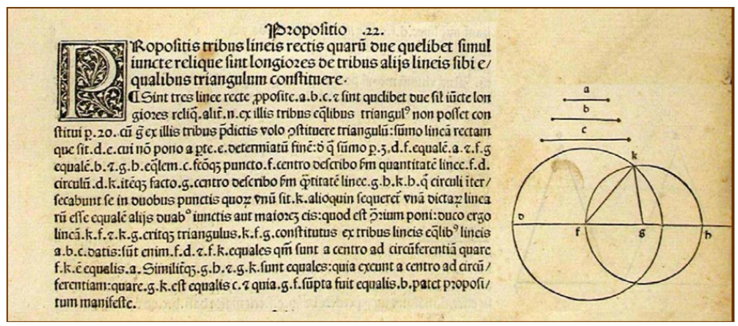
5 Unidad

Criterios de congruencia de triángulos

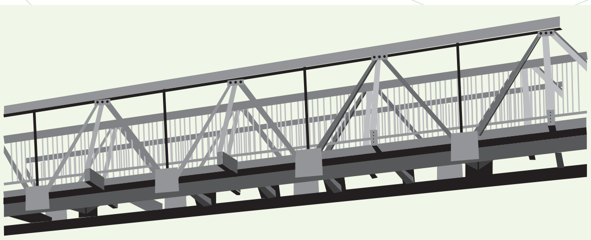
El texto *Los Elementos* de Euclides, es el tratado de matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la historia de la cultura, incluso mucho más allá de la propia matemática y ciencias afines. Desde la proposición 16 hasta la 26 del libro I, Euclides presenta resultados generales acerca de los triángulos; por ejemplo, construcciones elementales con regla y compás, congruencias de triángulos y cuadriláteros, desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, etc.


Propoſitio .22.
Propoſitis tribus lineis rectis quarũ due quelibet ſimul iuncte relique ſint longiores de tribus alijs lineis ſibi equalibus triangulum conſtituere.
Sint tres linee recte ꝓpoſite.a.b.c.⁊ ſint quelibet due ſil iũcte longiores reliq̃.aliť.n.ex illis tribus eq̃libus triangul⁹ non poſſet conſtitui p.20.cũ g̃ ex illis tribus p̃dictis volo ꝯſtituere triangulũ:ſũmo lineã rectam que ſit.d.e.cui nõ pono a pte.e.determiatũ finẽ:d q̃ ſũmo p.3.d.f.equalẽ.a.⁊.f.g equalẽ.b.⁊.g.b.eq̃lem.c.ſcdõq3 puncto.f.centro deſcribo ſm quantitatẽ linee.f.d. circulũ.d.k.itẽq3 facto.g.centro deſcribo ſm q̃titatẽ linee.g.b.k.b.q̃ circuli interſecabunt ſe in duobus punctis quoꝝ vnũ ſit.k.alioquin ſequeretˀ vnã dictaꝝ linearũ eſſe equalẽ alijs duab⁹ iunctis aut maiorẽ eis:quod eſt ꝯ̃trium poni:duco ergo lineã.k.f.⁊.k.g.eritq3 triangulus.k.f.g.conſtitutus ex tribus lineis eq̃lib⁹ lineis a.b.c.datis:ſũt enim.f.d.⁊.f.k.equales qm̃ ſunt a centro ad circũferentiã quare f.k.ẽ equalis.a.Similitq3.g.b.⁊.g.k.ſunt equales:quia exeunt a centro ad circũferentiam:quare.g.k.eſt equalis c.⁊ quia.g.f.ſũpta fuit equalis.b.patet propoſitum manifeſte.

Proposición I. 22 del texto Los Elementos *de Euclides.*

La congruencia de figuras, es utilizada en la construcción arquitectónica, ensamble de equipo y mobiliario, diseño de interiores, fabricación de automóviles, reconstrucción de infraestructura, etc.

La congruencia, se puede utilizar en el diseño de muebles en serie.



