Unidad 6. Características de los triángulos y cuadriláteros

Competencia de la Unidad

Identifica figuras planas utilizando criterios de congruencias para obtener características de triángulos y cuadriláteros.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total de prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Triángulos	1	1. Triángulos isósceles
	1	2. Teorema del triángulo isósceles
	1	3. Bisectriz de un triángulo isósceles
	1	4. Triángulos equiláteros
	1	5. Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros
	1	6. Recíproco y contraejemplo de un teorema
	1	7. Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	8. Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	9. Condiciones necesarias y suficientes
	1	10. Uso de las condiciones necesarias y suficientes
	1	11. Características de las bisectrices de un triángulo
	2	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba del segundo trimestre
2. Paralelogramos	1	1. El paralelogramo
	1	2. Características de los paralelogramos
	1	3. Diagonales de un paralelogramo
	1	4. Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	5. Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	6. Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo
	1	7. Características del rectángulo y el rombo
	1	8. Aplicación de las carateristicas de las diagonales de un rectángulo

	1	9. Recíproco de características de rectángulos
	1	10. Relación entre líneas paralelas y áreas
	1	11. Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas
	2	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6

26 horas clase + prueba de la Unidad 6 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Triángulos
A partir del proceso de triangulación de un polígono, lo cual se estudió en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

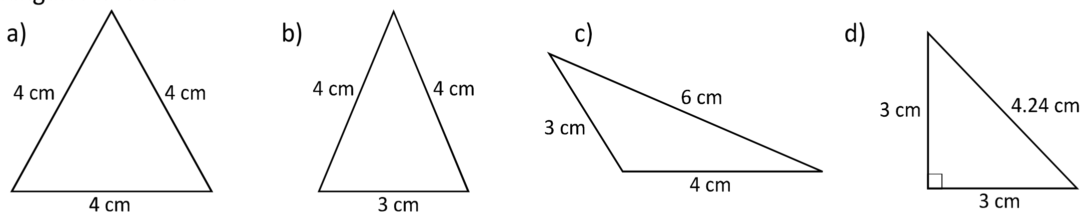
Lección 2: Paralelogramos
Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado, se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios; luego se analiza la relación entre los ángulos entre paralelas que es utilizada para demostrar uno de los más importantes teoremas matemáticos y para resolver situaciones del entorno.

Lección 1 Triángulos

1.1 Triángulos isósceles

P

Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



S

a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

Observa que también cada triángulo se puede clasificar por sus ángulos:

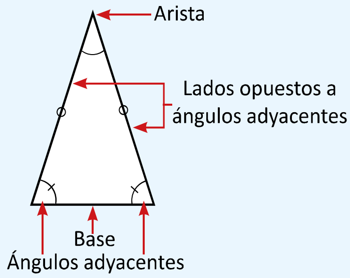
a) Es acutángulo (3 ángulos agudos).
b) También es acutángulo.
c) Es obtusángulo (un ángulo es obtuso).
d) Es rectángulo (un ángulo recto).

C

La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.

Las partes de un triángulo isósceles son:

Arista: Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
Base: Es el lado opuesto a la arista.
Ángulos adyacentes: Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
Lados opuestos a ángulos adyacentes: Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.



E

Verifica la construcción de un triángulo isósceles utilizando papel y comprueba que dos de sus lados y ángulos son iguales. Realiza los siguientes pasos:

1. Toma una hoja de papel y dóblala formando un rectángulo tal como se muestra en la figura 1.
2. Señala la diagonal de ese rectángulo y corta con la tijera exactamente en la diagonal (figura 2).
3. El triángulo que queda en medio, divídelo por la mitad tomando punta a punta y comprueba que es isósceles viendo que sus ángulos y lados coinciden (figura 3).

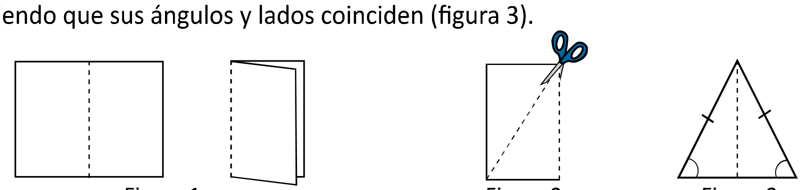
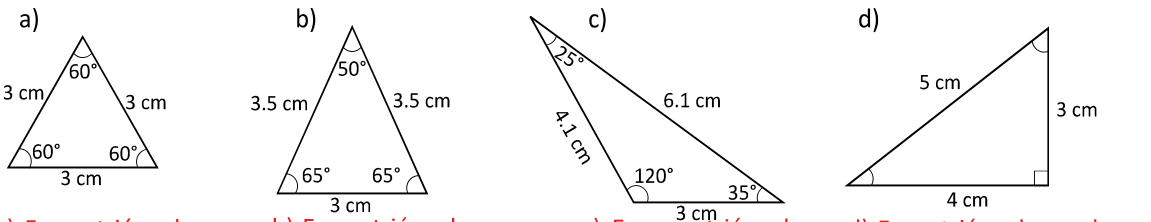


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.



a) Es un triángulo equilátero.
b) Es un triángulo isósceles.
c) Es un triángulo escaleno.
d) Es un triángulo escaleno.

Indicador de logro

1.1 Caracteriza los triángulos isósceles.

Secuencia

En segundo ciclo de Educación Básica, se estudió la clasificación de los triángulos considerando la relación entre la medida de los lados y sus ángulos; en esta clase se identifican los elementos de un triángulo isósceles y su caracterización. También se analiza el proceso de construcción de un triángulo isósceles a partir de un rectángulo de papel.

Propósito

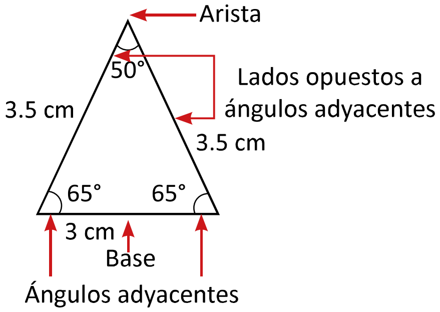
Ⓟ, Ⓢ Caracterizar los triángulos para recordar lo aprendido en Educación Básica y así introducir los nombres de cada uno de los elementos de un triángulo isósceles que es un caso particular de triángulos.

Ⓒ Sistematizar los elementos y caracterización de un triángulo isósceles, introduciendo así el lenguaje matemático.

Ⓔ Construir un triángulo isósceles para verificar sus características mediante el uso de dobleces.

Solución de algunos ítems:

b) Es un **triángulo isósceles,** porque tiene 2 lados de igual longitud.

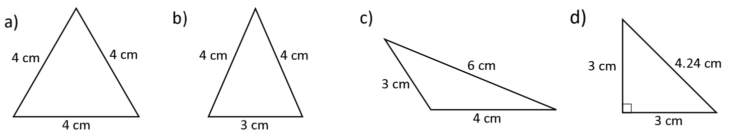


c) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es obtusángulo.

d) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es rectángulo.

