## Unidad 4. Paralelismo y ángulos de un polígono

**Competencia de la Unidad**

Utilizar la relación entre ángulos internos y externos de los polígonos, así como de los ángulos entre paralelas para caracterizar figuras y resolver situaciones del entorno.

**Relación y desarrollo**

**Primero y segundo ciclo**

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

**Séptimo grado**

**Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos**
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

**Octavo grado**

**Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono**
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

**Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos**
- Congruencia de triángulos

**Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros**
- Triángulos
- Paralelogramos

**Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos**
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

**Noveno grado**

**Unidad 5: Figuras semejantes**
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

**Unidad 6: Teorema de Pitágoras**
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

**Unidad 7: Ángulo inscrito y central**
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

## Plan de estudio de la Unidad

| Lección | Horas | Clases |
|---|---|---|
| 1. Suma de los ángulos internos y externos de un polígono | 1 | 1. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1 |
| | 1 | 2. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2 |
| | 1 | 3. Suma de los ángulos externos de un polígono |
| | 1 | 4. Suma de los ángulos internos de un polígono regular |
| 2. Rectas paralelas y ángulos | 1 | 1. Ángulos opuestos por el vértice |
| | 1 | 2. Ángulos correspondientes y ángulos alternos |
| | 1 | 3. Caracterización de los ángulos correspondientes |
| | 1 | 4. Caracterización de los ángulos alternos |
| | 1 | 5. Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo |
| | 1 | 6. Elementos de una demostración |
| | 1 | 7. Aplicación de las características de los ángulos entre paralelas |
| | 1 | Prueba de la Unidad 4 |

11 horas clase + prueba de la Unidad 4

## Puntos esenciales de cada lección

**Lección 1: Suma de los ángulos internos y externos de un polígono**
A partir del proceso de triangulación de un polígono aprendido en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de $n$ lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

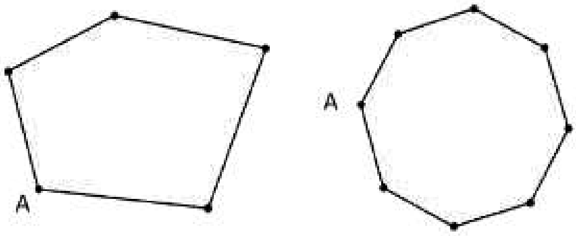
**Lección 2: Rectas paralelas y ángulos**
Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios. Luego, se analiza la relación entre los ángulos que se forman cuando dos paralelas son cortadas por una secante, y el resultado es utilizado para demostrar uno de los teoremas matemáticos más importantes y para resolver situaciones del entorno.

## 1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

**P**

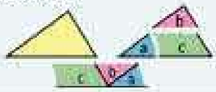
Trazando las diagonales desde el vértice A, divide estos polígonos en triángulos y determina:

a) ¿Cuánto suman los ángulos internos del pentágono?
b) ¿Cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman?
c) ¿Cuánto suman los ángulos internos del octágono?
d) ¿De cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forma?



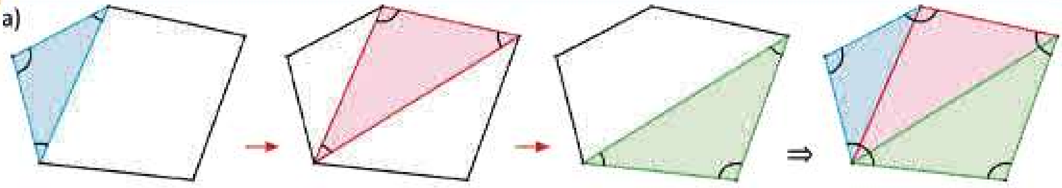

Se puede dividir el polígono en triángulos trazando todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.

Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.




**S**

a)



180° + 180° + 180° = 180° × 3

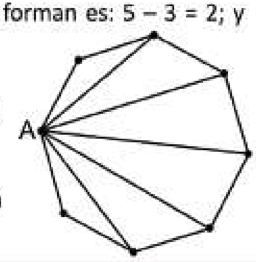
El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:

**Suma de los ángulos internos del pentágono** = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2; y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

c) En el octágono se forman 6 triángulos, de donde se obtiene que la suma de los ángulos internos es 180° × 6.

d) La diferencia del número de lados y la cantidad de triángulos que se forman es: 8 – 6 = 2.




**C**

En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos para un polígono de $n$ lados es 180° × ($n$ – 2).

Encuentra la suma de los ángulos internos de

a) Un eneágono
180°(9 – 2) = 180°(7)

b) Un dodecágono
180°(12 – 2) = 180°(10)

Un eneágono tiene 9 lados y un dodecágono tiene 12 lados.

## Indicador de logro

1.1 Determina la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

## Secuencia

En la Unidad 2 de quinto grado se utilizó por primera vez el proceso de triangulación para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono. Para esta clase se busca recordar esa estrategia para deducir una expresión matemática que le permita calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera sin utilizar siempre el proceso de triangulación.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se utiliza el proceso de triangulación de un polígono para calcular la suma de los ángulos de un polígono y a partir de este proceso deducir una expresión matemática que permita determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera.

Ⓡ Se presentan dos casos particulares de polígonos para que se utilice la expresión matemática que se encuentra en la conclusión y calcular de manera práctica la suma de los ángulos internos para cada uno de los polígonos indicados.

Solución de algunos ítems:

Es importante enfatizar que en la solución de los ejercicios de fijación, ya no es necesario triangular, sino únicamente aplicar la fórmula que se presenta en la Conclusión.

1. Para el eneágono (tiene 9 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(9 – 2) = 180°(7).

2. Para el dodecágono (tiene 12 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(12 – 2) = 180°(10).

**Posibles dificultades:**
Si los estudiantes no recuerdan los nombres particulares que reciben los polígonos de acuerdo al número de lados, se puede dejar como actividad exaula investigar los nombres de los polígonos que son más usados.

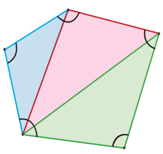
**Fecha:**

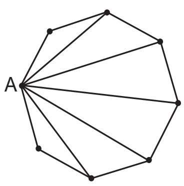
**U4 1.1**

Ⓟ Determina:

a) La suma de los ángulos internos del pentágono.
b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.
c) La suma de los ángulos internos del octágono.
d) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.

Ⓢ






a) 180° + 180° + 180° = 180° × 3
b) 5 – 3 = 2

c) 180° × 6
d) 8 – 6 = 2

Ⓡ a) 180° × (9 – 2) = 180° × 7

b) 180° × (12 – 2) = 180° × 10

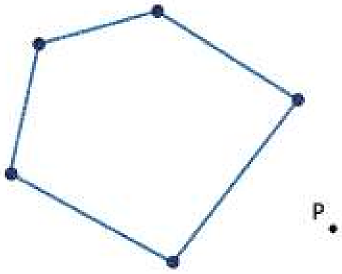
Tarea: página 94 del Cuaderno de Ejercicios.

## 1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

**P**

Encuentra 3 maneras distintas de triangular el pentágono para determinar la suma de sus ángulos internos.