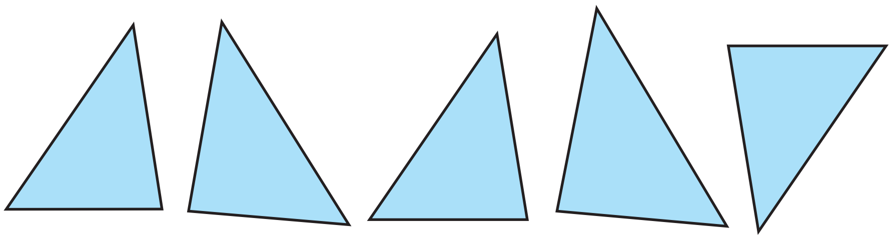
La congruencia de figuras se puede utilizar para el diseño de pasarelas.

En esta unidad estudiarás el sentido de la congruencia de triángulos y los criterios que permiten determinar si dos o más triángulos son congruentes; así como sus aplicaciones para demostrar propiedades matemáticas o para resolver situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

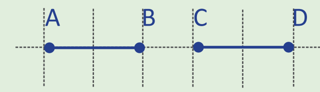
P

De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).

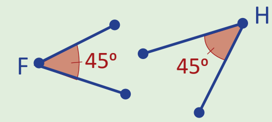


Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

Dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales. Ejemplo: AB = CD.

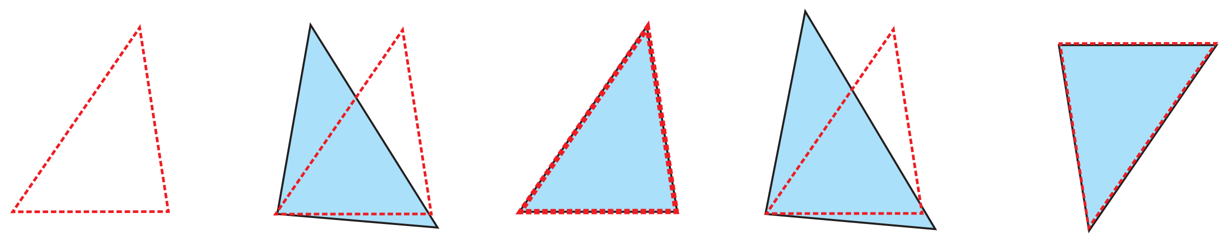


Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Ejemplo: ∢F = ∢H.



S

Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

C

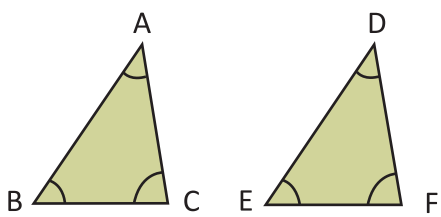
Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o volteando al revés una de ellas si es necesario, se llaman **congruentes**.

Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

A los elementos **correspondientes** de una figura también se les llama **homólogos**.

E

Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



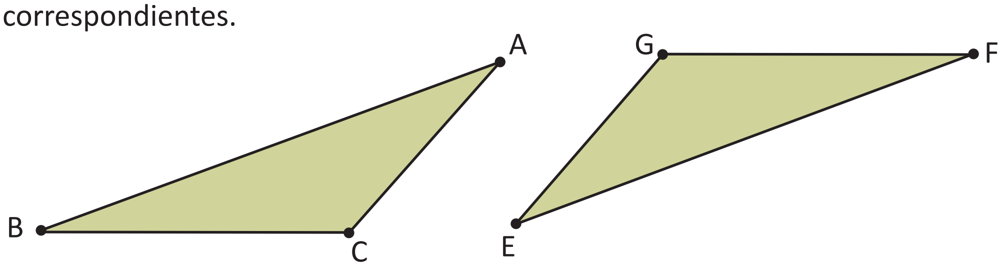
Triángulo 1 Triángulo 2

Vértices correspondientes: A y D, B y E, C y F.

