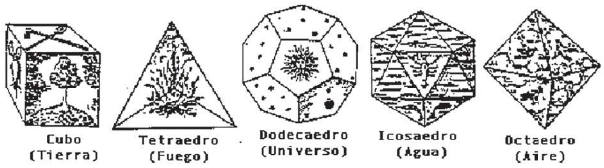
8 Unidad

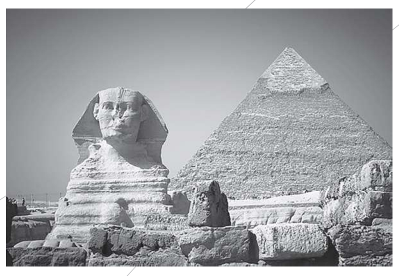
Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos



Concepción platónica de los poliedros como regidores del Universo.

El conocimiento y uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos, algunos registros suponen el trabajo con los poliedros regulares desde el periodo neolítico (aproximadamente 1500 a. C.) en el cual se identificaron poliedros regulares labrados en piedra, estos cinco poliedros fueron considerados por los pitagóricos como perfectos y aunque no demostraron que eran los únicos, sí sabían que solo existían esos; con el aporte de Platón y la justificación de este resultado en el libro *Los elementos* de Euclides es que logra quedar establecido.

Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran las pirámides, cilindros, cubos, prismas, entre otros.



Gran Pirámide de Giza, construida por los antiguos egipcios.

En esta unidad aprenderás sobre figuras planas, el estudio de los triángulos y la construcción de algunas rectas notables con regla y compás; el estudio de la circunferencia, además de lo correspondiente a los poliedros regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos. Se hará un análisis de las rectas y planos en el espacio para establecer los patrones y las proyecciones de los cuerpos geométricos.

1.1 Puntos y rectas

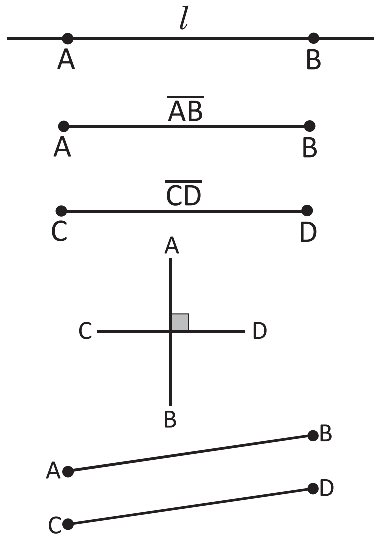
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.

b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".

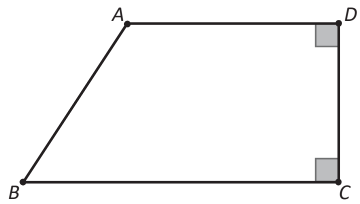
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo (‾‾) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.

d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".

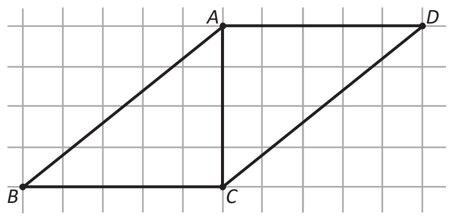
e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".



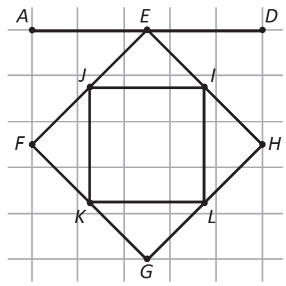
1. Observa el siguiente cuadrilátero, utiliza los símbolos "⊥" o "∥" para decir qué segmentos son perpendiculares y qué segmentos son paralelos.



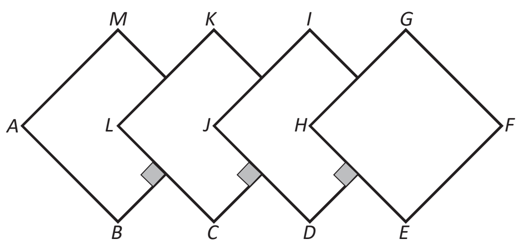
2. Observando la imagen de la derecha, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles son verdaderas?
   a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ b) $\overline{AC} \perp \overline{CD}$
   c) $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ d) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   e) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ f) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$



3. En la siguiente figura indica cuáles de los segmentos son:
   a) Paralelos a $\overline{AD}$
   b) Paralelos a $\overline{FG}$
   c) Perpendiculares a $\overline{KL}$



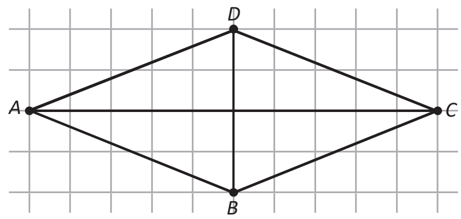
4. En la imagen de abajo hecha por cuadrados, indica cuáles de los segmentos que se muestran son:
   a) Paralelos a $\overline{AM}$
   b) Perpendiculares a $\overline{AB}$



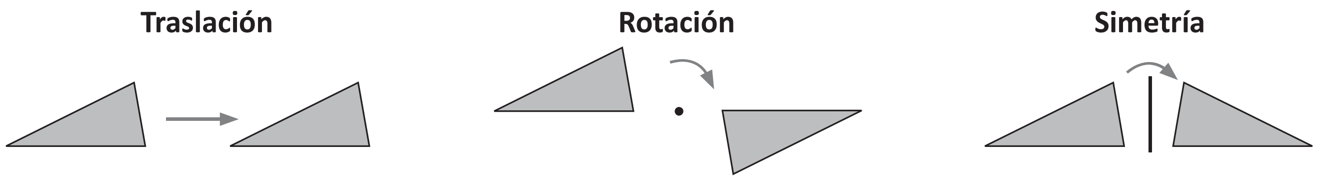
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Patrones de figuras

R En la imagen de la derecha, indica cuáles de los segmentos que se muestran son paralelos y cuáles son perpendiculares, utiliza los símbolos "⊥" o "∥".

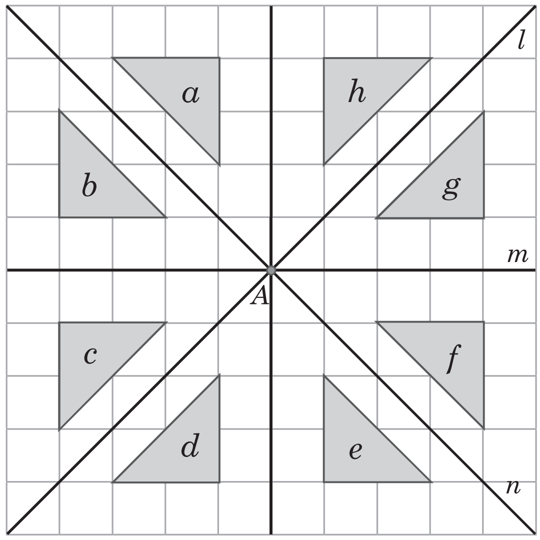


C El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.
Existen tres tipos de movimiento:



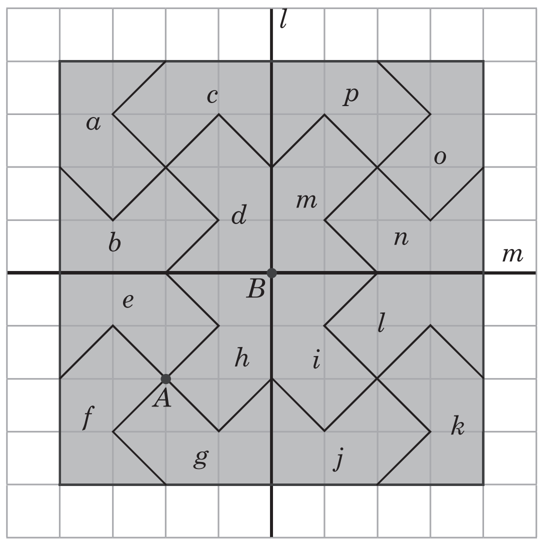
1. Según la imagen de la derecha, responde el tipo de movimiento que se debe utilizar en cada ítem para lograr que

   a) La figura a se sobreponga a la figura d.
   b) La figura a se sobreponga a la figura c.
   c) La figura a se sobreponga a la figura f.
   d) La figura e que se sobrepone a la figura f.
   e) La figura h que se sobrepone a la figura a.



2. Observando la imagen de la derecha, responde qué tipo de movimiento se debe realizar en cada caso para lograr que

   a) La figura f se sobreponga a la figura g.
   b) La figura a se sobreponga a la figura k.
   c) La figura d se sobreponga a la figura k.



3. Según la imagen del ítem 3:

   a) Si doblamos la imagen por la recta l, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura d?
   b) ¿Por cuál recta debe doblarse la imagen para que la figura f se sobreponga sobre la figura a?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Traslación

R En cada imagen, indica un tipo de movimiento (traslación, simetría o rotación) que esté presente.



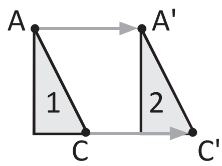
1.

2.

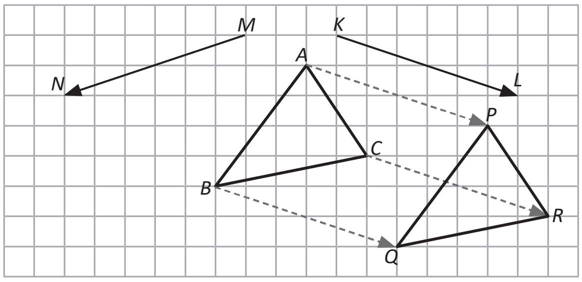
3.

C En la traslación, los segmentos que unen los puntos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud.

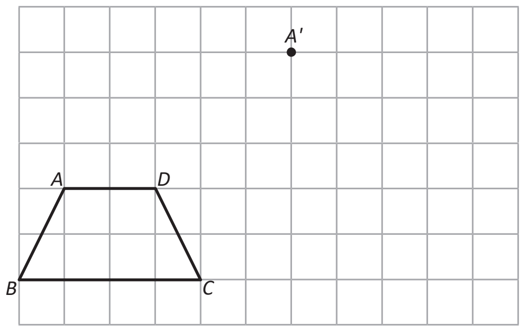
En la figura se tiene que $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.



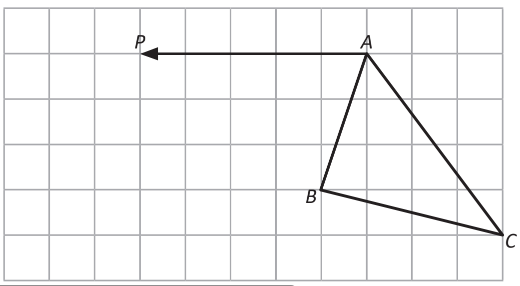
1. Observando la imagen de la derecha, el ΔABC ha sido trasladado según la distancia y dirección dada por la flecha KL, convirtiéndose en el triángulo ΔPQR. Traslada ΔABC utilizando la dirección y sentido dado por la flecha MN.



2. Dibuja el segmento $\overline{AA'}$ y elabora el cuadrilátero A'B'C'D' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$ de modo que sea el trasladado paralelamente de ABCD.



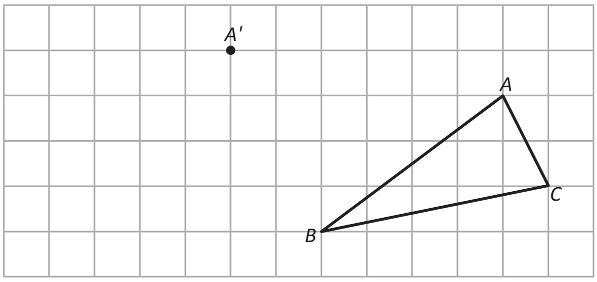
3. Traslada paralelamente el triángulo ΔABC según la dirección y sentidos de la flecha AP.



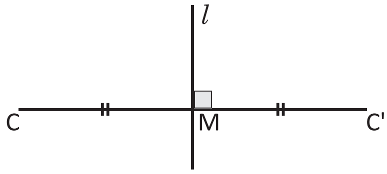
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Simetría

R Traza $\overline{AA'}$, luego traslada el ΔABC según $\overline{AA'}$.

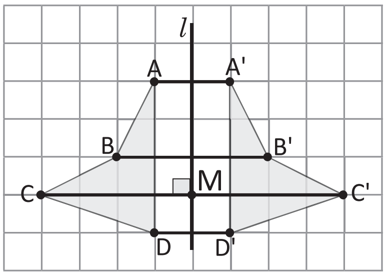


C El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**. En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Por ejemplo, en la ilustración de la derecha $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.



