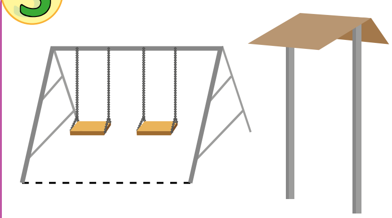
Lección 2 Paralelogramos

2.1 El paralelogramo

P

a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos de tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

S



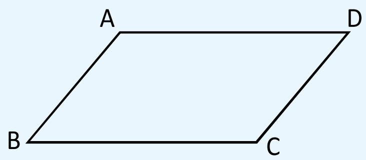
a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros, tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos; al igual que el techo del deslizadero.

b) Ejemplo 1. La pizarra es un paralelogramo.
Ejemplo 2. Los vidrios de las ventanas.
Ejemplo 3. El escritorio de la profesora o algunos pupitres.

C

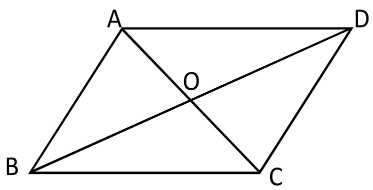
Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumple la condición de ser un paralelogramo.



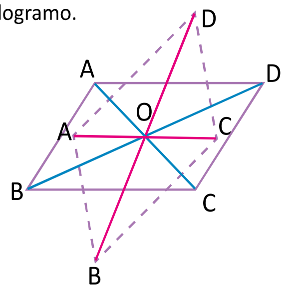
E

En el paralelogramo ABCD mostrado a continuación, tomando la intersección de las diagonales en el punto O, ¿cuáles pares de segmentos y ángulos son iguales?

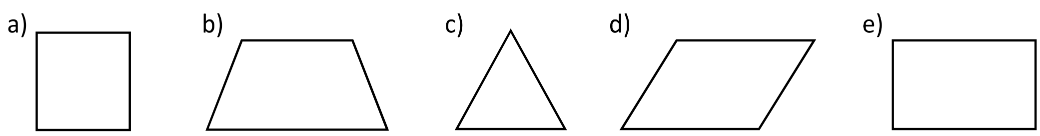


a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Aunque se gire un ángulo cualquiera con respecto al punto O como punto central, se mantiene el paralelogramo.



Identifica, en las siguientes figuras, cuáles son paralelogramos. Justifica cada caso.



Son paralelogramos: a), d) y e)   No son paralelogramos: b) y c)

Indicador de logro

2.1 Identifica las condiciones para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Secuencia

En cuarto grado de Educación Básica, fue definido el concepto de paralelogramo y sus características, para esta clase se recordarán esos conocimientos previos mediante la identificación de paralelogramos en el entorno, enlistando sus características.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar paralelogramos en un lugar dado y en el entorno en que está recibiendo la clase, pero además de identificarlos deberá justificar por qué considera que es un paralelogramo.

Ⓡ Identificar los elementos que son iguales en un paralelogramo, para ello se utilizará lo aprendido en Educación Básica y en las unidades 4 y 5 de octavo grado.

Solución de algunos ítems:

Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos, tienen lados paralelos dos a dos.

Las figuras de los literales b) y c) no son paralelogramos, pues el b) solo tiene un par de lados paralelos y el c) es un triángulo.

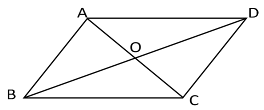
Posibles dificultades:
No comprender las relaciones de igualdad presentadas en el ejemplo adicional, en ese caso será necesario que el docente dé pistas o que asigne la revisión en parejas; para garantizar la comprensión puede pedir que justifiquen las igualdades presentadas en la solución.

Fecha: **U6 2.1**

Ⓟ a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos en tu alrededor donde encuentras paralelogramos.
Observación: Ver imagen en LT.

Ⓢ a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros pues tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos, al igual que los techos de los deslizaderos.
b) La respuesta en este caso dependerá del espacio donde estén los estudiantes.

Ⓔ



a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Ⓡ Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos.

Los literales b) y c) no son paralelogramos.

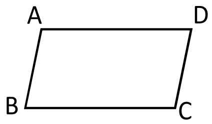
Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Características de los paralelogramos

P

Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.

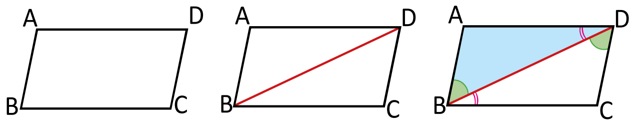


Observa que para demostrar que
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA
Es suficiente demostrar que ΔDBA ≅ ΔBDC, trazando la diagonal BD.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:



∢ABD =∢ CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de (1), (2) y BD es común).

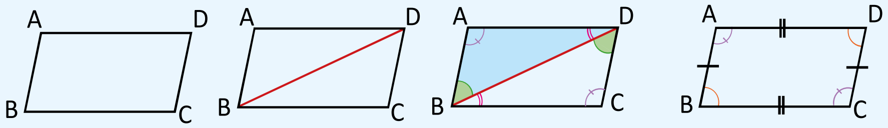
Entonces, AB = DC, AD = BC, ∢DAB =∢ BCD, ∢ABC =∢ CDA.

Observa que ∢ABC = ∢CDA porque en el paralelogramo se cumple que ∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADB.

Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180° (mitad de la suma de los ángulos interno de un cuadrilátero).

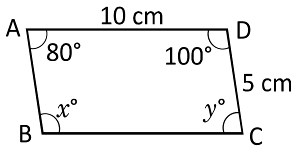
C

En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.



E

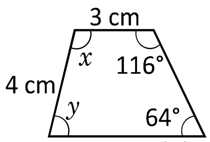
Encuentra los ángulos y lados según las características de los paralelogramos:



∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

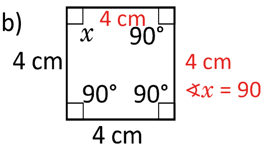
1. Dadas las siguientes figuras, explica si son paralelogramos según sus lados y ángulos, encuentra las medidas de lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.

a)

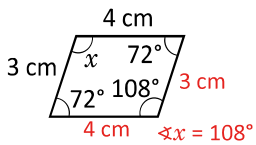


No es paralelogramo

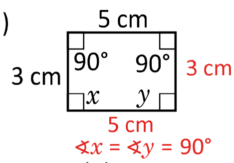
b)



c)

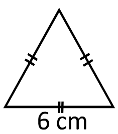


d)

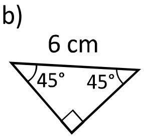


2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirse forman un paralelogramo y explica por qué son paralelogramos.

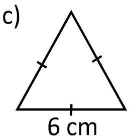
a)



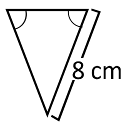
b)



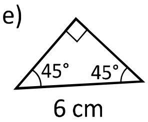
c)



d)



e)



Forman paralelogramos: a) y c); b) y e)

Indicador de logro

2.2 Caracteriza los paralelogramos estableciendo la relación entre sus lados y ángulos.

Secuencia

En la clase anterior se recordó el concepto de paralelogramo y algunas características; en esta clase se utilizará la congruencia de triángulos para demostrar la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que en un paralelogramo, sus lados opuestos son iguales así como los ángulos opuestos y además los ángulos consecutivos son suplementarios.

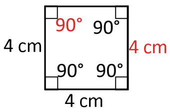
Ⓡ Utilizar el resultado de la demostración para determinar la medida de los ángulos de un paralelogramo.

