# Unidad 1

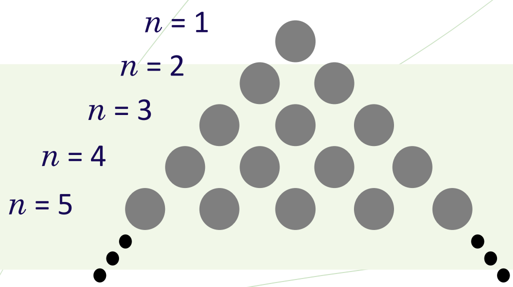
# Operaciones algebraicas

Si un fenómeno ocurre una vez puede ser un accidente, si ocurre dos veces tal vez sea casualidad; pero si ocurre tres o más veces, genera un patrón. La búsqueda de patrones en la naturaleza ha sido una necesidad humana, esto debido a la constante búsqueda por explicar su entorno; por ejemplo, la posibilidad de comprender el cambio de las estaciones, los movimientos de los cuerpos celestes, la trayectoria de un objeto, qué es el fuego o cómo crear luz manipulando electrones. Todo esto hizo comprender que la única magia que permite predecir cualquier fenómeno es la de los modelos matemáticos.


*Objetos que emiten ondas electromagnéticas en la vida cotidiana.*

Los modelos matemáticos están relacionados a través de dos procesos: la abstracción y la interpretación, y se utilizan para modelar fenómenos naturales, sociales o características y propiedades de los números y sus operaciones, como por ejemplo, patrones de ocurrencia de terremotos, las ondas electromagnéticas que emiten y reciben los aparatos electrónicos. El modelaje matemático de un fenómeno busca encontrar un patrón básico o reglas para identificar su ordenamiento interno y sus regularidades. Estas reglas son representadas por símbolos y letras que se conocen como expresiones algebraicas.

En esta unidad aprenderás sobre operaciones con expresiones algebraicas y su uso para modelar propiedades con los números y sus operaciones, así como para resolver situaciones cotidianas.




*Patrón geométrico de la suma de Gauss.*

## 1.1 Comunicación con símbolos

**P**

Efectúa las siguientes operaciones:

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

**S**

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

Sustituyendo el valor de $z$:

$$\begin{aligned} 2z - 5 &= 2 \times 8 - 5 \\ &= 11 \end{aligned}$$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

Multiplicando cada término de la expresión:

$$\begin{aligned} (3x - 5) \times (-2) &= 3x \times (-2) - 5 \times (-2) \\ &= -6x + 10 \end{aligned}$$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

Efectuando la división:

$$\begin{aligned} (-8 + 4a) \div 2 &= -8 \div 2 + 4a \div 2 \\ &= -4 + 2a \\ &= 2a - 4 \end{aligned}$$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

Efectuando multiplicaciones y divisiones:

$$\begin{aligned} (-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5) &= -6y \div 3 + 15 \div 3 + 2x \times (-5) + 8 \times (-5) \\ &= -2y + 5 - 10x - 40 \\ &= -10x - 2y - 35 \end{aligned}$$

1. Identifica los coeficientes y las variables en los siguientes términos:

a) $3x$ b) $-6b$ c) $-7mn$

2. Identifica los términos en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x - 5$ b) $7b - 3a - 1$ c) $2x + 7st - 4$

3. Sustituye el valor de cada variable y determina el valor numérico de cada expresión algebraica.

a) $6a - 1$, si $a = 2$ b) $x - 4$, si $x = -5$ c) $6y - 1$, si $y = \frac{1}{3}$ d) $2a + 4$, si $a = -\frac{3}{2}$

4. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(4x + 7) \times 2$ b) $(n - 5) \times 3$ c) $(3a + 2) \times (-4)$ d) $(t - 5) \times (-3)$

5. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(8u + 24) \div 4$ b) $(-4n - 10) \div 2$ c) $(9y + 3) \div (-3)$ d) $(-15a - 5) \div (-5)$

6. Efectúa las siguientes operaciones y reduce términos semejantes:

a) $(-6y + 12) \div (-2) + (x + 5) \times 3$ b) $(-5y + 1) \times (-2) + (x - 8) \times 4$

## 1.2 Definición de monomio, polinomio y grado

**P**

María tiene 5 veces la edad de Carlos y la edad de Carlos es igual a la suma de la edad de Ana y Antonio. Representa la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio.
Utiliza $a$ para representar la edad de Ana y $b$ para representar la edad de Antonio.

**S**

Como la edad de Carlos es la suma de la edad de Ana y la de Antonio:
Edad de Carlos = edad de Ana + edad de Antonio = $a + b$.

La edad de María es 5 veces la edad de Carlos:
Edad de María = 5 × edad de Carlos = $5 \times (a + b) = 5a + 5b$

Por lo tanto, la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio se representa por la expresión $\mathbf{5a + 5b}$.

**C**

La expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes y un número llamado **coeficiente**, y que además solo hay operaciones de multiplicación se conoce como **término.**

Por ejemplo: $5x$, $y$, $2ay$, $\frac{3}{5}x^2$, $b^2y$, $-7$.

Coeficiente → $7x^2$ ← Exponente ← Variable

Observa que el número $-7$ es un monomio donde los exponentes de las variables son todos cero ($x^0 = 1$).

Las expresiones formadas por un término o por la suma de dos o más términos se conocen como **polinomios.**

Por ejemplo: $5a + 5x$, $4y - 2$, $2x^2 - 3ax + 5$.