Lados correspondientes: AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Ángulos correspondientes: ∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

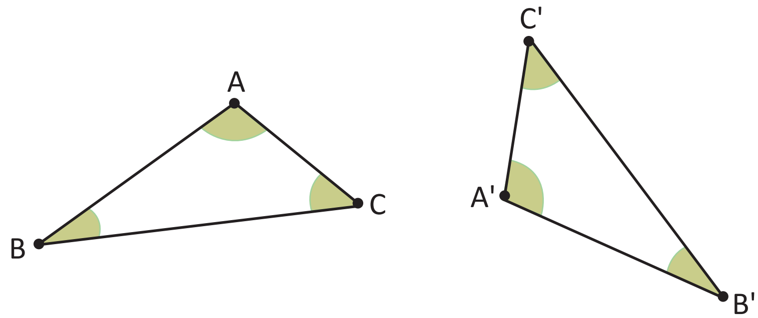
Los siguientes triángulos son congruentes. Compáralos e identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Aunque los triángulos estén en distinta posición son congruentes, puedes girarlos o darles vuelta para que coincidan.

1.2 Congruencia de triángulos

Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.



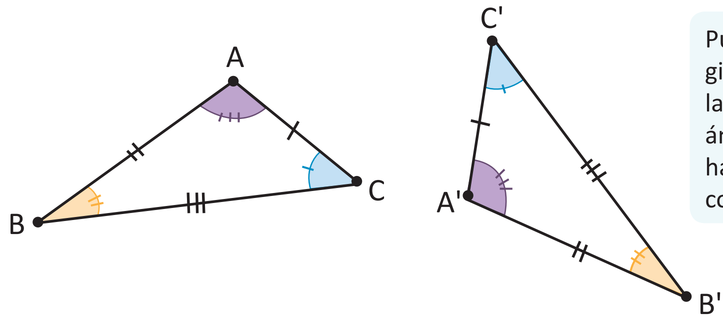
La notación A', B', y C', se lee “A prima”, “B prima” y “C prima” y se utiliza para representar puntos que son diferentes, pero que se corresponden con los puntos A, B y C.

Al comparar la longitud de los lados correspondientes y la medida de los ángulos correspondientes se obtiene que

AB = A'B'   ∢A = ∢A'

AC = A'C'   ∢B = ∢B'

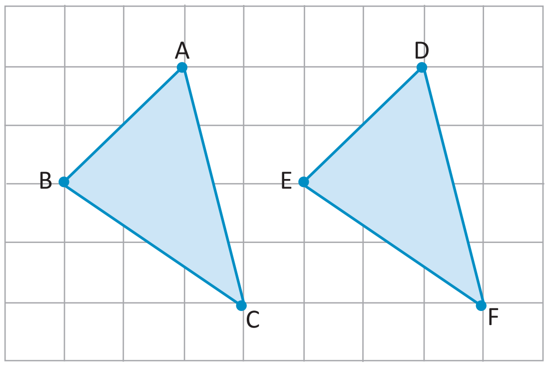
BC = B'C'   ∢C = ∢C'

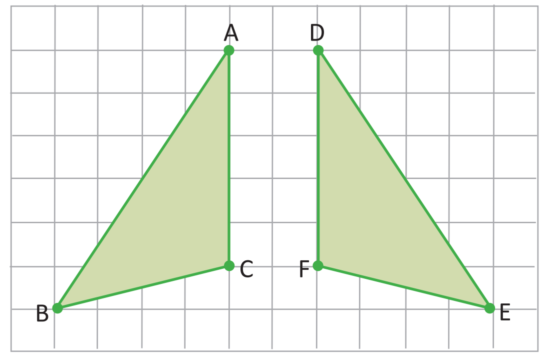


Puedes comparar la longitud de cada uno de sus lados y amplitud de sus ángulos respectivamente, haciendo uso de regla, compás y transportador.

En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales. Para indicar que los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo ≅; es decir: ΔABC ≅ ΔA'B'C', que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

Dado que los siguientes triángulos son congruentes, identifica los lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.