Solución de algunos ítems:

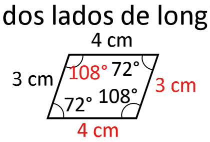
1.

a) No es paralelogramo.

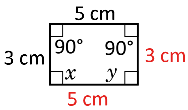
b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y $\sphericalangle x = 90°$.



c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y $\sphericalangle x = 108°$.

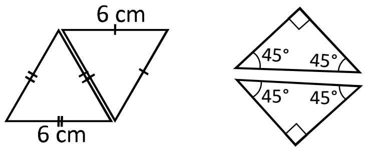


d) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 5 cm y dos lados de longitud 3 cm y sus cuatro ángulos miden 90°.



2.

Forman paralelogramos: a) y c); b) y e).

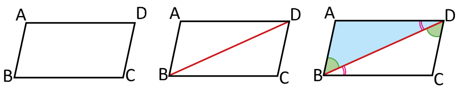


Porque los lados opuestos son paralelos, ya que los ángulos alternos internos son iguales.

Fecha: **U6 2.2**

Ⓟ Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.



Ⓢ Por hipótesis se tiene que AB ∥ DC y AD ∥ BC.
Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

$\Delta DBA \cong \Delta BDC$ (por criterio ALA, de [1], [2] y BD es común). Entonces, AB = DC, AD = BC, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.
Finalmente, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$.

Ⓔ $\sphericalangle x = 100°$ y $\sphericalangle y = 80°$ porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado. AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

Ⓡ a) No es paralelogramo

b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y $\sphericalangle x = 90°$

c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y además $\sphericalangle x = 108°$.

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Diagonales de un paralelogramo

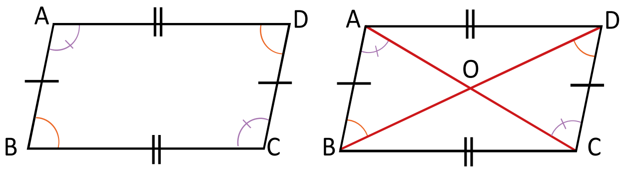
P

Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Recuerda que un cuadrilátero tiene 2 diagonales.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.



Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)

∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(2)

∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(3)

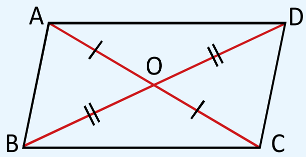
Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

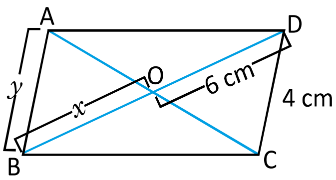
Para demostrar que OA = OC y OB = OD es suficiente demostrar que ΔOAB ≅ ΔOCD.

C

En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



1. Escribe qué característica del paralelogramo ABCD se debe utilizar para determinar el valor de x y y.



Para determinar el valor de y se utiliza la característica del paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.

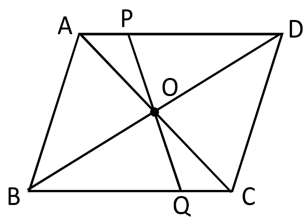
Para determinar el valor de x se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

2. En el siguiente dibujo las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en el punto O y el segmento PQ pasa por el punto O. Completa la demostración de que PO = QO colocando en los espacios en blanco lo que corresponde:

CO = AO (por propiedad de los paralelogramos) . . .(1)

∢QCO = ∢PAO (por ser ángulos alternos internos entre las paralelas) . . .(2)

∢QOC = ∢POA (son ángulos opuestos por el vértice) . . . (3)



ΔAOP ≅ ΔCOQ (por criterio de congruencia ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, PO = QO (Por definición de congruencia).

Indicador de logro

2.3 Caracteriza las diagonales de un paralelogramo.

Secuencia

Anteriormente se demostró la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo; en esta clase se demuestra que al trazar las dos diagonales del paralelogramo, estas se intersecan en su punto medio.

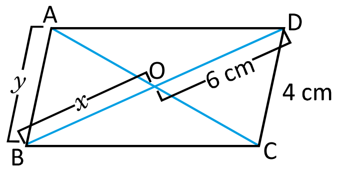
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo, es el punto medio de ambas, por lo que cada diagonal queda dividida en dos segmentos iguales.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para determinar la medida de dos segmentos indicados; mientras que en el numeral 2 complementar una demostración utilizando características de los paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

1.



Para determinar el valor de x, se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

Para determinar el valor de y, se utiliza la característica de paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.

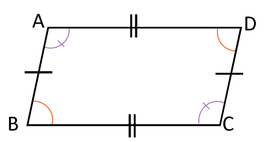
AB = CD (Lados opuestos del paralelogramo)
y = 4 cm

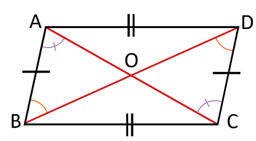
Posibles dificultades:
En el caso que algunos estudiantes no puedan complementar la demostración, en ese caso se puede indicar el trabajo en parejas.

Fecha: **U6 2.3**

Ⓟ Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Ⓢ

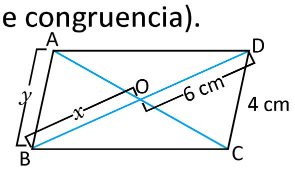




Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.
Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:
AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)
∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (2)
∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (3)

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de [1], [2] y [3]).
Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

Ⓡ 1.



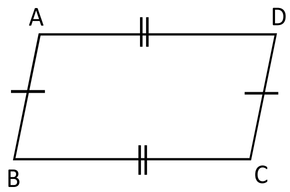
BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

AB = CD (Lados opuestos del paralelo
y = 4 cm gramo)

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Para demostrar que AD∥BC y AB∥DC es suficiente, demostrar que ΔABD ≅ ΔCDB, trazando la diagonal BD.

S Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD≅ ΔCDB (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común).

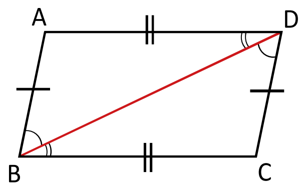
Entonces, ∢ABD = ∢CDB (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

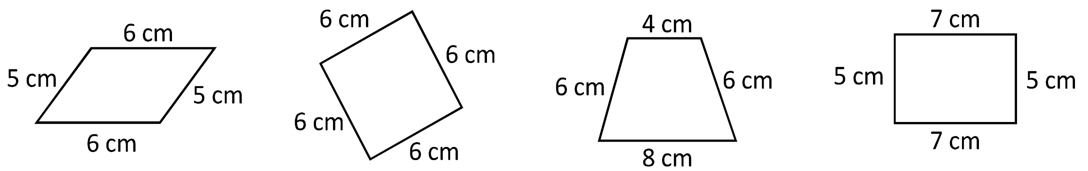


C Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de "en un paralelogramo los pares de lados opuestos son de igual medida".

Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

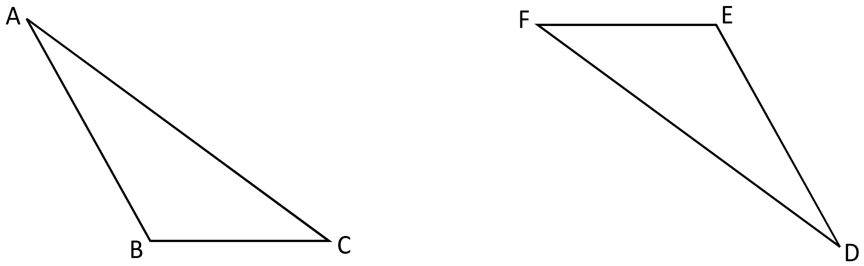
Unidad 6

1. En los siguientes cuadriláteros describe los que cumplen la condición de paralelogramos.



Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.

