Unidad 5. Criterios de congruencia de triángulos

Competencia de la Unidad

Utilizar los criterios para determinar la congruencia entre triángulos, caracterizar algunas figuras planas y resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Congruencia de triángulos	1	1. Sentido de la congruencia de dos figuras
	1	2. Congruencia de triángulos
	1	3. Primer criterio de congruencia de triángulos
	1	4. Segundo criterio de congruencia de triángulos
	1	5. Tercer criterio de congruencia de triángulos
	1	6. Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos
	1	7. Aplicación de criterios de congruencia de triángulos
	1	8. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1
	1	9. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2
	1	Prueba de la Unidad 5

9 horas clase + prueba de la Unidad 5

Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Congruencia de triángulos

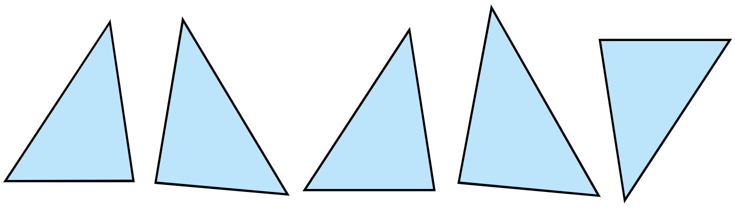
Se inicia la unidad con la introducción del sentido de la congruencia de figuras planas, luego se define la congruencia de triángulos estableciendo relaciones entre sus elementos; seguidamente se introducen los criterios de congruencia de triángulos haciendo énfasis en el proceso de construcción de figuras, y para finalizar se presenta una serie de aplicaciones de los criterios de congruencia a diferentes contextos.

Lección 1 Congruencia de triángulos

1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

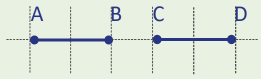
P

De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).

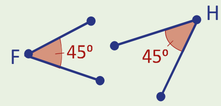


Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

Dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales. Ejemplo: AB = CD.

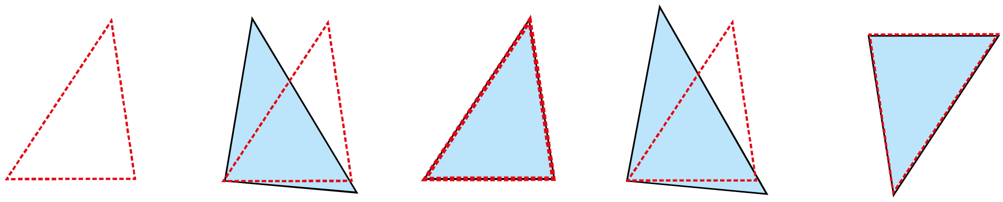


Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Ejemplo: ∢F = ∢H.



S

Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

C

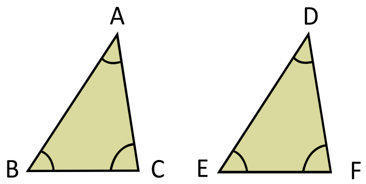
Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o volteando al revés una de ellas si es necesario, se llaman **congruentes**.

Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

A los elementos **correspondientes** de una figura también se les llama **homólogos**.

E

Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



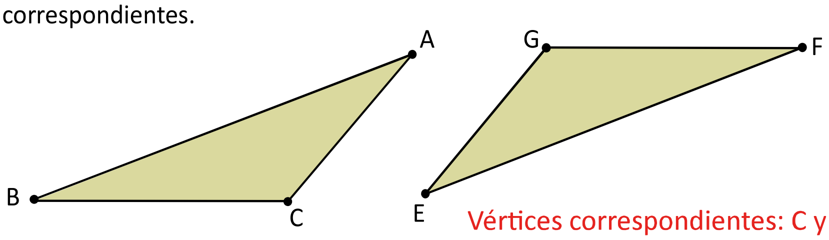
Triángulo 1 Triángulo 2

Vértices correspondientes: A y D, B y E, C y F.

Lados correspondientes: AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Ángulos correspondientes: ∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

Los siguientes triángulos son congruentes. Compáralos e identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Aunque los triángulos estén en distinta posición son congruentes, puedes girarlos o darles vuelta para que coincidan.

Vértices correspondientes: C y G, A y E, B y F.
Lados correspondientes: CA y GE, CB y GF, AB y EF.
Ángulos correspondientes: ∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

Indicador de logro

1.1 Determina cuando dos figuras son congruentes.

Secuencia

En la unidad anterior se trabajó con ángulos internos y externos de un polígono, en esta clase se compararán figuras; uno de los elementos a considerar en ese proceso de comparación son los ángulos internos; luego se establecerá una correspondencia entre cada uno de los elementos comparados en una figura plana. Cuando se comparan figuras es importante considerar que si es necesario la figura se debe rotar o voltear.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar figuras sobreponiéndolas, con el objeto de identificar las que coinciden en todos sus elementos y abstraer del proceso el concepto de **figuras congruentes**.