Observa que el polinomio $2x^2 - 3ax + 5$ está formado por los términos $2x^2$, $-3ax$ y 5.

$$2x^2 - 3ax + 5 = \underbrace{2x^2 + (-3ax) + 5}_{\text{Términos}}$$

Se define **monomio** como el polinomio formado por un solo término.

Se define **el grado de un término** como la suma de todos los exponentes de las variables.

Por ejemplo, el grado del término $-4xy^2$ es 3, porque $-4 \times \underbrace{x \times y \times y}_{\text{Grado 3}}$, la suma de los exponentes es 3.

Se define **el grado de un polinomio** como el mayor grado de los términos que conforman dicho polinomio.

Por ejemplo, el grado del polinomio $6x^3 + 5x^2 - 7x$ es 3, porque $\underbrace{6x^3}_{\text{Grado 3}} + \underbrace{5x^2}_{\text{Grado 2}} + (\underbrace{-7x}_{\text{Grado 1}})$ y el mayor grado de todos los términos es 3.

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:
   a) $3a + 2x$ b) $6t + 5z - 2$ c) $-\frac{2}{3}a + 2x^3 - \frac{1}{2}$ d) $-ab + 2tv^2$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:
   a) $4x^3$ b) $-5xz$ c) $\frac{3}{5}x^2a^3$ d) $-\frac{2}{3}ab^2x^3$

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:
   a) $-6xyz$ b) $7x + 3t$ c) $\frac{3}{4}x^2a^3 - xa^3$ d) $-uvw^2 + v^2 - \frac{t^2}{3}$

## 1.3 Reducción de términos semejantes en un polinomio

P

Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3x + 5a - 2x + 4a$ b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

Los términos que poseen la misma variable elevada al mismo exponente se llaman: **términos semejantes.**

$$\underbrace{\overbrace{4x + 5a - 2x + 4a}^{\text{Términos semejantes}}}_{\text{Términos semejantes}}$$

Y se reducen así:

$ax + bx = (a + b)x$

S

a) $3x + 5a - 2x + 4a$

$= 3x - 2x + 5a + 4a$

$= (3 - 2)x + (5 + 4)a$

$= x + 9a$

$= 9a + x$

Ordenando términos semejantes.

Reduciendo términos semejantes.

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

$= 2y^2 + 3y^2 + 8y - 9y$

$= (2 + 3)y^2 + (8 - 9)y$

$= 5y^2 - y$

C

Para reducir términos semejantes en un polinomio se realizan los siguientes pasos:

1. Se ordenan los términos semejantes.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c$.

1. $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c = 7c^2 - 4c^2 + 2c + 3c$
2. $\phantom{7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c} = (7 - 4)c^2 + (2 + 3)c$

$\phantom{7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c} = 3c^2 + 5c$

Si las variables de dos términos están elevadas a potencias diferentes, entonces los términos NO son semejantes.

Por ejemplo, $5x^2$ y $5x$ NO son términos semejantes.

1. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$ b) $6x + 5x$ c) $3x + 5a - 2x + 3a$ d) $5y + 9b - 6b - 6y$

e) $6t + 2z - t - 5z$ f) $4x - y - 2y + x$ g) $9t^2 + 2t - 7t^2 + 6t$ h) $3y - 3y^2 - 4y^2 + 9y$

i) $a^2 + 5a - 5a^2 + a$ j) $z^2 + 9z + 3z - z^2$ k) $xy + \frac{2}{3}y - 3y + \frac{1}{2}xy$ l) $a^2 - 2a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}a^2$

2. Explica por qué el siguiente procedimiento para reducir términos semejantes en un polinomio es incorrecto.

$$\begin{aligned} 4x + 5a - 2x + 4a &= 4x - 2x + 5a + 4a \\ &= (4 - 2)x + (5 + 4)a \\ &= 2x + 9a \\ &= 11xa \end{aligned}$$

## 1.4 Suma y resta de polinomios

**P**

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$ b) $(2x + 5y) - (-3x + 9y)$

La ley de los signos es:
"La multiplicación de dos números de igual signo es positiva y de dos números de diferente signo es negativa".

**S**

Utilizando la ley de los signos y expresando sin los paréntesis.

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

$= 4x + 3y + 5x - 2y$

Reduciendo términos semejantes:

$= 4x + 5x + 3y - 2y$

$= 9x + y$

b) $(5y + 2x) - (9y - 3x)$

$= 5y + 2x - 9y + 3x$

$= 2x + 3x + 5y - 9y$

$= 5x - 4y$

Observa que puedes resolver utilizando la forma vertical:

a)
$$\begin{array}{rr} & 4x + 3y \\ (+) & \underline{5x - 2y} \\ & 9x + \phantom{2}y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y \\ (-) & \underline{-3x + 9y} \\ & 5x - 4y \end{array}$$

**C**

Para efectuar sumas y restas de polinomios, se realizan los siguientes pasos:

1. Se utiliza la ley de los signos para expresarlos sin paréntesis.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $(3a + 5b) - (4a - 3b)$.