Fecha: **U6 1.1**

Ⓟ Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



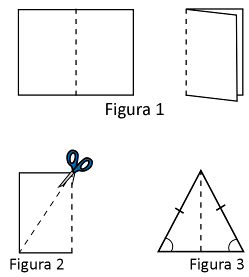
Ⓢ a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**

b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**

d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

Ⓔ Construcción de un triángulo isósceles:



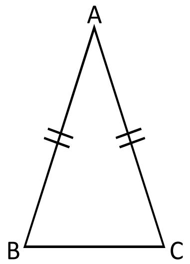
Ⓡ a) Es un triángulo equilátero, porque tiene los 3 lados de igual longitud.

Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Teorema del triángulo isósceles

P

Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se tiene la demostración de un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros, que establece que "En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes" (un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes y el tercer lado se le llama base). Pinasco, J. (2009). *Las Geometrías*.

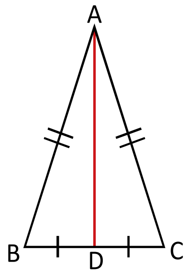
S

Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

DB = DC (por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB (por la congruencia de los triángulos).

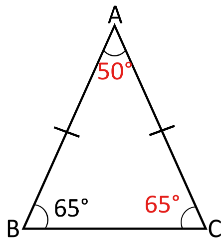


C

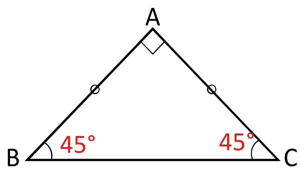
En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema demostrado.

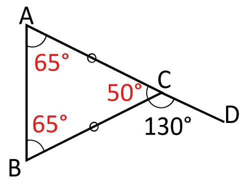
a)



b)



c)



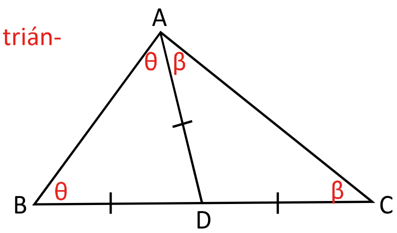
2. En la siguiente figura considera que BD = CD = AD. Justifica las igualdades planteadas en cada literal dejando constancia de lo realizado.

a) ∢DAB = ∢DBA — Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

b) ∢DAC = ∢DCA — De la misma manera del a).

c) ∢DBA + ∢ACB = 90° — Como 2∢θ + 2∢β = 180°, entonces ∢θ + ∢β = 90°.

d) ∢CAB = 90° — Como ∢CAB = ∢θ + ∢B = 90°.



Unidad 6

Indicador de logro

1.2 Demuestra el teorema del triángulo isósceles: “A lados iguales corresponden ángulos iguales”, utilizando la congruencia de triángulos.

Secuencia

En la clase anterior se identificaron los elementos de un triángulo isósceles caracterizando cada uno de ellos; en esta clase, se hará la demostración de uno de los teoremas clásicos, para ello es importante recordar lo aprendido sobre demostraciones y congruencia de triángulos.

Propósito

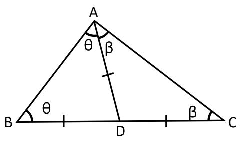
Ⓟ, Ⓢ Demostrar el teorema y recordar el proceso de demostración haciendo énfasis en las afirmaciones matemáticas utilizadas que corresponden a conocimientos previos adquiridos en unidades anteriores.

Ⓒ En el numeral 1, utilizar el teorema demostrado para determinar la medida de los ángulos restantes; además se utilizará el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y ángulos suplementarios.

En el numeral dos, justificar las afirmaciones planteadas, siempre utilizando lo aprendido sobre ángulos y triángulos.

Solución de algunos ítems:

2.



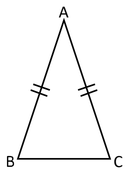
a) $\measuredangle DAB = \measuredangle DBA$, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles.
b) $\measuredangle DAC = \measuredangle DCA$, de la misma manera del a).
c) $\measuredangle DBA + \measuredangle ACB = 90°$.
Como $2\measuredangle\theta + 2\measuredangle\beta = 180°$, entonces
$\measuredangle\theta + \measuredangle\beta = 90°$.

d) $\measuredangle CAB = 90°$.
Como $\measuredangle CAB = \measuredangle\theta + \measuredangle B = 90°$.

Posibles dificultades:
Justificar las afirmaciones que se indican en el numeral 2 de la fijación, en ese caso se puede indicar que trabajen por parejas; y si en algún caso extremo nadie puede resolverlo, se pueden dar pistas para orientarles.

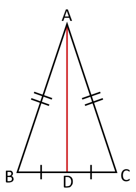
Fecha: U6 1.2

Ⓟ



Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados $AB = AC$, entonces $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$.

Ⓢ Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.



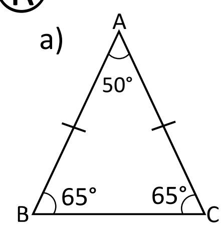
$DB = DC$. (Por construcción).

Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$. (Por criterio LLL, AD es común, y $AB = AC$ por hipótesis).

Por lo tanto, $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$. (Por la congruencia de los triángulos).

Ⓡ

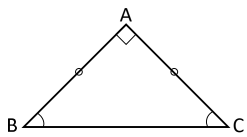
a)



$\measuredangle C = \measuredangle B = 65°$, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

Como $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$, entonces $\measuredangle A = 50°$.

b)



$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180$, $\measuredangle A = 90°$ y $\measuredangle B = \measuredangle C$

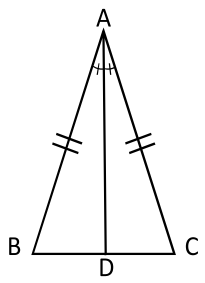
$\measuredangle B = \measuredangle C = 45°$, por ser ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles.

Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

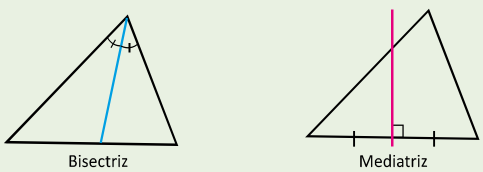
P

Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.



La bisectriz de un triángulo: es el segmento que divide a cualquiera de sus tres ángulos en dos partes iguales y termina en el correspondiente lado opuesto.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento y que lo divide a la mitad.



S

En la figura ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

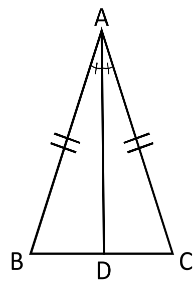
Entonces DB = DC (por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC (por la congruencia de triángulos) . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° (por ser ángulos suplementarios) . . . (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por (1) y (2)).

Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥BC.



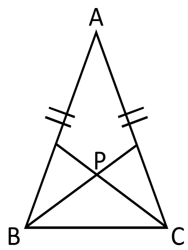
Por lo tanto, AD es mediatriz de BC (DB = DC y AD ⊥ BC).

C

En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud, también es altura y mediana del triángulo isósceles.

Demuestra que si el ΔABC es isósceles y si se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes, siendo P el punto de intersección entre las dos bisectrices, entonces el ΔPBC es isósceles.



Indicador de logro

1.3 Deduce y utiliza la característica que posee la bisectriz de un triángulo isósceles.

Secuencia

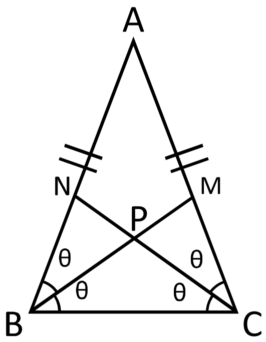
En la clase anterior se demostró el teorema que relaciona los ángulos de la base de un triángulo isósceles; en esta clase se demostrará el teorema que relaciona la mediatriz de la base de un triángulo isósceles con la bisectriz del ángulo opuesto a la base.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar el teorema y recordar el concepto de bisectriz y mediatriz, además de hacer conciencia de la importancia de los teoremas en la construcción del conocimiento matemático.

Ⓡ Utilizar los criterios de congruencia y relación entre ángulos internos para demostrar propiedades de las bisetrices de un triángulo isósceles.

Solución de algunos ítems:



Como AB = AC, entonces ∢B = ∢C, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

$\theta = \frac{1}{2}∢B = \frac{1}{2}∢C$

ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.

Posibles dificultades:
Es posible que a los estudiantes se les dificulte estructurar la demostración, por lo que se pueden dar pistas para que se orienten y así poco a poco ir desarrollando la habilidad para realizar demostraciones matemáticas.

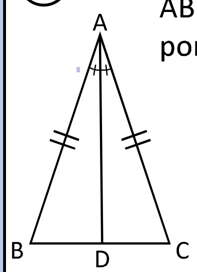
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces también por ALA ΔBPN ≅ ΔCPM.

Por tanto, BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Fecha: **U6 1.3**

Ⓟ Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.

Ⓢ



En la figura ΔABD ≅ ΔACD. (Por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

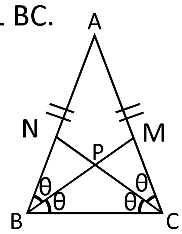
Entonces DB = DC. (Por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC. (Por la congruencia de triángulos) ... (1)

∢ADB + ∢ADC = 180°. (Por ser ángulos suplementarios) ... (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por [1] y [2])
Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥ BC.

Ⓡ



Como AB = AC,
entonces ∢B = ∢C

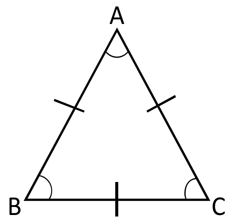
ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces
ΔBPN ≅ ΔCPM, por criterio ALA.
Por tanto BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Tarea: página 122 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.4 Triángulos equiláteros

P Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.



Un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados tienen igual longitud.

S $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$ (ya que AB = AC) . . . (1)

$\measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ (ya que BC = BA) . . . (2)

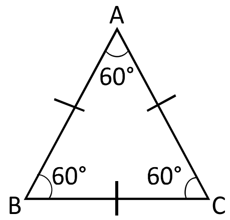
Por lo tanto, $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ (por (1) y (2)).

Sea x la medida del ángulo:

$3x = 180°$ (por la suma de los ángulos internos de un triángulo).

Entonces, $x = 60°$ (resolviendo la ecuación).

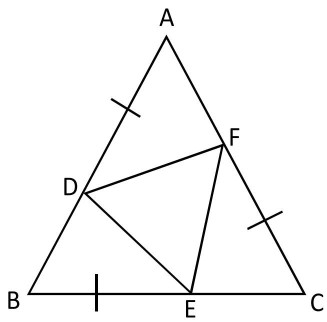
Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60°.



A un triángulo que posee sus tres ángulos de igual medida se le puede llamar **equiangular**.

C En un triángulo equilátero cada uno de los ángulos internos mide 60°.

Sea el ΔABC equilátero, y además BE = CF = AD. Demuestra que el ΔDEF es equilátero.



Unidad 6

Indicador de logro

1.4 Demuestra el teorema “un triángulo equilátero es equiángulo”.

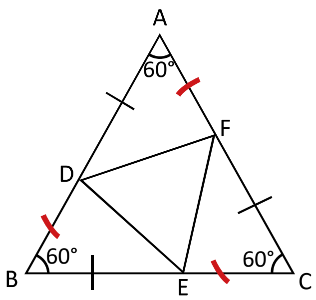
Secuencia

En las dos clases anteriores se han caracterizado los triángulos isósceles, en esta clase se demuestra que cada uno de los ángulos internos del triángulo equilátero mide 60°.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero.

Solución de algunos ítems:



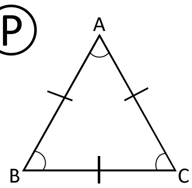
Como ΔABC es equilátero, entonces:
AB = BC = CA.

Pero AB = BC = CA, es igual a
AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene
DB = EC = FA, ya que
BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.
De donde se tiene DE = EF = FD.
Por tanto, ΔDEF es equilátero.

Fecha: **U6 1.4**

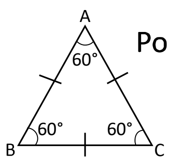
Ⓟ



Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.

Ⓢ

∢ABC = ∢BCA (ya que AB = AC) ... (1)
∢BCA = ∢CAB (ya que BC = BA) ... (2)

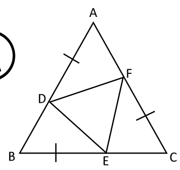


Por tanto, ∢ABC = ∢BCA = ∢CAB (Por [1] y [2]).

Sea x la medida del ángulo:

$3x = 180°$.
Entonces, $x = 60°$.

Ⓡ



Como el ΔABC es equilátero,
entonces
AB = BC = CA.

AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene:

DB = EC = FA, ya que BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.

De donde se tiene DE = EF = FD.

Por tanto, ΔDEF es equilátero.

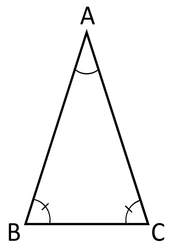
Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

P

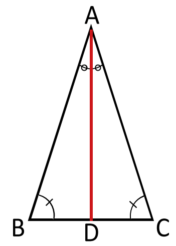
Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



Este resultado se suele enunciar como “a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud”.