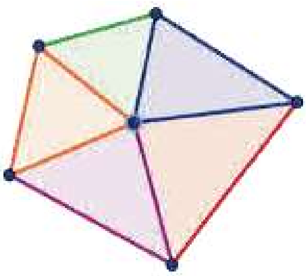
a) Desde un punto interior
b) Desde un punto del borde
c) Desde un punto exterior P
d) Compara los resultados con los obtenidos en la clase anterior




**S**

Considerando los tres casos se tiene:

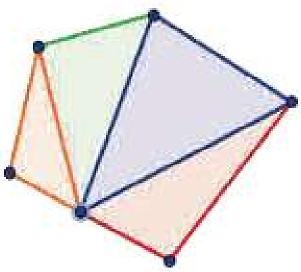
a) Se coloca un punto dentro del pentágono y desde ahí, se trazan segmentos a cada uno de los vértices para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 360°; pues se le resta el ángulo que se forma en el punto interno seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

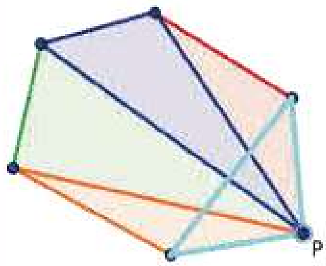
b) Se coloca un punto sobre cualquiera de los lados del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices no adyacentes para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta el ángulo llano que se forma en el punto del borde que fue seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c) Se coloca un punto fuera del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices.




Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta la suma de los ángulos internos del triángulo que se forma con el punto externo que fue seleccionado y el lado del pentágono.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

Unidad 4

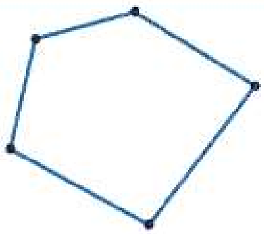
# Lección 1

d) Al comparar los resultados obtenidos en los tres literales anteriores, se observa que son exactamente iguales entre sí e iguales a los resultados de la clase anterior.

**C** La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

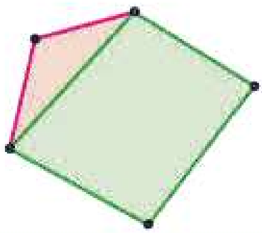
**E** Determina la suma de los ángulos internos del pentágono, utilizando una estrategia distinta a las ya utilizadas.



Piensa en dividir el pentágono en cuadriláteros y/o triángulos.

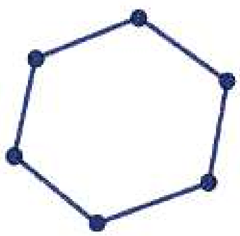
Se puede dividir en un cuadrilátero y un triángulo y luego determinar la suma de los ángulos.

Suma de ángulos internos = 180° + 360°
= 180°+ 2 × 180°
= 3 × 180°



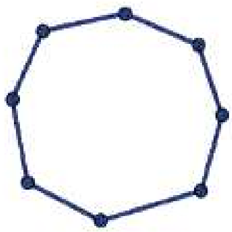
Encuentra la suma de los ángulos internos de

Un hexágono



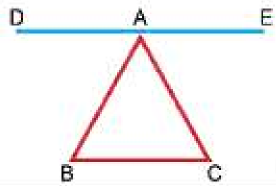
180°(6 – 2) = 180°(4)

Un octágono



180°(8 – 2) = 180°(6)

La figura de Pitágoras en los comienzos de la matemática es central por haber relacionado, en cierto modo, los problemas aritméticos que dependen de números, con los problemas geométricos relacionados con figuras; además de ello existen dos resultados importantes que debemos a Pitágoras o a su escuela, uno de ellos es: "En todo triangulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos".




Hazlo utilizando al menos 2 de las estrategias aprendidas en esta clase.

## Indicador de logro

1.2 Utiliza diferentes estrategias para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

## Secuencia

En la clase anterior se dedujo la expresión matemática que permite determinar la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando el proceso de triangulación desde un vértice; en el desarrrollo de esta clase se pretende que el estudiante descubra que el proceso de triangulación de un polígono se puede realizar de distintas maneras; pero que al final siempre se obtiene el mismo resultado.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Triangular un pentágono utilizando diferentes puntos de referencia y verificar que siempre se obtiene el mismo resultado. También se busca comparar con el resultado de la clase anterior para comprobar que el resultado no depende del punto de referencia utilizado para triangular.

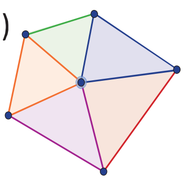
Ⓒ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando estrategias de triangulación con distintos puntos de referencia.

**Fecha:** **U4 1.2**

Ⓟ Determina la suma de los ángulos internos triangulando desde

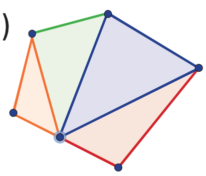
a) Un punto interior.
b) Un punto del borde.
c) Un punto exterior P.
d) Compara los resultados, con los de la clase anterior.

Ⓢ a)



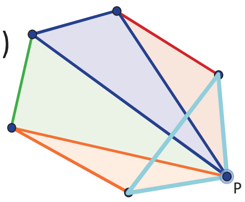
Suma
$= 180° \times 5 - 180° \times 2$
$= 180° \times 3 = 540°$

b)



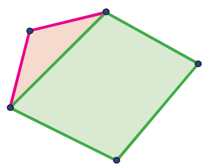
Suma
$= 180° \times 4 - 180° =$
$180° \times 3 = 540°$

c)




Suma
$= 180° \times 4 - 180°$
$= 180° \times 3 = 540°$

Ⓔ Utiliza una estrategia distinta para determinar la suma de los ángulos internos del pentágono.



Suma
$=180° + 360°$
$= 180° + 2 \times 180°$
$= 3 \times 180°$

Tarea: página 95 del Cuaderno de Ejercicios.

Continuación de la clase 1.2

**Observaciones:**
Es importante considerar que en la solución de estas situaciones, no todos los estudiantes necesariamente van a coincidir con la estrategia. Lo importante es que independientemente de la estrategia utilizada, el resultado siempre sea el mismo.

**Posibles dificultades:**
Es posible que tengan dificultades con el tiempo para triangular especialmente en el caso donde se tiene como referencia al punto externo, para facilitar el proceso se pueden llevar recortes del pentágono para que los peguen y los triangulen.

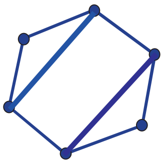
**Fecha:**

**U4 1.2**

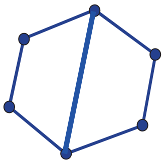
Continuación

R Encuentra la suma de los ángulos internos de:

Un hexágono

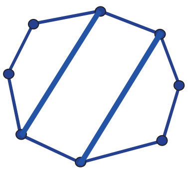


Suma
$= 180° \times 2 + 360°$
$= 180° \times 2 + 180° \times 2$
$= 180° \times 4$

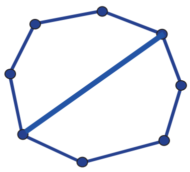


Suma
$= 360° + 360°$
$= 180° \times 2 + 180° \times 2$
$= 180° \times 4$

Un octágono



Suma
$= 360° + 360° + 360°$
$= 360° \times 3$
$= (180° \times 2) \times 3$
$= 180° \times 6$



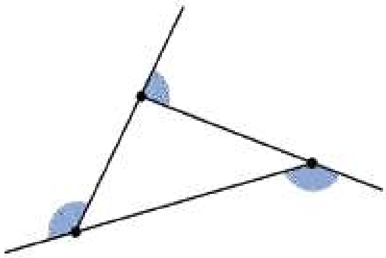
Suma
$= 180° \times (5-2) + 180°(5-2)$
$= 180° \times 3 + 180° \times 3$
$= 180° \times 6$

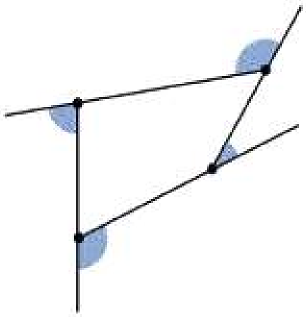
# Lección 1

## 1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

**P**

Encuentra la suma de los ángulos externos de estos polígonos.