Ⓒ Identificar los lados homólogos en dos triángulos congruentes, utilizando las definiciones dadas en la Conclusión.

Solución de algunos ítems:

Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.

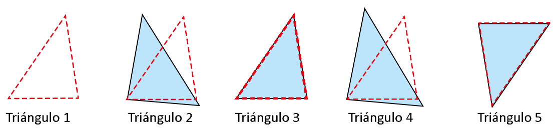
Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.

Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

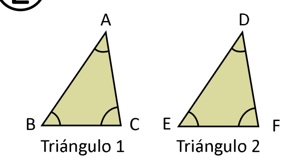
Posibles dificultades:
Es posible que los cortes no se realicen con precisión, lo que puede hacer que las figuras no coincidan, para evitar esto es importante hacer énfasis sobre el tipo de corte al momento en que se realice la actividad.

Fecha: **U5 1.1**

Ⓟ De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer). Observación: Ver ilustración en el LT y trabajar con recortes.

Ⓢ 

Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.

Ⓔ 

Vértices correspondientes:
A y D, B y E, C y F.
Lados correspondientes:
AB y DE, BC y EF, CA y FD.
Ángulos correspondientes:
∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

Ⓡ Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.

Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.

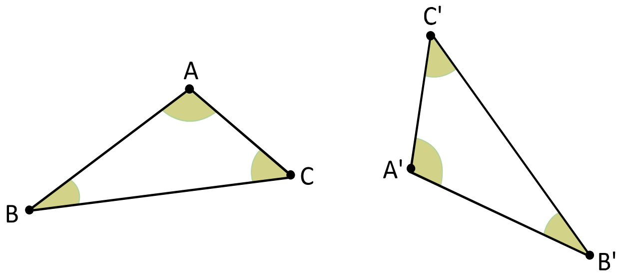
Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.2 Congruencia de triángulos

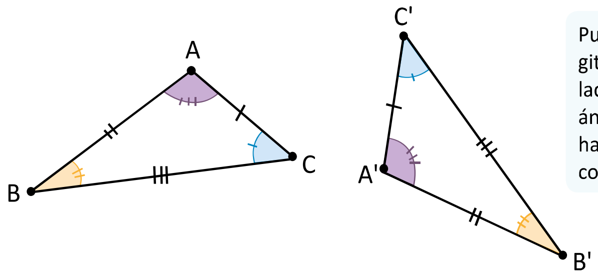
P Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.



La notación A', B', y C', se lee "A prima", "B prima" y "C prima" y se utiliza para representar puntos que son diferentes, pero que se corresponden con los puntos A, B y C.

S Al comparar la longitud de los lados correspondientes y la medida de los ángulos correspondientes se obtiene que

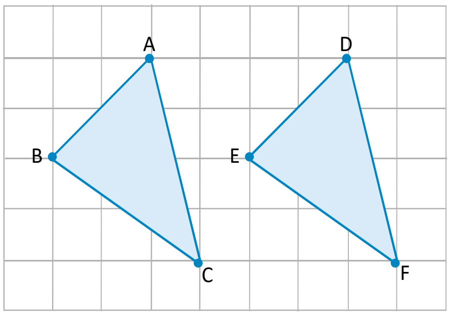
AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

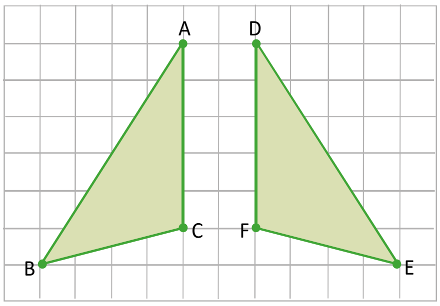


Puedes comparar la longitud de cada uno de sus lados y amplitud de sus ángulos respectivamente, haciendo uso de regla, compás y transportador.

C En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales. Para indicar que los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo ≅; es decir: ΔABC ≅ ΔA'B'C', que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

Dado que los siguientes triángulos son congruentes, identifica los lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.





AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Cuando se escribe la congruencia de triángulos, es necesario tomar en cuenta que se deben escribir las letras en orden de los vértices correspondientes.

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Unidad 5

Indicador de logro

1.2 Identifica cuando dos triángulos son congruentes.

Secuencia

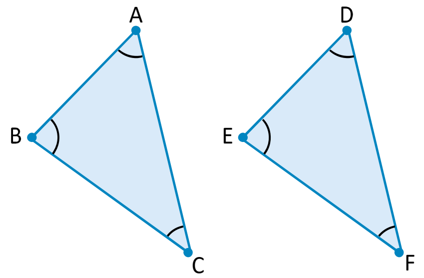
En la clase anterior se introdujo el concepto de congruencia, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos como un caso particular de congruencia de figuras, es importante hacer énfasis en que los elementos a comparar deben ser correspondientes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar la medida de los elementos correspondientes en dos triángulos congruentes, para establecer la relación de igualdad que se da entre ellos.