S

Trazando la bisectriz de ∢CAB, se tiene que



∢DBA = ∢DCA (por hipótesis) . . . (1)
∢DAB = ∢DAC (por construcción de la bisectriz) . . . (2)
∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB) (teorema de ángulos internos de triángulos).
= 180° – (∢DCA + ∢DAC) (por 1 y 2).
= ∢CDA

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio ALA, AD es común, ∢BDA = ∢CDA y ∢DAB = ∢DAC).

Por lo tanto, AB = AC (por la congruencia).

C

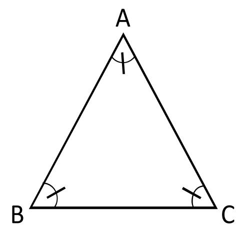
En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

E

Demuestra que si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces es un triángulo equilátero.

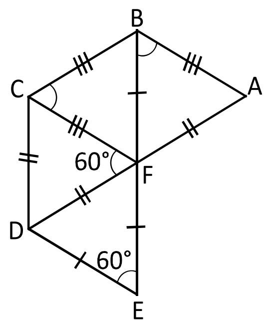
AB = AC (por ∢BCA = ∢ABC, aplicando el resultado demostrado). . . (1)

CA = BC (por ∢ABC = ∢CAB, aplicando el resultado demostrado). . . (2)



Por lo tanto, AB = BC = CA, y el triángulo es equilátero (por (1) y (2)).

Utilizando los datos en la siguiente figura, demuestra que ΔFAB, ΔFBC, ΔFCD y ΔFDE son equiláteros.



Indicador de logro

1.5 Demuestra teoremas que relacionan los lados y ángulos iguales de triángulos isósceles o equiláteros, con los respectivos lados opuestos.

Secuencia

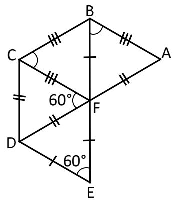
En la clase 1.2 se demostró el teorema sobre triángulos isósceles que establece que si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos que se oponen a ellos también son iguales; en esta clase se demostrará un teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros que relaciona los ángulos con los lados.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos, para demostrar el teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros, es importante hacer énfasis en el uso de trazos auxiliares como un recurso en el proceso de demostración.

Ⓡ Utilizar el resultado obtenido, para demostrar que si un triángulo tiene los tres ángulos iguales, también todos sus lados son iguales, concluyendo que el triángulo es equilátero.

Solución de algunos ítems:



Continuación

Para los otros dos triángulos se tiene:

Como ∢EFD + ∢DFC + ∢CFB = 180°, entonces ∢CFB = 60° y por hipótesis
CF = CB, entonces ∢CFB = ∢FBC = 60°.
Por tanto el ΔCFB es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(3)

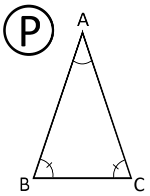
AB = FC, AF = FD, ambos son lados de ΔDFC, que es equilátero, ∢AFB = ∢EFD = 60°, por ser opuestos por el vértice.

∢FBA = ∢AFB = 60°, entonces
∢BAF = 60° y por tener los 3 ángulos iguales, ΔFAB también es equilátero...(4)

Posibles dificultades:
En el caso de que los estudiantes no logren estructurar la demostración, se pueden organizar en parejas y si aún así no lo logran, se les puede dar pistas que orienten el proceso de demostración.

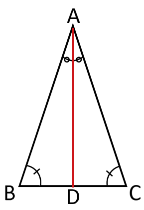
Fecha: **U6 1.5**

Ⓟ



Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.

Ⓢ Trazando la bisectriz de ∢CAB, se tiene que:

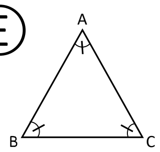


∢DBA = ∢DCA (por hipótesis) . . . (1)
∢DAB = ∢DAC (por construcción de la bisectriz) . . . (2)

∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB)
= 180° – (∢DCA + ∢DAC)
= ∢CDA

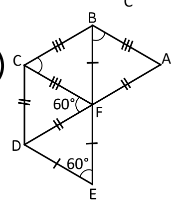
Entonces, ΔABD ≅ ΔACD. Por lo tanto, AB = AC.

Ⓔ



AB = AC (por ∢BCA = ∢ABC)
CA = BC (por ∢ABC = ∢CAB)
Por lo tanto, AB = BC = CA, y el triángulo es equilátero.

Ⓡ



ED = EF, entonces
∢EDF = ∢EFD = 60°.
Por tanto ΔFDE es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(1)

DC = DF, entonces
∢DFC = ∢FCD = 60°, por teorema de ángulos internos ∢CDF = 60° y por tener los 3 ángulos iguales ΔFCD es equilátero...(2)
Observación: De igual manera demostrar para los otros dos triángulos restantes.

Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

P

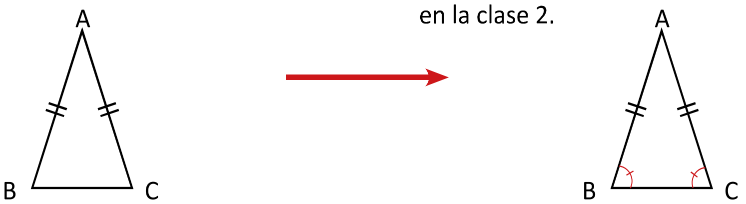
Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

S

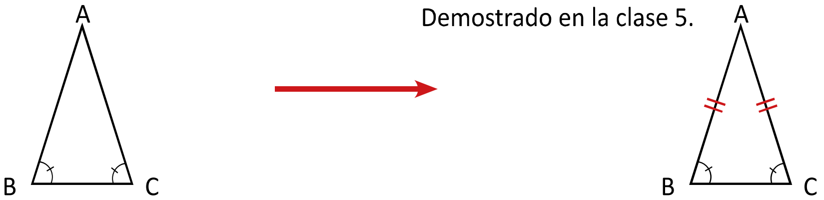
Analizando el primer teorema: “Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida”.

Condición cierta (hipótesis): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.



Analizando el segundo teorema: “Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles”.

Condición cierta (hipótesis): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). Demostrado en la clase 5.



El primer teorema es diferente del segundo, pues la condición que se cumple en el primero es la que hay que demostrar en el segundo, y la condición que se cumple en el segundo es la que hay que demostrar en el primero.

C

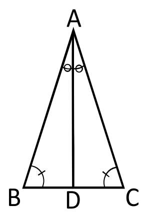
El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**. El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

E

Escribe el recíproco del siguiente enunciado, en el caso de no ser cierto, dar un contraejemplo que lo justifique: “Todo triángulo equilátero es isósceles”.
Recíproco: “Todo triángulo isósceles es equilátero”. No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo: El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

1. Determina el recíproco: “Si los 3 ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles”. Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.

2. Determina el recíproco: “En el triángulo ABC, si AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB, entonces AD es mediatriz de BC”. Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.