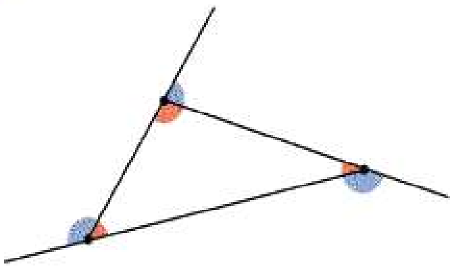




Un ángulo externo es el que se forma por un lado del polígono y la prolongación del lado contiguo.

En la suma de los ángulos externos se toma solo uno de cada vértice.

**S**



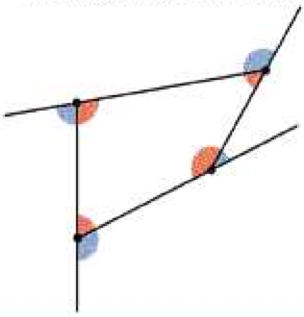
En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3.

Pero 180° × 3 contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2); por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es:

$$180° \times 3 - 180°(3-2) = 180° \times [3-(3-2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°$$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ahora, ¿cómo puedes encontrar la suma de los ángulos externos del siguiente cuadrilátero?



En el cuadrilátero cada ángulo interno junto al respectivo externo suman 180°; por tanto, se tiene 180° × 4 y al restarle los ángulos internos: 180° × (4 – 2), se tiene $180° \times 4 - 180° \times (4-2) = 180° \times [4-(4-2)]$

$$=180° \times 2 = 360°.$$

La suma de los ángulos externos de un cuadrilátero es 360°.

**C**

- La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados.
- La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.

Encuentra la suma de los ángulos externos de

a) Un pentágono
360°

b) Un hexágono
360°

Unidad 4

## Indicador de logro

1.3 Determina la suma de los ángulos externos de un polígono.

## Secuencia

En las dos clases anteriores se ha practicado el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono, en esta clase se determinará la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera, luego se generalizará para cualquier polígono.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la suma de los ángulos externos de dos polígonos con número de lados diferentes para ilustrar que la suma de los ángulos de un polígono es siempre 360°.

Ⓒ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera.

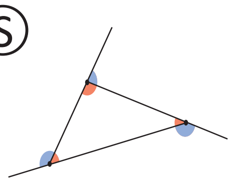
**Observación:**
Es importante hacer énfasis en que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

**Fecha:**

**U4 1.3**

Ⓟ Encuentra la suma de los ángulos externos de los polígonos dados:
a) El triángulo
b) El cuadrilátero

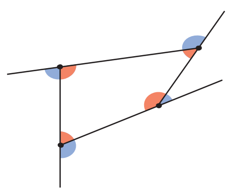
Ⓢ



En cada vértice del triángulo, se forma un ángulo de 180°.
Pero los ángulos internos suman 180° × (3 – 2).

$$180° \times 3 - 180°(3-2) = 180° \times [3-(3-2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°.$$

Para el cuadrilátero se tiene:



$$180° \times 4 - 180° \times (4-2)$$
$$= 180° \times [4-(4-2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°.$$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ⓡ a) Para el pentágono: 360°
b) Para el hexágono: 360°

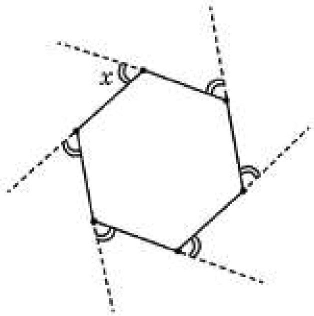
Tarea: página 96 del Cuaderno de Ejercicios.

## 1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

**P**

Para el hexágono regular que se muestra determina:

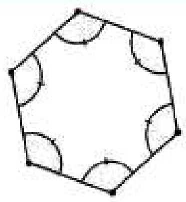
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de $x$.




Un polígono regular tiene todos sus ángulos internos iguales.

**S**

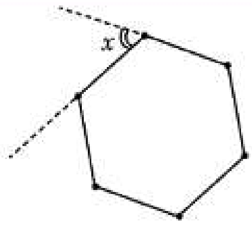
a)



Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

b)



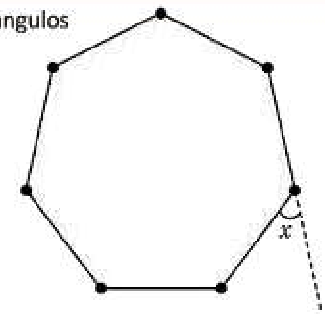

A partir del literal a) se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como $x$ es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

**C**

En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

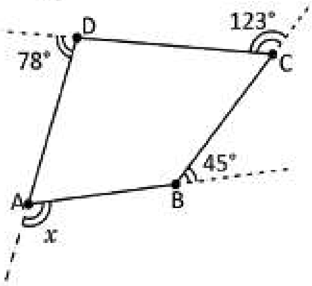
1. Para el heptágono regular determina la medida de cada uno de sus ángulos internos y el valor de $x$.

$\frac{180°(7-2)}{7} = 128.57$; medida de cada ángulo interno $x = 51.43°$



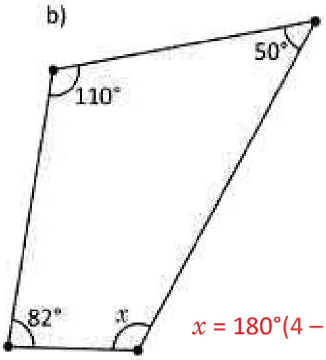

2. Encuentra la medida del ángulo $x$ en cada caso.

a)




$x = 360° - (78° + 45° + 123°)$

b)




$x = 180°(4 - 2) - (50° + 82° + 110°)$

Utiliza tus conocimientos sobre la suma de los ángulos internos y externos de un cuadrilátero.

## Indicador de logro

1.4 Determina la medida de ángulos internos y externos de un polígono regular.

## Secuencia

Anteriormente se trabajó con la suma de los ángulos externos de un polígono; en esta clase, se trabajará con polígonos regulares, esta característica permite conocer con facilidad el valor de cada ángulo interno del polígono debido a que todos son iguales y de igual forma para los ángulos externos.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la suma de los ángulos internos de un polígono para determinar la medida de cada ángulo interno, luego utilizando este resultado y los ángulos suplementarios calcular la medida de cada ángulo externo, considerando que por ser regular todos son iguales.

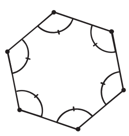
Ⓒ Confirmar el hecho de que en un polígono regular todos los ángulos internos son iguales entre sí, así como los ángulos externos y que la suma de los ángulos se determina de la misma manera que un polígono irregular.

En el numeral 1, practicar lo aprendido en la clase sobre los ángulos de los polígonos regulares; mientras que en el numeral 2 utilizar todo lo aprendido en las clases anteriores sobre la suma de los ángulos internos y/o externos. En el numeral 1, puede hacerse uso de la suma de los ángulos externos para determinar el valor de $x$, tal como se muestra a continuación: $\frac{360°}{7} = 51.43°$.

**Posibles dificultades:**
Si los estudiantes no logran determinar el valor solicitado en el numeral 2, se indica que utilicen la suma de los ángulos internos y/o externos para determinar el valor particular de un ángulo, para ello se utilizan operaciones conocidas; por ejemplo, para el literal a) se suman los valores conocidos y se le resta el resultado a 360°.

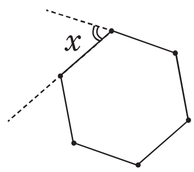
**Fecha:** **U4 1.4**

Ⓟ Para el hexágono regular dado, determina:
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de $x$.