Por tanto en la siguiente figura, se tiene que

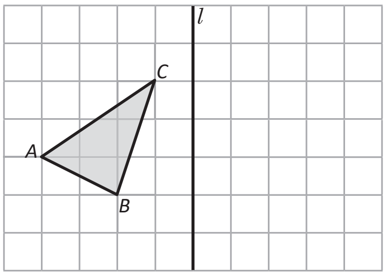
> En geometría se utilizan símbolos como ॥ para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:
>
> 
>



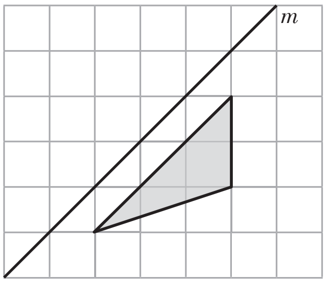
- La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo "⊥". Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.
- La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como CM = C'M.
- La recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

1. Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m.

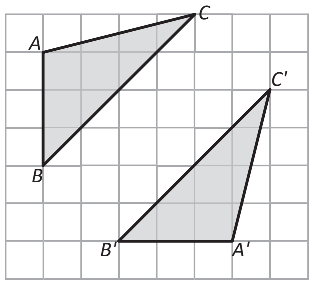
a)

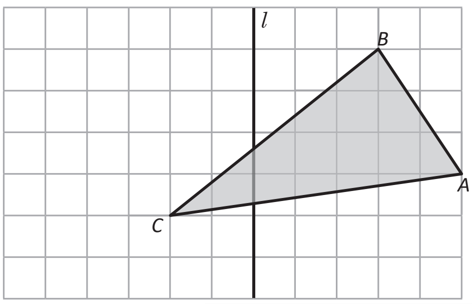


b)



2. En la imagen de la derecha, el ΔABC se puede sobreponer perfectamente al ΔA'B'C' al doblar el dibujo por medio de un eje. Dibuja el eje de simetría.





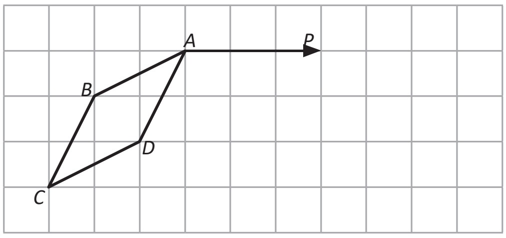
3. Dibuja la figura trasladada simétricamente respecto del eje l del ΔABC.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

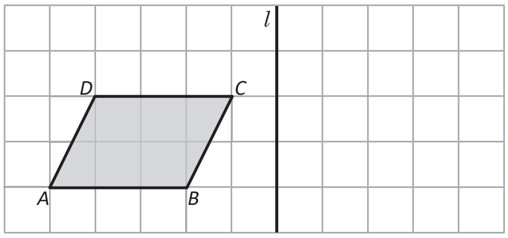
1.5 Rotación

R

a) Traslada la figura según la flecha AP.

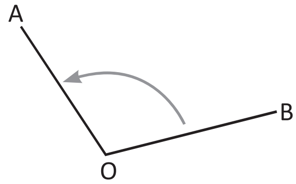


b) Dibujar la figura simétrica del cuadrilátero ABCD por la recta l.

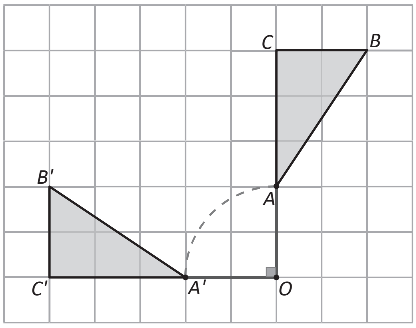


C

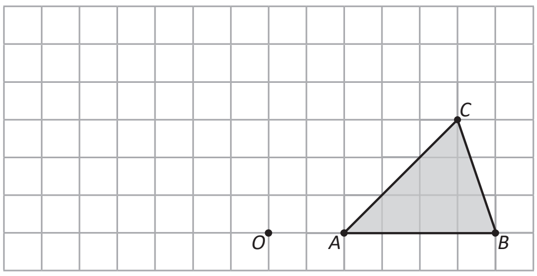
Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**. Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

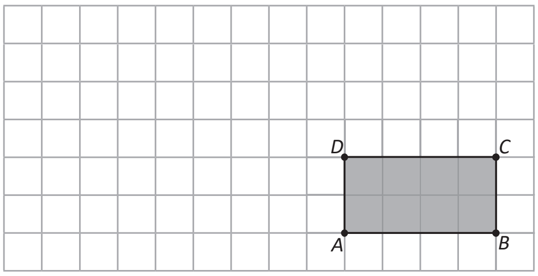


En la ilustración de la derecha, ΔA'B'C' representa una rotación de ΔABC respecto al punto O.



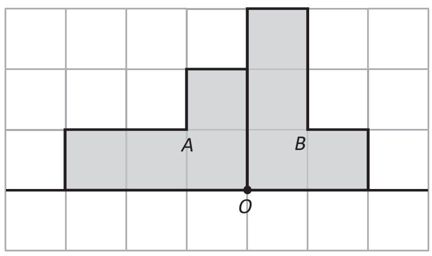
1. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC, respecto al punto O y un ángulo de 90°.





2. Dibuja el rectángulo A'B'C'D' que es el rotado del ABCD, respecto al punto D y un ángulo de 180°.

3. En la imagen de la derecha, ¿cómo se debe hacer para lograr sobreponer la figura A a la figura B?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

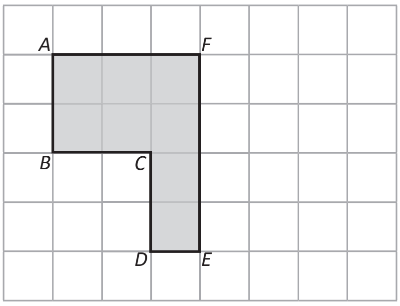
1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

R En las imágenes de abajo:

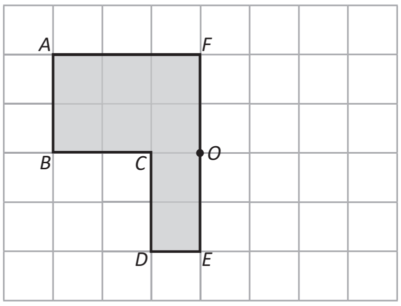
a) Dibuja la figura simétrica tomando como eje el segmento $\overline{EF}$.

b) Rota la figura respecto del punto O con un ángulo de 180°.

a)

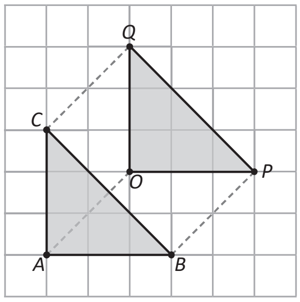


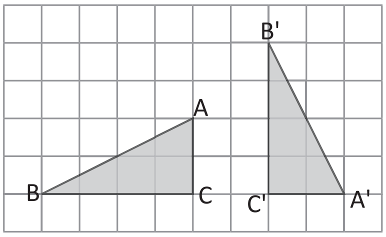
b)



C Cuando se traslada una figura y se logra sobreponerla a otra perfectamente, se dice que las dos figuras son congruentes.

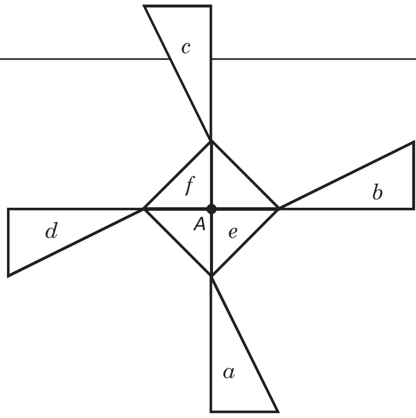
Como en la imagen de la derecha, el ΔOPQ es el trasladado del ΔABC, luego los triángulos son congruentes.



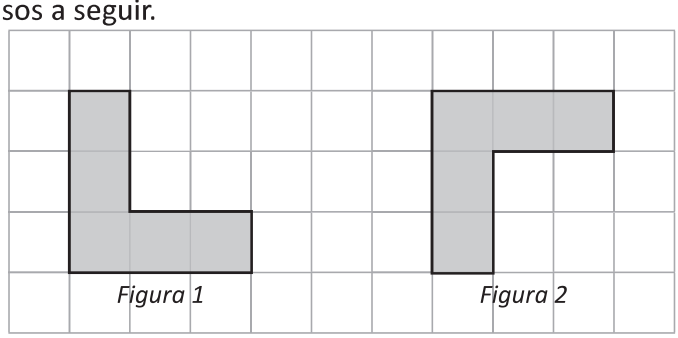


En la figura de la izquierda, para lograr sobreponerse el ΔABC al ΔA'B'C' primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

1. Responde las preguntas referidas a la imagen de la derecha.
   a) ¿Cómo debe moverse la figura a, para lograr sobreponerse al triángulo b?
   b) ¿Cómo debe moverse la figura e para lograr sobreponerse a la figura f?
   c) ¿Qué figuras son congruentes con la figura a?



2. ¿Cómo se debe trasladar la figura 1 para sobreponerse perfectamente a la figura 2? Menciona los pasos a seguir.

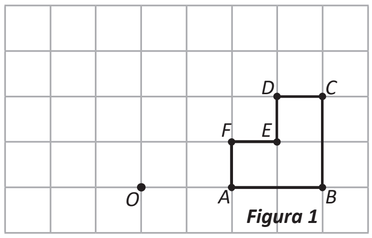


Debe realizarse más de un movimiento.

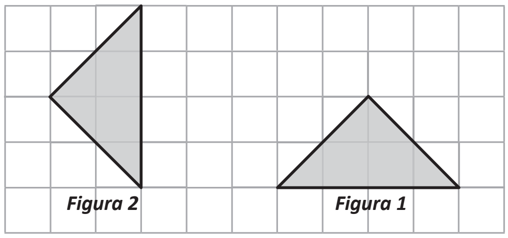
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Características y elementos del círculo

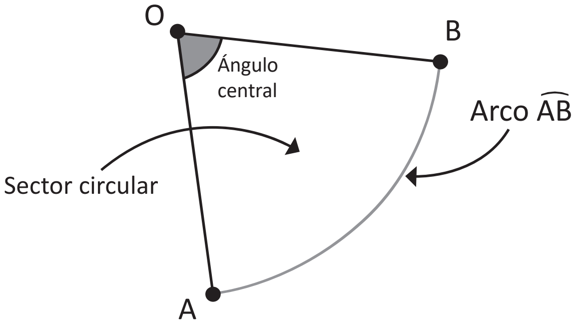
1. Rota la **figura 1**, tomando como centro de rotación el punto O mediante un ángulo de 90°.

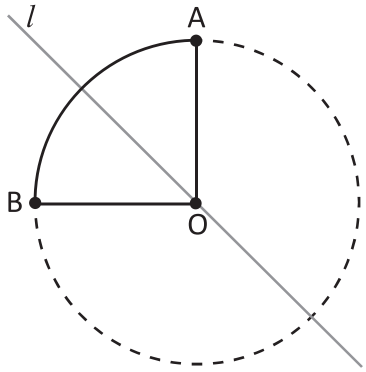


2. ¿Cómo se debe mover la figura 1 para sobreponerse perfectamente a la figura 2? Menciona los pasos a seguir.



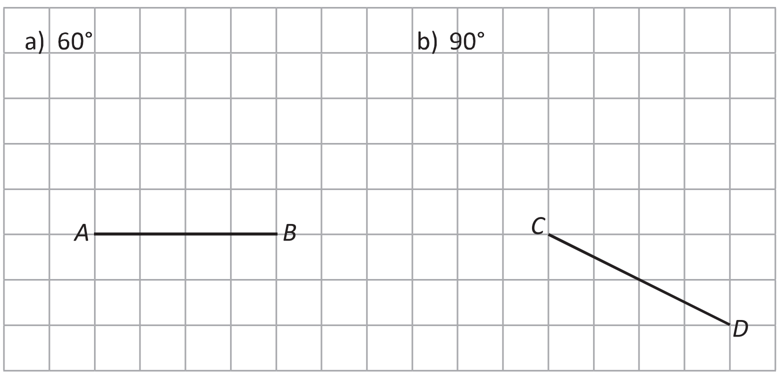
Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\overset{\frown}{AB}$.
La figura limitada por los radios que pasan por los extremo del arco se llama **sector circular.**
El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**





Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.
Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.
En un círculo su diámetro es el eje de simetría.