Unidad 6

Indicador de logro

1.6 Identifica el recíproco o contraejemplo de un teorema.

Secuencia

En las clases 1.2 y 1.5, se han demostrado teoremas sobre triángulos isósceles; en esta clase se analizarán dichos teoremas para introducir los conceptos de **recíproco y contraejemplo**. Es importante hacer énfasis en las condiciones que tiene cada teorema, para que vayan familiarizándose con ellas y facilite próximas demostraciones.

Propósito

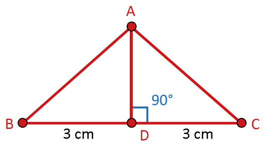
Ⓟ, Ⓢ Comparar dos teoremas demostrados analizando la hipótesis y la conclusión para definir a partir del análisis, el recíproco y el contraejemplo de un teorema.

Ⓒ Ilustrar un caso de teorema en el cual el recíproco no se cumple, en estos casos se pueden presentar contraejemplos para justificar su falsedad.

Ⓔ Practicar el proceso para identificar el recíproco y/o contraejemplo de un teorema. Es importante hacer énfasis en que los teoremas deben ser demostrados para ser aceptados como ciertos.

Solución de algunos ítems:

2.
Recíproco: "En el triángulo ABC, si AD es mediatriz de BC, entonces AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB".



Trazando la mediatriz de BC, se tiene que:
BD = DC (por construcción).
∢BDA = ∢CDA = 90° (por construcción de la mediatriz).

Entonces, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (por criterio LAL, AD es común).
Luego, por definición de congruencia,
AB = AC y ∢BAD = ∢CAD.
Por tanto, AD es la bisectriz del ángulo ∢BAC.

Posibles dificultades:
Escribir el recíproco o contraejemplo, en ese caso se puede organizar el trabajo en parejas y como pista sugerir que identifiquen la hipótesis y la conclusión.

Fecha: **U6 1.6**

Ⓟ Determina la diferencia entre los siguientes teoremas:
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

Ⓢ Analizando el primer teorema:

Condición cierta	Condición a demostrar
El triángulo es isósceles.	El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

Analizando el segundo teorema:

Condición cierta	Condición a demostrar
El triángulo tiene dos ángulos de igual medida.	El triángulo es isósceles Demostrado en la clase 5.

Ⓔ Escribe el recíproco o el contraejemplo que lo justifique:
"Todo triángulo equilátero es isósceles".
Recíproco:
"Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

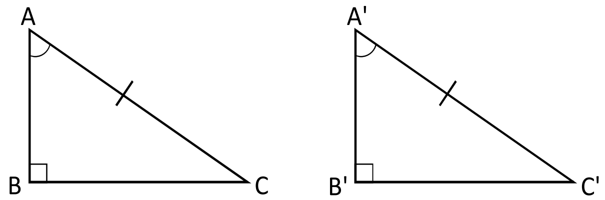
Ⓡ 1. **Recíproco:**
"Si un triángulo es isósceles, tiene sus tres ángulos iguales". No se cumple.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 3 cm, 3 cm y 4 cm, es isósceles pero no tiene los 3 ángulos iguales.

Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

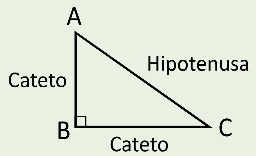
1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que
∢CAB = ∢C'A'B', ∢ABC = ∢A'B'C' = 90° y AC = A'C'; entonces, ΔABC ≅ ΔA'B'C'.



Recuerda que los lados de un triángulo rectángulo tienen los siguientes nombres:

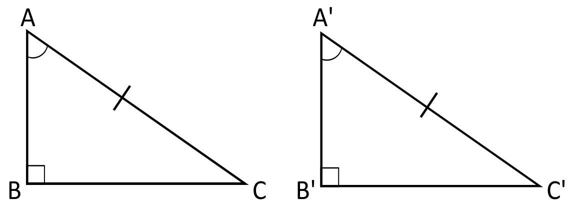


S

Los triángulos tienen los tres ángulos de igual medida porque son rectángulos.

Además, ∢CAB = ∢ C'A'B'.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA'B'C' (por criterio ALA).

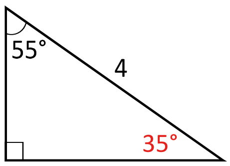


C

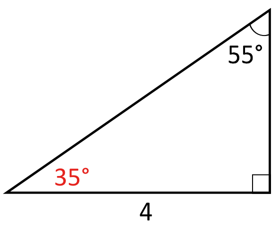
Si en un triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En los siguientes triángulos rectángulos, identifica los congruentes entre sí. Justifica tu respuesta.

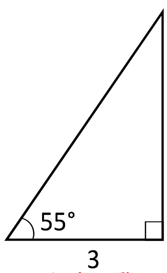
a)



b)



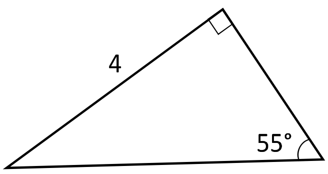
c)



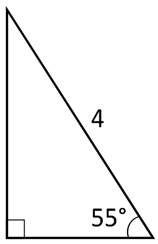
Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA.

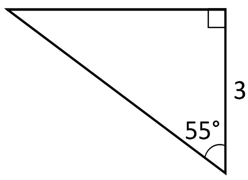
d)



e)



f)



Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Indicador de logro

1.7 Identifica la relación que debe existir entre los lados y ángulos de dos triángulos rectángulos.

Secuencia

En la Unidad 5 se trabajaron los criterios de congruencia de triángulos, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos rectángulos, introduciéndolos a partir de los conocimientos previos.

Es importante considerar que a pesar de que en la clase se trabaja el criterio de congruencia cuando la hipotenusa y un ángulo agudo son iguales, también se presentan ejercicios donde un cateto y un ángulo agudo son iguales, estos pueden resolverse con los conocimientos previos.

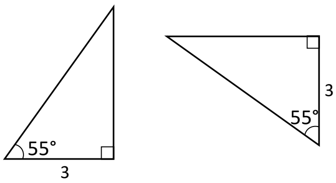
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos, utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos.

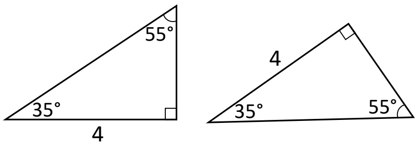
Ⓡ En uno de los casos identificar triángulos congruentes en un conjunto dado, en los otros casos será necesario utilizar lo aprendido en la Unidad 5. Luego de resolver los ejercicios hacer énfasis en el caso de que un cateto y un ángulo agudo son iguales; pues en esos casos también los triángulos son congruentes.

Solución de algunos ítems:

Numeral a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual. Esto utilizando directamente lo aprendido en la clase.



Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales. En este caso se considera el ángulo recto y el ángulo agudo dado.