Ⓢ 

Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.




Como $x$ es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

Ⓡ 1. Para el heptágono
$180° \times (7 - 2) = 900°$, entonces

$\frac{900°}{7} = 128.57°$

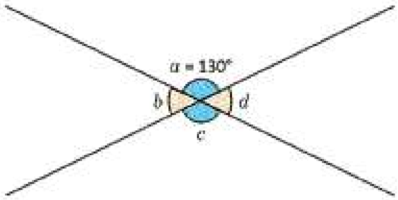
$x = 51.43°$

Tarea: página 97 del Cuaderno de Ejercicios.

## 2.1 Ángulos opuestos por el vértice

**P**

Si el ∢$a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?




Dos ángulos son opuestos por el vértice si uno de ellos tiene como lados la prolongación de los lados del otro.

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

**S**

Se tiene que $a + b = 180°$, por ser suplementarios, entonces el ∢$b$ = 50°.

$\left.\begin{array}{l} ∢a = ∢c \\ ∢b = ∢d \end{array}\right\}$ por ser opuestos por el vértice.

Se pueden encontrar las medidas de los ángulos formados en un vértice común, utilizando los ángulos opuestos por el vértice y los suplementarios.

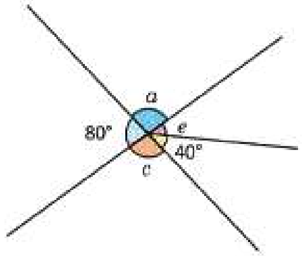
Por tanto, ∢$a$ = ∢$c$ = 130° y ∢$b$ = ∢$d$ = 50°.

**C**

Cuando se tienen dos rectas que se intersectan, se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice, cuyas medidas se pueden determinar conociendo únicamente el valor de uno de ellos.

**E**

Determina la medida de los ángulos indicados.



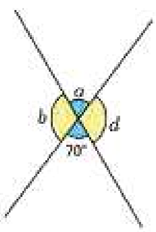

∢$c$ + 80° = 180°, por ser suplementarios, entonces el ∢$c$ = 100°.

$\left.\begin{array}{r} ∢a = ∢c \\ ∢e + 40° = 80° \end{array}\right\}$ por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, ∢$a$ = ∢$c$ = 100° y ∢$e$ = 80° – 40° = 40°.

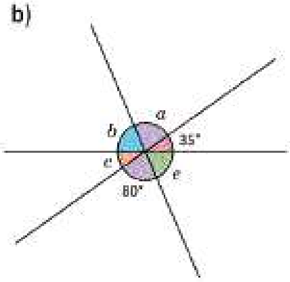
Determina la medida de los ángulos que se indican en cada literal.

a)




∢$a$ = 70°
∢$d$ = 110°
∢$b$ = 110°

b)




∢$e$ = 65°
∢$c$ = 35°
∢$b$ = 65°
∢$a$ = 80°

La tradición matemática griega, instaurada por Pitágoras, es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico canónico en el texto *Los Elementos*. En la proposición I. 32 del primer libro de este texto, se establece que "Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos", aunque Pitágoras ya había demostrado este teorema mediante el uso de paralelas.

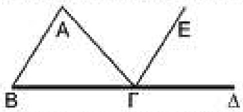



Ilustración de la demostración I. 32, según Euclides.

## Indicador de logro

2.1 Relaciona los ángulos opuestos por el vértice.

## Secuencia

En Educación Básica, se aprendió sobre los ángulos opuestos por el vértice, suplementarios, etc., en esta clase se utilizarán los conocimientos sobre esos tipos de ángulos formados por dos rectas que se cortan, para determinar la medida de cada uno de ellos conociendo el valor de al menos un ángulo.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el valor de los ángulos formados entre dos rectas secantes, utilizando la relación entre ángulos opuestos por el vértice y suplementarios, cuando se conoce la medida de un ángulo.

Ⓒ Resolver un caso en el que además de las dos rectas secantes, se traza un segmento adicional con el que se forma una partición, generando un ángulo adicional.

Practicar el proceso desarrollado tanto en el Problema inicial como en el ejemplo adicional, y el literal b) con una pequeña variante; pero siempre resolverá utilizando las mismas relaciones.

Solución de algunos ítems:

Por ser opuestos por el vértice

$\measuredangle a = 80°$

$\measuredangle c = 35°$

$\measuredangle e + 80° + 35° = 180°$

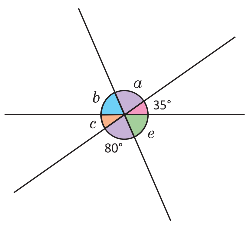
$\measuredangle e + 115° = 180°$

$\measuredangle e = 65°$

Por ser opuestos por el vértice.

$\measuredangle b = \measuredangle e$

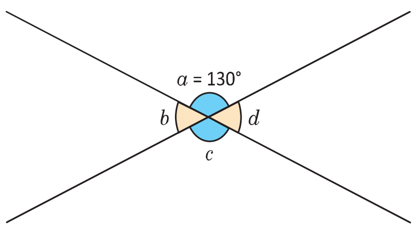
$\measuredangle b = 65°$




**Posibles dificultades:**
Es probable que se les haya olvidado la relación que existe entre los ángulos opuestos por el vértice formados por una secante, en ese caso es importante que revisen las pistas presentadas en el texto, y en caso de ser necesario hacer un recordatorio general, cuidando que no se invierta mucho tiempo en ello.

**Fecha:** **U4 2.1**

Ⓟ Si el $\measuredangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?

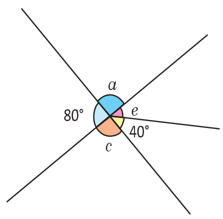



Ⓢ Se tiene que $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\measuredangle b = 50°$.

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle a = \measuredangle c \\ \measuredangle b = \measuredangle d\end{array}\right\}$ Por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 130°$ y $\measuredangle b = \measuredangle d = 50°$.

Ⓔ




$\measuredangle c + 80° = 180°$

$\measuredangle c = 100°$

$\measuredangle a = \measuredangle c$

$\measuredangle e + 40° = 80°$

Por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 100°$ y $\measuredangle e = 40°$.

Ⓡ a) $\measuredangle d = 180° - 70° = 110°$

$\measuredangle a = 70°$ y $\measuredangle b = 110°$

Tarea: página 98 del Cuaderno de Ejercicios.

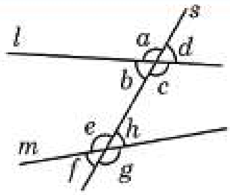
# Lección 2

## 2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

**P**

En el siguiente diagrama identifica:

1. Los ángulos que se encuentran entre las rectas $l$ y $m$.
2. Los ángulos que no están entre las rectas $l$ y $m$.
3. Los ángulos que se encuentran a la izquierda o a la derecha de $s$.