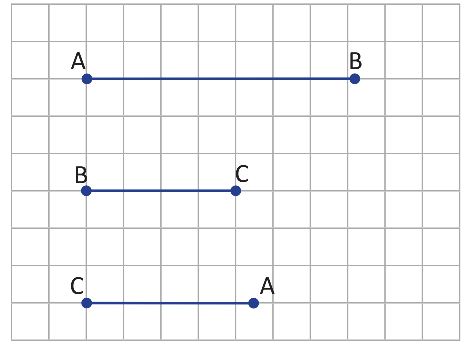
Cuando se escribe la congruencia de triángulos, es necesario tomar en cuenta que se deben escribir las letras en orden de los vértices correspondientes.

1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

Utilizando compás y regla, realiza lo siguiente:

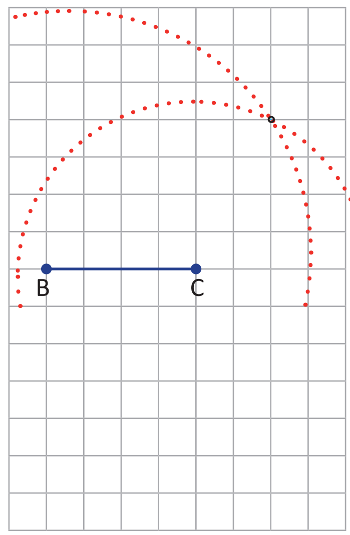
a) Construye un triángulo utilizando los tres segmentos de la derecha como lados.

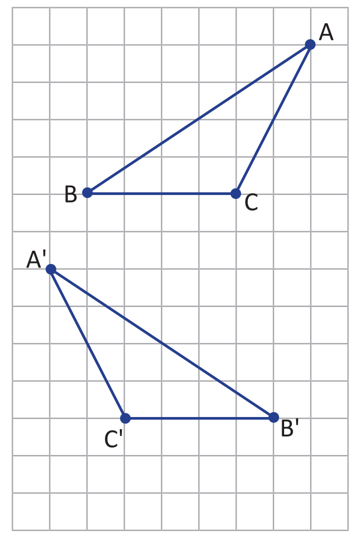
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?



a) Para construir el triángulo se realiza lo siguiente:
- Construye un segmento de longitud BC.
- Traza una circunferencia de radio BA y centro en B y otra con centro en C y radio CA.
- Identifica la intersección de los dos arcos.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales, son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$

b) ΔDEF; $DE = 2$, $EF = 4$, $FD = 3$

c) ΔGHI; $GH = 4$, $HI = 5$, $IH = 3$

d) ΔJKL; $JK = 5$, $KL = 7$, $LJ = 8$

e) ΔMNO; $MN = 3$, $NO = 4$, $OM = 5$

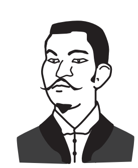
f) ΔPQR; $PQ = 5$, $QR = 8$, $RP = 7$

g) ΔSTU; $ST = 7$, $TU = 5$, $US = 6$

h) ΔXYZ; $XY = 4$, $YZ = 3$, $ZX = 2$

El tratado *Los Elementos*, de Euclides, ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* p.116.

En la proposición I.22. del tratado *Los Elementos*, Euclides hace referencia a la congruencia de triángulos estableciendo: “Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante”.