1. $(3a + 5b) - (4a - 3b) = 3a + 5b - 4a + 3b$
2. $= 3a - 4a + 5b + 3b$
   $= -a + 8b$

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios.

a)
$$\begin{array}{rr} & 6x + 2y \\ (+) & \underline{3x - 5y} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (-) & \underline{7a - 9b} \end{array}$$

Es igual a
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (+) & \underline{-7a + 9b} \end{array}$$

c) $(9x + 2y) + (7x - 5y)$

d) $(x + 2y) + (6x - y)$

e) $(5xy + 4y) - (7x - 8xy)$

f) $(4ab - 3a) + (5a - 2ab)$

g) $(-6t + 2z) - (7z - 7t)$

h) $(6a^2 + 2a) - (a^2 - 5a)$

i) $(-2t + 2u) - (2t + 2u)$

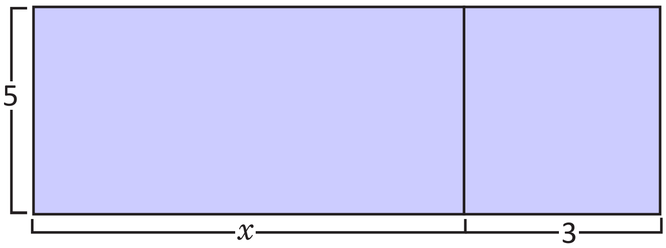
j) $(-x + 7y - 2) + (4x - y + 6)$

k) $(-ab + 5a - 4) - (4a - ab + 9)$

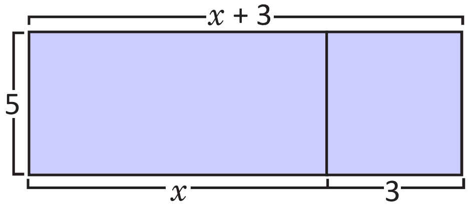
l) $(-8 + 5m - 4m^2) - (m^2 + 9 - m)$

## 1.5 Multiplicación de un polinomio por un número

Para hacer un cartel fue necesario unir dos piezas como lo muestra la figura. Determina el área total del cartel.




El cartel tiene dimensiones 5 de ancho por $(x + 3)$ de largo.

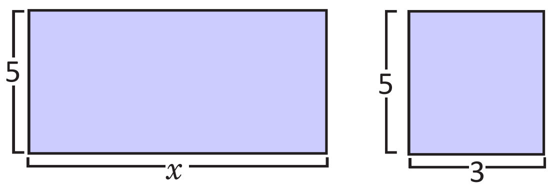



Entonces el área del cartel es $5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$.

Y también se puede calcular el área de cada pliego y sumarlas.

Área 1: $5 \times x = 5x$

Área 2: $5 \times 3 = 15$




Entonces, el área total es: $5(x + 3) = 5x + 15$.

Por lo tanto: $5(x + 3) = 5x + 15$.

Para realizar la multiplicación de un polinomio por un número, se multiplica el número por cada término del polinomio. Por ejemplo: $-3(4x - 3y - 2)$

$$\begin{aligned} -3(4x - 3y - 2) &= (-3) \times 4x + (-3) \times (-3y) + (-3) \times (-2) \\ &= -12x + 9y + 6 \end{aligned}$$

Realiza la siguiente operación: $5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$.

Se multiplica y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} 5(x - 4a) - 2(3x - 4a) &= 5x - 20a - 6x + 8a \\ &= 5x - 6x - 20a + 8a \\ &= -x - 12a \end{aligned}$$

Desarrolla las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $3(4x + y)$ b) $-6(2x - 7y)$ c) $7(2a - 3 - 4b)$ d) $-5(5 - 4a - 6b)$

e) $6(4t - 3b) - 5(-t + 2b)$ f) $-2(8y^2 - 5y) - 3(-7y + y^2)$ g) $-8\left(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}\right)$ h) $(-2x + 4y - 12) \times \frac{1}{2}$

## 1.6 División de polinomio por un número

**P**

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(10x - 4a) \div 2$.

**S**

Cambiando la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x - 4a) \times \frac{1}{2}$$

Multiplicando el número con el polinomio (clase anterior):

$$(10x - 4a) \times \frac{1}{2} = 10x \times \frac{1}{2} - 4a \times \frac{1}{2}$$
$$= 5x - 2a$$

Distribuyendo la división en cada monomio.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x \div 2) + (-4a \div 2)$$
$$= (5x) + (-2a)$$
$$= 5x - 2a$$

Observa la simplificación de la solución de la izquierda.

$$\overset{5}{\cancel{10}}x \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad - \overset{2}{\cancel{4}}a \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

**C**

Para realizar la división de un polinomio por un número, se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio. Por ejemplo, $(15x - 6y - 9) \div (-3)$.

$$(15x - 6y - 9) \div (-3) = (15x - 6y - 9) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 15x \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 6y \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= -5x + 2y + 3$$

**E**

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5)$.

Se multiplica por el recíproco y se reducen términos semejantes.

$$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5) = (-30x^2 - 10x + 25) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$= -30x^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 10x \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$= 6x^2 + 2x - 5$$

Efectúa las siguientes divisiones de un polinomio por un número.

a) $(16x - 8a) \div 2$

b) $(-24b - 12) \div 6$

c) $(9xy - 45y) \div (-3)$

d) $(-21x^2 + 49x) \div (-7)$

e) $(45x^2 - 20x - 35) \div 5$

f) $(-20y - 36x - 4) \div 4$

g) $(16y + 24x + 48) \div (-8)$

h) $(-63y + 27x + 54) \div (-9)$

## 1.7 Operaciones combinadas de polinomios con división por un número

**P**

Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes: $\frac{5x + 2y}{3} - \frac{2y - x}{6}$.