1. Tomando como radio los segmentos AB y CD mostrados en las imágenes, construye sectores circulares según el ángulo solicitado.



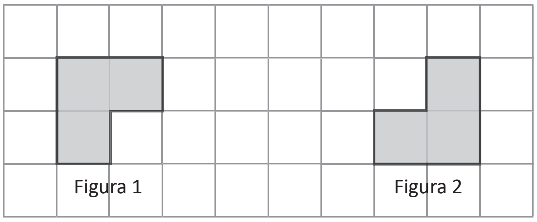
2. Dada la medida de un radio de 4 cm, dibuja sectores circulares cuyos ángulos sean de:
   a) 30° b) 60°

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

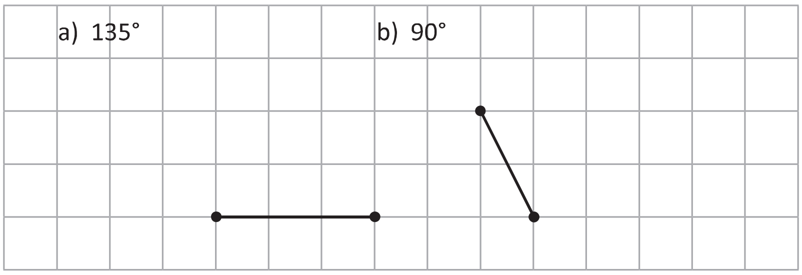
2.2 Características de círculos que se intersectan

R

1. ¿Cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?

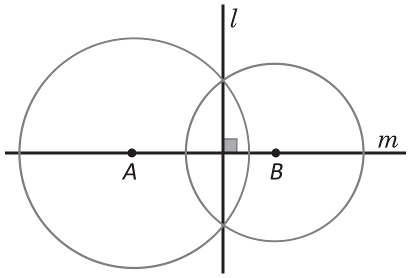


2. Tomando como radio los segmentos mostrados en los literales a) y b), construye sectores circulares según el ángulo solicitado.

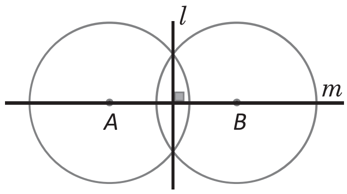


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Por ejemplo, en la imagen de la derecha, la recta m es eje de simetría de los círculos intersectados.

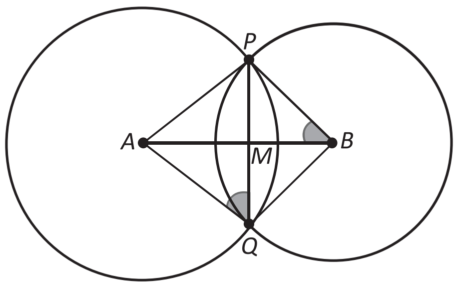


Además, la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias, es perpendicular a la recta que une sus centros. Como puede observarse en la imagen, $l \perp m$.



En caso de que los círculos sean de igual radio, entonces también la recta que une las intersecciones de las circunferencias es un eje de simetría.

1. En la gráfica se observan dos círculos (de distintos radios) intersectados con centros A y B.
   a) ¿Qué segmentos son iguales a $\overline{AP}$?
   b) ¿Qué relación hay entre $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$?
   c) ¿Qué ángulos son iguales a $\measuredangle$ AQP?
   d) ¿Qué ángulos son iguales a $\measuredangle$ ABP?



2. En la imagen de abajo, traza una recta perpendicular a la recta l. ¡Utiliza lo aprendido en la conclusión!

Utiliza regla y compás.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

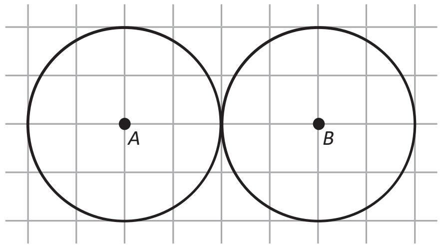
2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

R

1. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja los sectores circulares cuyos ángulos sean de
   a) 45°   b) 120°

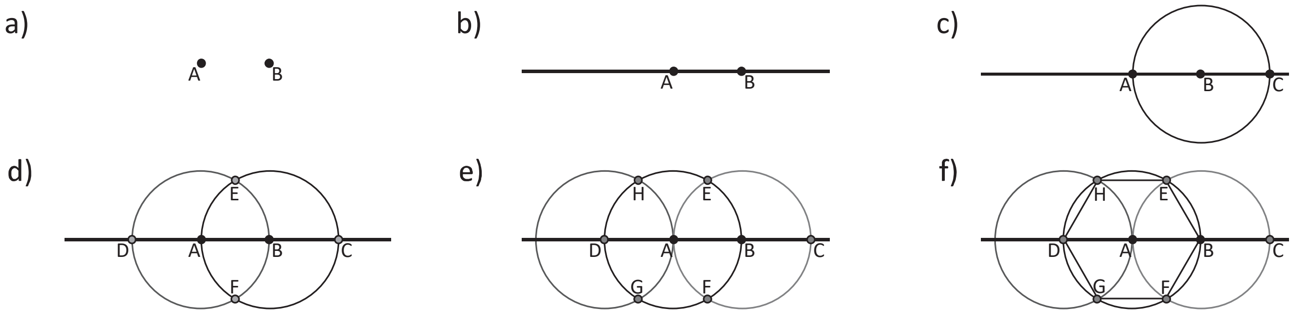
5 cm   5 cm

2. Dibuja por lo menos dos ejes de simetría de la siguiente gráfica:



C

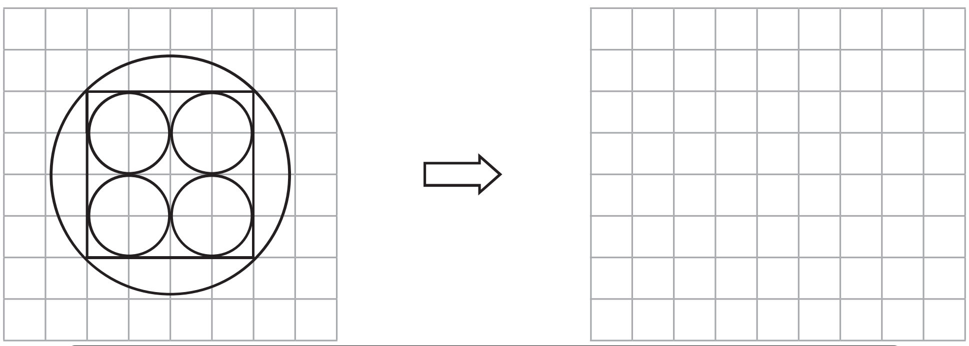
Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.
En la clase se dibujó un hexágono utilizando regla y compás siguiendo estos pasos:



1. Dibuja un triángulo isósceles (dos lados iguales) utilizando regla y compás, y tomando $\overline{AB}$ como base.

A B

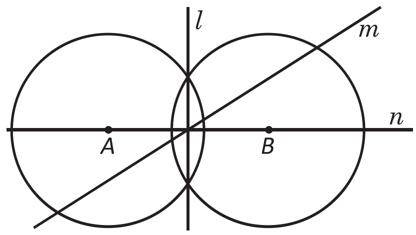
2. Copia la imagen izquierda a la cuadrícula de la derecha. Utiliza regla y compás para realizar los trazos.

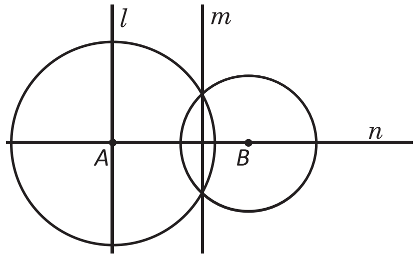


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

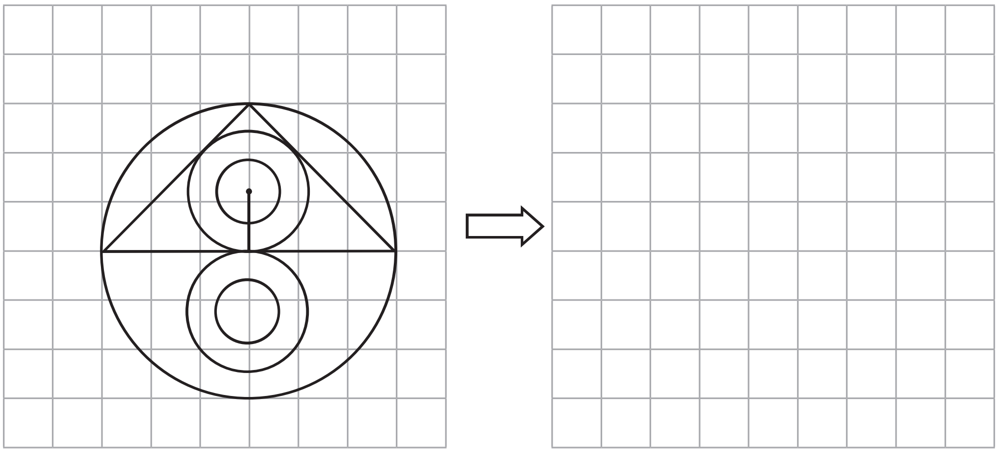
2.4 Rectas perpendiculares

1. En las imágenes a) y b) de abajo, marca con una "x" las rectas que no son un eje de simetría para las circunferencias intersectadas.
   a) Circunferencias con radios iguales.
   b) Circunferencias con radios distintos.

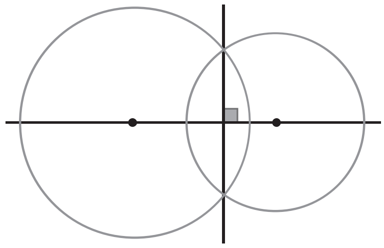




2. Copia la imagen izquierda a la cuadrícula de la derecha. Utiliza regla y compás para realizar los trazos.

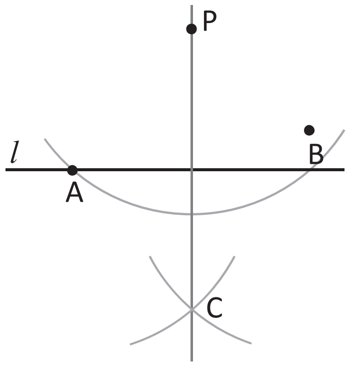


Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta se utilizan características de círculos que se intersectan. Recuerda que, la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros, así como se muestra en la imagen de la derecha.

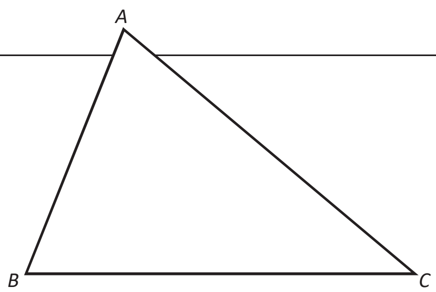


Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial de la clase.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.



Utilizando regla y compás, en el ΔABC traza una recta perpendicular.
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{BA}$.



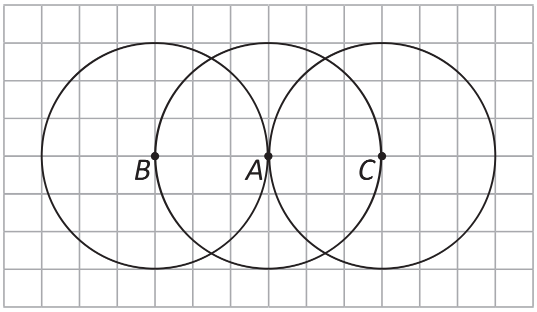
Unidad 8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

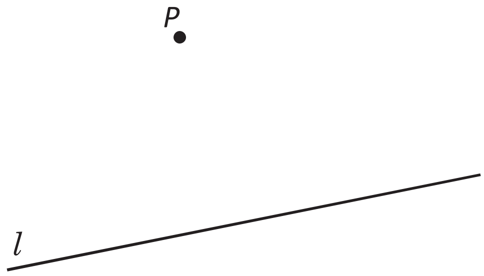
2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

R

1. Dibuja un triángulo equilátero, tal y como se hizo en la clase 2.3, utilizando las circunferencias intersectadas abajo.

