franco-alemán, cuya velocidad de 472 km/h estableció un récord de velocidad para helicópteros el 7 de junio de 2013 gracias a los 2.270 CV de potencia de cada uno de los dos motores turboeje — de turbina de gas.

AH-64D Apache, Estados Unidos: Tiene una velocidad de 365 km/h, la modificación AH-64D Apache de este helicóptero de ataque fue utilizada en combate por primera vez en 1989, durante la invasión estadounidense a Panamá. Más tarde, esas aeronaves participaron en varias operaciones en Oriente Medio, Irak.

Kámov Ka-52 Alligator, Rusia: Su velocidad es de 350 km/h, el helicóptero biplaza Kámov Ka-52, ha sido concebido para misiones de inteligencia y ataque, está fuertemente blindado y dispone de asientos eyectables para ambos pilotos.



Eurocopter X3
Velocidad máxima:
472 km/h.



AH - 64D Apache
Velocidad máxima:
365 km/h.



Kámov Ka - 52 Alligator
Velocidad máxima:
350 km/h.

Problemas de aplicación

- a) ¿Cuántos km habrá recorrido el Eurocopter X3 después de 3 horas de vuelo?
- b) Si el AH-64D Apache realiza un vuelo en el que en un momento de su trayectoria se detiene para mantenerse verticalmente, y se considera este como el minuto 0, ¿a cuántos km se encontraba hace 3 horas respecto de la posición actual?
- c) Considerando que el Kámov Ka-52 Alligator ha recorrido 34.8 km en 4 minutos, y se detiene para mantenerse verticalmente, si el momento en que se detiene se considera como el minuto 0, ¿a cuántos km se encontraba hace un minuto respecto de donde se encuentra actualmente?

3. Las cigarras viven bajo tierra durante la mayor parte de sus vidas, y solo emergen en la primavera de su último año para aparearse y reproducirse. El género norteamericano de Cigarra, conocido como Magicicada, tiene un ciclo de vida extremadamente largo de 13 o 17 años.

Cada nidada de cigarras tiene sus propios años emergentes y ciclos de vida. El estado de Kansas solo recibe 2 nidadas de Magicicada. La primera nidada apareció por última vez en 1998, y tiene un ciclo de vida de 17 años. La segunda nidada apareció por última vez en 2011, y tiene un ciclo de vida de 13 años.

A partir del año actual, ¿cuántos años tienen que pasar para que ambas nidadas salgan juntas?