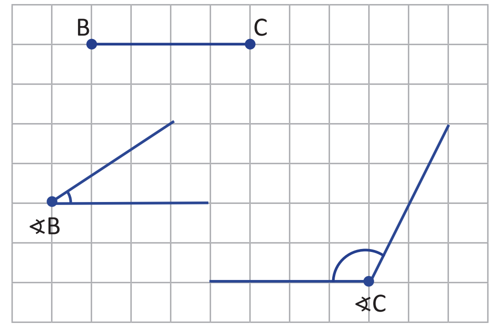


1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

Utilizando regla y transportador, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos de la derecha, como dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

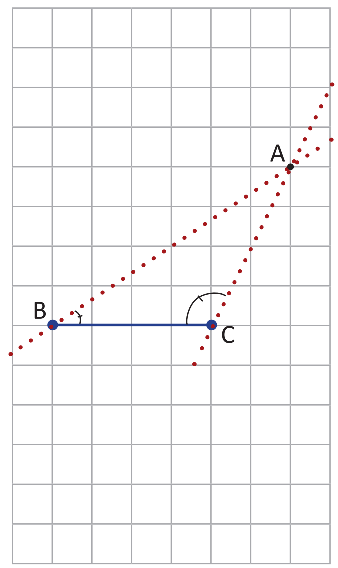
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

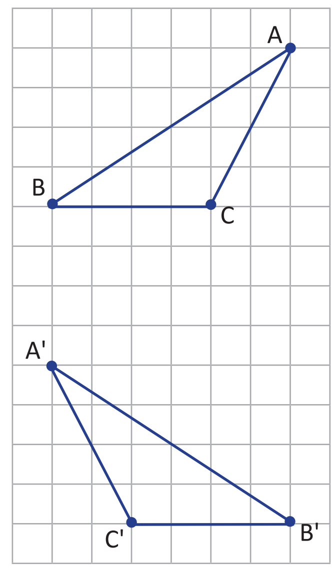


a) Para construir el triángulo usando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

- Construye un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo B y el ángulo C en los respectivos extremos del segmento BC.
- Identifica la intersección de los rayos de los ángulos trazados ∢B y ∢C.
- Une los puntos y forma el ΔABC.

b) Al comparar los triángulos, puedes ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' *y* ∢C = ∢C'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

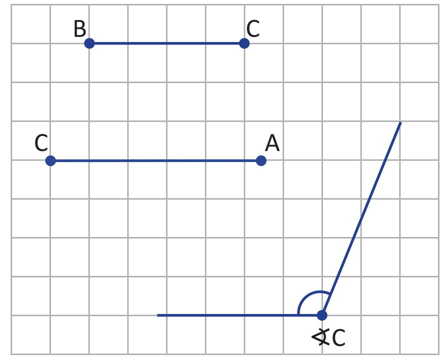
h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

Utilizando regla, transportador y compás, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo de la derecha, como dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

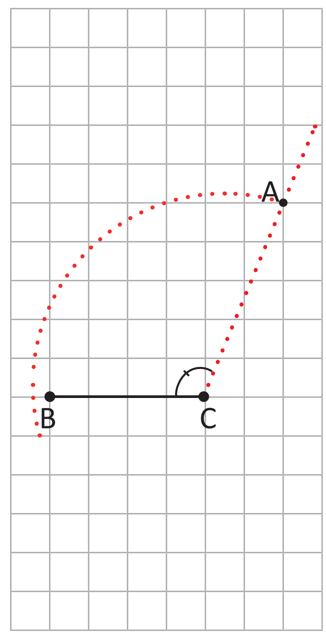
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

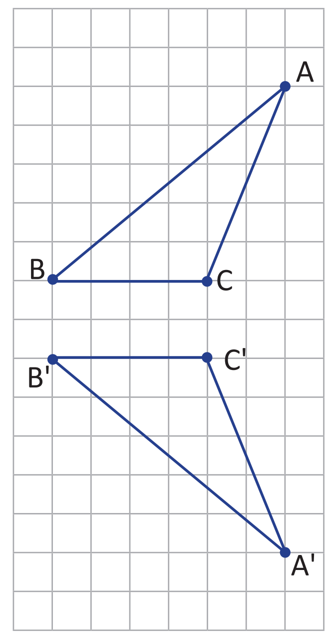


a) Para construir el triángulo a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se realiza lo siguiente:

- Traza un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo C.
- Traza una circunferencia de radio CA.
- Marca la intersección de la circunferencia y el rayo del ∢C.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que BC = B'C', ∢C = ∢C' y CA = C'A'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

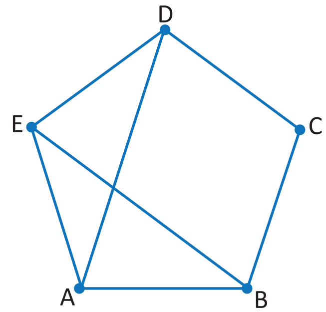
g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

P

Dado el pentágono regular, explica por qué $\Delta ABE \cong \Delta EDA$.