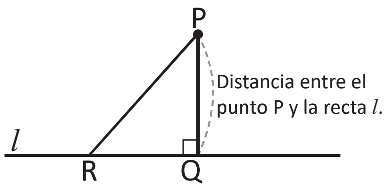


2. Traza la recta perpendicular desde el punto *P* hacia la recta l.

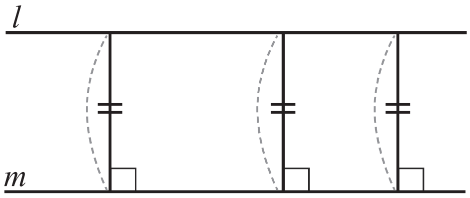


C

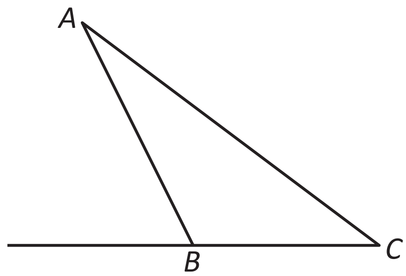
Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.



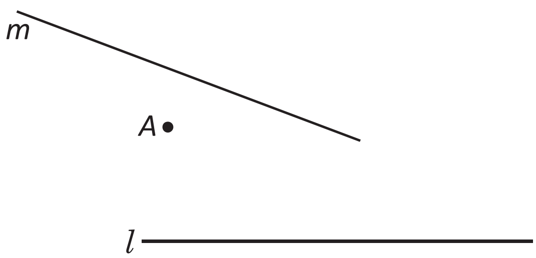
Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



1. Utilizando regla y compás, en el triángulo ΔABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y la prolongación de $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



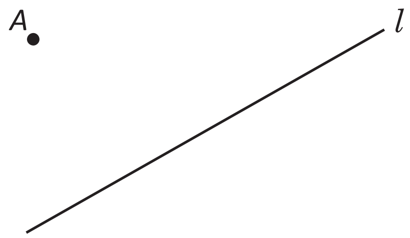
2. Utilizando regla y compás, en el dibujo de la derecha:
   a) Encuentra la distancia que hay entre el punto A y las rectas l y m.
   b) ¿Cuál recta está más cercana al punto A?



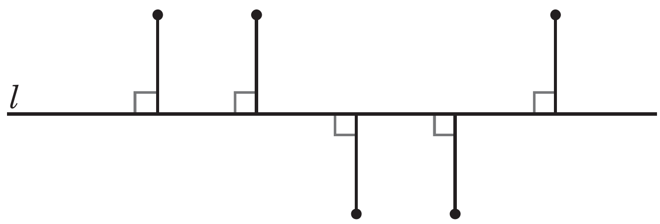
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Mediatriz de un segmento

R 1. En la imagen de abajo, traza una recta perpendicular a la recta l que pase por el punto A.



2. En la imagen de abajo se trazan segmentos perpendiculares a la recta l, todos de igual medida.
   a) Traza la recta m que pase por los puntos de arriba de l y traza una recta n que pase por los puntos abajo de l.
   b) ¿Qué relación hay entre las rectas m y n?

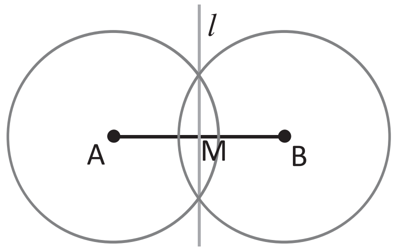


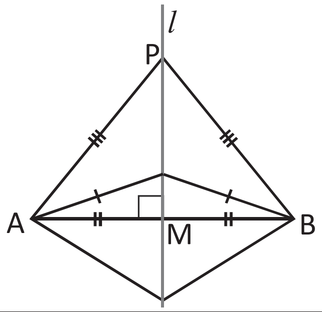
C

Considerando el procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento, se pueden hacer las siguientes conclusiones:

a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.

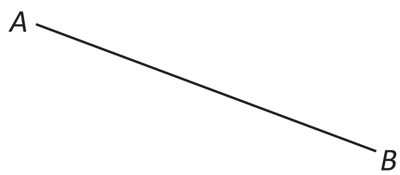
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.





Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.
Por tanto, PA = PB.
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.

1. Encuentra la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ utilizando regla y compás.



2. A partir del segmento $\overline{AB}$ y tomándolo como base, construye un triángulo isósceles. Utiliza la mediatriz del segmento y la conclusión escrita anteriormente.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

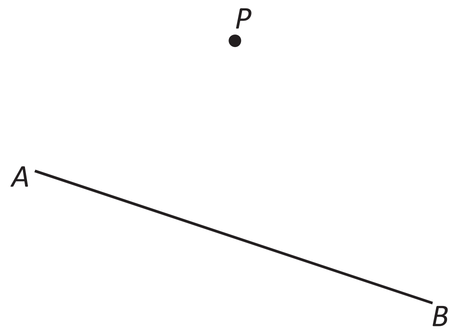
2.7 Bisectriz de un ángulo

R

En la imagen:

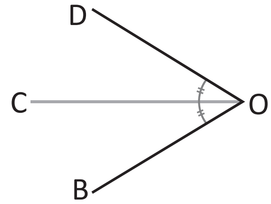
a) Encuentra la distancia que hay desde el punto *P* al segmento AB.

b) Encuentra la mediatriz del segmento AB.



C

La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.
Por tanto: $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COB = \frac{1}{2}\sphericalangle DOB$.

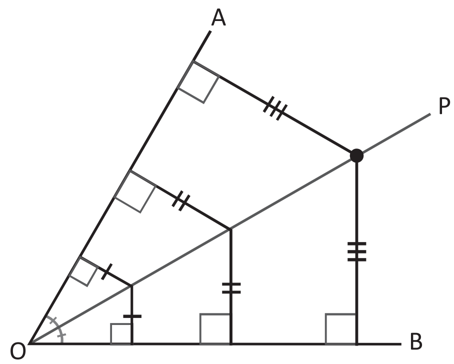


Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

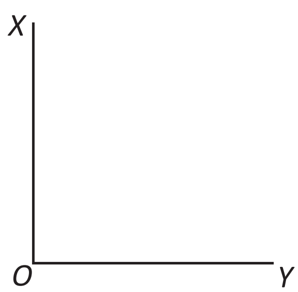
1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirrecta OP.

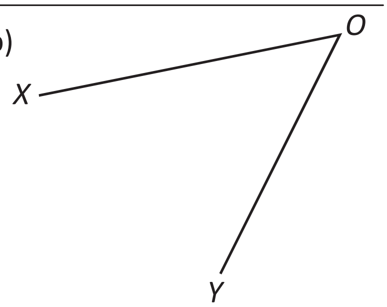
Dado que la bisectriz de $\sphericalangle AOB$ es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:



1. En cada literal encuentra la bisectriz de $\sphericalangle XOY$ utilizando regla y compás.

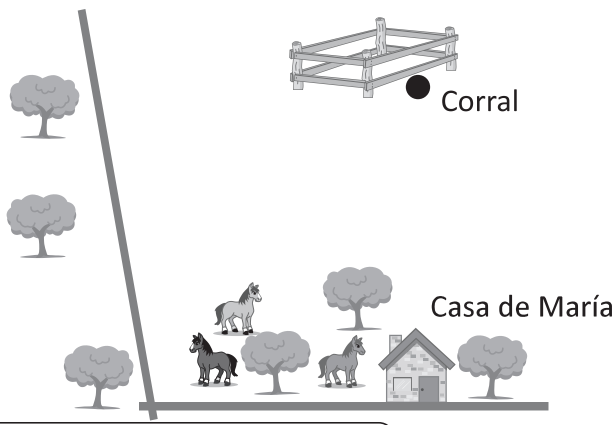
a) 

b) 

2. En la imagen de la derecha realiza lo siguiente:

   a) Traza la bisectriz del ángulo que forman los caminos.

   b) María construyó un corral para sus caballos como se muestra en la figura. Sin trazar las distancias, ¿se puede decir que el corral está a igual distancia de ambas calles? Explica.



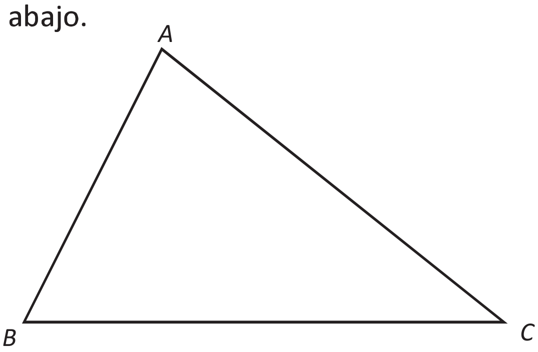
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Tangente a una circunferencia

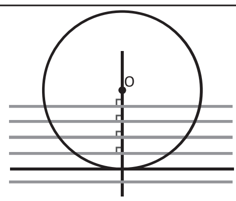
Utilizando regla y compás, realiza lo siguiente en el triángulo de abajo.

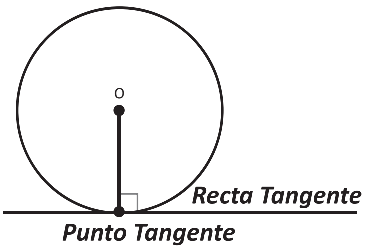
a) Traza la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

b) Traza la bisectriz del ángulo ∢ BAC.



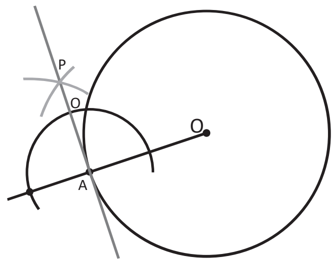
Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.





En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

Por ejemplo, en la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.
Para trazarla se ha hecho el siguiente procedimiento:



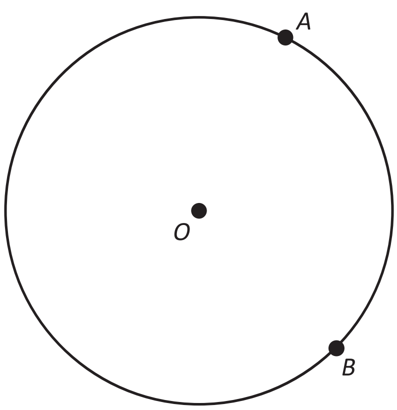
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

En la imagen de abajo realiza lo siguiente:

a) Traza las rectas tangentes que pasan por los puntos A y B.

b) Nombra como P la intersección de las dos rectas elaboradas en el literal a).

c) Completa las afirmaciones siguientes: $\overline{PA}$ = _______ , $\overline{OA}$ = _______ .



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

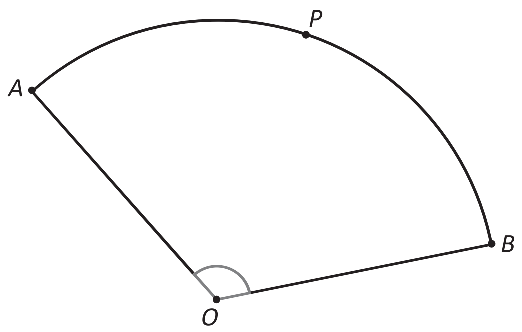
2.9 Longitud de arco de un sector circular

R En el siguiente sector circular:

a) Traza la bisectriz del ángulo que sostiene el arco $\overset{\frown}{AB}$.

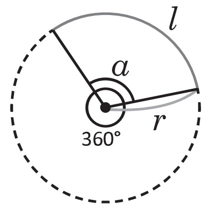
b) Traza la recta tangente al sector circular en el punto P.

c) ¿Qué ángulo forman al intersectarse la bisectriz y la tangente elaboradas en los literales anteriores?



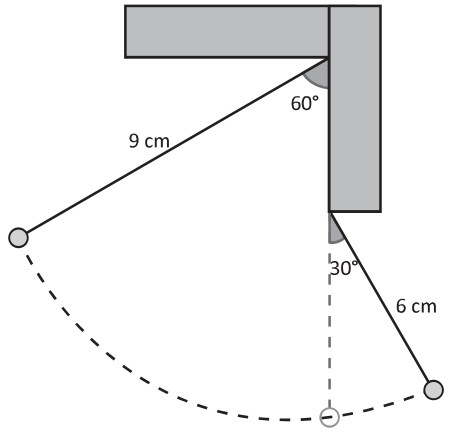
C Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 3 cm. Deja constancia de tus procesos.

2. La imagen muestra el movimiento oscilatorio de un péndulo doble. Si el péndulo se mueve como se indica en la figura y con las medidas respectivas, calcula la longitud recorrida por el péndulo.



El **péndulo** es un sistema físico que oscila y se mantiene en movimiento constante bajo acción de la gravedad u otra característica física.