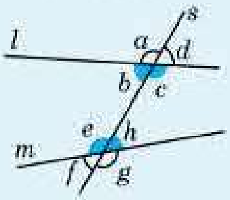

**S**

| 1. | 2. | 3. | |
|---|---|---|---|
| $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$ | $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$ | $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$ | $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ |
| Entre las rectas $l$ y $m$. | Fuera de las rectas $l$ y $m$. | A la izquierda de $s$. | A la derecha de $s$. |

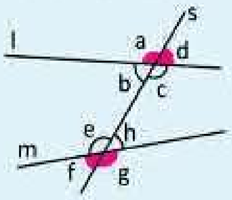
**C**

Los ángulos que se identificaron reciben nombres especiales, según la posición respecto a las rectas que los forman, tal como se muestra a continuación:

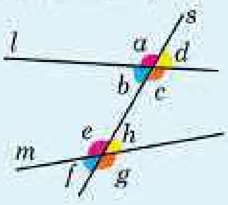
Internos:
$\measuredangle b$, $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$



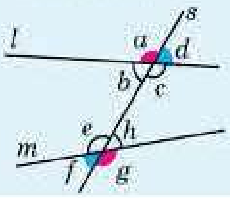
Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$



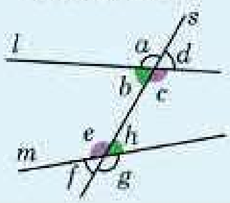
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$,
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$



Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

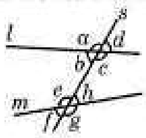


Alternos internos:
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$



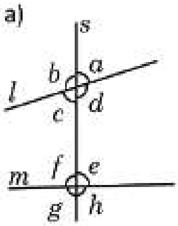
A la recta que corta a dos o más rectas se le llama secante.

En la figura, $s$ es la recta secante.



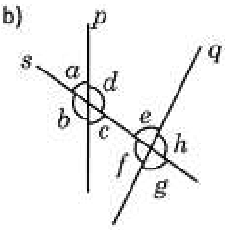
Para cada uno de los siguientes literales indica los ángulos internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)



Internos: $c$, $d$, $f$ y $e$
Externos: $b$, $a$, $g$ y $h$
Alternos internos: $f$ y $d$, $c$ y $e$
Alternos externos: $b$ y $h$, $a$ y $g$
Correspondientes: $e$ y $a$, $f$ y $b$, $d$ y $h$, $c$ y $g$.

b)



Internos: $d$, $e$, $c$ y $f$
Externos: $a$, $b$, $h$ y $g$
Alternos internos: $f$ y $d$, $c$ y $e$
Alternos externos: $g$ y $a$, $b$ y $h$
Correspondientes: $e$ y $a$, $f$ y $b$, $d$ y $h$, $c$ y $g$.

## Indicador de logro

2.2 Identifica ángulos correspondientes y los alternos externos e internos.

## Secuencia

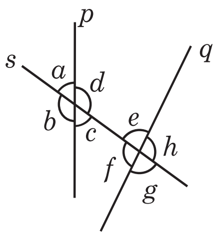
Ya se ha utilizado la relación entre ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas secantes, en esta clase se identificarán los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas que son cortadas por una tercera recta. Para facilitar la comprensión se puede indicar que si se elimina una de las rectas se tiene el caso de la clase anterior donde se identifican ángulos opuestos por el vértice y suplementarios.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Clasificar los ángulos considerando su posición respecto a las rectas, por ejemplo, si están entre las rectas, fuera de las rectas y si se encuentran a la izquierda o a la derecha de la secante.

Ⓒ Verificar la comprensión de la clasificación de los ángulos por su posición respecto a dos rectas cortadas por una secante. Es importante asegurarse de que todos sean capaces de clasificar los ángulos.

Solución de algunos ítems:




Internos:
$\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle e$

Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle b$, $\measuredangle g$ y $\measuredangle h$

Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

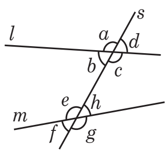
Alternos internos:
$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$,
$\measuredangle c$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$

**Fecha:** **U4 2.2**

Ⓟ En el diagrama identifica los ángulos que se encuentran:
1. Entre las rectas $l$ y $m$.
2. Fuera de las rectas $l$ y $m$.
3. A la izquierda o a la derecha de $s$.

Ⓢ

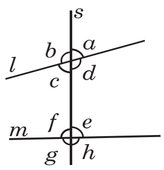



1. $\begin{cases} \measuredangle b \text{ y } \measuredangle c \\ \measuredangle e \text{ y } \measuredangle h \end{cases}$

2. $\begin{cases} \measuredangle a \text{ y } \measuredangle d \\ \measuredangle f \text{ y } \measuredangle g \end{cases}$

3. A la izquierda de $s$.
   $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$
   $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$
   A la derecha de $s$.
   $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$
   $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$

Ⓡ a)




Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

Alternos internos:
$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$,
$\measuredangle c$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$

Internos:
$\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle e$

Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle b$, $\measuredangle g$ y $\measuredangle h$

Tarea: página 99 del Cuaderno de Ejercicios.

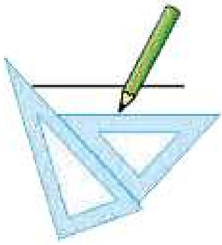
## 2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

**P**

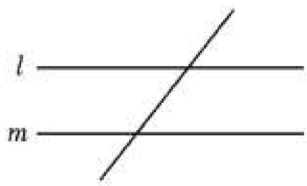
Construye dos rectas paralelas $l$ y $m$, traza una secante, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

**S**

1. Se trazan las paralelas haciendo uso de las escuadras.

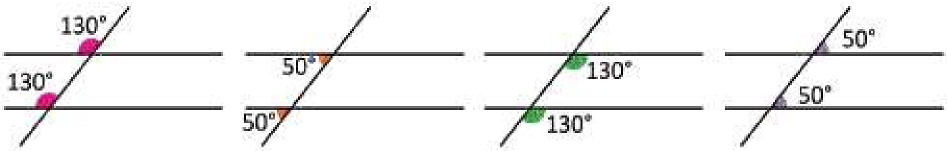


2. Se traza una recta secante a las paralelas construidas.




Para denotar el paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo ∥; es decir, si la recta $m$ es paralela a la recta $l$ se denota como $m \parallel l$.

3. Se miden los ángulos con el transportador.




**C**

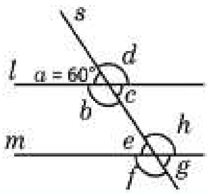
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales.

Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

**E**

Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\measuredangle a = 60°$, determina la medida de los ángulos restantes.

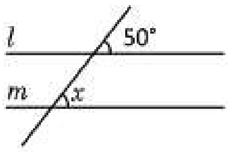
$\measuredangle a + \measuredangle d = 180°$, por ser suplementarios $\Rightarrow \measuredangle d = 120°$.
$\measuredangle c = \measuredangle a = 60°$ y $\measuredangle b = \measuredangle d = 120°$, por ser opuestos por el vértice.
$\measuredangle e = \measuredangle a = 60°$, $\measuredangle g = \measuredangle c = 60°$,
$\measuredangle f = \measuredangle b = 120°$ y $\measuredangle h = \measuredangle d = 120°$, por ser correspondientes.




**I**

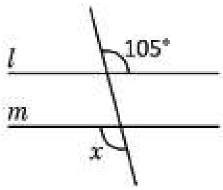
Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de $x$.

a)




$x$ = 50°, por ser correspondientes entre paralelas.

b)




$x$ = 105°, por ser alternos externos.

## Indicador de logro

2.3 Identifica la relación entre ángulos correspondientes.

## Secuencia

En la clase anterior, se clasificaron los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante; en esta clase se determinará la relación entre dos ángulos correspondientes cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante. Es importante destacar que con el tipo de rectas que se utilizarán, los ángulos correspondientes son iguales.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar los ángulos correspondientes formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante, realizando el proceso de construcción de las rectas paralelas y medición de los ángulos utilizando el estuche de geometría.

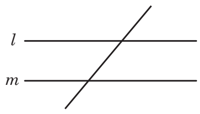
Ⓒ Mostrar que si las rectas son paralelas, se puede conocer el valor de todos los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante, conociendo el valor de uno de los ángulos y utilizando la relación entre los ángulos que han sido estudiados.