2. ΔABC y ΔDEF son congruentes. Explica por qué al unir estos triángulos se forma un paralelogramo.



Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.

Indicador de logro

2.4 Demuestra la relación que debe existir entre los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo.

Secuencia

En la clase 2.2, se demostró que un paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales; en esta clase se demostrará el recíproco, es decir, si se tiene un cuadrilátero cuyos pares de lados son iguales; entonces es un paralelogramo.

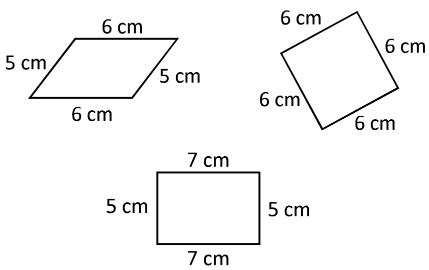
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Realizar la demostración utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos entre paralelas.

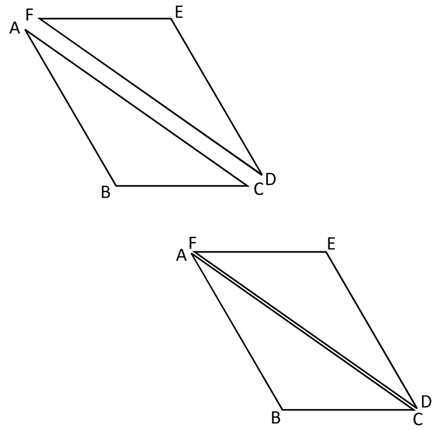
Ⓡ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre paralelogramos para identificar cuáles de los cuadriláteros dados cumplen con las condiciones para ser paralelogramos; mientras que en el numeral 2, justificar por qué los triángulos forman un paralelogramo, esto siempre utilizando las características de los paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

1. Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.



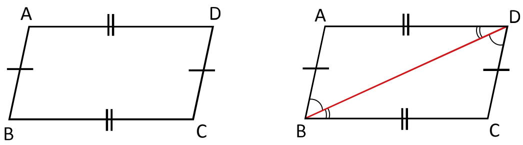
2. Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.



Fecha: **U6 2.4**

Ⓟ Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

Ⓢ



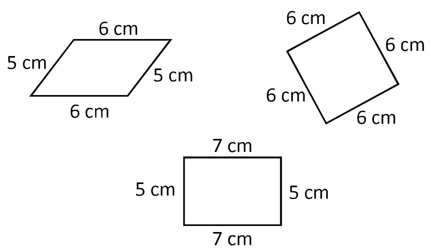
Se traza la diagonal BD.
Entonces, ΔABD ≅ ΔCDB. (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común)
Entonces, ∢ABD = ∢CDB. (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Ⓡ Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.



Tarea: página 136 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.

Estableciendo los puntos E y F sobre la prolongación de los lados BC y CD respectivamente. Para demostrar que AB ∥ DC y BC ∥ AD es suficiente, demostrar que ∢ABC = ∢DCE, ∢BCD = ∢ADF.

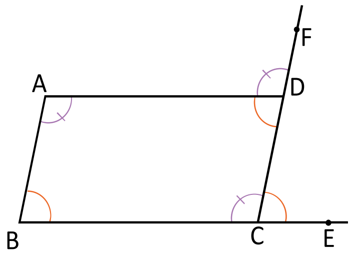
S

Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;

2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA).

Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) . . . (1)

También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) . . . (2)



Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando (2) de (1)).

Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).

De la misma manera se procede para demostrar que BC ∥ AD.

Una vez se realiza la demostración se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

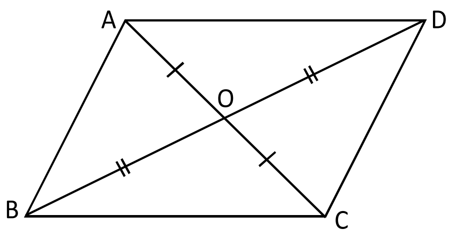
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C

Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero entonces es un paralelogramo, este es el recíproco del teorema: "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

Ser paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio es un paralelogramo.



Es suficiente comprobar que los lados opuestos son de igual medida para demostrar que ABCD es paralelogramo. Para ello, se puede pensar en los cuatro triángulos que se forman dentro del paralelogramo.

Indicador de logro

2.5 Demuestra que para que un cuadrilátero sea paralelogramo sus ángulos opuestos deben ser iguales.

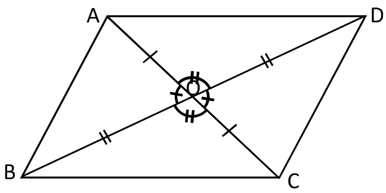
Secuencia

En la clase anterior se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo; en esta clase se demuestra que si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, entonces es un paralelogramo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelogramo, utilizando la hipótesis y los ángulos suplementarios.

Ⓡ Demostrar el recíproco del resultado de la clase 2.3, como una condición para que un cuadrilátero sea paralelogramo.



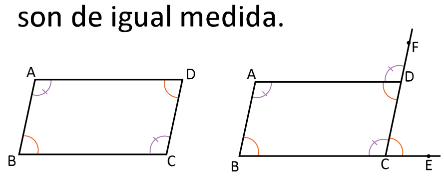
AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)
∢AOD = ∢COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD ≅ ΔCOB, por criterio LAL, de (1) y (2).
Por tanto, AD = CB; definición de congruencia ... (3)
∢AOB = ∢COD; por ser opuestos por el vértice ... (4)

Entonces, ΔAOB ≅ ΔCOD; por criterio LAL, de (1) y (4).
Por tanto, AB = CD; definición de congruencia ... (5)
Por (3) y (5) se concluye que el cuadrilátero ABCD, es un paralelogramo por tener sus lados opuestos iguales.

Posibles dificultades:
En caso de que algunos estudiantes no puedan hacer la demostración, se puede indicar el trabajo por parejas y sugerirles que lean la pista.

Fecha: **U6 2.5**

Ⓟ Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.
Ⓢ



Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;
2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA)
Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) ... (1)
También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) ... (2)

Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando [2] de [1])
Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).
De la misma manera, BC ∥ AD. Luego concluir que los lados opuestos son paralelos, y por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Ⓡ AO = CO y BO = DO; por hipótesis, ... (1)
∢AOD = ∢COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD ≅ ΔCOB (por criterio LAL, de (1) y (2); por tanto, AD = CB.
De forma análoga se demuestra que AB = CD.

Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

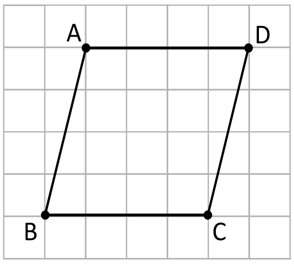
2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

P

Dibuja en tu cuaderno la figura, para ello realiza los siguientes pasos; luego responde:

1. Traza un segmento AD utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud.
2. Traza otro segmento BC utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud, 4 líneas más abajo de la primera.
3. Traza los segmentos AB y CD.

¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.



S

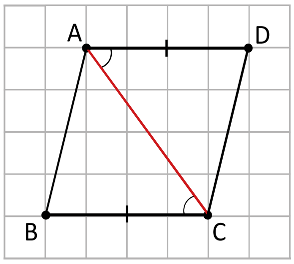
Por los pasos que se siguieron para construir la figura AD = BC = 4 cm y AD∥BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.

Trazando la diagonal AC.

Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).

Luego, AB = CD (por la congruencia).

Por lo tanto, ABCD es paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).



C

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

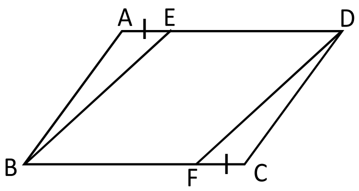
E

Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestra que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

ED ∥ BF

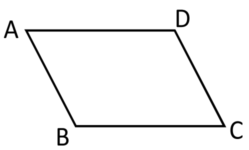
ED = AD – AE = BC – FC = BF

Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

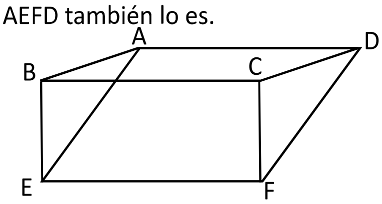


1. En el cuadrilátero ABCD determina cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

   a) BA = AD, BC = CD No
   b) AB = DC, AD = BC Sí
   c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA Sí



2. En el dibujo los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestra que el cuadrilátero AEFD también lo es.



Unidad 6

Indicador de logro

2.6 Enlista las condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Secuencia

En las dos clases anteriores, se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos o sus ángulos opuestos congruentes, entonces es un paralelogramo; en esta clase, se busca consolidar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramo, esto mediante una demostración a partir de una construcción bajo ciertas condiciones.

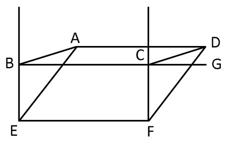
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un cuadrilátero y luego demostrar que es un paralelogramo, esto con el objeto de enlistar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para identificar cuáles de las condiciones dadas son suficientes para que el cuadrilátero sea paralelogramo.

Solución de algunos ítems:

ítem 2:



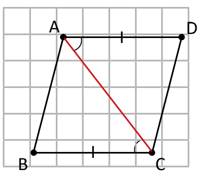
BC = DA y BC = EF, por tanto DA = EF.
Por ser lados de un paralelogramo ... (1)
Al mismo tiempo BC ∥ DA y BC ∥ EF, por tanto DA ∥ EF.
AEFD es un paralelogramo por tener un par de lados opuestos iguales.

Posibles dificultades:
En el caso de que no logren hacer la demostración del numeral dos de la fijación; se pueden dar pistas para orientarles.

Fecha: **U6 2.6**

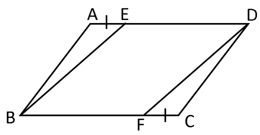
Ⓟ Construir la figura, siguiendo los pasos indicados en el LT.
¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.

Ⓢ Siguiendo los pasos indicados, se obtiene la figura AD = BC = 4 cm y AD ∥ BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.



Trazando la diagonal AC.
Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).
Luego, AB = CD (por la congruencia).
Por lo tanto, ABCD es paralelogramo.

Ⓔ



ED ∥ BF
ED = AD – AE = BC – FC = BF
Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

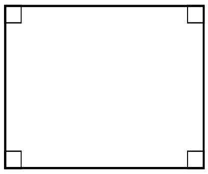
Ⓡ 1. a) BA = AD, BC = CD. No
b) AB = DC, AD = BC. Sí, demostrada en clase 2.4.
c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA; sí, demostrada en clase 2.5.

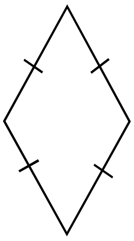
Tarea: página 138 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Características del rectángulo y el rombo

P

Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.





Definición de un rectángulo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos congruentes.

Definición de rombo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

S

- Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.
- Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

C

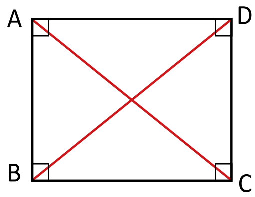
El rectángulo es un paralelogramo por sus ángulos y por sus lados, el rombo también lo es.

E

Demuestra los siguientes resultados sobre las diagonales del rombo y el rectángulo.

a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Para demostrar que AC = DB, es suficiente demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.



1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.

   Entonces $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (por criterio LAL, AB = DC, BC es común y $\measuredangle ABC = \measuredangle DCB = 90°$).

   Por lo tanto, AC = BD (por la congruencia).

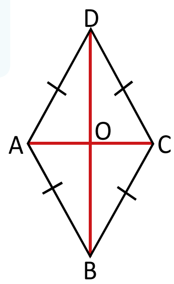
2. Trazando las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y llamando O al punto donde se intersecan.

   Entonces, ΔACD es isósceles (por ser rombo DA = DC).

   Para demostrar que BD ⊥ AC, es suficiente demostrar que DO es la altura de ΔACD.

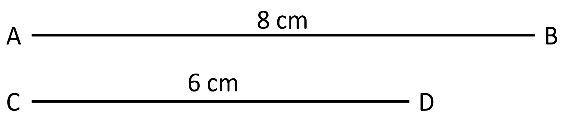
   Luego, DO es mediatriz de ΔACD (por ser paralelogramo las diagonales se intersecan en el punto medio).

   Por lo tanto, DB⊥AC (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediatriz, según la clase 1.3).



1. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

2. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con los segmentos AB y CD.



Indicador de logro

2.7 Caracteriza un rectángulo y un rombo.

Secuencia

En la lección 2 de esta unidad, se han demostrado las propiedades de los paralelogramos y se han establecido las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo; en esta clase, se demostrará que un rombo y un rectángulo también son paralelogramos utilizando las condiciones de la clase anterior.

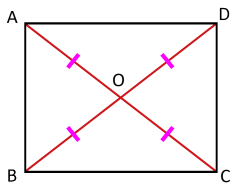
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo para demostrar que el rombo y el rectángulo son paralelogramos.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar la congruencia de triángulos para demostrar que si las diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, entonces es un rectángulo; mientras que en el numeral 2, es únicamente una construcción con regla y/o compás.

Solución de algunos ítems:

1.

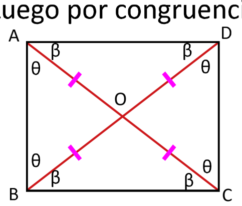


AC = BD; AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)

∢COD = ∢AOB y ∢BOC = ∢DOA; por ser opuestos por el vértice ... (2)

Entonces, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ y $\Delta BOC \cong \Delta DOA$ y son isósceles; por criterio LAL, de (1) y (2).

Luego por congruencia de triángulos se tiene que:



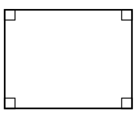
$4\theta + 4\beta = 360°$

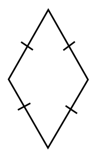
$\theta + \beta = 90°$

Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Fecha: **U6 2.7**

Ⓟ Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos.

Ⓢ  **Rectángulo:** tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.

 **Rombo:** tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

Ⓔ Demuestra:

a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.

b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

1. Trazando AC y DB en el rectángulo ABCD.
   Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, por LAL
   Por lo tanto, AC = BD. (Por la congruencia).