Ⓒ Introducir la notación que se utiliza para representar la congruencia de triángulos.

Solución de algunos ítems:



1. En los triángulos:

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

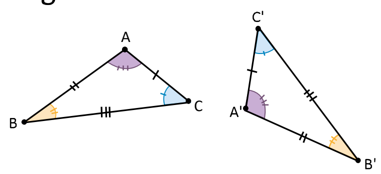
Posibles dificultades:
La falta de precisión en la medida de las figuras geométricas, puede dificultar la identificación de los lados o ángulos iguales. En ese caso es necesario dar orientaciones generales sobre el uso de los instrumentos de medida.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con regla y transportador.

Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.
Observación: Ver los triángulos en el LT.

Ⓢ Al comparar la longitud de los lados y la medida de los ángulos se obtiene:



AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

Ⓡ 1. En los triángulos:

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

2. En los triángulos:

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

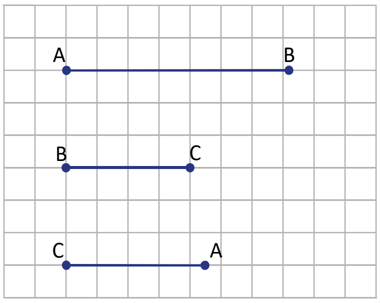
Lección 1

1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

Utilizando compás y regla, realiza lo siguiente:

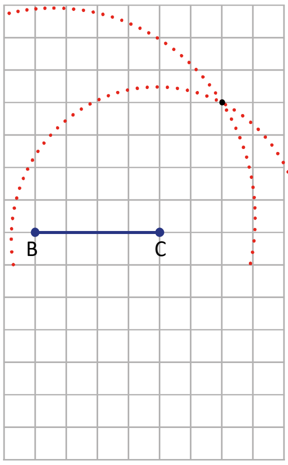
a) Construye un triángulo utilizando los tres segmentos de la derecha como lados.

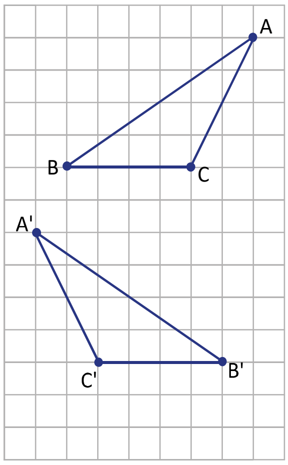
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?



a) Para construir el triángulo se realiza lo siguiente:
- Construye un segmento de longitud BC.
- Traza una circunferencia de radio BA y centro en B y otra con centro en C y radio CA.
- Identifica la intersección de los dos arcos.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales, son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$

b) ΔDEF; $DE = 2$, $EF = 4$, $FD = 3$

c) ΔGHI; $GH = 4$, $HI = 5$, $IH = 3$

d) ΔJKL; $JK = 5$, $KL = 7$, $LJ = 8$

e) ΔMNO; $MN = 3$, $NO = 4$, $OM = 5$

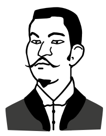
f) ΔPQR; $PQ = 5$, $QR = 8$, $RP = 7$

g) ΔSTU; $ST = 7$, $TU = 5$, $US = 6$

h) ΔXYZ; $XY = 4$, $YZ = 3$, $ZX = 2$

El tratado *Los Elementos*, de Euclides, ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* p.116.

En la proposición I.22. del tratado *Los Elementos*, Euclides hace referencia a la congruencia de triángulos estableciendo: "Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante".



a) y g); b) y h); c) y e); d) y f)

Indicador de logro

1.3 Determina el mínimo de elementos necesarios que deben ser iguales para que dos triángulos sean congruentes.

Secuencia

Luego de haber introducido el símbolo que representa la congruencia, así como el concepto de congruencia de triángulos, se analizará cuál debe ser el número mínimo de elementos que deben tener iguales dos triángulos para que sean congruentes; en ese sentido en esta clase introduce el **primer criterio de congruencia** "Lado, Lado, Lado (LLL)".

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo dada la longitud de sus tres lados. Para esta actividad es importante que no se les indique la posición del triángulo, para que luego puedan comparar y determinar que no importa la posición en que dibujen los triángulos, siempre serán congruentes si las medidas de sus lados son iguales.

Ⓒ Utilizar el criterio de congruencia que se ha definido en la Conclusión, en este apartado no es necesario que dibujen los triángulos, basta con que vayan comparando las longitudes de los lados; pero si se dispone de tiempo puede dibujarse para que practiquen el uso del compás.