En el pentágono regular la medida de sus lados y ángulos internos son iguales.

S

Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
$\measuredangle EAB = \measuredangle DEA$	Son ángulos internos del pentágono regular.
$\Delta ABE \cong \Delta EDA$	Por criterio LAL.

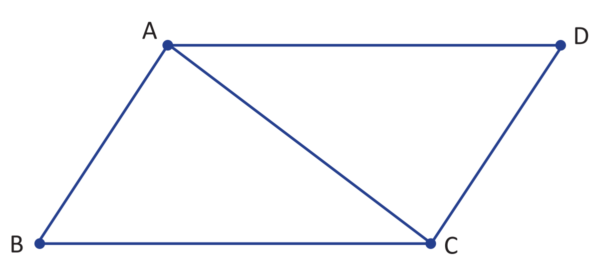
C

A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**

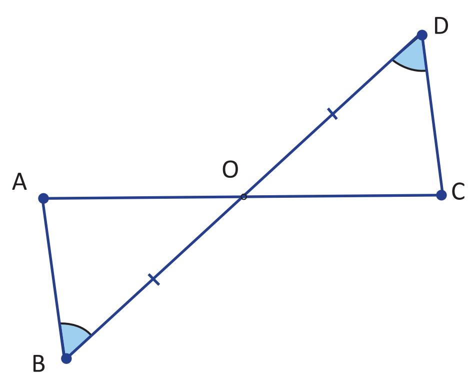
En el problema mostrado anteriormente, las características de los lados y ángulos internos del pentágono regular y los criterios de congruencia de triángulos son asuntos comprobados y la solución mostrada es la *demostración*.

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Dado que el cuadrilátero ABCD es un romboide y AC es diagonal, demuestra que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.



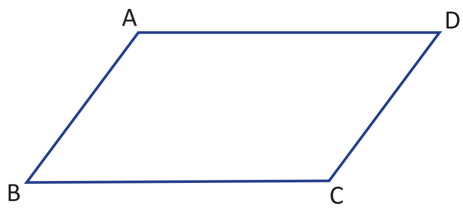
2. Dado que AB ∥ CD y DO = BO. Demuestra que $\Delta ABO \cong \Delta CDO$.



Unidad 5

1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

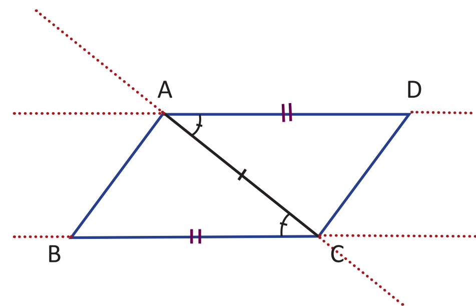
Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.



Utiliza congruencia de triángulos que contenga AB y DC, para demostrar la igualdad de lados.

Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.

Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.



De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

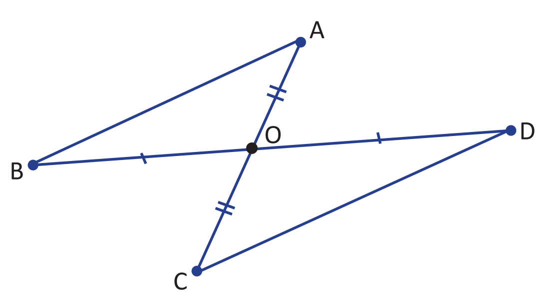
La demostración está estructurada de la siguiente manera:
BC = DA, argumento dado en el enunciado y se le denomina **hipótesis**.