**Posibles dificultades:**
Si los estudiantes no pueden utilizar las escuadras o medir con precisión los ángulos utilizando el transportador, será necesario dar orientaciones generales.

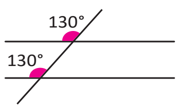
**Fecha:** **U4 2.3**

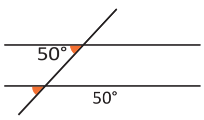
Ⓟ Cuando las rectas son paralelas, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

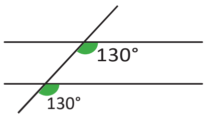
Ⓢ Se trazan dos paralelas y luego una recta secante a las dos paralelas construidas.

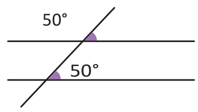



Se miden los ángulos con el transportador.

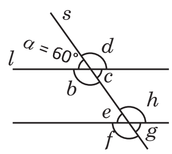



Ⓔ Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\measuredangle a = 60°$, determinar la medida de los ángulos restantes.




$\measuredangle a + \measuredangle d = 180°$,
$\measuredangle d = 120°$.
$\measuredangle c = \measuredangle a = 60°$ y
$\measuredangle b = \measuredangle d = 120°$
$\measuredangle e = \measuredangle a = 60°$,
$\measuredangle g = \measuredangle c = 60°$,
$\measuredangle f = \measuredangle b = 120°$ y
$\measuredangle h = \measuredangle d = 120°$

Ⓡ a) $x = 50°$ b) $x = 105°$

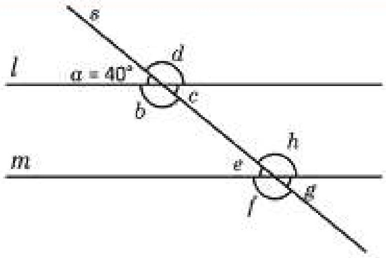
Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

## 2.4 Caracterización de los ángulos alternos

**P**

Dado que las rectas $l$, $m$, son paralelas y $s$ es la recta secante, realiza lo siguiente:

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.




**S**

1. Calculando la medida de los ángulos

$\angle a + \angle b = 180°$, por ser suplementarios.

$\angle b = 140°$

$\left.\begin{array}{l}\angle c = \angle a = 40° \\ \angle d = \angle b = 140°\end{array}\right\}$ son opuestos por el vértice.

$\left.\begin{array}{l}\angle e = \angle a = 40° \\ \angle f = \angle b = 140° \\ \angle h = \angle d = 140° \\ \angle g = \angle c = 40°\end{array}\right\}$ son correspondientes entre paralelas.

2.

$\left.\begin{array}{l}\angle b \text{ y } \angle h \\ \angle c \text{ y } \angle e\end{array}\right\}$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí.

$\angle b = \angle h = 140°$ y $\angle c = \angle e = 40°$.

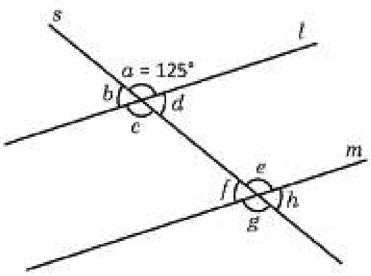
$\left.\begin{array}{l}\angle a \text{ y } \angle g \\ \angle d \text{ y } \angle f\end{array}\right\}$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí.

$\angle a = \angle g = 40°$ y $\angle d = \angle f = 140°$.

**C**

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.

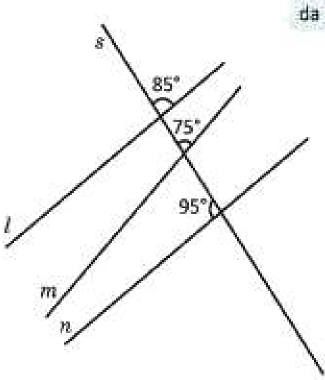



$b = 55°$
$d = 55°$
$f = 55°$
$h = 55°$

$c = 125°$
$g = 125°$
$e = 125°$

2. Identifica cuáles rectas son paralelas. Justifica tu respuesta.

Considera la medida de los ángulos.




$l$ y $n$, son rectas paralelas, porque sus respectivos ángulos correspondientes son iguales.

## Indicador de logro

2.4 Identifica la relación entre ángulos internos, externos, alternos internos y alternos externos, entre dos rectas paralelas.

## Secuencia

Anteriormente se analizó la relación entre ángulos correspondientes; ahora se analizarán los valores de los ángulos alternos internos y alternos externos, para concluir formalizando la relación que existe entre ellos cuando las rectas son paralelas.

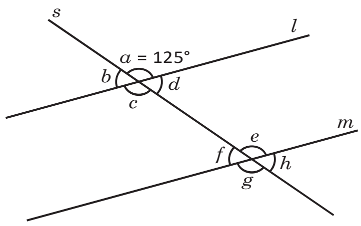
## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la medida de los ángulos utilizando lo aprendido en la clase anterior, y luego comparar los ángulos alternos internos y alternos externos para establecer la relación que existe entre ellos.

Ⓒ En el numeral 1, identificar los ángulos alternos internos y externos, luego determinar las medidas, relacionando los ángulos considerando el hecho de que las rectas son paralelas; mientras que en el numeral 2, aplicar el recíproco; es decir, identificar si hay ángulos que son iguales para determinar si hay rectas paralelas.

Solución de algunos ítems:

Ítem 1:




Son alternos internos:

$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

$\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$, por ser opuestos por el vértice,

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$.

$\measuredangle d + \measuredangle a = 180°$, por ser suplementarios,

$\measuredangle d + 125° = 180°$,

$\measuredangle d = 55°$,

$\measuredangle f = \measuredangle d = 55°$.

Son alternos externos:

$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$

$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

$\measuredangle g = \measuredangle a = 125°$

$\measuredangle b = \measuredangle d = 55°$, por ser opuestos por el vértice,

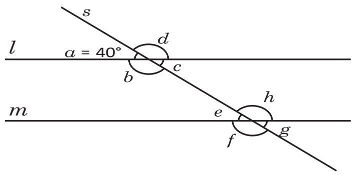
$\measuredangle h = \measuredangle b = 55°$.

**Fecha:** **U4 2.4**

Ⓟ Las rectas $l$, $m$, son paralelas y $s$ es la recta secante.

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.

Ⓢ




1. $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$,
   $\measuredangle b = 140°$
   $\measuredangle c = \measuredangle a = 40°$
   $\measuredangle d = \measuredangle b = 140°$
   $\measuredangle e = \measuredangle a = 40°$
   $\measuredangle f = \measuredangle b = 140°$
   $\measuredangle h = \measuredangle d = 140°$
   $\measuredangle g = \measuredangle c = 40°$

2. $\left.\begin{matrix}\measuredangle b \text{ y } \measuredangle h \\ \measuredangle c \text{ y } \measuredangle e\end{matrix}\right\}$ son alternos internos
   $\measuredangle b = \measuredangle h = 140°$ y $\measuredangle c = \measuredangle e = 40°$
   $\left.\begin{matrix}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle g \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle f\end{matrix}\right\}$ son alternos externos
   $\measuredangle a = \measuredangle g = 40°$ y $\measuredangle d = \measuredangle f = 140°$

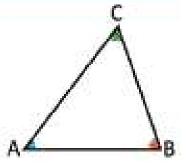
Ⓡ 1. $\measuredangle b = 180° - 125°$,
   $\measuredangle b = 55°$
   $\measuredangle d = 55°$
   $\measuredangle h = 55°$
   $\measuredangle f = 55°$
   $\measuredangle c = 125°$, $\measuredangle g = 125°$
   $\measuredangle e = 125°$

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

## 2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

**P**

Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces ∢A + ∢B + ∢C = 180°.