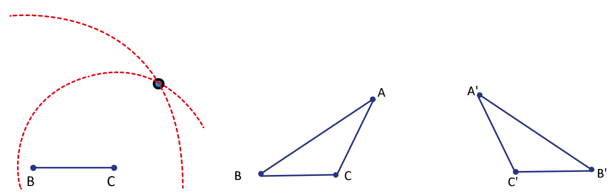
Posibles dificultades:
El uso inadecuado del compás, podría impedir que se realicen los trazos sugeridos; en ese caso es importante dar una orientación general al respecto y dejar como tarea que complementen el trazo de los triángulos de la fijación.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría y compás.

Fecha: U5 1.3

Ⓟ a) Construye un triángulo usando la longitud de los segmentos mostrados en el LT, utiliza regla y compás.
b Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ



Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, son congruentes.

Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia LLL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y g)
b) y h)
c) y e)
d) y f)

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

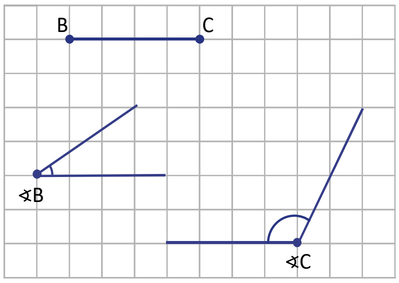
1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando regla y transportador, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos de la derecha, como dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

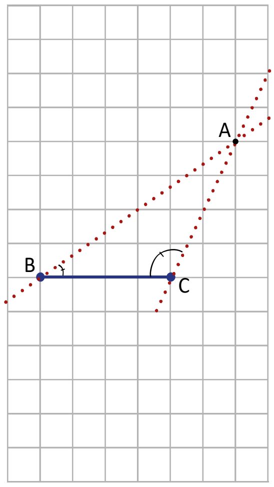


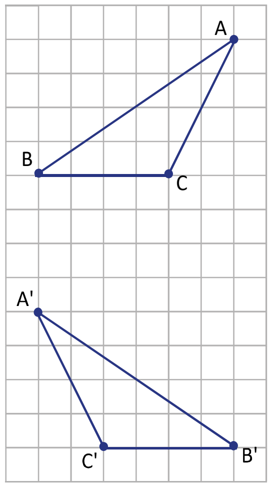
S

a) Para construir el triángulo usando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

- Construye un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo B y el ángulo C en los respectivos extremos del segmento BC.
- Identifica la intersección de los rayos de los ángulos trazados ∢B y ∢C.
- Une los puntos y forma el ΔABC.

b) Al comparar los triángulos, puedes ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' *y* ∢C = ∢C'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

Son congruentes los siguientes triángulos: a) y e); b) y h); c) y f)

Indicador de logro

1.4 Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el primer criterio de congruencia, en esta clase se trabajará el segundo criterio, proporcionando tres elementos del triángulo para que ellos realicen el trazo; a diferencia de la anterior, en esta clase es importante el orden en que se colocan los elementos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado comprendido entre ellos; a partir de la comparación de los trazos, introducir el **segundo criterio de congruencia** "Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)". Es importante que cuando se comparen los resultados se haga énfasis en la posición de los ángulos respecto al segmento dado.

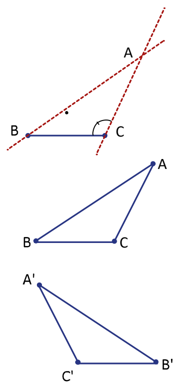
Ⓒ Practicar el proceso de identificación de triángulos congruentes utilizando el criterio visto en esta clase.

Materiales:
El profesor y cada uno de los estudiantes deben contar con estuche de geometría.

Fecha: **U5 1.4**

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos mostrados en el LT, utiliza regla y transportador.
b) Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia ALA, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y e)
b) y h)
c) y f)

Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

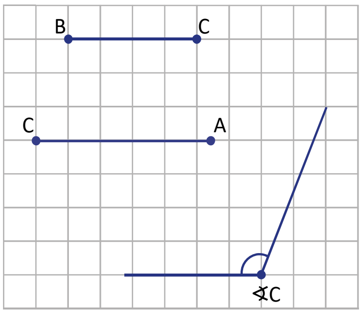
1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando regla, transportador y compás, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo de la derecha, como dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

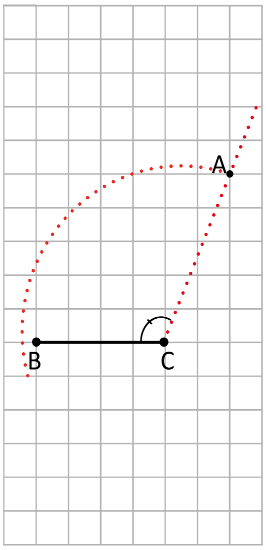


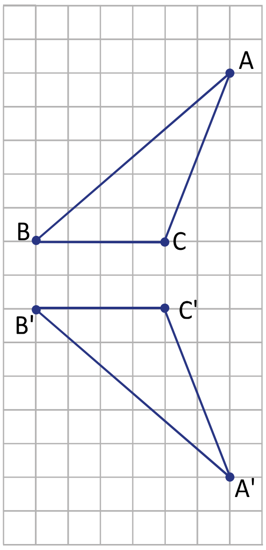
S

a) Para construir el triángulo a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se realiza lo siguiente:

- Traza un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo C.
- Traza una circunferencia de radio CA.
- Marca la intersección de la circunferencia y el rayo del ∢C.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que BC = B'C', ∢C = ∢C' y CA = C'A'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

Son congruentes los siguientes triángulos: a) y g); b) y h); c) y e)

Indicador de logro

1.5 Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

Secuencia

En las dos clases anteriores se ha trabajado con dos criterios, con los cuales se puede determinar si dos triángulos son congruentes; en esta clase se presentarán tres elementos distintos a los analizados para introducir el **tercer criterio de congruencia** "Lado, Ángulo, Lado (LAL)".

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo con los elementos dados y luego compararlo con los obtenidos por sus compañeros. Es necesario considerar que el orden en que se colocan los elementos es importante.

Ⓒ Fijar el proceso de comparación de los triángulos utilizando el criterio de congruencia estudiado en esta clase.

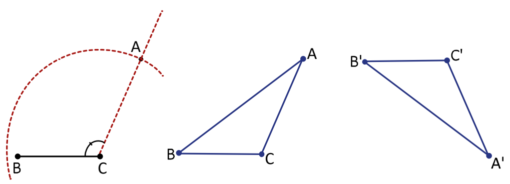
Observación:
Es importante señalar que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

Fecha: U5 1.5

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo mostrado en el LT, utiliza regla, compás y transportador.

b) Compara los resultados obtenidos con otros estudiantes de tu grado, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ



Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.

Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia LAL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

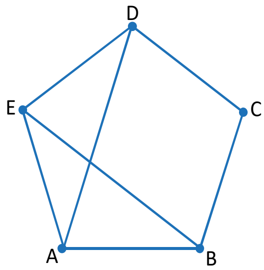
a) y g)
b) y h)
c) y e)

Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

P

Dado el pentágono regular, explica por qué ΔABE ≅ ΔEDA.



En el pentágono regular la medida de sus lados y ángulos internos son iguales.

S

Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
∢EAB = ∢DEA	Son ángulos internos del pentágono regular.
ΔABE ≅ ΔEDA	Por criterio LAL.

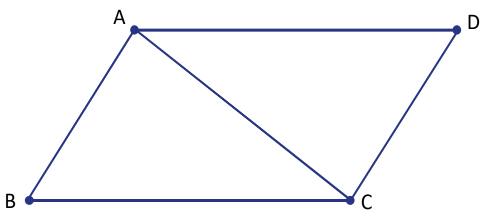
C

A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**

En el problema mostrado anteriormente, las características de los lados y ángulos internos del pentágono regular y los criterios de congruencia de triángulos son asuntos comprobados y la solución mostrada es la *demostración*.

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Dado que el cuadrilátero ABCD es un romboide y AC es diagonal, demuestra que ΔABC ≅ ΔCDA.

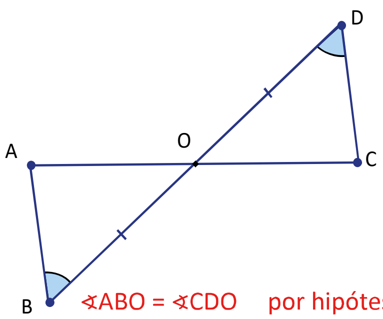


∢CAB = ∢ACD
∢CAD = ∢ACB por ser alternos internos,

AC = CA por ser el mismo segmento,

ΔABC ≅ ΔCDA por criterio ALA.

2. Dado que AB ∥ CD y DO = BO. Demuestra que ΔABO ≅ ΔCDO.



∢ABO = ∢CDO por hipótesis,
∢AOB = ∢COD por ser opuestos,

OB = OD por hipótesis,

ΔABO ≅ ΔCDO por criterio ALA.

Indicador de logro

1.6 Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

Secuencia

En las últimas tres clases se han estudiado los tres criterios de congruencia, por lo que en esta clase se utilizarán para demostrar propiedades de los polígonos.

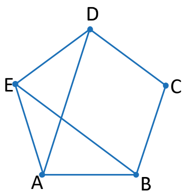
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar relaciones entre los triángulos que se forman con los lados y diagonales de un pentágono regular.

Ⓒ Utilizar los criterios de congruencia para determinar si dos triángulos dados son congruentes.

Fecha: **U5 1.6**

Ⓟ



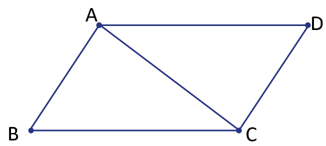
Dado un pentágono regular, explica por qué $\Delta ABE \cong \Delta EDA$.