**S**

Expresando con un término equivalente:

$$\frac{5x + 2y}{3} - \frac{2y - x}{6} = \frac{2(5x + 2y)}{6} - \frac{2y - x}{6},$$

colocando como una sola fracción:

$$= \frac{2(5x + 2y) - (2y - x)}{6},$$

expresando sin los paréntesis:

$$= \frac{10x + 4y - 2y + x}{6},$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{10x + x + 4y - 2y}{6},$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11x + 2y}{6}.$$

Expresando como multiplicación de un número por un polinomio:

$$\frac{5x + 2y}{3} - \frac{2y - x}{6} = \frac{1}{3}(5x + 2y) - \frac{1}{6}(2y - x),$$

efectuando los productos:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x,$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y,$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y.$$

Observa que las respuestas de ambos procedimientos son iguales:

$$\frac{11x + 2y}{6} = \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y$$

**C**

Para realizar operaciones de polinomios con denominadores diferentes, se puede utilizar cualquiera de las dos formas:

1. Utilizar el mínimo común denominador y reducir términos semejantes.
2. Expresar los denominadores como multiplicación por un número y luego reducir términos semejantes.

**E**

Realiza las operaciones y reduce términos semejantes: $\frac{2x - y}{3} - \frac{x - 5y}{6}$

$$\frac{2x - y}{3} - \frac{x - 5y}{6} = \frac{2(2x - y)}{6} - \frac{(x - 5y)}{6}$$

$$= \frac{2(2x - y) - (x - 5y)}{6}$$

$$= \frac{4x - 2y - x + 5y}{6}$$

$$= \frac{3x + 3y}{6} = \frac{3(x + y)}{6} = \frac{x + y}{2}$$

Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes:

a) $\frac{4x + y}{9} + \frac{3y - 2x}{3}$

b) $\frac{6z + 5t}{3} + \frac{3t - z}{2}$

c) $\frac{4x + 7y}{2} - \frac{2y - 3x}{4}$

d) $\frac{3a - 4y}{5} - \frac{a - y}{2}$

e) $x + y + \frac{y + 5x}{3}$

f) $x - y - \frac{4y - 3x}{7}$

## 1.8 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $9st + 5x$

b) $3t^2 + 7zs - 21$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:

a) $8xyz$

b) $-5x^3z$

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $7xa + 3t^3$

b) $6 - 6xyz$

4. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$

b) $6x + 5x$

c) $5a + 7x + 3a - 2x$

5. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a)
$$\begin{array}{rr} & 3x + 7y \\ (+) & \underline{4x - 9y} \end{array}$$

b) $(4ab + 4a^2) - (6a^2 - 8ab)$

c) $(-5n^2 + 9n + 3) - (-2n^2 - 4n + 1)$

6. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por un polinomio:

a) $-5(-2s + 6t)$

b) $3(4x - 3y) - 2(5x - 2y)$

c) $(6x - 15y - 36) \times \frac{1}{3}$

7. Desarrolla las siguientes divisiones de polinomio con un número:

a) $(-9s + 24t) \div 3$

b) $(-54x^2 + 18x) \div -9$

c) $(36x^2 - 12x + 28) \div 4$

8. Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes:

a) $\dfrac{10x + 4y}{32} + \dfrac{-3x + y}{8}$

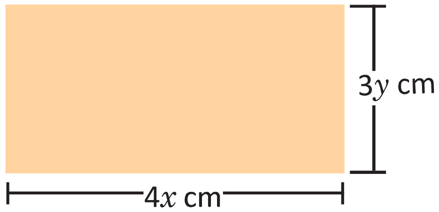
b) $\dfrac{2a + 5b}{10} - \dfrac{3a - 6b}{40}$

c) $s - t - \dfrac{2s - 5t}{6}$

## 1.9 Multiplicación de un monomio por un monomio

**P**

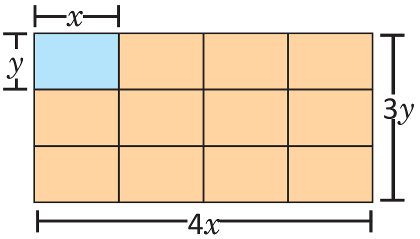
Determina el área de un rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho.




**S**

El área del rectángulo será el resultado de la multiplicación $4x \times 3y$.

Dividiendo el rectángulo en rectángulos más pequeños de $y$ cm de ancho y $x$ cm de largo.




Observa que la multiplicación de los monomios $4x$ x $3y$ se realiza así:

$$\begin{aligned} 4x \times 3y &= 4 \times x \times 3 \times y \\ &= 4 \times 3 \times x \times y \\ &= 12xy \end{aligned}$$

El área de cada rectángulo pequeño es $x \times y = xy$ (base × altura).

Hay 4 rectángulos de área $xy$ a lo largo y 3 a lo ancho.

Por lo tanto, el área del rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho es la suma del área de los $4 \times 3 = 12$ rectángulos de área $xy$, así:

$A = 4x \times 3y = 4 \times 3 \times x \times y = 12xy$.

**C**

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes de los monomios y luego se multiplican las variables. Por ejemplo: $7x \times (-5y)$.

$$\begin{aligned} 7x \times (-5y) &= 7 \times (-5) \times x \times y \\ &= -35xy \end{aligned}$$

Al multiplicar dos potencias de la misma base se puede expresar como una sola potencia:

$b \times b^2 = b \times (b \times b) = b^3$.