Usa las relaciones de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

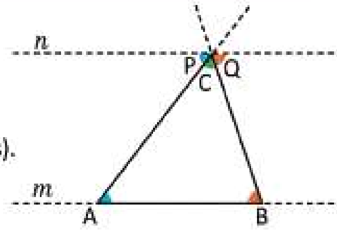
**S**

Se construye la recta $m$ como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta $n$ paralela a la recta $m$.

∢P + ∢C + ∢Q = 180° (por formar un ángulo llano).

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo).




Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

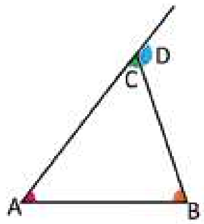
**C**

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas.

1. Llena los espacios en blanco y demuestra que "si el ∢D es el ángulo externo del vértice C, entonces su medida es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC"; así, ∢D = ∢A + ∢B.

Solución.
Se quiere demostrar que

Si el ∢D, es el ángulo externo del ∢C, entonces ∢D= ∢A + ∢B.




Se construye la recta $m$ como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta $n$ paralela a la recta $m$.

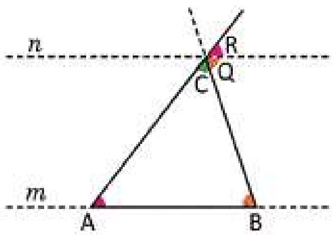
$n \parallel \boxed{m}$ (por construcción).

∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{alterno internos}}$ entre paralelas).

∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas).

∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción).

∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)




Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

2. Busca otra forma para demostrar el teorema, puedes utilizar la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo.

## Indicador de logro

2.5 Utiliza la relación de los ángulos entre paralelas, para demostrar el teorema de los ángulos internos de un triángulo.

## Secuencia

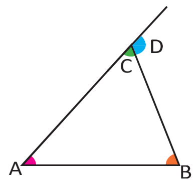
En la primer clase de esta unidad, se dedujo una expresión matemática para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera, en esta clase se demostrará que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a 180°, esto utilizando lo aprendido sobre ángulos entre rectas paralelas.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Hacer trazos auxiliares que permitan utilizar la relación entre ángulos que se forman cuando una secante corta a dos rectas paralelas, para demostrar un resultado que se ha aceptado como cierto desde la Educación Básica.

Ⓒ En el numeral 1, practicar el proceso de demostración de un teorema, complementando las afirmaciones planteadas; mientras que en el numeral 2, se espera que utilice el resultado del Problema inicial para hacer la demostración indicada.

Solución de algunos ítems:




∢A + ∢B + ∢C = 180°, por ser ángulos internos de un triángulo.

∢C + ∢D = 180°, por ser suplementarios.

De donde se tiene:
∢A + ∢B + ∢C = ∢C + ∢D

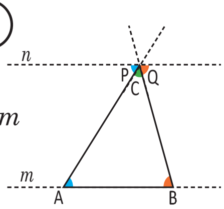
Restando ∢C a ambos lados de la igualdad: ∢A + ∢B = ∢D.

Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

**Fecha:** **U4 2.5**

Ⓟ Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces su suma es 180°.

Ⓢ




$n \parallel m$

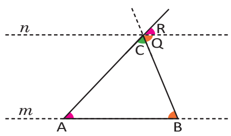
∢P + ∢C + ∢Q = 180°, por formar un ángulo llano.

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo)

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

Ⓡ




$n \parallel \boxed{m}$ (por construcción)
∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{Alternos internos}}$ entre paralelas)

∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas)
∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción)
∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)

Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

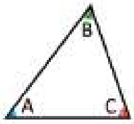
## 2.6 Elementos de una demostración

**P**

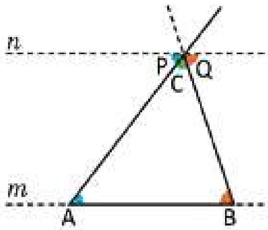
Observa el ejemplo y determina los elementos de una demostración.

Si $\boxed{∢A, ∢B \text{ y } ∢C \text{, son ángulos internos de un triángulo, entonces:}}$

$∢A + ∢B + ∢C = 180°$




∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**




| Afirmación | Justificación |
|---|---|
| 1. $n \parallel m$. | Por construcción. |
| 2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180° | Por formar un ángulo llano. |
| 3. ∢P = A; ∢Q = ∢B. | Por ser alternos internos entre paralelas. |
| 4. ∢A + ∢B + ∢C = 180° | Por transitividad. |

→ **Afirmaciones justificadas**

→ **Conclusión**

La demostración es un método que permite llegar a la conclusión partiendo de la hipótesis a través de afirmaciones que tienen una justificación matemática.

Una afirmación es una proposición con base lógica.

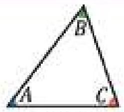
Una justificación es el argumento que hace cierta la afirmación.

**S**

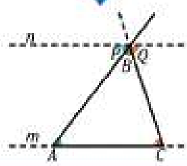
En la demostración hay:

1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

En la figura de la derecha se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.




Afirmaciones justificadas



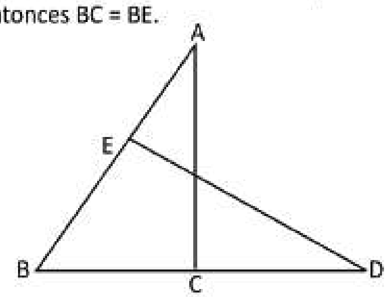

Demostración

**C**

A la expresión de la forma "si ☐, entences ◯", se le llama **proposición**.
A la parte representada por ☐ se le llama **hipótesis**; y la representada por ◯ se llama **conclusión**.

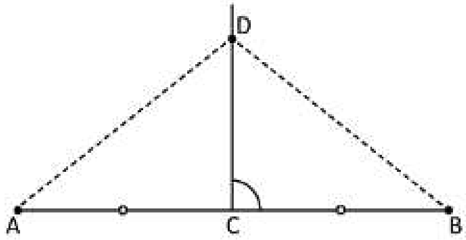
Identifica la hipótesis y la conclusión.

1. Si en la figura el ∢CAB = ∢BDE y AB = DB, entonces BC = BE.




Hipótesis: si ∢CAB = ∢BDE y AB = DB
Conclusión: BC = BE

2. Si el punto D está en la mediatriz del segmento AB entonces DA = DB.




Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB
Conclusión: DA = DB

## Indicador de logro

2.6 Identifica los elementos de una demostración matemática.

## Secuencia

En la clase anterior se modeló el proceso de demostración de un teorema, en esta clase se define qué se entiende por demostración y cuáles son sus elementos. Es importante hacer énfasis en eso, pues en las siguientes unidades será utilizado para demostrar propiedades de figuras u otros teoremas.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar los elementos de una demostración, tomando como base el teorema demostrado en la clase anterior. Es importante enfatizar en cada uno de ellos para que los puedan diferenciar con facilidad.

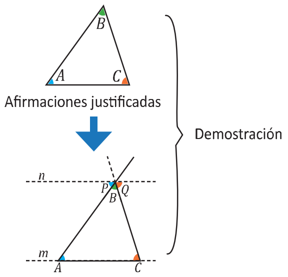
Ⓒ Dejar explícitos y con representación simbólica los elementos de una demostración que guíen el trabajo del estudiante.

**Fecha:** **U4 2.6**

Ⓟ Observa el ejemplo del libro y determina los elementos de una demostración.