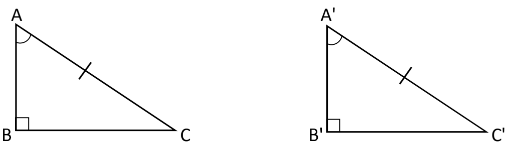
Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Fecha: **U6 1.7**

Ⓟ Demuestra que si en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que:

∢CAB = ∢C′A′B′, ∢ABC = ∢A′B′C′ = 90° y AC = A′C′;
entonces, ΔABC ≅ ΔA′B′C′.

Ⓢ



Como ∢CAB = ∢C′A′B′ y los triángulos son rectángulos, entonces tienen los 3 ángulos iguales.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA′B′C′ (por criterio ALA, porque AC = A′C′).

Ⓡ Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales.

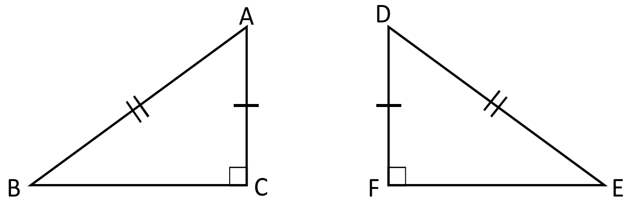
Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



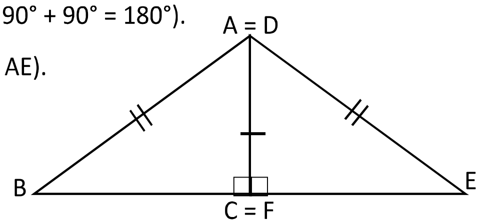
S Haciendo coincidir los lados AC y DF.

Los puntos B, C, E están alineados (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°).

Entonces, ΔABE es isósceles (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

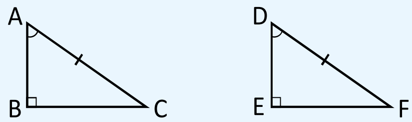
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).



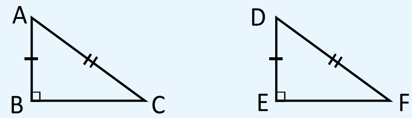
C **Criterios de congruencia de triángulos rectángulos**

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.



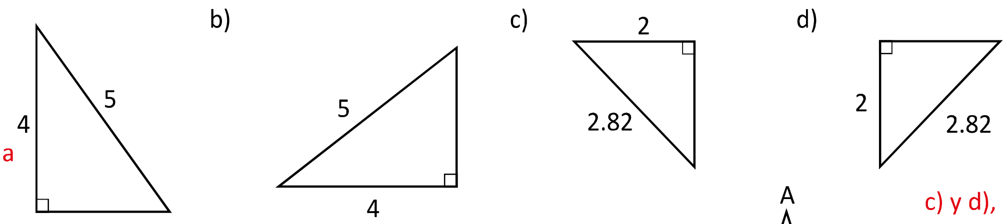
2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.



1. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

Observa que si dos catetos tienen igual medida también los triángulos son congruentes por criterio LAL.

a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.

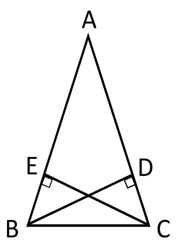


c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que

a) ΔBCD ≅ ΔCBE

b) AE = AD



Unidad 6

Indicador de logro

1.8 Identifica la relación que debe existir entre los lados de dos triángulos rectángulos para que sean congruentes.

Secuencia

En la clase anterior se estudió el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos que relaciona la hipotenusa y un ángulo agudo; para esta clase, se estudiará otro criterio de congruencia que relaciona la hipotenusa y un cateto.

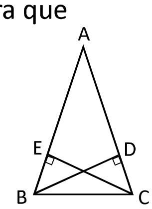
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que dos triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa igual son congruentes, esto utilizando los criterios de congruencia estudiados en la Unidad 5.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar los criterios de congruencia estudiados para determinar si dos o más triángulos dados son congruentes; mientras que en el numeral 2 utilizar los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos son congruentes.

Solución de algunos ítems:

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que



a) ΔBCD ≅ ΔCBE
b) AE = AD

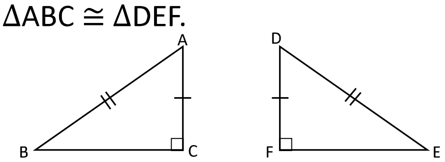
a) ∢CBA = ∢BCA (porque AB = AC).
Por tanto, ∢CBE = ∢BCD
BC = CB (es el mismo).
Entonces, ΔBCE ≅ ΔCBD, por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos, tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

b) AB = AE + EB y AC = AD + DC
Como AB = AC por hipótesis, entonces: AE + EB = AD + DC.
Pero, EB = DC, por congruencia de triángulos demostrada en literal a); por tanto, AE = AD.

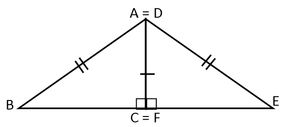
Posibles dificultades:
En el caso de que los estudiantes no puedan realizar la demostración, organizarlos por parejas, cuidando que siempre haya uno que tenga habilidades para que apoye al que tiene dificultades, y como pista se puede sugerir el uso de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Fecha: **U6 1.8**

Ⓟ Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



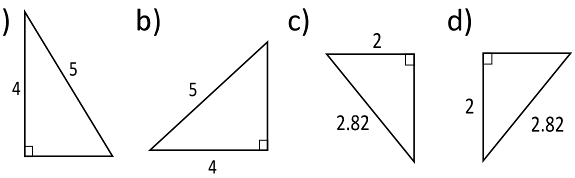
Ⓢ Haciendo coincidir los lados AC y DF.



Los puntos B, C, E están alineados.
(∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°)
Entonces, ΔABE es isósceles. (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

Ⓡ 1. a) b) c) d)



a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.
c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencias de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.

Tarea: página 127 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Condiciones necesarias y suficientes

P

Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero   B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

S

a) Si un triángulo ABC cumple la condición A, también cumple B; pues los triángulos equiláteros tienen los 3 lados iguales y para ser isósceles únicamente necesita 2 lados iguales; por tanto si se cumple A también se cumple B.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero; porque la medida del tercer lado (base), puede ser igual o distinta a la medida de los otros 2 lados.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

C

Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

Escribe N si A es necesaria para B y escribe S, si A es suficiente para B, para cada una de las situaciones siguientes:

a) Para un triángulo DEF: A: DEF es isósceles,   B: DEF es equilátero.
N: A es necesaria para B.

b) Para un triángulo DEF: A: DEF es rectángulo,   B: DEF es isósceles.
A no es necesaria ni suficiente para B.

c) Para un triángulo DEF: A: DEF tiene 3 ángulos iguales,   B: DEF es isósceles.
S: A es suficiente para B.

d) Para un cuadrilátero DEFG: A: DEFG es cuadrado,   B: DEFG es rectángulo.
S: A es suficiente para B.