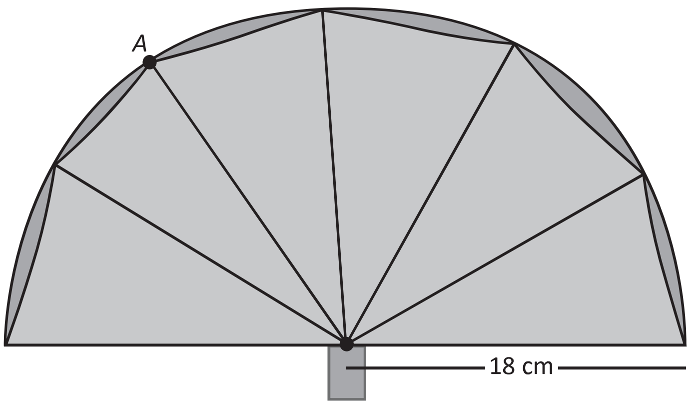
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Área de un sector circular

La imagen muestra un abanico extendido (considera que todos los sectores circulares que se forman son iguales).

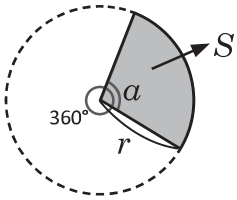
a) Calcula la longitud del arco que describe el abanico extendido.

b) Traza la recta tangente al sector circular en el punto A.

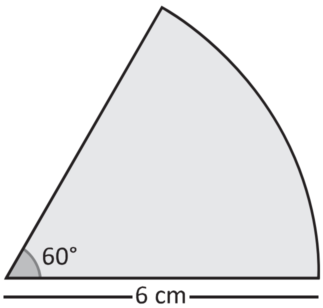


Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

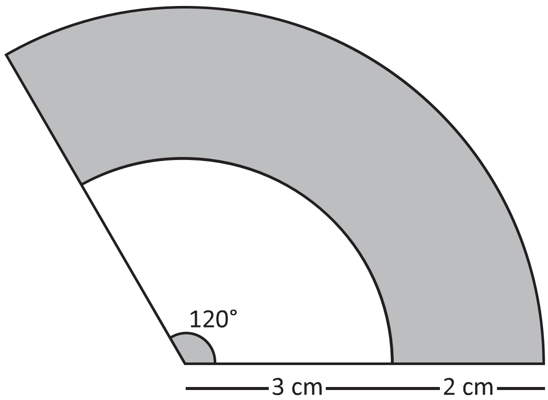
Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



1. Calcula el área del sector circular mostrado en la imagen, completando los datos que hacen falta.



2. En la figura, encuentra el área de la región sombreada.

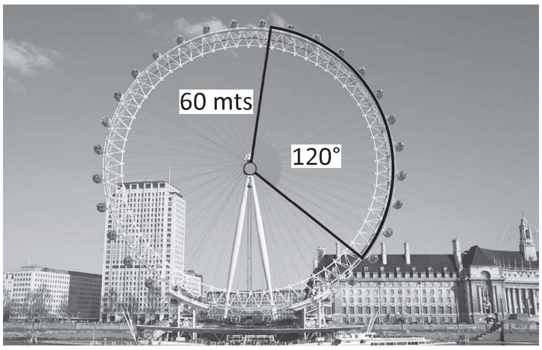


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.11 Incentro de un triángulo

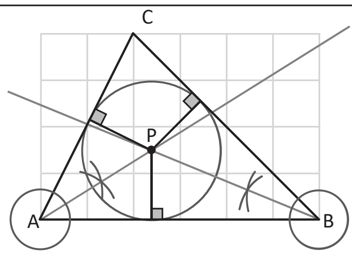
R El London Eye es una de las ruedas de la fortuna o norias más grandes del mundo, ubicada en Londres, Inglaterra.

a) Encuentra la longitud del arco señalado en la imagen.
b) Encuentra el área del sector circular señalado en la imagen.

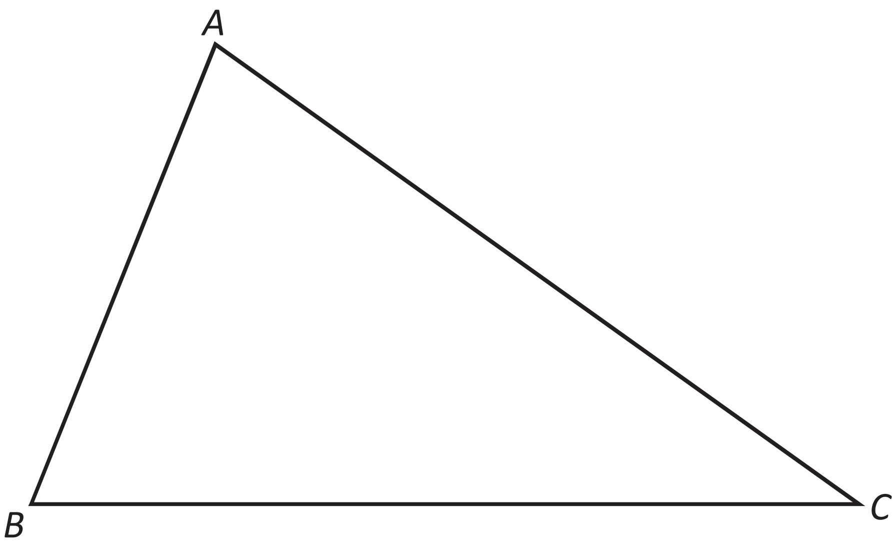


Longitud del arco del sector	Área del sector

C En la figura, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.



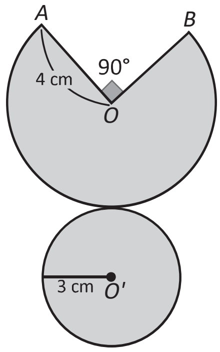
Encuentra el incentro del ΔABC y nombra el punto como P. ¡Utiliza regla y compás!



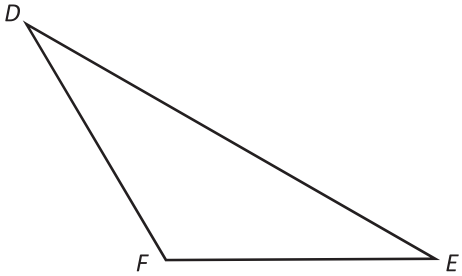
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

R 1. En la siguiente imagen, encuentra el área de la figura sombreada.



2. Encuentra el incentro del ΔDEF y nombra el punto como P. ¡Utiliza regla y compás!



C

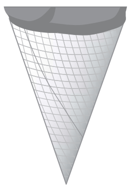
Los cuerpos geométricos cuyas caras laterales y sus bases son figuras planas son llamados **poliedros**.

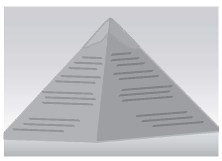
- Si las caras laterales son rectángulos, son llamados **prismas rectos**.
- Si las caras laterales son triángulos, reciben el nombre de **pirámides**.

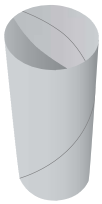
Los cuerpos geométricos cuyas caras laterales son curvas, se llaman **cuerpos redondos**. Son ejemplos de ellos los cilindros, conos y esferas.

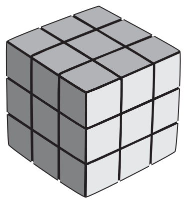
1. Observa las siguientes imágenes. Traslada el numeral de cada imagen en el grupo que le corresponda y al lado escribe el nombre del cuerpo geométrico que representan.

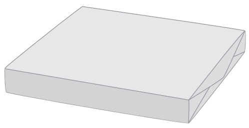
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

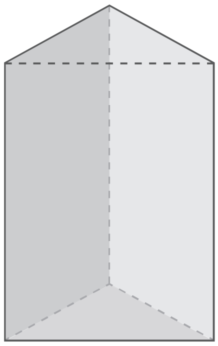
Poliedros	Cuerpos redondos

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

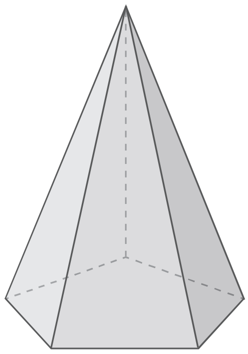
2. Dibuja en el lugar correspondiente las figuras planas que conforman la base y las caras laterales de cada cuerpo geométrico.

a)



Base	Cara lateral

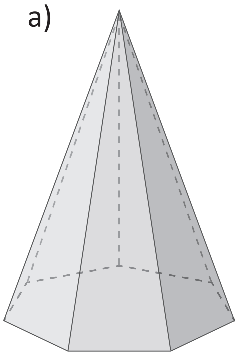
b)



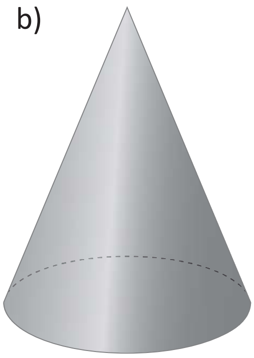
Base	Cara lateral

3. Escribe las diferencias y similitudes de los siguientes cuerpos geométricos, entre a) y b); c) y d).

a)

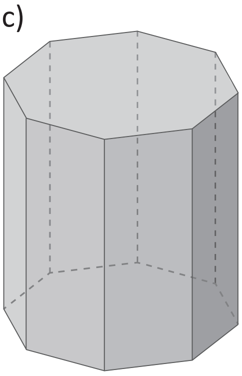


b)



Similitudes	Diferencias

c)



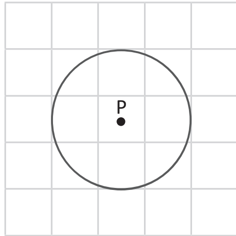
d)

Similitudes	Diferencias

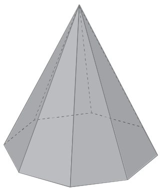
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Características de poliedros regulares

1. Si el punto P se considera como incentro de algún triángulo. Dibuja un triángulo para el que se cumpla que P es su incentro.

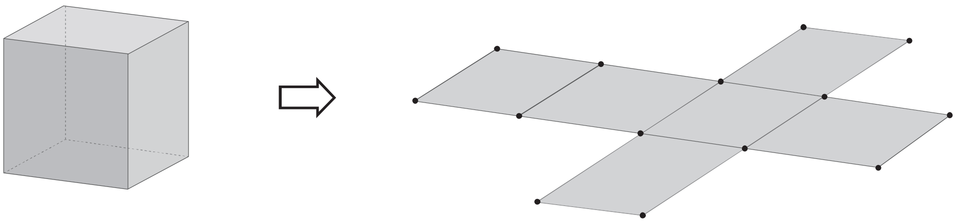


2. Dibuja en el lugar correspondiente las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del siguiente cuerpo geométrico.



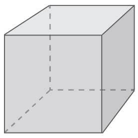
Base	Cara lateral

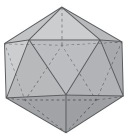
Se llaman **poliedros regulares** los cuerpos geométricos en los que se cumple que todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama **plano desarrollado de un cuerpo geométrico**, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico.
Por ejemplo: El cubo es un poliedro regular, porque todas sus caras son cuadrados congruentes.