CA = AC
∢BCA = ∢DAC, resultados ya comprobados.
ΔABC ≅ ΔCDA

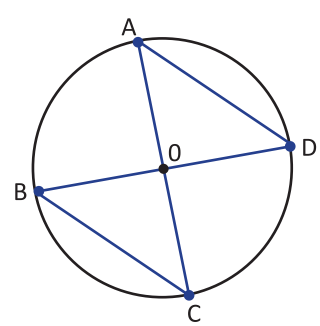
AB = CD, argumento o asunto a demostrar, **conclusión**.

En matemática se usa el lenguaje:
Si ______, entonces ______.
______ corresponde a la hipótesis y
______, corresponde a la conclusión.

1. Dos segmentos AC y BD se cortan en el punto O. Considerando que BO = DO y AO = CO, demuestra que AB = CD, luego escribe la hipótesis y la conclusión.

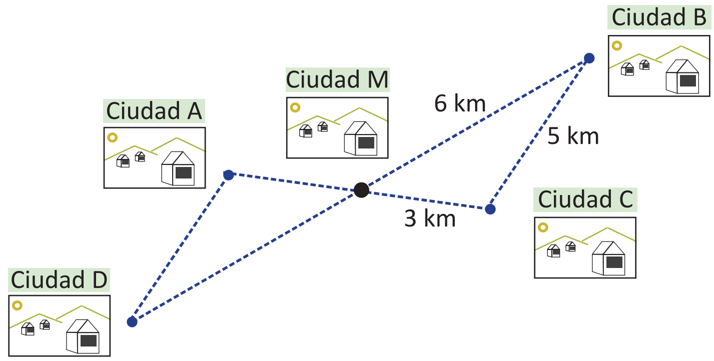


2. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersectan en el centro O del círculo. Demuestra que AD = CB.



1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

El mapa siguiente muestra 5 ciudades. La ciudad M debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: la ciudad A y la ciudad C; y las otras dos son las ciudades B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?



Al comparar las distancias entre cada una de las ciudades se observa que se forman dos triángulos, cuyos elementos se relacionan de la siguiente manera:

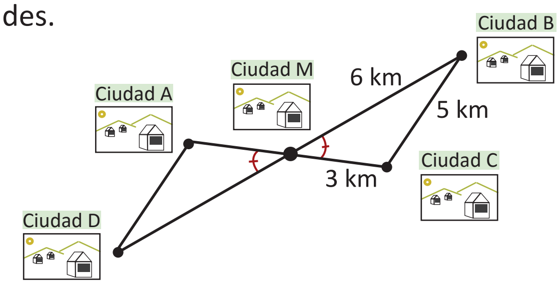
AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.

ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.

DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.



Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. En la figura 1, BC = EC, CA = CD y AB = DE.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de θ.