2. Sea O el punto donde se intersecan las diagonales. Entonces, ΔACD es isósceles. (Por ser rombo DA = DC).

Luego, DO es mediatriz de ΔACD.

Por lo tanto, $DB \perp AC$ (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediana y la altura).

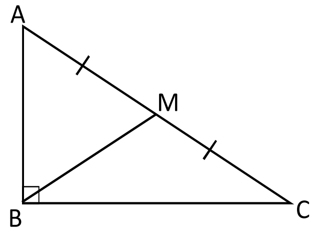
Ⓡ Copiar la solución del apartado “resolución de ítems”.

Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

P

Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Recuerda que en un rectángulo las diagonales se intersecan en su punto medio.

S

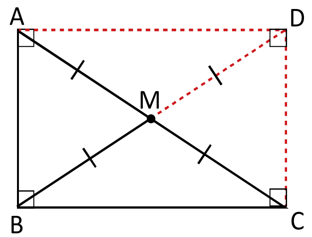
Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD, que se intersecan en el punto medio, por ser paralelogramo M.

BM = $\frac{1}{2}$ BD (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (2)

Además AC = BD (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC (de (1), (2) y (3)).



C

En todo triángulo rectángulo, el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, tiene una longitud congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

E

¿El cuadrado es un paralelogramo?
Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes entonces, los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

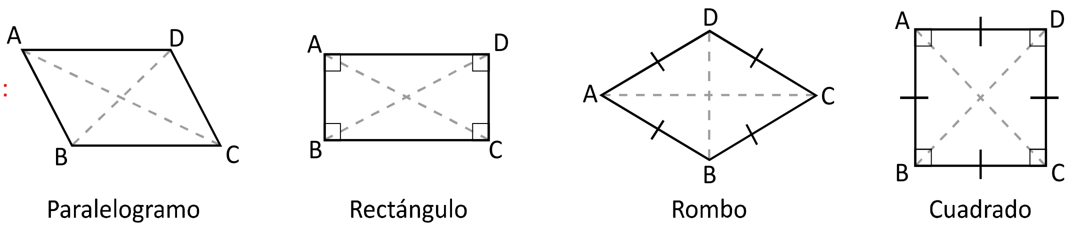
Recuerda que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y 4 lados congruentes.

1. ¿Cuáles son las condiciones que se deben adicionar para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado? Escoge del literal **a** al literal **d** las condiciones correspondientes.

a) ∢A = 90° b) AB = BC c) AC = BD d) AC⊥BD

Rectángulo:
a) o c)

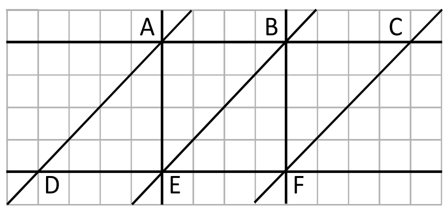
Rombo:
b) o d)



Cuadrado:
a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)

2. En la siguiente figura identifica los paralelogramos que se forman, luego clasifícalos según sean rectángulos, cuadrados, rombos, o solamente paralelogramos.

ADEB, paralelogramo
BEFC, paralelogramo
ADFC, paralelogramo
AEFB, cuadrado



Unidad 6

Indicador de logro

2.9 Utiliza las características de las diagonales de un rectángulo para demostrar relaciones con elementos de un triángulo rectángulo.

Secuencia

En la clase anterior se demostraron algunas características de los triángulos rectángulos; ahora se demostrará que el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de ella, es congruente con la mitad de la longitud de la hipotenusa.

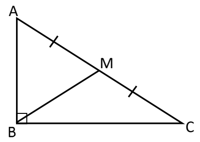
Propósito

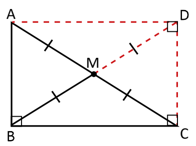
Ⓟ, Ⓢ Demostrar una de las propiedades de los triángulos rectángulos, tomando como recurso la construcción de un rectángulo y las características de sus diagonales.

Ⓡ Identificar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser rectángulo, rombo o cuadrado, considerando los recursos dados.

Fecha: **U6 2.8**

Ⓟ Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.





Ⓢ Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD.

BM = $\frac{1}{2}$ BD. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (2)

Además AC = BD. (ABCD es un rectángulo) . . . (3)
Por lo tanto, MA = MB = MC. De (1), (2) y (3).

Ⓔ Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

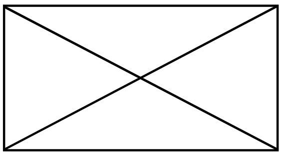
Ⓡ 1. Rectángulo: a) o c)
Rombo: b) o d)
Cuadrado: a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)

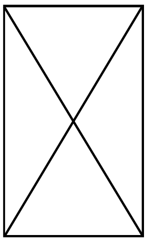
Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Recíproco de características de rectángulos

P

¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero no sean rectángulos?





Piensa en el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales".

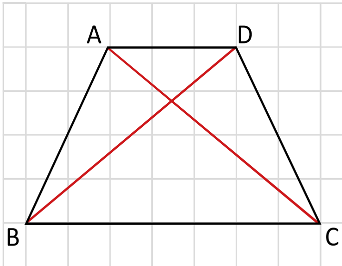
El trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

S

Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ para determinar que AC = DB.

Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, no significa que el cuadrilátero es rectángulo, puede ser otro tipo de cuadrilátero.



C

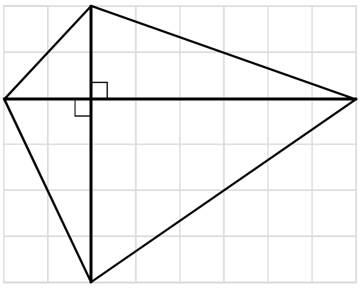
El recíproco del enunciado "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo propuesto.

Para demostrar la veracidad del recíproco del teorema, en este caso, se utilizó un **contraejemplo**.

En este caso como no se cumple, también se puede decir que ser rectángulo es una condición **suficiente** para que las diagonales sean congruentes, pero **no es necesaria.**

E

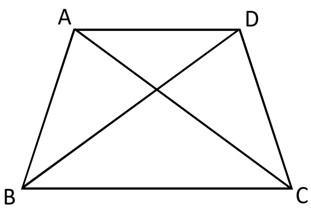
¿Un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan perperdicularmente, es un rombo?



Esto no es cierto ya que el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, pero no es un rombo, ya que sus lados son desiguales.

Este enunciado es el recíproco de "en un rombo las diagonales se intersecan perperdicularmente".

1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles que no es un paralelogramo son congruentes.



2. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

Indicador de logro

2.9 Analiza la veracidad del recíproco de las características de los rectángulos.

Secuencia

En la clase 2.7, se demostró que un rectángulo tiene sus diagonales congruentes y se cortan en el punto medio; en esta clase se demuestra que si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, no siempre es un rectángulo.

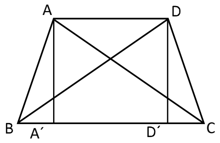
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales", no se cumple, mediante la presentación de un contraejemplo.

Ⓔ En el numeral 1, demostrar que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes, este es el contraejemplo usado en el Problema inicial; mientras que en el numeral 2, demostrar la relación que existe entre las diagonales de un rombo.

Solución de algunos ítems:

1.