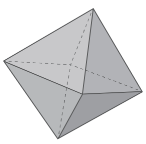


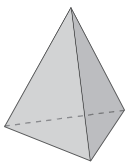
Desarrollo del cubo

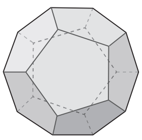
Traslada el literal del poliedro regular de la izquierda a la tabla de la derecha según la descripción que se presenta y luego completa la columna 3 con el nombre del poliedro regular.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

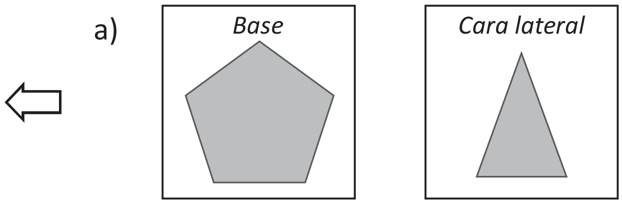
Literal	1 Número de caras	2 Forma de las caras	3 Nombre del poliedro regular
	12	Pentagono regular	
	4	Triángulo equilátero	
	20	Triángulo equilátero	
	6	Cuadrado	
	8	Triángulo equilátero	

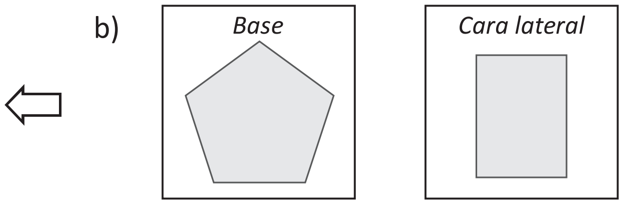
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Relación de posición entre rectas y planos

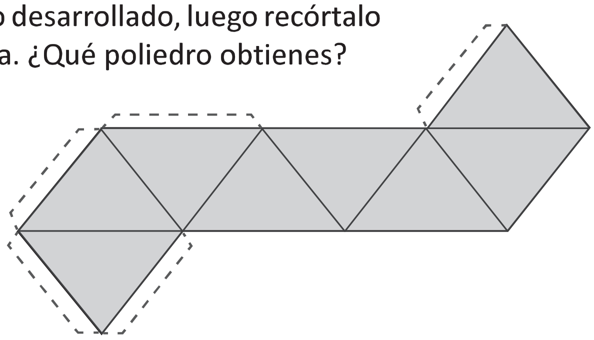
R

1. La imagen representa el polígono que forma la base y la cara lateral de un cuerpo geométrico. Dibuja el cuerpo correspondiente a esta descripción.

a) 

b) 

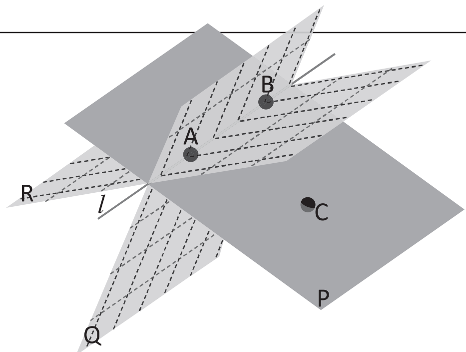
2. Copia en una página de papel bond el siguiente plano desarrollado, luego recórtalo y pega las pestañas y observa cuál poliedro se forma. ¿Qué poliedro obtienes?



C

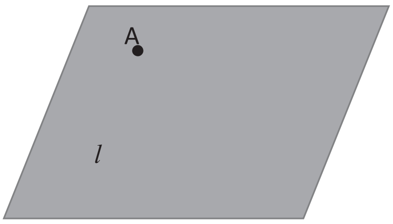
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

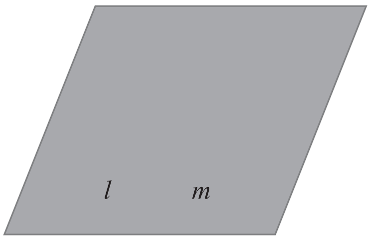


También, un plano queda determinado por

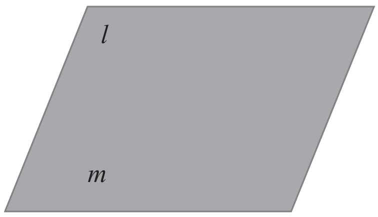
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



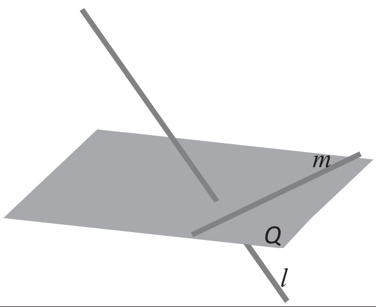
b) Dos rectas paralelas.



c) Dos rectas secantes que se cortan.



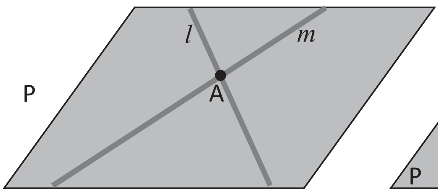
En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como *l* y *m* en la imagen.



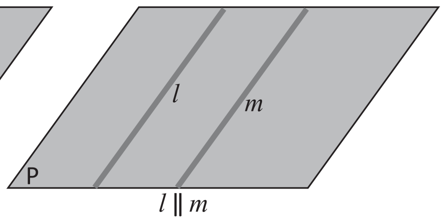
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como el siguiente:

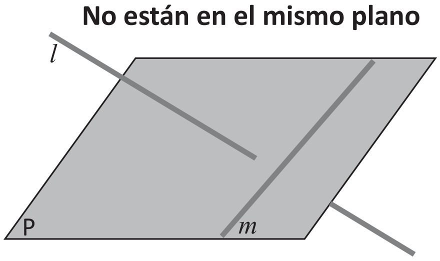
Sobre un mismo plano | **No están en el mismo plano**



Rectas secantes



Rectas paralelas



Rectas cruzadas

La relación entre rectas se mantiene para los segmentos.

1. En la siguiente imagen, asumiendo que las carreteras son líneas rectas, identifica las rectas que están en posición cruzada.

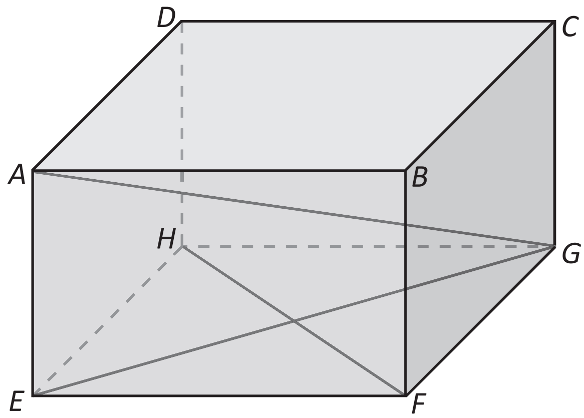
En la imagen se muestra el Monumento Bienvenido a casa. Este monumento fue construido en 1994 durante la administración del alcalde Armando Calderón Sol. El monumento conmemora a todos los salvadoreños que viven fuera del país y que son ahora un gran pilar para la economía salvadoreña. El monumento fue remodelado en el año ______ .

2. Observa el prisma rectangular de la imagen y responde:
   a) ¿Qué segmentos son secantes a $\overline{EG}$?

   b) ¿Qué lados son paralelos a $\overline{AB}$?

   c) ¿Qué segmentos del prisma rectangular están en posición cruzada con la recta $\overline{AG}$?

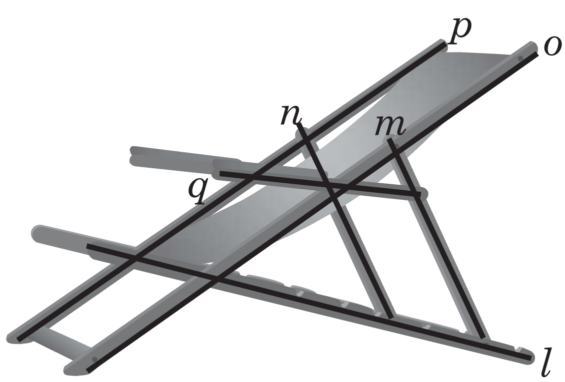
   d) ¿Qué segmentos del prisma rectangular están en posición cruzada con la recta $\overline{BC}$?



3. Observa la siguente silla.

   a) Identifica los pares de rectas que son paralelas.

   b) Identifica los pares de rectas que son secantes.

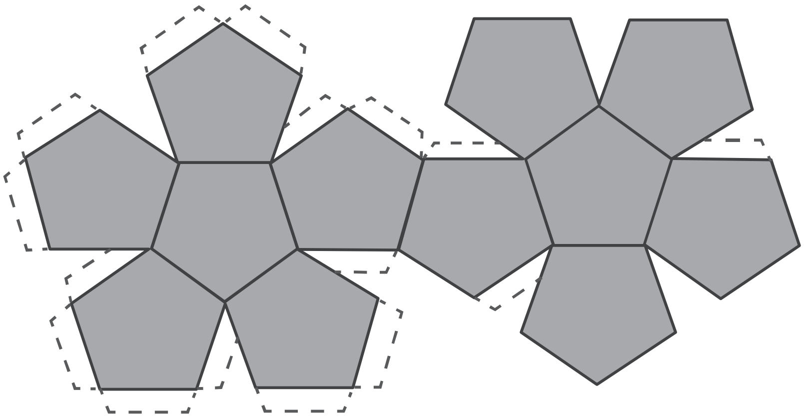


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

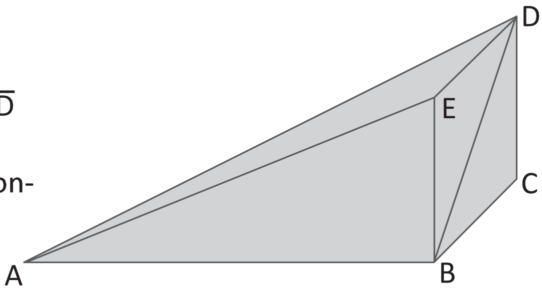
3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

R

1. Copia en una página de papel bond el plano desarrollado de la derecha, luego recórtalo y pega las pestañas y observa cuál poliedro se forma. ¿Qué poliedro obtienes?

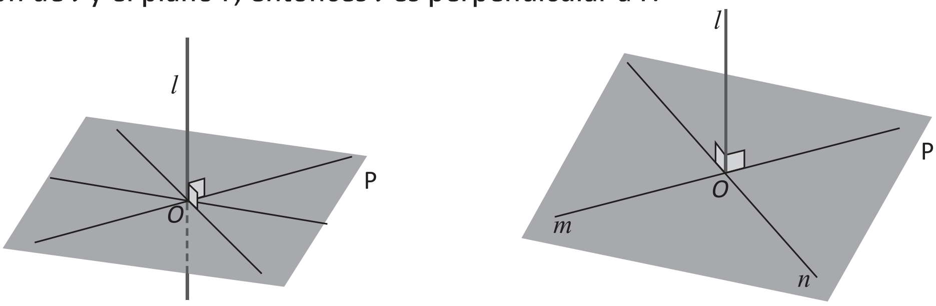


2. En el cuerpo geométrico, qué segmentos:
   a) están sobre rectas secantes a la recta sobre la cual está $\overline{BD}$
   b) son paralelos a $\overline{BC}$
   c) están sobre rectas en posición cruzada con la recta que contiene a $\overline{BC}$



C

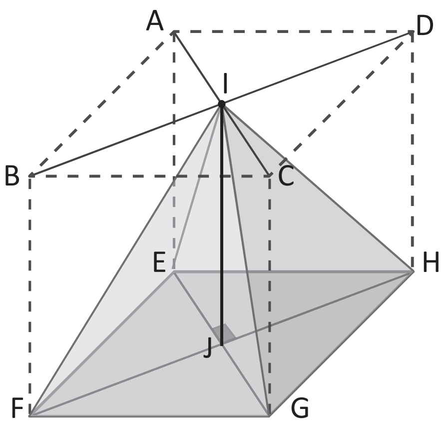
Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O. En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P. Si una recta es perpendicular a dos rectas en el plano P que pasan por el punto de intersección de l y el plano P, entonces l es perpendicular a P.



En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base y es perpendicular a la base.

En la imagen hay una pirámide rectangular dentro de un prisma rectangular, las bases y alturas de ambos poliedros coinciden.

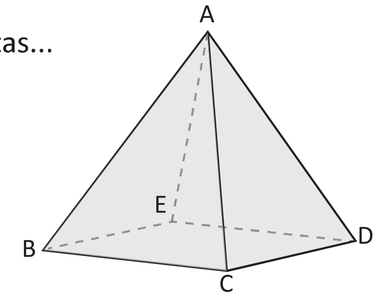
a) ¿Qué segmentos de la pirámide son paralelos a $\overline{BF}$?
b) ¿Qué segmentos de la pirámide son perpendiculares a $\overline{EG}$?
c) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{IH}$?
d) ¿Qué segmento representa la altura de los dos cuerpos geométricos?
e) Si el lado $\overline{BF}$ mide 5 cm, ¿cuánto mide la altura de la pirámide?

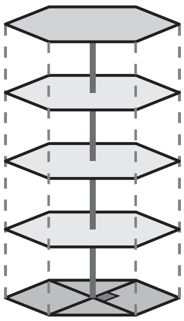


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

1. Observa la pirámide rectangular y responde, ¿qué lados están sobre rectas...
   a) secantes a la recta que pasa por $\overline{AB}$.
   b) paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
   c) que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.



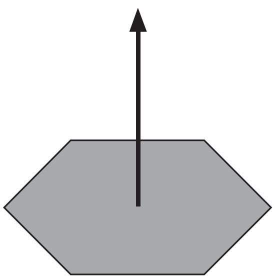


2. En la imagen se observa un estante formado por tablas dispuestas verticalmente, así como se muestra. ¿Qué representa el eje que atraviesa las tablas que forman el estante?