Observación: entregar recortes del pentágono del LT, o ver imagen en LT.

Ⓢ

Afirmaciones	Justificaciones
$EA = AE$	Lado común a ambos triángulos.
$AB = ED$	Por ser lados de un pentágono regular.
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA$	Son ángulos internos del pentágono regular.
$\Delta ABE \cong \Delta EDA$	Por criterio LAL.

Ⓡ



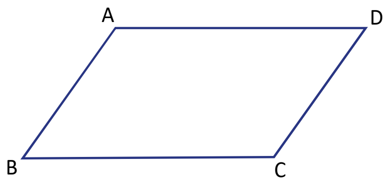
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$	Por ser alternos internos.
$AC = CA$	Por ser el mismo segmento.
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por criterio ALA.

Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

P

Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.

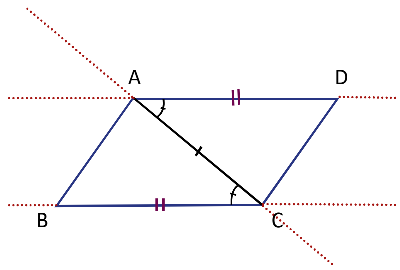


Utiliza congruencia de triángulos que contenga AB y DC, para demostrar la igualdad de lados.

S

Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.

Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.



De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

C

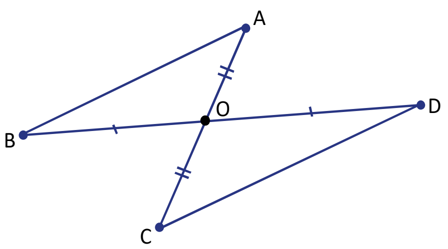
La demostración está estructurada de la siguiente manera:
BC = DA, argumento dado en el enunciado y se le denomina **hipótesis**.

CA = AC
∢BCA = ∢DAC, resultados ya comprobados.
ΔABC ≅ ΔCDA

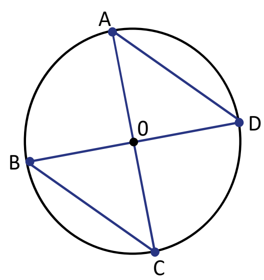
AB = CD, argumento o asunto a demostrar, **conclusión**.

En matemática se usa el lenguaje:
Si ☐, entonces ◯.
☐ corresponde a la hipótesis y
◯, corresponde a la conclusión.

1. Dos segmentos AC y BD se cortan en el punto O. Considerando que BO = DO y AO = CO, demuestra que AB = CD, luego escribe la hipótesis y la conclusión.



2. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersectan en el centro O del círculo. Demuestra que AD = CB.



Indicador de logro

1.7 Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

Secuencia

En la clase anterior se utilizaron los criterios de congruencia para demostrar si dos triángulos dados son congruentes, en esta clase nuevamente se utilizarán los criterios de congruencia así como lo aprendido sobre paralelismo para demostrar que dos triángulos son congruentes.

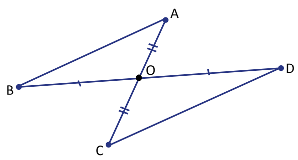
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que en un cuadrilátero, al trazar una diagonal, se forman dos triángulos congruentes.

Ⓒ Demostrar si dos triángulos dados son congruentes, para ello es necesario utilizar los criterios de congruencia y lo aprendido sobre triángulos.

Solución de algunos ítems:

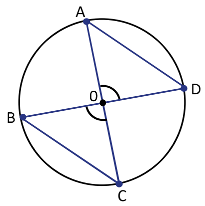
1.



Afirmación	**Justificación**
BO = DO	Por hipótesis.
AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

Posibles dificultades:
Al igual que en la clase anterior puede ser que no se logren hacer las justificaciones que permitan realizar la demostración, en ese caso se pueden poner a trabajar por parejas.

2.

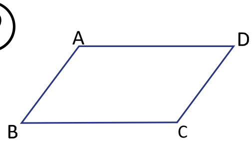


Afirmación	**Justificación**
BO = DO	Por ser radios.
AO = CO	Por ser radios.
∢AOD = ∢COB	Por ser opuestos por el vértice.
ΔAOD ≅ ΔCOB	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AD = CB.

Fecha: U5 1.7

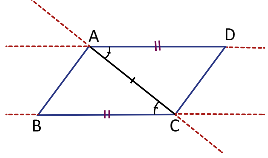
Ⓟ



Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.

Ⓢ

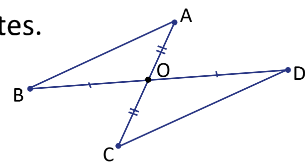
Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.