**E**

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $2b \times 5b^2$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} 2b \times 5b^2 &= 2 \times 5 \times b \times b^2 \\ &= 10b^3 \end{aligned}$$

b) $(-4n)^3$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} (-4n)^3 &= (-4n) \times (-4n) \times (-4n) \\ &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times n \times n \times n \\ &= -64n^3 \end{aligned}$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $5x \times 6y$

b) $8b \times (-3a)$

c) $-7m \times (-3n)$

d) $9x \times 4x^3$

e) $-9a^2 \times a^3$

f) $(-2n)^3$

g) $-6ab \times (-8a^2b)$

h) $-9ab \times 3(-a)^2$

## 1.10 División de un monomio por un monomio

**P**

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

b) $12ab \div (-4b)$

**S**

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

Expresando como división de fracciones, utilizando el recíproco del número y simplificando.

$$\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz = \frac{y^2z}{3} \div \frac{5yz}{9}$$

$$= \frac{y^2z}{3} \times \frac{9}{5yz}$$

$$= \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}} \times \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}}$$

$$= \frac{3}{5}y$$

b) $12ab \div (-4b)$

Expresando la división como una fracción y simplificando.

$$12ab \div (-4b) = \frac{12ab}{-4b}$$

$$= -\frac{12ab}{4b}$$

$$= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}$$

$$= -3a$$

Además, para el literal b) se observa que se puede aplicar la multiplicación por el recíproco de la siguiente manera:

$$12ab \div (-4b) = 12ab \times \frac{1}{-4b}$$

$$= -\frac{12ab}{4b}$$

$$= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}$$

$$= -3a$$

Al dividir dos potencias puedes simplificar:

$$y^2z \div yz = \frac{y^2z}{yz} = \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}} = y$$

**C**

Para dividir dos monomios se expresa como división de fracciones, se utiliza la multiplicación por el recíproco y se simplifica a la mínima expresión.

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $18xy \div 6x$

b) $24x^3 \div (-6x)$

c) $15mn \div (-12n)$

d) $-8a^2b \div 6ab^2$

e) $6ab \div \frac{1}{4}bc$

f) $10y^2z^2 \div \frac{5}{2}yz$

g) $-\frac{3}{5}t^3u \div \frac{3}{10}t^2u$

h) $-\frac{5}{8}y^4 \div \frac{1}{2}y^2$

## 1.11 Multiplicación y división combinadas de monomios con monomios

**P**

Realiza las siguientes operaciones, luego simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x)$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b)$

**S**

Expresando las operaciones como una fracción.

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x) = -\dfrac{7\overset{x}{\cancel{x^2}} \times \overset{2}{\cancel{6}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\underset{y}{\cancel{y^2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$

$= -\dfrac{7x \times 2}{y}$

$= -\dfrac{14x}{y}$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b) = \dfrac{(\overset{1}{\cancel{2}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{1}{\cancel{b}}) \times (\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{b}})}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{6}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{\underset{1}{\cancel{b}}}{\cancel{b^2}}}$

$= \dfrac{a \times 1}{1}$

$= a$

**C**

Para operar multiplicaciones y divisiones combinadas de monomios, primero se determina el signo (utilizando la ley de los signos), y luego se expresa como una sola fracción hasta simplificar a la mínima expresión.

**E**

Realiza la siguiente operación, simplifica el resultado a su mínima expresión: $(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right)$.

$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\dfrac{2a}{3}\right) = -8a^3 \times 4a^2 \times \left(\dfrac{3}{2a}\right)$

$= -\dfrac{\overset{4a^2}{\cancel{8a^3}} \times 4a^2 \times 3}{\underset{1\,1}{\cancel{2a}}}$

$= -\dfrac{4a^2 \times 4a^2 \times 3}{1}$

$= -48a^4$

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $2x^2 \times 6x \div 3x^4$

b) $10yz \div 4z^2 \times (-6z)$

c) $a^2b \div (-ab) \times (-b^2)$

d) $-s^2t \times (-st^2) \div (-s^2t^2)$

e) $(-2a)^2 \div 6ab^2 \times 9b$

f) $-xy \div (-2xy)^3 \times (-4x)$

g) $3y^3 \times 6y \div (-3y)^2$

h) $24a^2b^2 \div 8ab \times 3b$

i) $(-2st)^3 \times (-2s) \div (-3s^2)$

j) $\frac{3}{5}ab^2 \times 5a \div \frac{1}{3}ab$

k) $(-\frac{1}{2}xz)^2 \div 6xz^3 \times (-4)$

l) $-\frac{2}{5}t^2 \div (-t^3) \times (-\frac{5}{2}t^2)$

## 1.12 Sustitución y valor numérico de polinomios

**P**

Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores dados para las variables.

$(4x - 5y) - (x - y)$ si $x = 6$, $y = -4$

**S**

Sustituyendo el valor de las variables en cada polinomio:

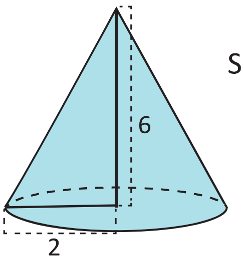
$$\begin{aligned}(4x - 5y) - (x - y) &= 4x - 5y - x + y\\ &= 3x - 4y\\ &= 3 \times 6 - 4 \times (-4); \text{ sustituyendo el valor de las variables.}\\ &= 18 + 16\\ &= 34\end{aligned}$$

**C**

Para encontrar el valor numérico de un polinomio sustituyendo el valor de las variables, primero se reducen los términos semejantes.

**E**

El volumen de un cono está dado por el polinomio $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde $\pi$ es una constante (número), $r$ es el radio de la base del cono y $h$ es la altura. Determina el volumen de un cono de 2 cm de radio y 6 cm de altura.




Sustituyendo los valores de las variables $r$ y $h$ en el polinomio del volumen del cono.