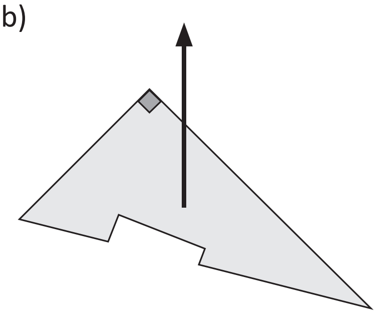
- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas alineadas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

1. Si se toma como base las siguientes figuras, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

a)

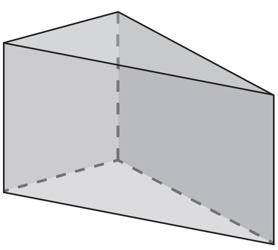


b)

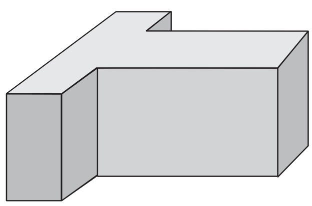


2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos. Dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente para lograr obtener el cuerpo geométrico.

a)



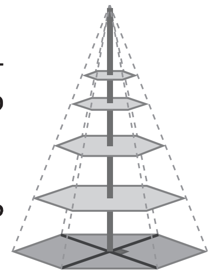
b)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

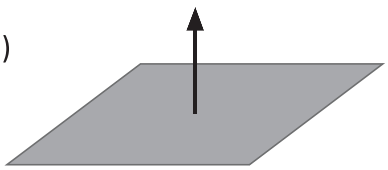
3.6 Proyección ortogonal

1. En la imagen de la derecha se observa un estante formado por tablas dispuestas verticalmente, así como se muestra. Responde las siguientes preguntas considerándolo como un cuerpo geométrico.
   a) ¿Qué forma tiene su base?
   b) ¿Qué representa el eje que atraviesa verticalmente las tablas que forman el estante?

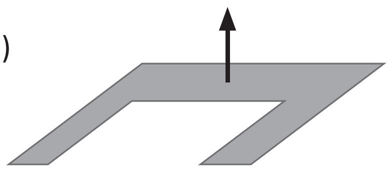


2. Si se toma como base las siguientes figuras sombreadas, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

a)



b)



Se le llama **proyección ortogonal** de un cuerpo a aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.
La imagen de abajo es un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, así como lo muestra la imagen 3.
Se consideran tres tipos de perspectivas, **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

Imagen 1

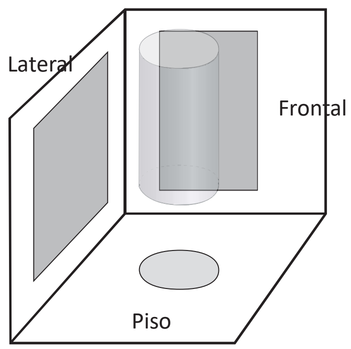


Imagen 2

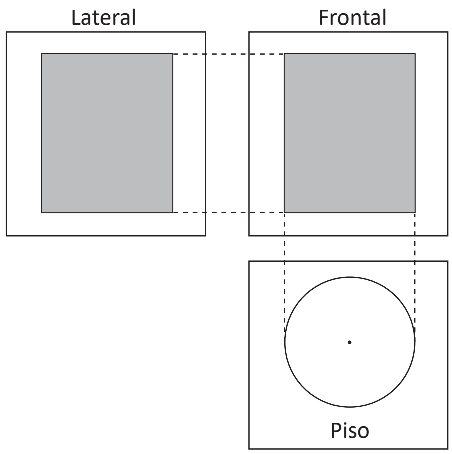
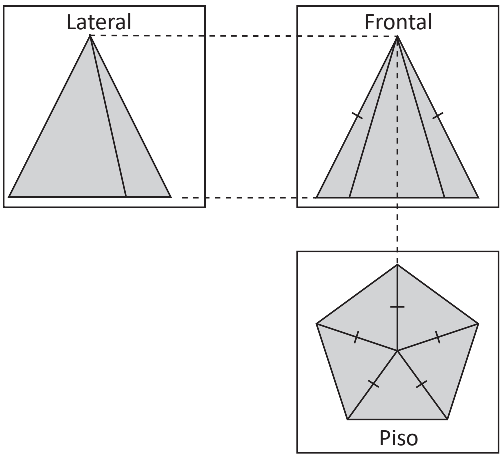


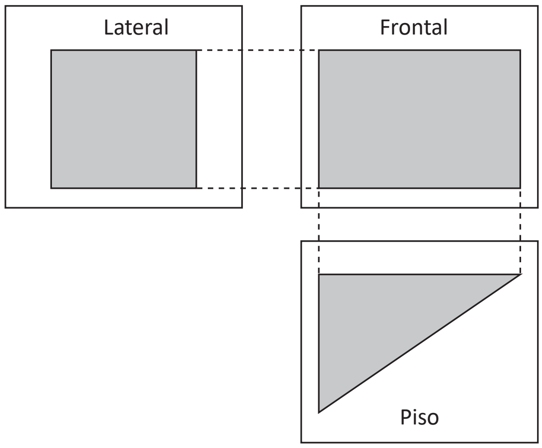
Imagen 3

Dibuja los cuerpos geométricos que generan las siguientes proyecciones ortogonales.

a)



b)

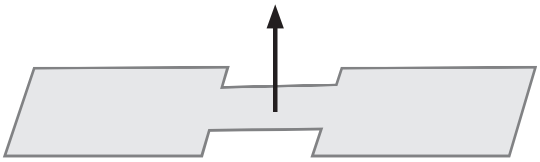


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

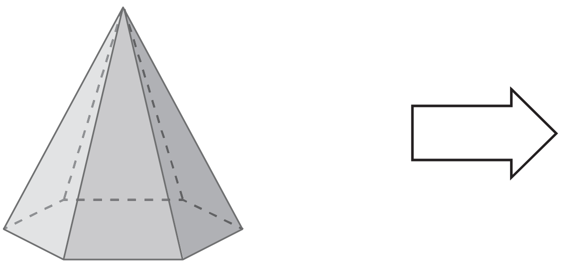
3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

R

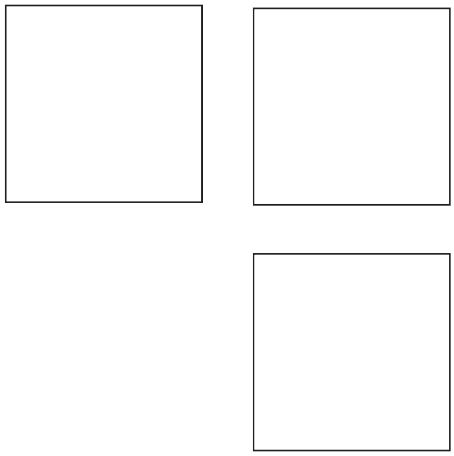
1. Si se toma como base la figura sombreada, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



Lateral Frontal



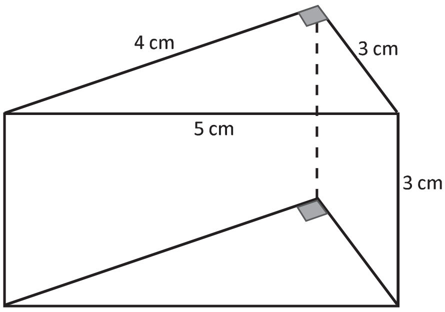
Piso

C

El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$$

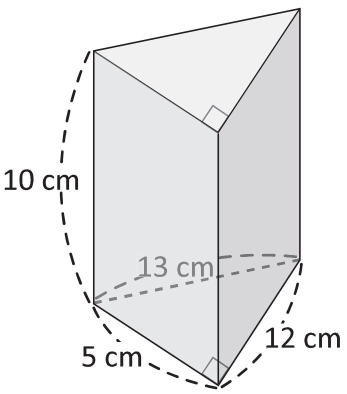
Donde $\mathbf{A}_l$: Área lateral y $\mathbf{A}_b$: Área de la base.
Para calcular el área total del siguiente prisma triangular, se hace:



El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$

$\mathbf{A}_l$ = 5 × 3 + 4 × 3 + 3 × 3 = 15 + 12 + 9 = 36
$\mathbf{A}_b$ = 4 × 3 ÷ 2 + 4 × 3 ÷ 2 = 6 + 6 = 12
$\mathbf{A}_T$ = 36 + 12 = 48 cm^2

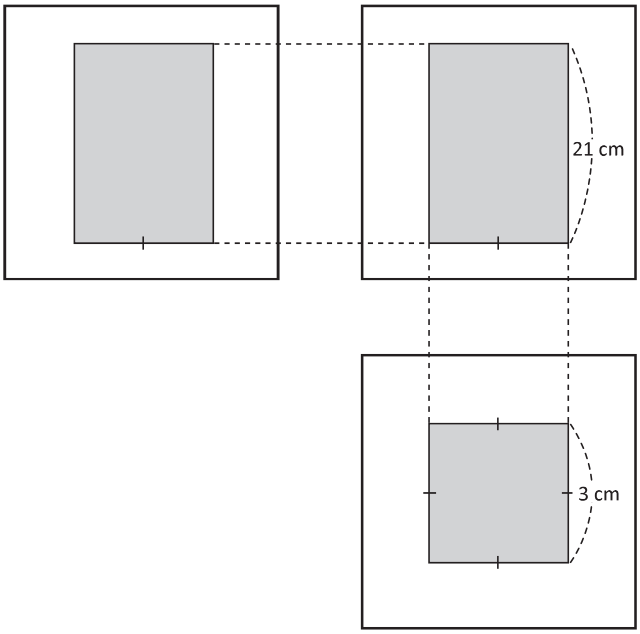
1. Encuentra el área total del prisma triangular mostrado a continuación:



Respuesta: __________ cm^2

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

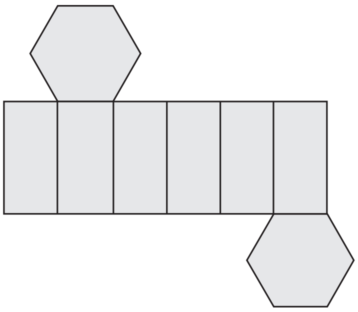
2. En la imagen se muestra la proyección ortogonal de un prisma con base cuadrada. Encuentra el área total del prisma que se forma.



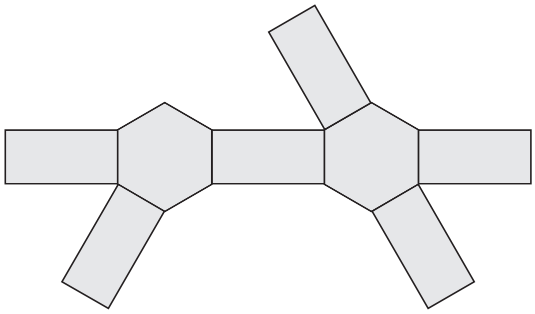
Respuesta: ________ cm²

3. En los siguientes literales, a), b), c) y d), se muestran distintos desarrollos planos de un prisma hexagonal. Encierra en un círculo el único de ellos que es incorrecto y no logra formar el prisma.