Se trazan dos alturas AA´ = DD´ ... (1)
AB = DC; por hipótesis ... (2)
∢AA´B = ∢DD´C = 90°.

Entonces, ΔAA´B ≅ ΔDD´C; por tener la hipotenusa y un cateto igual.

∢ABC = ∢DCB; por definición de congruencia ... (3)
BC = CB; por ser el mismo ... (4)

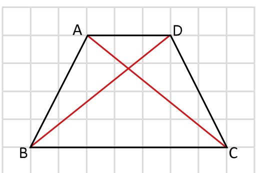
De donde se concluye que AC = BD por definición de congruencia.

Fecha: **U6 2.9**

Ⓟ ¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero que no sean rectángulos?

Ⓢ Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).

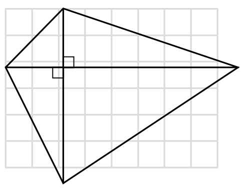
Se puede demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB para determinar que AC = DB.



Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes no siempre es rectángulo.

Ⓔ



Esto no siempre es cierto, por ejemplo el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, y no es un rombo.

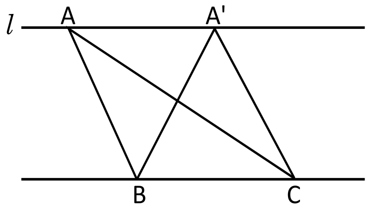
Ⓡ 1. La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

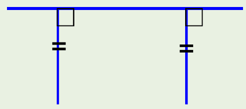
2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

P

En la siguiente figura, la línea l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.

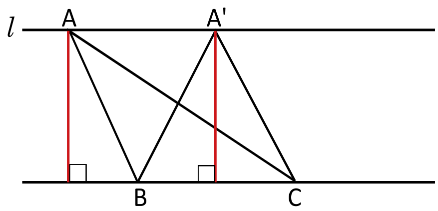


En un par de líneas paralelas, las líneas perpendiculares trazadas desde dos puntos de una línea paralela a la otra, tienen la misma longitud.



S

Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.



Estos triángulos tienen la misma base y al determinar la altura a cada uno de ellos, las dos son congruentes, dado que están entre dos rectas paralelas.

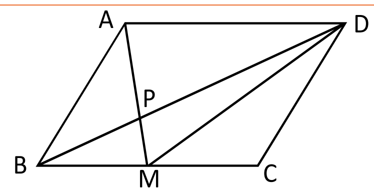
Por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

C

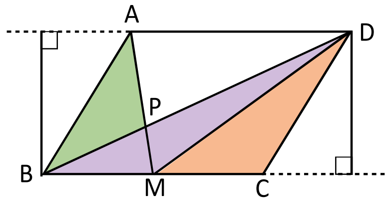
Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra, tienen igual longitud.

E

ABCD es un paralelogramo; M es el punto medio del segmento BC, P el punto de intersección del segmento BD y AM. Establece cuáles son los triángulos que tienen la misma área.

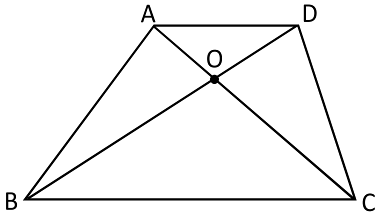


Los triángulos ABM, DBM y DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD y BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura, dada la propiedad que entre líneas paralelas los segmentos perpendiculares tienen la misma longitud.



También se puede decir que las áreas de los triángulos ABP y DMP son iguales, puesto que las áreas de ABM y DBM son iguales y se les está restando la misma porción de área a ambos (MPB).

Si se establece como punto O la intersección de diagonales en el trapecio ABCD con AD∥BC, demuestra que las áreas de los triángulos AOB y DOC son iguales.



Unidad 6

137

Indicador de logro

2.10 Determina la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre rectas paralelas.

Secuencia

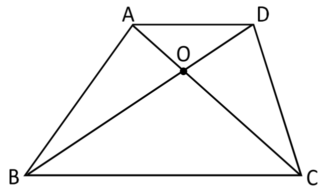
En las clases anteriores se ha trabajado con características de los cuadriláteros; en esta clase, se establecerá la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas, tomando como recurso el área de dos triángulos de igual base y altura.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas tienen igual longitud.

Ⓔ Demostrar que las áreas de dos triángulos son iguales, utilizando como recurso el resultado de esta clase y el de la anterior.

Solución de algunos ítems:



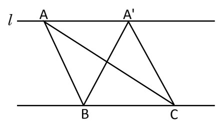
Los triángulos ABC y DCB tienen igual área porque tienen igual base y altura.

(ΔABC) = (ΔAOB) + (ΔOCB) ... (1)
(ΔDCB) = (ΔDOC) + ΔOCB ... (2)

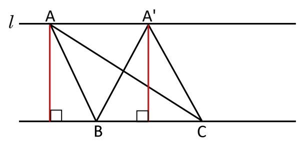
Como ΔABC y ΔDCB tienen igual área, entonces de (1) y (2) se obtiene que los triángulos AOB y DOC tienen igual área.

Fecha: **U6 2.10**

Ⓟ En la siguiente figura las líneas l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.



Ⓢ



Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.

Tienen igual base y alturas congruentes, por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

Ⓔ Los triángulos ABM, DBM, DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD, BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura.

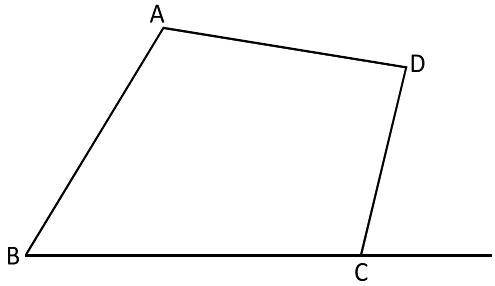
Ⓡ La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

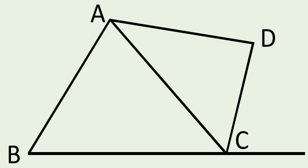
2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

P

En el cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?



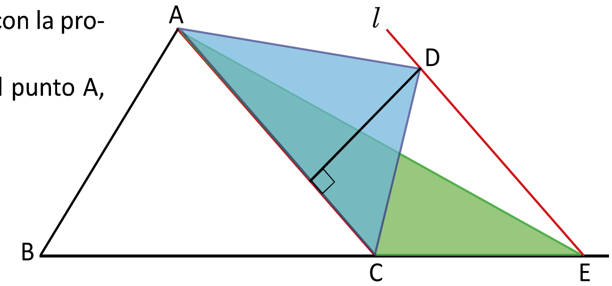
Puedes intentar encontrar el triángulo que tenga la misma área que el triángulo ACD, relacionando rectas paralelas y áreas.



S

Para elaborar el ΔABE que tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, puedes seguir los pasos:

1. Trazar la diagonal AC.
2. Trazar la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se intersecta con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.



Con esta construcción se tiene que área de ΔDAC = área de ΔEAC (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = área de ΔABC + área de ΔDAC.
Área de ΔABE = área de ΔABC + área de ΔEAC.

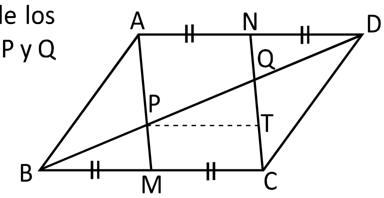
Por lo tanto, área de ΔABE = área del cuadrilátero ABCD (área de ΔDAC = área de ΔEAC).