$r = 2$
$h = 6$

Entonces, para este caso, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 6 = 8\pi$.

Por lo tanto, el volumen del cono de radio 2 cm y altura 6 cm es $8\,\pi\text{cm}^3$.

1. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio utilizando los valores de las variables indicadas.

   a) $(3x - 2y) + (x - y)$ si $x = 5$, $y = -2$

   b) $(x + 3y) - (x - y)$ si $x = 1$, $y = -4$

   c) $(x - y) - 2(x - y)$ si $x = 8$, $y = -2$

   d) $3(x - 2y) - (2x - 5y)$ si $x = -4$, $y = 5$

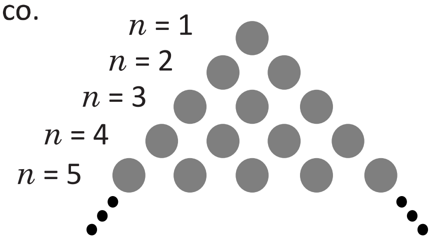
   e) $(6x - y) - 2(3x - 5y)$ si $x = -2$, $y = 3$

   f) $(4x - y) - (5x - 3y)$ si $x = -6$, $y = 4$

2. Analiza y determina cuál de los siguientes polinomios representa la suma de las primeras filas, en la siguiente figura, $n$ representa el número de fila. Auxíliate del gráfico.

   a) $2n - 1$

   b) $\frac{1}{2}n(n + 1)$



## 1.13 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios, el grado de cada término y el grado del polinomio.

a) $5xyz + 2t^2$ b) $5x^4 + 7z^3 - 21xz$ c) $6ab - 6st^2$ d) $3xyz$

2. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(10a - 7b + 9) - (-3a - b + 5)$ b) $(5xy - 5y^2) + (-8xy + 8y^2)$ c) $(8t^2 + 2 - 4t) - (-t^2 - 2t + 7)$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de un número por un polinomio:

a) $-7(10m - 8n)$ b) $10(2a - 5b) - 7(-2a + 3b)$ c) $(35x - 5z) \div 5$ d) $(-64x^2 + 16x) \div (-8)$

4. Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes.

a) $\frac{6m - 3n}{27} + \frac{m - 2n}{3}$ b) $\frac{2a + 5b}{3} - \frac{-3a + 6b}{5}$ c) $y - z - \frac{-9y - 3z}{7}$ d) $t - 2u - \frac{5t - u}{2}$

## 1.14 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $9t \times 6s$ b) $(-4n^2) \times 6n^3$ c) $7a \times 8ab$ d) $(-7a)^2$

2. Desarrolla las siguientes divisiones de monomios:

a) $36mx \div 9x$ b) $(-18st^2) \div 10s^2t$ c) $12ay^3 \div \frac{3}{5}a^2y$ d) $-\frac{2}{9}w^3 \div \frac{2}{3}w$

3. Realiza las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $4y \times 15y^3 \div 10y^2$ b) $(-5n)^2 \div 15mn^2 \times 12m$ c) $(-4ab)^3 \times (-2b) \div (-6b^4)$ d) $(-\frac{2}{3}w^4) \div (-w^3) \times (-\frac{9}{10}w)$

4. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores de las variables indicadas.

a) $(2x - 5y) + (-4x + y)$ si $x = 3$, $y = -3$ b) $2(-x + y) - (3x - y)$ si $x = -1$, $y = 4$

c) $(-4x - 3y) + 5(x + y)$ si $x = 7$, $y = -5$ d) $-5(x - 2y) - (-4x - 6y)$ si $x = -4$, $y = 5$

## 2.1 Suma de números consecutivos

**P**

Efectúa las siguientes sumas, determina un procedimiento para sumar 5 números consecutivos.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \_\_\_\_\_\_$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \_\_\_\_\_\_$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \_\_\_\_\_\_$$

**S**

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \underline{15} \quad (5 \times 3)$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \underline{75} \quad (5 \times 15)$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \underline{150} \quad (5 \times 30)$$

La suma de 5 números consecutivos parece ser 5 veces el número del centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares.

Tomando $n$ como el primer término de una suma de 5 términos.

$$13, \quad 14, \quad 15, \quad 16, \quad 17$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{13}, \quad \mathbf{13} + 1, \quad \mathbf{13} + 2, \quad \mathbf{13} + 3, \quad \mathbf{13} + 4$$
$$\downarrow$$
$$n, \quad n + 1, \quad n + 2, \quad n + 3, \quad n + 4$$

Entonces, la suma de 5 términos consecutivos en general será:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5 \times (n + 2).$$

Por lo tanto, la conjetura es verdadera y la suma de 5 números consecutivos es 5 veces el número del centro (ordenados de menor a mayor).

> En matemática, para solucionar un problema pueden abordarse diversas estrategias, una de ellas es la utilizada en esta clase, en la cual se determina el resultado para casos particulares y se busca un "patrón" para formular una "conjetura"; es decir, una observación que al parecer se cumple en todos los casos pero carece de sustento lógico, es únicamente intuitivo. Posteriormente se demuestra la conjetura utilizando un método inductivo.

**C**

Para conjeturar sobre la suma de 5 números consecutivos fue necesario aplicar suma de polinomios. Utilizando variables para expresar la situación, se pueden comprobar varias propiedades que hay entre los números.

1. Escribe cinco números consecutivos representando el número del centro con $n$; luego expresa la suma de estos números en términos de $n$.