Indicador de logro

1.9 Conoce el sentido de una condición necesaria y suficiente.

Secuencia

Anteriormente se ha trabajado con teoremas y proposiciones que establecen relaciones entre dos o más triángulos mediante los cuales se han generalizado características de los triángulos isósceles, equiláteros, entre otros. En esta clase se analizará la relación lógica entre las condiciones que forman una proposición.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Analizar la relación lógica entre dos proposiciones dadas. Para el caso, las condiciones son sobre triángulos isósceles y equiláteros, cuyas características han sido estudiadas en clases anteriores.

Ⓡ En cada uno de los literales, se debe utilizar lo aprendido en la clase para establecer la relación lógica entre las condiciones dadas.

Fecha: **U6 1.9**

Ⓟ Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero.

B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

Ⓢ a) Si ΔABC cumple la condición A, también cumple la B; pues los triángulos equiláteros también son isósceles.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

Ⓡ Para un triángulo DEF:

a) A es necesaria para B.

b) A no es necesaria ni suficiente para B.

c) A es suficiente para B.

d) A es suficiente para B.

Tarea: página 128 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

P

Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: ∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C'.

B: ΔABC ≅ ΔA'B'C'.

S

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C'= 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria para B; pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, la condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria y suficiente para B(ΔABC ≅ ΔA'B'C').

C

Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición “si A entonces B” y la recíproca “si B entonces A”.

Para el ejemplo presentado, la proposición “si A entonces B”, corresponde que para los dos triángulos rectángulos dados se cumple que ∢ABC = ∢A'B'C'=90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C', entonces los triángulos son congruentes; mientras que la recíproca “si B entonces A” corresponde a que si dos triángulos son congruentes, entonces tienen iguales sus lados y ángulos correspondientes.

Unidad 6

1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

a) A: Isósceles — B: Tiene dos ángulos de igual medida — A es necesaria y suficiente para B.

b) A: Equilátero — B: Tiene tres ángulos de igual medida — A es necesaria y suficiente para B.

c) A: Isósceles — B: Equilátero — A es necesaria para B.

d) A: Rectángulo — B: Equilátero — A no es es necesaria ni suficiente para B.

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

En este numeral cada docente deberá analizar los enunciados dados por sus estudiantes y verificar si la condición A cumple con ser necesaria y suficiente para B.

Indicador de logro

1.11 Determina en enunciados si una condición es necesaria y suficiente.

Secuencia

En la clase anterior se analizó la relación entre dos condiciones dadas para determinar si A es necesaria o suficiente para B; en esta clase se analizará si una condición es necesaria y suficiente para otra. Este análisis se hará con una proposición para triángulos rectángulos ya demostrada.

Es importante considerar que en la condición B no se especifica que el triángulo debe ser rectángulo porque se ha dado la ilustración; pero es necesario hacer énfasis a los estudiantes para evitar que se genere confusión creyendo que se cumple para un triángulo cualquiera.

Propósito

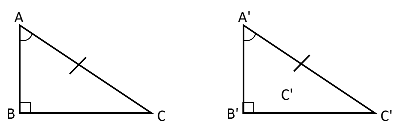
Ⓟ, Ⓢ Analizar dos condiciones dadas para determinar si una es necesaria y suficiente para otra, con el objeto de definir una condición necesaria y suficiente.

Ⓡ En el numeral 1, analizar cada condición para determinar si la condición A es necesaria y suficiente para B; mientras que en el numeral 2, cada estudiante o pareja de estudiantes escribirá enunciados donde se ejemplifique una relación necesaria y suficiente.

Fecha: **U6 1.10**

Ⓟ Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: ∢ABC = ∢A’B’C’ = 90°, ∢CAB = ∢C’A’B’, AC = A’C’
B: ΔABC ≅ ΔA’B’C’



Ⓢ La condición A(∢ABC = ∢A’B’C’ = 90°, ∢CAB = ∢C’A’B’, AC = A’C’) es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.
La condición A(∢ABC = ∢A’B’C’ = 90°, ∢CAB = ∢C’A’B’, AC = A’C’) es necesaria para B, pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.
Por tanto, A(∢ABC = ∢A’B’C’ = 90°, ∢CAB = ∢C’A’B’, AC = A’C’) es necesaria y suficiente para B(ΔABC ≅ ΔA’B’C’).

Ⓡ Para un triángulo dado:
a) A es necesaria y suficiente para B.
b) A es necesaria y suficiente para B.
c) A es necesaria para B.
d) A no es es necesaria ni suficiente para B.

Tarea: página 129 del Cuaderno de Ejercicios.

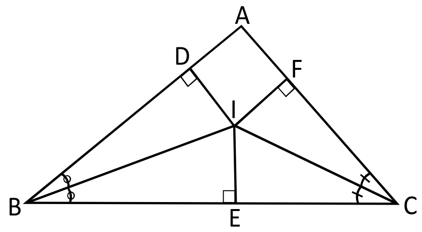
Lección 1

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

P

En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:

a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.



S

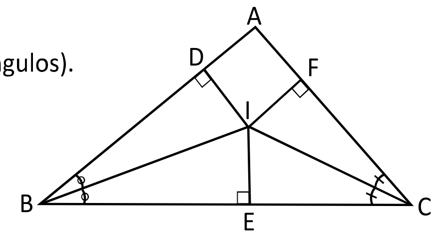
a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ID = IE (por la congruencia) . . . (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, IE = IF (por la congruencia) . . . (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por (1) y (2))

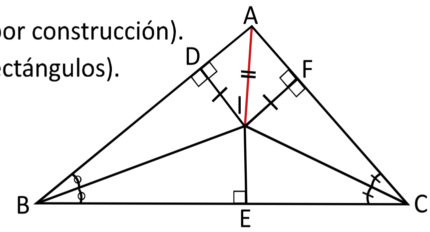


En b) para demostrar que ∢IAF = ∢IAD se necesita demostrar que ΔFIA ≅ ΔDIA.

b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido (por el literal **a** y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.



C

El punto "I" donde se intersecan dos bisectrices de un triángulo se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto "I" perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto "I"; es decir, las 3 bisectrices se intersecan en el incentro.

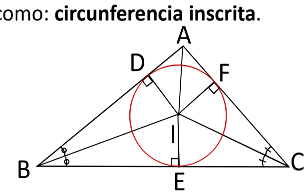
Comprueba utilizando un triángulo de papel que las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **incentro**.

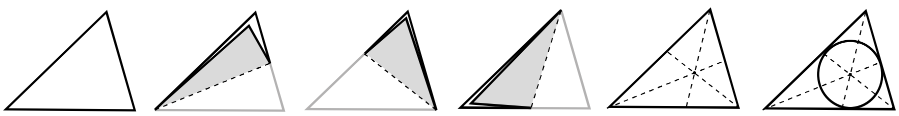
a) Dobla cada ángulo del triángulo por la mitad.

b) Marca el punto donde se intersecan las 3 bisectrices.

c) Dibuja la circunferencia inscrita.