C

Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

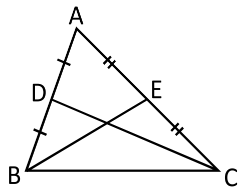
1. En un paralelogramo ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados BC y AD, el segmento BD intersecta a AM y CN en los puntos P y Q respectivamente, si BQ = 12, calcula la longitud de QD.

   Puedes establecer el punto T de modo que PT sea paralelo a MC.



2. En el triángulo ABC los puntos medios de los lados AB y AC se establecen como D y E respectivamente, se traza el segmento DE paralelo a BC y DE = $\frac{1}{2}$BC. Demuestra:

   a) El área de los triángulos DBE, ADE, DCE es igual.
   b) Dos veces el área del triángulo DBE es igual al área del triángulo ABE e igual al triángulo EBC.



Indicador de logro

2.11 Resuelve problemas de triángulos y paralelogramos aplicando la relación entre rectas paralelas y áreas.

Secuencia

Ya se ha demostrado que los triángulos que se forman entre dos paralelas y que tienen igual base, tienen igual área; en esta clase, se utilizará el resultado de la clase anterior para encontrar un triángulo que tenga igual área que un cuadrilátero dado, realizando trazos auxiliares.

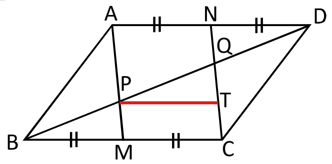
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que existe un triángulo de igual área al cuadrilátero dado, construyendo trazos auxiliares, que permitan utilizar el resultado de la clase anterior.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre ángulos y triángulos para determinar la medida del segmento indicado.

Solución de algunos ítems:

1.



BM = MC, por hipótesis y MC = PT, por construcción, por tanto BM = PT ... (1)
∢PBM = ∢QPT; por ser correspondientes entre paralelas ... (2)

∢BMP = ∢MCT y ∢MCT = ∢PTQ; por ser correspondientes entre paralelas, entonces ∢BMP = ∢PTQ ... (3)
Entonces, ΔBMP ≅ ΔPTQ; por ALA de (1), (2) y (3).

Por tanto, BP = PQ de donde se tiene que cada uno mide 6 ... (4)
ΔABM ≅ ΔCDN; por LLL, pues
AB = CD, AM = CN y BM = DN ... (5)

Entonces ∢BMP = ∢DNQ, definición de congruencia ... (6)
Además ∢PBM = ∢NDQ, por ser alternos internos entre paralelas ... (7)

Entonces, ΔBMP ≅ ΔDNQ; por ALA de (5), (6) y (7).

Por tanto, BP = QD = 6, por definición de congruencia.

Fecha: **U6 2.11**

Ⓟ En el cuadrilátero, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?

Ⓢ **Observación:** Ver imágenes en LT.

1. Trazar la diagonal AC.
2. Se traza la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se interseca con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.

Área de ΔDAC = Área de ΔEAC, (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = Área de ΔABC + Área de ΔDAC.

Área de ΔABE = Área de ΔABC + Área de ΔEAC.

Ⓡ Por lo tanto, Área de ΔABE = Área del cuadrilátero ABCD (Área de ΔDAC = Área de ΔEAC).

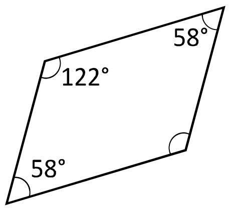
1. BP = QD = 6, (ver resultado completo en solución del primer ítem).

Tarea: página 143 del Cuaderno de Ejercicios.

2.12 Practica lo aprendido

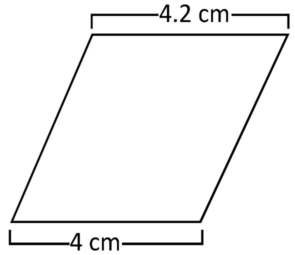
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden ser paralelogramos? Menciona qué condición aprendida en la clase 6 de esta lección se aplica.

Paralelogramo



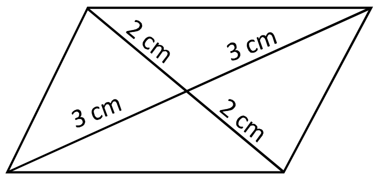
Dos ángulos consecutivos son suplementarios.

No es paralelogramo



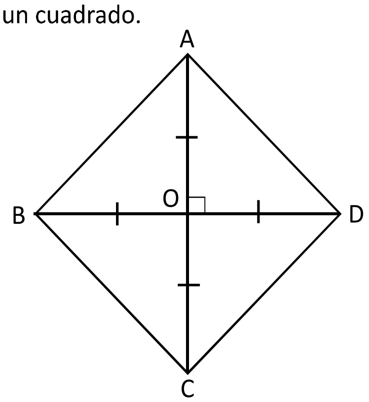
Dos lados opuestos no son congruentes.

Paralelogramo

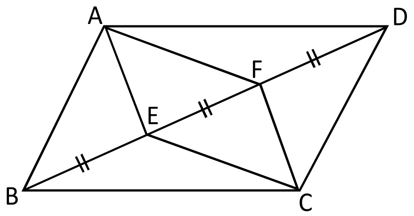


Las diagonales se intersecan en el punto medio.

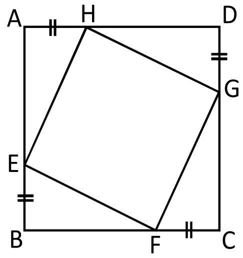
2. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado.



3. En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y BE = EF = FD. Demuestra que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



4. ABCD es un cuadrado y los lados señalados son congruentes. Demuestra que EFGH también es un cuadrado.



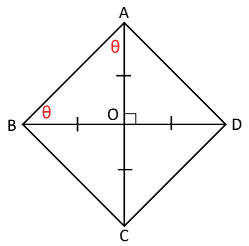
Unidad 6

Indicador de logro

2.13 Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

2.



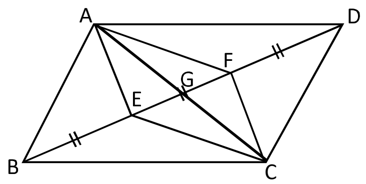
DO = BO y AO lo comparten.
$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOA = 90°$.
Entonces $\Delta BOA \cong \Delta DOA$, por criterio LAL.
Por tanto, AB = DA (definición de congruencia) ... (1)

AO = CO y DO lo comparten.
$\sphericalangle DOC = \sphericalangle DOA = 90°$.
Entonces $\Delta DOC \cong \Delta DOA$, por criterio LAL.
Por tanto, CD = DA (definición de congruencia) ... (2)
BO = DO y CO lo comparten.
$\sphericalangle BOC = \sphericalangle DOC = 90°$.

Entonces $\Delta BOC \cong \Delta DOC$, por criterio LAL.
Por tanto, BC = CD (definición de congruencia) ... (3)
AB = CD = BC = DA; por (1), (2) y (3).

Como los 4 triángulos BOA, DOA, DOC y BOC son congruentes isósceles, entonces se cumple que
$8\theta = 180°(4 - 2)$.
$8\theta = 360°$, de donde $\theta = 45°$; luego
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90° = 2\theta$.