2. Encuentra la propiedad de la suma de 7 números consecutivos y compruébala.

## 2.2 Suma de un número con su invertido

P

Efectúa las siguientes sumas de un número con su invertido, demuestra si se cumple alguna regla.

$12 + 21 = \_\_\_\_\_\_$

$63 + 36 = \_\_\_\_\_\_$

$91 + 19 = \_\_\_\_\_\_$

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

$12 + 21 = \underline{33} = 11 \times 3$

$63 + 36 = \underline{99} = 11 \times 9$

$91 + 19 = \underline{110} = 11 \times 10$

La suma de un número con su invertido es un múltiplo de 11, ¿se cumplirá siempre esta afirmación?

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba, se toma $y$ como el dígito de las unidades y $x$ como el dígito de las decenas, escribiendo el número mediante la expresión de los números base 10.

$$63 = 60 + 3$$
$$63 = 10 \times 6 + 3$$
$$= 10 \times x + y$$

Observa que en este caso, las variables $x$ y $y$ representan dígitos; es decir, números entre 0 y 9, y no se está tomando en cuenta el valor posicional de las decenas.

Entonces, la suma de un número con su invertido utilizando las variables $x$ y $y$, es:

$$(10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y$$
$$= 11(x + y)$$

Por lo tanto, la suma de un número con su invertido siempre es múltiplo de 11.

C

Para comprobar las propiedades de los números, hay que utilizar variables adecuadamente según la situación, identificar regularidades y aplicar las operaciones algebraicas necesarias para representarlas.

1. Determina si la suma de un número de 4 cifras con su invertido es múltiplo de 11. Considera los casos a continuación:

a) 1 234 + 4 321

b) 1 032 + 2 301

c) 1 121 + 1 211

2. Comprueba tus resultados del numeral 1.

## 2.3 Sumas de días del calendario

**P**

Efectúa la suma de los días del calendario que están sombreados, demuestra si se cumple alguna regla en general.

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

**S**

Efectuando las sumas y buscando algún patrón:

Color rosado: $2 + 8 + \mathbf{9} + 10 + 16 = 45 = 5 \times \mathbf{9}$

Color azul: $14 + 20 + \mathbf{21} + 22 + 28 = 105 = 5 \times \mathbf{21}$

Las sumas de los cinco días coloreados parecen ser 5 veces el número que queda al centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba; se toma $n$ como el término del centro de la parte sombreada.

Entonces, un día después será denotado por $n + 1$ y un día antes por $n - 1$.
Además, para denotar el mismo día, pero de la semana anterior, será $n - 7$ y el mismo día la semana siguiente será $n + 7$.

La suma de los 5 días coloreados estará dado por:

$$14 + 20 + 21 + 22 + 28$$
$$\downarrow$$
$$(\mathbf{21} - 7) + (\mathbf{21} - 1) + \mathbf{21} + (\mathbf{21} + 1) + (\mathbf{21} + 7)$$
$$\downarrow$$
$$(n - 7) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 7) = 5n$$

Por lo tanto, la suma de los días sombreados en esta forma en el calendario es 5 veces el número que queda al centro.

**C**

Cuando se trata de varios números, es importante elegir el número que se representará con la variable conveniente, para identificar los patrones y expresarlos mediante expresiones algebraicas.

Utiliza polinomios para comprobar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a)

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

b)

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

c)

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

## 2.4 Resolución de problemas utilizando polinomios

**P**

Carlos tiene 25 centavos de dólar para comprar dulces en la tienda, si los dulces de miel cuestan 3 centavos y los de eucalipto 2.5 centavos cada uno. Tomando $a$ como la cantidad de dulces de miel, $b$ como la cantidad de dulces de eucalipto, establece el polinomio que representa la situación. Luego responde, Carlos compra 5 dulces de miel, ¿cuántos dulces de eucalipto puede comprar con el vuelto?

**S**

Cada dulce de miel cuesta 3 centavos de dólar y cada dulce de eucalipto 2.5, se gastan 25 centavos, entonces se puede plantear la siguiente ecuación:

Costo de los dulces de miel $\longrightarrow 3a + \underset{\uparrow}{2.5b} = 25 \longleftarrow$ Dinero que tiene Carlos.

Costo de los dulces de eucalipto.

El problema pide la cantidad de dulces de eucalipto que puede comprar Carlos, es decir $b$; si compra 5 dulces de miel, es decir $a = 5$. Trabajando la ecuación:

$$3a + 2.5b = 25$$

Multiplicando ambos lados por 2,

$$6a + 5b = 50$$

transponiendo el término $6a$,

$$5b = 50 - 6a$$

dividiendo ambos lados por 5.

$$b = \frac{50 - 6a}{5} = -\frac{6a}{5} + 10$$

Finalmente para determinar cuántos dulces de eucalipto puede comprar Carlos hay que sustituir el valor numérico de $a = 5$ en el polinomio $-\frac{6a}{5} + 10$, se tiene $\frac{-6 \times 5}{5} + 10 = -6 + 10 = 4$.

**C**

Para resolver problemas utilizando polinomios se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se identifican las variables del problema.
2. Se plantea una ecuación con las variables identificadas en el paso anterior.
3. Se despeja la variable que soluciona el problema planteado.
4. Se sustituye el valor numérico de una variable en el polinomio que resulta después de despejar.

**E**

Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

$\frac{1}{3}ab = 5$ $[a, b = 5]$. Entonces, $\frac{1}{3}ab = 5$ $\quad ab = 15$ $\quad a = \frac{15}{b}$. Por lo tanto, $a = \frac{15}{5} = 3$.