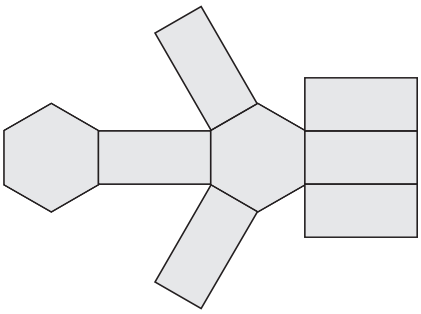
a)



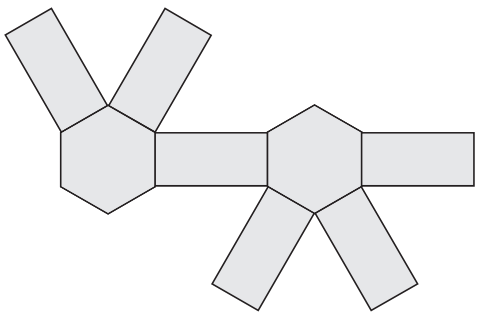
b)



c)



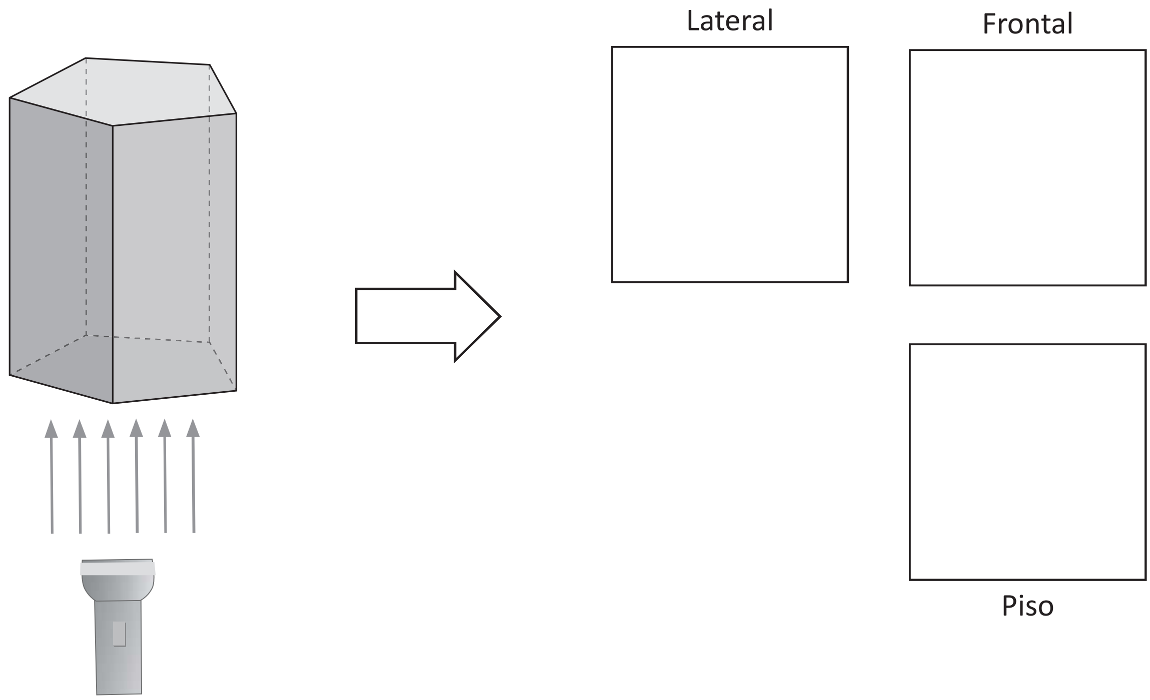
d)



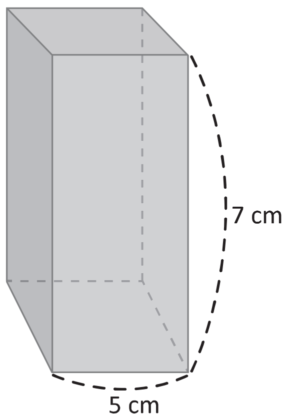
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

1. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada que se muestra a continuación.

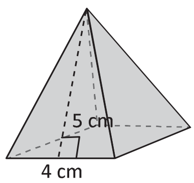


Respuesta: __________ cm^2

El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$$

Donde $\mathbf{A_l}$: Área lateral y $\mathbf{A_b}$: Área de la base.
Por ejemplo, para calcular el área total de la superficie de la pirámide:

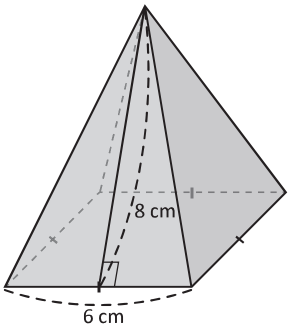


Debe considerarse que la pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base. Por tanto:

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm^2
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm^2
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm^2
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm^2

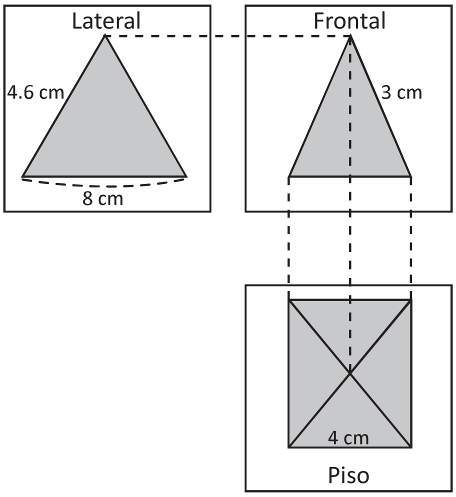
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. La imagen muestra una pirámide con base cuadrada, donde la altura de cada cara lateral es 8 cm. Encuentra su área total.



Respuesta: __________ cm^2

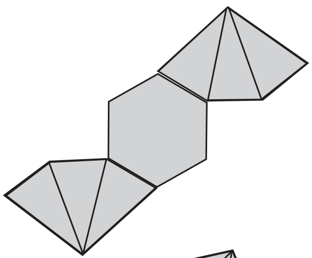
2. En la imagen siguiente se muestra la proyección ortogonal de una pirámide. Encuentra el área total del cuerpo geométrico que se forma.



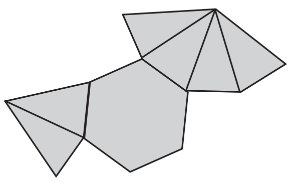
Respuesta: __________ cm^2

3. En los siguientes literales, a), b), c) y d) se muestran distintos planos desarrollados de una pirámide hexagonal. Encierra en un círculo el único de ellos que es incorrecto y no logra formar la pirámide.

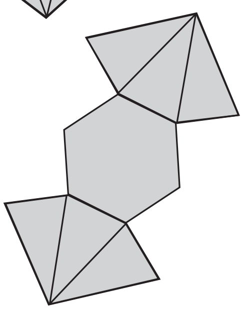
a)



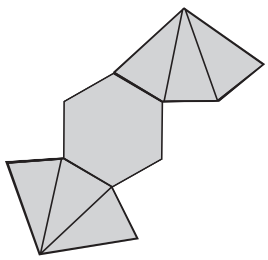
b)



c)



d)

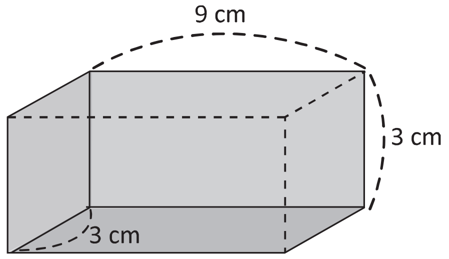


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

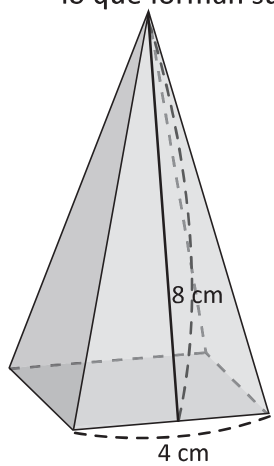
3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

R

1. Encuentra el área total del siguiente prisma rectangular.



2. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada y la altura de cada triángulo que forman sus caras es de 8 cm.



Respuesta: ________ cm^2

C

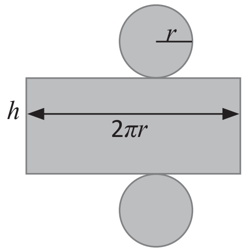
El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

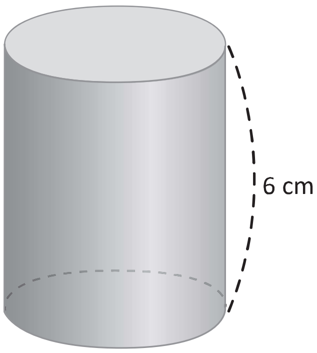
$$A_T = A_b + A_l$$

$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.

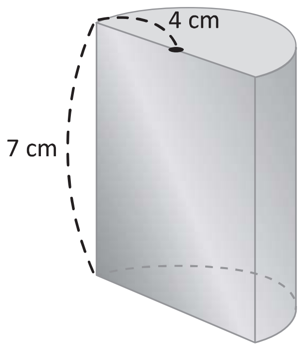


1. El siguiente cilindro tiene de altura 6 cm y el radio de la base es 3 cm. Encuentra el área total.



Respuesta: ________ cm^2

2. En la siguiente imagen hay un cilindro cortado justo a la mitad, encuentra su área total.

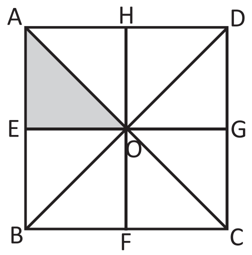
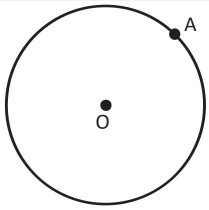
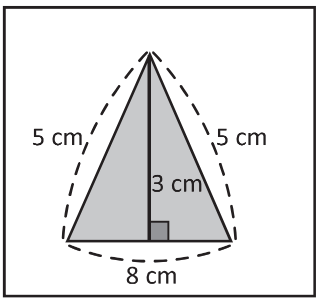
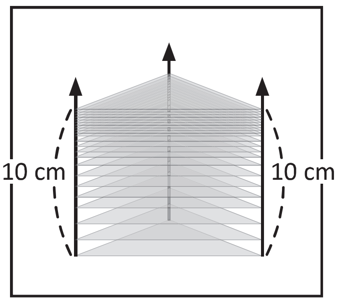


Respuesta: ________ cm^2

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.10 Autoevaluación de lo aprendido

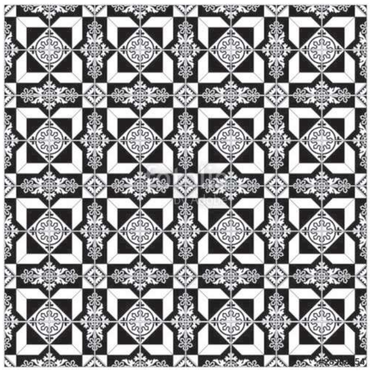
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Resuelvo problemas como en la siguiente figura: a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG? b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF? c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF? 				
2. Resuelvo problemas como a) Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.  b) Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm. c) Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.				
3. Resuelvo problemas como La imagen muestra un prisma formado por el desplazamiento vertical de un triángulo. Encuentra el área total del prisma triangular.  Respuesta: ________ cm^2				

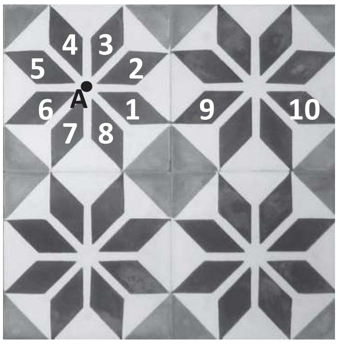
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

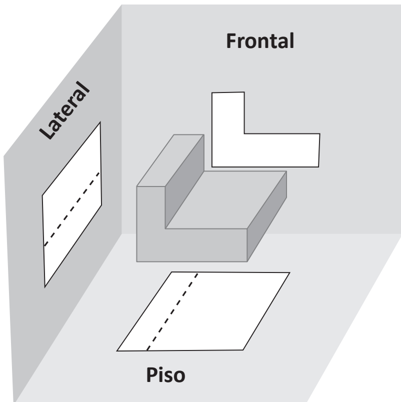
1. **Mosaico.** Un mosaico es una obra realizada con pequeñas piezas de piedra, cerámica o vidrio de diversas formas o colores, llamados teselas. Este tipo de obras se observan comúnmente en las paredes o pisos de algunas casas, en ocaciones se trata de un teselado hecho con simetrías, rotaciones y traslaciones.



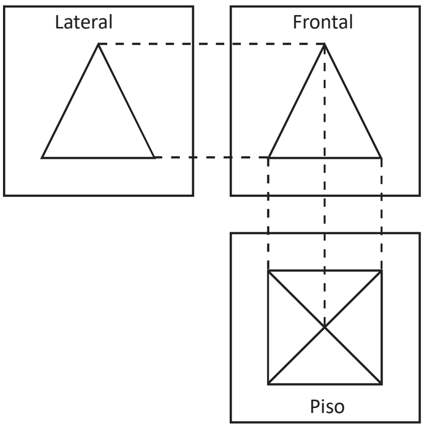
   En la imagen debajo, una parte de las figuras simétricas ha sido ampliada, responde lo siguiente acerca de esa figura:
   a) ¿Qué tipo de movimiento se debe realizar para sobreponer la figura 1 sobre la figura 9? ¿Y para sobreponerse a la figura 10?
   b) Si la figura 1 realiza rotaciones con respecto al punto A, ¿qué figuras se obtienen?



2. **Dibujo técnico.** La proyección ortogonal es un método muy utilizado por las personas que realizan dibujo técnico, este sirve para representar objetos tridimensionales en vistas bidimensionales manteniendo su verdadera magnitud y forma. Este método también es utilizado por algunos arquitectos en la elaboración de planos.



   Dibuja el cuerpo geométrico que se forma, a partir de la proyección ortogonal que se muestra debajo.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?