Afirmación	**Justificación**
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

Ⓡ



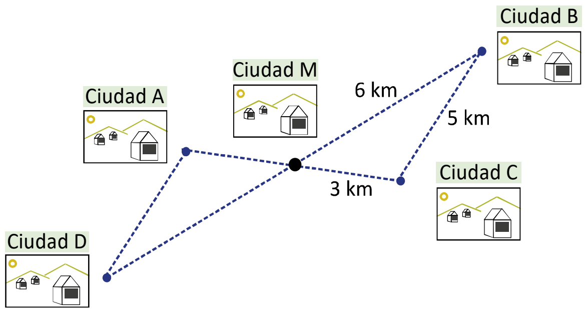
Afirmación	**Justificación**
BO = DO AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

P

El mapa siguiente muestra 5 ciudades. La ciudad M debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: la ciudad A y la ciudad C; y las otras dos son las ciudades B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?



S

Al comparar las distancias entre cada una de las ciudades se observa que se forman dos triángulos, cuyos elementos se relacionan de la siguiente manera:

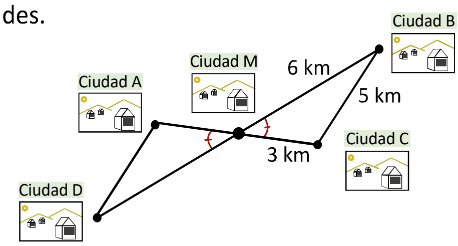
AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.

ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.

DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.



Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. En la figura 1, BC = EC, CA = CD y AB = DE.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de θ.

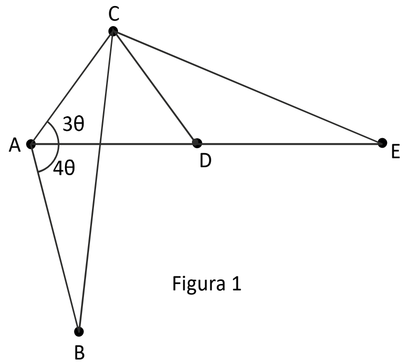


Figura 1

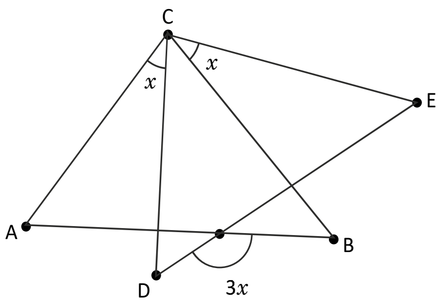


Figura 2

2. En la figura 2, AC = DC, BC = EC.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de x.

Indicador de logro

1.8 Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

Secuencia

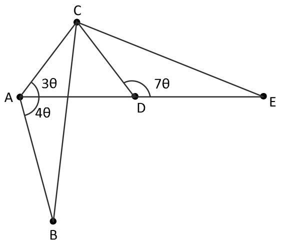
En las dos clases anteriores, se han utilizado los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos dados son congruentes, esto considerando la posición en una figura dada; ahora se utilizarán para resolver situaciones cotidianas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la congruencia de triángulos para determinar la longitud de uno de los lados de un triángulo que corresponde a la distancia entre dos ciudades.

Solución de algunos ítems:

1.

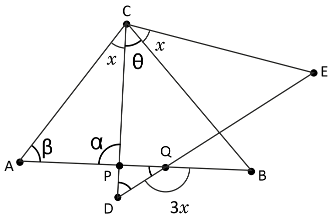


a) BC = EC; CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$ por criterio LLL.

b) Calculando el valor θ

$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

2.



a)
AC = DC y BC = EC, por hipótesis.
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE = x + \theta$
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$ por criterio LAL.

b)
En el ΔPQD, $\sphericalangle D = \sphericalangle A = \beta$, por definición de congruencia, $\sphericalangle DPB = \sphericalangle APC = \alpha$, por ser opuestos por el vértice.
Además, $\sphericalangle Q = 180° - 3x$; entonces:

$$\beta + \alpha + (180° - 3x) = 180°$$
$$\beta + 180° - (\beta + x) + (180° - 3x) = 180°$$
$$2 \times 180° - 4x = 180°$$
$$-4x = -180°$$
$$x = 45°$$

Fecha: **U5 1.8**

Ⓟ En el mapa mostrado en el LT, la ciudad M se ubica a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: ciudad A y C; y ciudad B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?

Ⓢ AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
$\sphericalangle AMD = \sphericalangle CMB$, por ser opuestos por el vértice.
$\Delta AMD \cong \Delta CMB$, por criterio LAL.
DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.
Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Ⓡ 1. BC = EC, CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ por criterio LLL

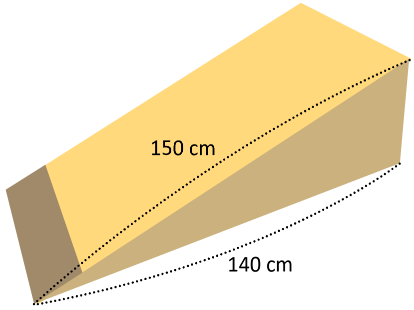
$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

Tarea: página 115 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

P

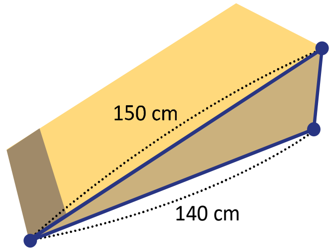
Carlos participará en una competencia de patinaje que se realizará los próximos días y ya tiene lista su rampa para practicar; su primo José, se ha motivado y quiere construir una rampa similar a la de Carlos, pues también quiere participar en la competencia. Carlos le envía una fotografía con la información que se muestra en la figura y le comenta que la medida del ángulo entre los dos lados proporcionados es 13°.