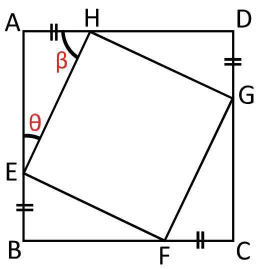
3.



Sea G el punto de intersección de AC y BD,
AG = CG y EG = BG − BE = DG − DF = FG por características de las diagonales del paralelogramo.

Por lo tanto, el cuadrilátero AECF, es un paralelogramo.

4.

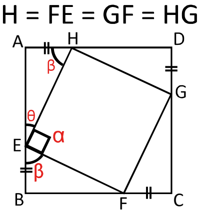


DA = AB
DH + HA = AE + EB; pero HA = EB.
Entonces DH = AE ... (1)
DA = BC
DH + HA = BF + FC; pero HA = FC.

Entonces DH = BF ... (2)
CD = DA
CG + GD = DH + HA; pero GD = HA.
Entonces CG = DH ... (3)
AE = DH = BF = CG; por (1), (2) y (3).
Entonces $\Delta AHE \cong \Delta BEF \cong \Delta CFG \cong \Delta DGH$, por LAL.

De donde se tiene EH = FE = GF = HG.

$$\theta + \beta = 90°$$
$$\theta + \beta + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 90°$$

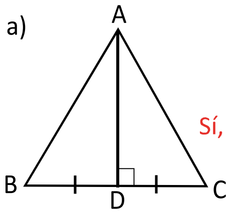


Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un cuadrado, pues tiene sus lados iguales y sus ángulos miden 90°.

Tarea: página 144 del Cuaderno de Ejercicios.

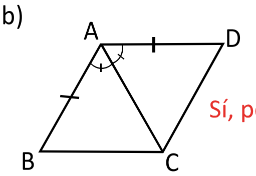
2.13 Practica lo aprendido

1. Según la información mostrada, determina si los triángulos indicados son congruentes o no. Explica tu respuesta.

a)


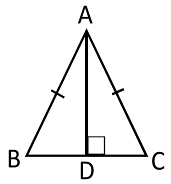
Sí, por criterio LAL.

ΔABD y ΔACD

b)


Sí, por criterio LAL.

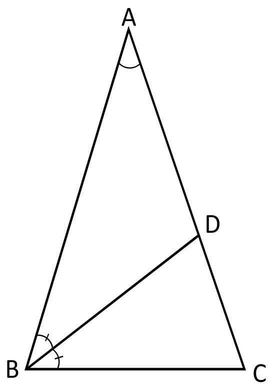
ΔABC y ΔACD

c)


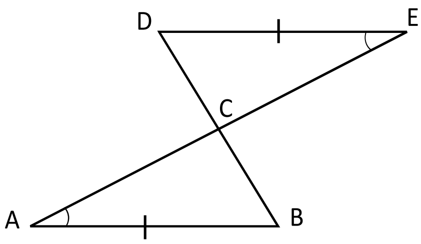
ΔABD y ΔACD

Sí, es triángulo rectángulo y tiene un cateto y la hipotenusa iguales.

2. En el ΔABC, AB = AC y ∢CAB=36°. DB es la bisectriz del ∢ABC que corta el lado AC en el punto D. Demuestra que BC = BD = DA.

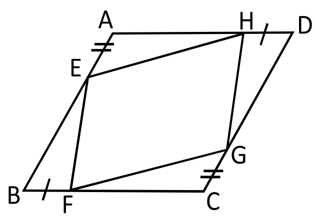


3. En la siguiente figura DE = AB y ∢DEC= ∢BAC, demuestra que AD = BE.



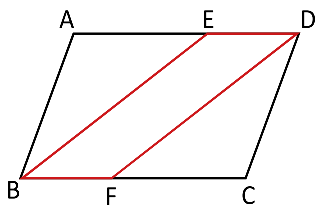
4. Se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

   [Sugerencia: Observa que AH = CF, deduce que ΔAEH ≅ ΔCGF]



5. En la figura el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, se tiene que BE y DF son bisectrices de ∢ABC y ∢CDA, respectivamente.

   Demuestra que BE ∥ DF. Utiliza la condición 3 de los paralelogramos.



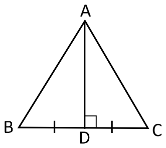
Indicador de logro

2.13 Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

1.

a)

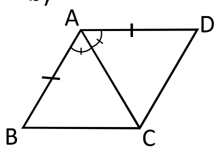


∢CDA = ∢BDA = 90°

BD = CD y AD lo comparten.

Entonces ΔCDA ≅ ΔBDA, por criterio LAL.

b)

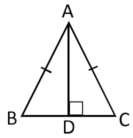


∢BAC = ∢DAC

AB = DA y AC lo comparten.

Entonces ΔBAC ≅ ΔDAC, por criterio LAL.

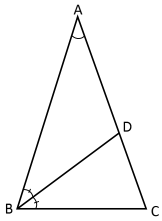
c)



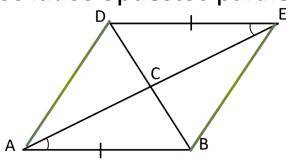
AB = AC y AD lo comparten.

Entonces ΔDAB ≅ ΔDAC, por tener la hipotenusa y un cateto igual.

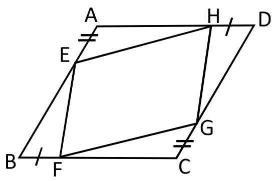
2. Como AB = AC, ∢ABC = ∢ACB. ∢ABC + ∢ACB = 180° − ∢A = 144°; entonces ∢ABC = ∢ACB = 72° y ∢ABD = 36° = ∢A, por propiedad de bisectriz, luego BD = DA ... (1)
   Además ∢BDC = 180° − 36°− 72° = 72° = ∢BCD, de donde se obtiene que BD = BC ... (2)
   Por tanto, BD = DA = BC.



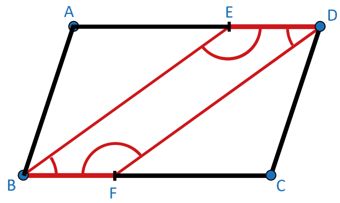
3. Como ∢DEC = ∢BAC, DE ∥ AB; además DE = AB.
   Por tanto, el cuadrilátero ABED, es un paralelogramo, tiene dos lados opuestos paralelos e iguales.



4. AD = BC, por ser lados opuestos del paralelogramo; entonces AH = AD − HD = BC − FB = CF.
   AE = CG por hipótesis y ∢A = ∢C, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.
   De donde se tiene que ΔAEH ≅ ΔCGF.
   Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.



5.



∢ABC = ∢CDA, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.

Como BE y DF son bisectrices de
∢ABC = ∢CDA, se tiene que
∢ABE = ∢EBC = ∢ADF = ∢CDF ... (1)

AB = CD por lados opuestos del paralelogramo ... (2)
Entonces ΔABE ≅ ΔCDF, por criterio ALA.

De donde se tiene ∢AEB = ∢CFD, por definición de congruencia de triángulos ... (3)
∢AEB + ∢BED = 180° y
∢CFD + ∢DFB = 180°; entonces
∢AEB + ∢BED = ∢CFD + ∢DFB.
Al utilizar (3), se tiene ∢BED = ∢DFB ... (4)

El cuadrilátero BFDE es un paralelogramo; pues tiene 2 pares de ángulos opuestos iguales; de (1) y (4).

Tarea: página 145 del Cuaderno de Ejercicios.