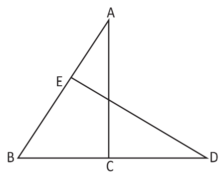
Ⓢ

1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

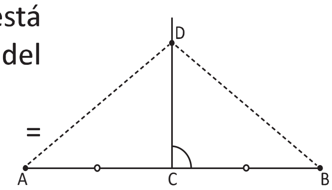



En la figura mostrada, se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.

Ⓡ Hipótesis:
∢CAB = ∢BDE
y AB = DB
Conclusión: BC = BE.




Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB.
Conclusión: DA = DB.




Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

## 2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

**P**

Carlos necesita diseñar una escalera con una altura de 560 cm, los escalones deben tener una contrahuella de 18 cm y un descansillo a la mitad de la altura. ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

**S**

En primer lugar, es necesario considerar las condiciones del problema:

1. La altura de la escalera es de 560 cm.
2. Debe haber un descansillo a los 280 cm.
3. La contrahuella debe ser de 18 cm.

Lo primero es encontrar el número de contrahuellas:

$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 15.56$, que se aproxima a 16.

Luego, se determina la medida real de la contrahuella:

$\frac{280 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene: $2 \times 17.5 + H = 64$

$H = 64 - 35$

$H = 29$

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.

Santiago Francisco Blondel fue un arquitecto y urbanista francés, uno de los más importantes teóricos de la arquitectura del siglo XVIII. Uno de sus aportes fue la "Ley de Blondel" que establece una relación entre las huellas y las contrahuellas en una escalera (ver figura 1). La Ley de Blondel establece la siguiente relación: 2CH + H = 64 cm donde, CH es la dimensión de la contrahuella y H es la dimensión de la huella.

La huella es la parte de la escalera donde pisas, mientras la contrahuella se determina por la distancia en altura entre 2 huellas.

En tramos que superen los 275 centímetros de altura se recomienda colocar un "Descansillo" (ver figura 2) que es una superficie llana en que termina cada tramo de una escalera.

El ángulo de inclinación se determina según la razón entre la huella y la contrahuella (ver figura 3). Generalmente las escaleras más cómodas tienen una inclinación comprendida entre 31° y 37°.

La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} = 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

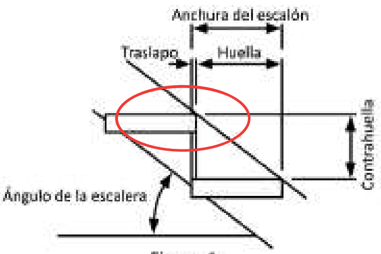


Figura 1

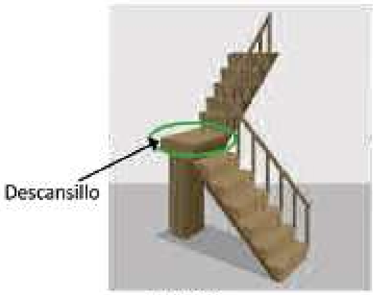


Figura 2

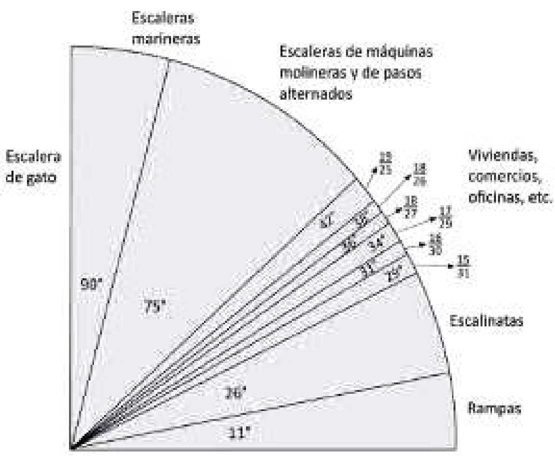
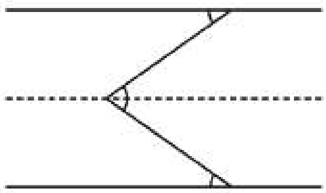


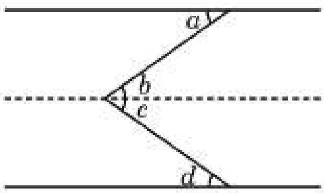
Figura 3

Unidad 4

Trazando una paralela a nivel del descansillo tenemos que



Observa que se forman los siguientes ángulos:



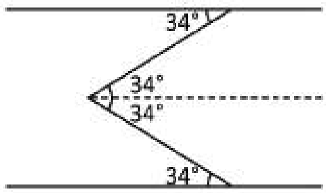

$\measuredangle d$ = 34° por la razón de la huella con la contrahuella.

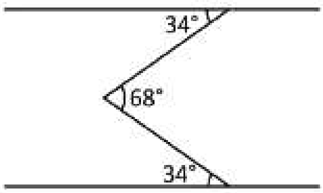
$\measuredangle d = \measuredangle c$ por ser alternos internos.

$\measuredangle b$ = 34° porque el segundo tramo de las escaleras debe tener la misma inclinación.

$\measuredangle b = \measuredangle a$ por ser alternos internos.

Luego $\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = \measuredangle d = 34°$




Con esta información, Carlos puede completar el informe de su diseño.

**C**

Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

La Alcaldía Municipal de Santa Tecla necesita conocer la medida de los ángulos que se forman en la intersección entre las calles y avenidas. El topógrafo ya midió los ángulos cuyos datos se muestran en el mapa, considerando que desde la 9ª hasta la 13ª calle son paralelas, al igual que las avenidas desde la 10ª hasta la 14ª. Determina la medida de los ángulos indicados.

## Indicador de logro

2.7 Resuelve desafíos o situaciones problemáticas en distintos contextos, mediante la aplicación de las relaciones que caracterizan a los ángulos entre paralelas.

## Secuencia

Hasta este momento se ha aprendido sobre la relación entre ángulos que se forman entre dos rectas que son cortadas por una secante, y se ha profundizado en el caso en que las rectas son paralelas; para esta clase se resuelve una situación del entorno en la que se utiliza la relación entre los ángulos y la ley de Blondel, esta última muy usada en la construcción de gradas para conectar los niveles de un edificio; además, se debe considerar la finalidad y el tipo de público que utilizará las gradas.

## Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar los datos que se necesitan para el diseño de una escalera, considerando ciertas características dadas. Es importante que se haga énfasis en los elementos a considerar y las razones por las que deben tener esas dimensiones.

Resolver una situación en un contexto diferente, pero siempre utilizando la relación entre ángulos entre paralelas, esto para verificar si se ha fijado el contenido desarrollado en la lección 2 de la unidad.

Solución de algunos ítems:


$\sphericalangle a$ = 56°, por ser correspondientes entre paralelas.

$\sphericalangle x$ = 56°, por ser alternos internos entre paralelas.

$\sphericalangle b + \sphericalangle x$ = 180°, por ser suplementarios.

$\sphericalangle b$ = 180° – 56°
$\sphericalangle b$ = 124°

**Fecha:** **U4 2.7**

Ⓟ ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

Ⓢ El número de contrahuellas: $\frac{280\text{ cm}}{18\text{ cm}} \approx 15.56$, que se aproxima a 16.

La medida real de la contrahuella:
$\frac{280\text{ cm}}{18\text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de “Blondel” se tiene:
2CH + H = 64 cm

$2 \times 17.5 + H = 64$
$H = 64 - 35$
$H = 29$
Por tanto, la huella debe medir 29 cm.
La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} \approx 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

Ⓡ $\sphericalangle a$ = 56°, por ser correspondientes.
$\sphericalangle b$ = 124°

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.