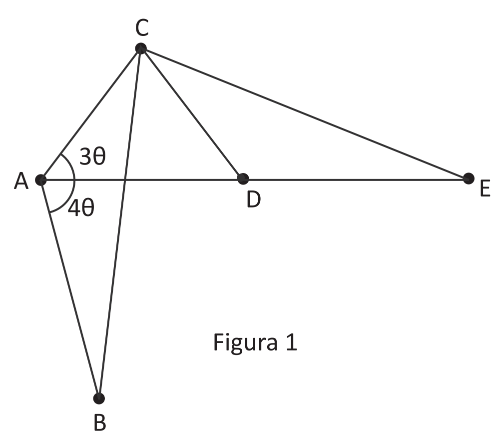


Figura 1

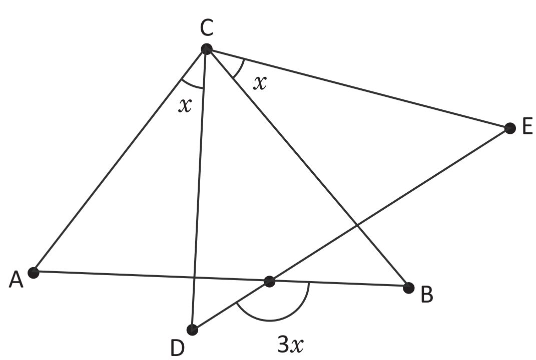


Figura 2

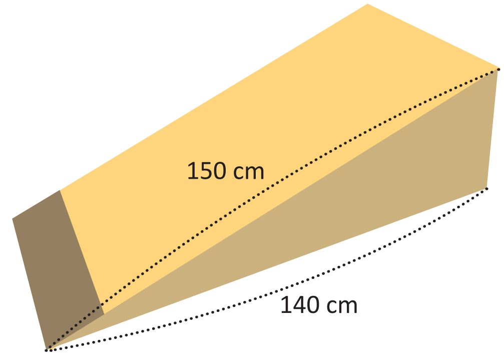
2. En la figura 2, AC = DC, BC = EC.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de x.

Unidad 5

1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

Carlos participará en una competencia de patinaje que se realizará los próximos días y ya tiene lista su rampa para practicar; su primo José, se ha motivado y quiere construir una rampa similar a la de Carlos, pues también quiere participar en la competencia. Carlos le envía una fotografía con la información que se muestra en la figura y le comenta que la medida del ángulo entre los dos lados proporcionados es 13°.

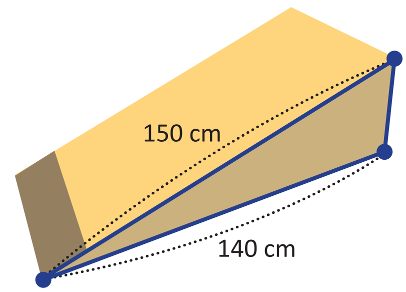


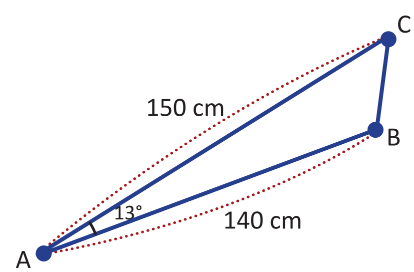
¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

1. Recordar las condiciones del problema:
   - Identificar los lados conocidos que se indican en la figura.
   - Indicar el ángulo entre los lados conocidos; es decir, 13°.
   - Observar que en el costado se forma un triángulo.

2. Aplicar un criterio de congruencia de triángulos.
   Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

3. Extraer los datos y construir la rampa.
   - Medir y cortar las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.
   - Colocar las piezas cortadas la primera como base y la segunda de tal manera que en la intersección de ambas formen un ángulo de 13°.



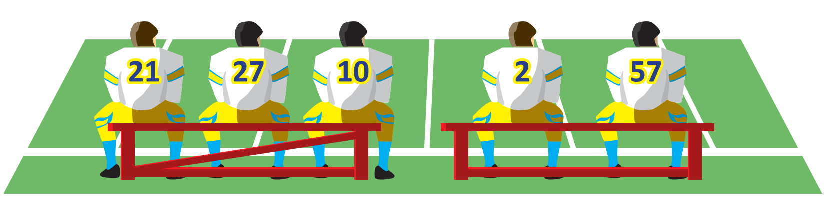


Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. Se necesita reemplazar unas piezas en la pasarela cuyo diseño se muestra en la figura. Antonio está a cargo de construir las piezas a reemplazar; para ello necesita elaborar una réplica, tomando como referencia las piezas que están colocadas.

a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar Antonio como mínimo para replicar exactamente las piezas que se indican en la figura?

b) ¿Las medidas indicadas en el numeral anterior son una manera única de replicar las piezas? Justifica tu respuesta.



2. Observa la imagen y responde. ¿Por qué la banca con el apoyo diagonal es más estable que la otra? Justifica tu respuesta.