Observa que si el incentro equidista de los tres lados, es posible trazar una circunferencia cuyo radio sea igual a la distancia del incentro a alguno de los lados. Dicha circunferencia se conoce como: **circunferencia inscrita**.





126 En este caso únicamente hay que orientar el trabajo para que puedan ilustrar con precisión la característica de las bisectrices, demostrada en clase.

Indicador de logro

1.11 Demuestra que la distancia del incentro a cualquiera de los lados de un triángulo son congruentes.

Secuencia

En la clase 2.11 de la Unidad 8 de séptimo grado, fue definido el incentro de un triángulo a partir del trazo de la bisectriz; en esta clase se analizarán las características de las bisectrices de un triángulo, pero a diferencia de séptimo grado, en esta clase se demostrará haciendo uso de la congruencia de triángulos.

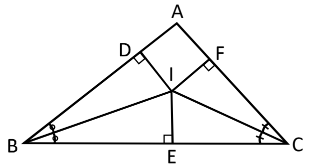
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que los triángulos que se forman con la bisectriz son congruentes para concluir que las distancias del punto de intersección de las bisectrices a los lados del triángulo son iguales.

Ⓡ Ilustrar la propiedad del punto de intersección de las bisectrices mediante la geometría del papel.

Fecha: **U6 1.11**

Ⓟ En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:



a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.

Ⓢ a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ID = IE (por la congruencia) ... (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, IE = IF (por definición de congruencia) ... (2)

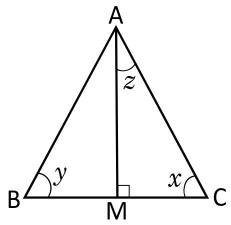
Por lo tanto, ID = IE = IF (por [1] y [2])
b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido. (Por literal a y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.
Observación: Ver imagen en el LT.

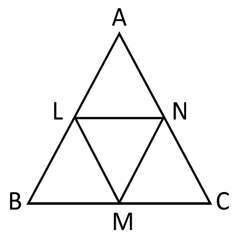
Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Practica lo aprendido

1. En el triángulo equilátero ABC, AM ⊥ BC, responde:

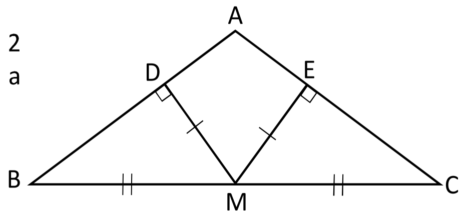


   a) ¿Cómo se llama el segmento AM? Altura.
   b) Determina el valor de los ángulos x, y, z.



2. En la siguiente figura L, M, N son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuestra que el ΔLMN es equilátero.

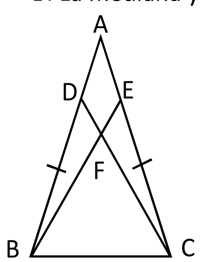
3. En el ΔABC, desde el punto medio M del lado BC se trazan 2 segmentos perpendiculares a AB y AC, e intersecan en D y E a AB y AC respectivamente, Si MD = ME, demuestra:
   a) ΔBDM ≅ ΔCEM
   b) ΔADM ≅ ΔAEM
   c) El ΔABC es isósceles.
   d) Si se traza el segmento DE, entonces DE ∥ BC.



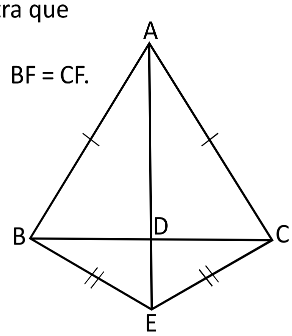
4. En los siguientes enunciados sobre triángulos determina si la condición A es necesaria y/o suficiente para B.
   a) A: Dos triángulos son congruentes.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.
      A es suficiente para B.
   b) En dos triángulos rectángulos:
      A: La hipotenusa y un ángulo agudo tienen igual medida. A es necesaria para B.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

1.13 Practica lo aprendido

1. En los siguientes enunciados acerca de triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.
   a) A: Equilátero; B: La mediana y la altura coinciden en cada vértice. A es necesaria y suficiente para B.
   b) A: La mediana y la bisectriz coinciden en cada vértice.
      B: La mediana y la mediatriz coinciden en cada vértice. A es necesaria y suficiente para B.



2. En un triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados de igual medida AB y AC. Si BD = CE. Demuestra que
   a) BE = CD
   b) Si F es el punto donde se cortan BE y CD entonces BF = CF.



3. En los triángulos isósceles ΔABC y ΔEBC, demuestra que AE ⊥ BC.
   Sugerencia: considera la mediatriz del segmento BC.

4. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

Indicador de logro

1.13 Resuelve problemas utilizando características de triángulos isósceles, equiláteros y rectángulos.

Solución de algunos ítems:

Clase 1.12

1. b) $\measuredangle x = \measuredangle y = 60°$, porque ΔABC es equilátero.
$\measuredangle x + \measuredangle z + 90° = 180°$
$60° + \measuredangle z + 90° = 180°$; entonces $\measuredangle z = 30°$.
Considerando los resultados, se puede concluir que el segmento AM además de ser altura es bisectriz, mediana y mediatriz.

2. AB = AC = BC, porque el ΔABC es equilátero.
BM = CM y BL = CN (por definición de punto medio).
∢MBL = ∢MCN (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔMCN, por criterio LAL.
Por tanto ML = MN (definición de congruencia) ... (1)

AL = LB y AN = BM (por definición de punto medio).
∢NAL = ∢LBM (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔLAN, por criterio LAL.
Por tanto, ML = LN (definición de congruencia) ... (2)
ML = MN = LN, de (1) y (2), por tanto ΔLMN es equilátero.

Clase 1.13

2.
a) BD = CE por hipótesis.
BC = CB por ser el mismo
∢CBA = ∢BCA (porque se oponen a lados iguales).
Entonces, ΔBCD ≅ ΔCBE, por criterio LAL.
BE = CD, por definición de congruencia.
b) BD = CE; ∢BDC = ∢BEC,
∢CBD = ∢BCE y ∢BCD = ∢CBE (por congruencia de triángulos BCD y CBE).
∢CBD = ∢CBE + ∢EBD y
∢BCE = ∢BCD + ∢DCE, como
∢CBD = ∢BCE, entonces
∢CBE + ∢EBD = ∢BCD + ∢DCE, pero
∢CBE = ∢BCD, por tanto,
∢EBD = ∢DCE, de donde se concluye que ΔBFD ≅ ΔCFE, por ALA.
Por tanto, BF = CF, por definición de congruencia de triángulos.

Tarea: páginas 131 y 132 del Cuaderno de Ejercicios.