Multiplicando por 3 ambos lados.

Dividiendo por $b$ ambos lados.

1. Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

   a) $5x - 6y = 25$ $[x, y = 10]$ b) $3.5t + u = 7$ $[u, t = 4]$ c) $\frac{1}{6}wz = 10$ $[w, z = 15]$

2. Un arquitecto trabaja en el diseño de las paredes de una casa; cuenta con dos tipos de ladrillo, el primer tipo es de 10 pulgadas de altura y el segundo de 6 pulgadas de altura. Si la pared mide 72 pulgadas de alto, tomando $w$ como la cantidad de ladrillos del tipo 1, $z$ como la cantidad de ladrillos del tipo 2, establece el polinomio que representa la situación. Además, el arquitecto decide que esta pared debe tener 6 filas de ladrillos del primer tipo, ¿cuántas filas del segundo tipo debe tener la pared?

## 2.5 Practica lo aprendido

1. Determina un procedimiento para sumar 9 números consecutivos.

2. Demuestra que si un número de tres cifras tiene la cifra de las decenas dos unidades mayor que la de las centenas y dos unidades menos que la de las unidades, entonces al sumarlo con su invertido el resultado es múltiplo de 111.

3. Utiliza polinomios para encontrar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a)

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | **9** | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | **15** | **16** | **17** | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

b)

Marzo 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | **3** | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | **9** | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | **17** | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | **25** | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | **31** | | |

4. Carlos compra 3 pupusas de queso con loroco y 2 revueltas, en total debe pagar $2.20. Si Carlos sabe que las pupusas de queso con loroco valen $0.50, ¿qué precio tienen las pupusas revueltas? Resuélvelo utilizando polinomios y valor numérico.

5. ¿Cuántos cuadrados de 10 $m^2$ de área son necesarios para cubrir un área de 200 $m^2$ si ya se han utilizado 7 cuadrados de 20 $m^2$ de área?

6. El abuelito de Ana tiene problemas con uno de sus riñones y el nefrólogo le ha recomendado que tome 2 litros de agua al día. Para cumplir la recomendación del médico, Ana quiere conocer la capacidad que tienen los vasos de su casa, y así podrá saber cuántos vasos con agua tendrá que beberse al día el abuelo. Considerando que los vasos tienen forma cilíndrica. Determina cuántos vasos con agua debe beber cada día el abuelo de Ana; ¿cómo se resuelve esto?

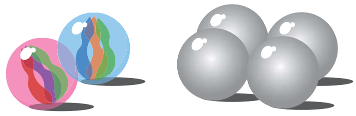
   Nota: para resolver esta situación, toma las medidas de un vaso cilíndrico que esté en tu escuela o en tu casa.

7. Una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ) es que "la suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión es igual a 11 veces el séptimo elemento de ese grupo". No es necesario que comience por el primer término de la sucesión. Ilustra la propiedad con dos ejemplos y escribe una expresión algebraica tomando como $x$ el séptimo elemento del grupo.

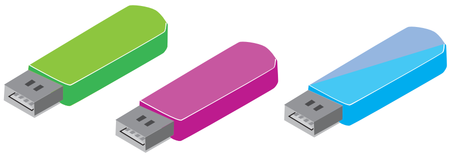
## 2.6 Practica lo aprendido

Expresa los siguientes problemas como ecuaciones con polinomios, luego resuélvelos utilizando valor numérico.

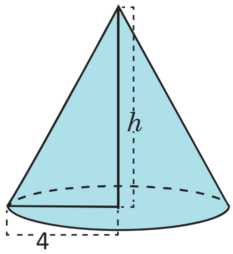
1. Carmen compra 2 chibolas de cristal y 4 metálicas por $1.90, ¿cuánto cuestan las chibolas metálicas si las de cristal cuestan $0.25 cada una?



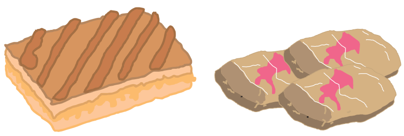
2. Mario necesita 1 024 MB para hacer un respaldo de sus archivos de la computadora, para ello cuenta con 3 memorias *USB* con capacidad de 256 MB. ¿Cuántas memorias *USB* con capacidad de 128 MB necesita Mario para esta labor?



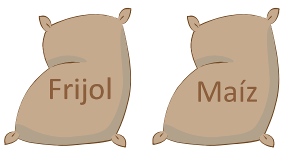
3. El volumen de un cono es $8\pi \text{cm}^3$. Si el cono tiene un radio de 4 cm, determina la medida de la altura de dicho cono.




4. Beatriz vende pan dulce y ha olvidado el precio de la semita de piña, pero recuerda que ayer Miguel compró 2 semitas y 3 salpores y pagó $0.83. Si Beatriz sabe que cada salpor cuesta $0.11, ¿cómo podría Beatriz saber el precio de la semita de piña?



5. José cultiva maíz y frijol, este año venderá 5 quintales de frijol y 3 de maíz, él se ha proyectado recaudar $500 con la venta de su cosecha. Si piensa vender el quintal de frijol a $85, ¿qué precio debe tener el quintal de maíz para que José logre su proyección?




6. En la escuela de María se celebrará el día del amor y la amistad, por lo que se requiere instalar algunos parlantes, con el cuidado de que no sobrepasen los 120 decibeles de sonido. Si se cuenta con 2 parlantes de 40 decibeles cada uno, ¿cuántos parlantes de 20 decibeles se necesitan?