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

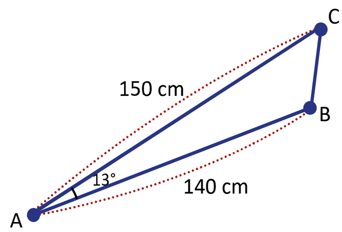
S

1. Recordar las condiciones del problema:
   - Identificar los lados conocidos que se indican en la figura.
   - Indicar el ángulo entre los lados conocidos; es decir, 13°.
   - Observar que en el costado se forma un triángulo.



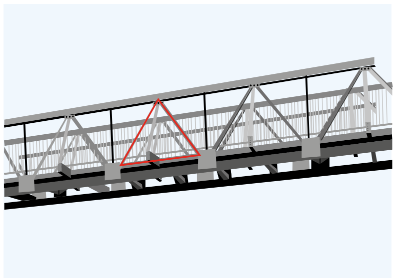
2. Aplicar un criterio de congruencia de triángulos.
   Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

3. Extraer los datos y construir la rampa.
   - Medir y cortar las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.
   - Colocar las piezas cortadas la primera como base y la segunda de tal manera que en la intersección de ambas formen un ángulo de 13°.



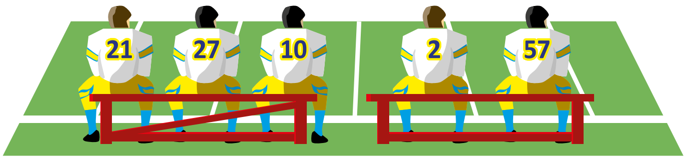
Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. Se necesita reemplazar unas piezas en la pasarela cuyo diseño se muestra en la figura. Antonio está a cargo de construir las piezas a reemplazar; para ello necesita elaborar una réplica, tomando como referencia las piezas que están colocadas.



a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar Antonio como mínimo para replicar exactamente las piezas que se indican en la figura?

b) ¿Las medidas indicadas en el numeral anterior son una manera única de replicar las piezas? Justifica tu respuesta.



2. Observa la imagen y responde. ¿Por qué la banca con el apoyo diagonal es más estable que la otra? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

1.9 Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

Secuencia

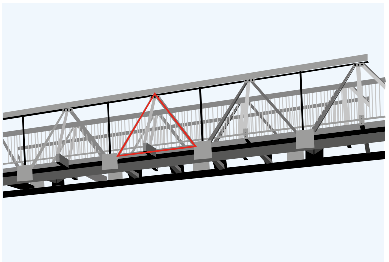
En la clase anterior, se resolvieron situaciones utilizando la congruencia de triángulos y la relación entre los ángulos; para esta clase se utilizará nuevamente la congruencia de triángulos para resolver situaciones del entorno.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver la situación planteada en el Problema inicial, esta información puede usarse para crear la rampa y servir como una actividad integradora.

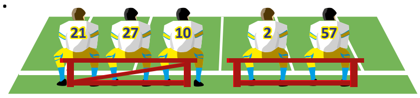
Solución de algunos ítems:

1.



a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
- Un segmento y dos ángulos.
- Dos ángulos y un segmento entre ellos.
  Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

2.

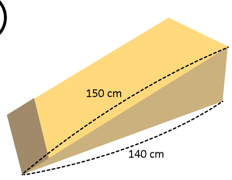


Porque si se definen los tres lados, el triángulo es una figura que no se deforma y eso hace que soporte mayor peso. Por esa razón en la mayoría de estructuras se utilizan figuras triangulares.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no pueden resolver las situaciones de manera individual, se pueden organizar por parejas.

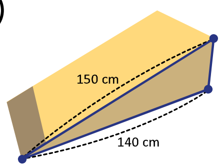
Fecha: **U5 1.9**

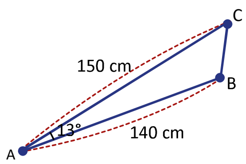
Ⓟ



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

Ⓢ





Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

Extraer los datos y construir la rampa, midiendo y cortando las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.

Ⓡ

a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
- Un segmento y dos ángulos.
- Dos ángulos y un segmento.
  Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

Tarea: página 116 del Cuaderno de Ejercicios.