6 Unidad

Características de los triángulos y cuadriláteros

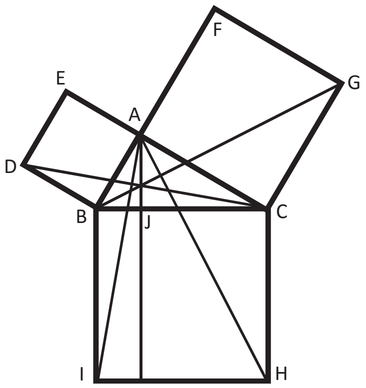
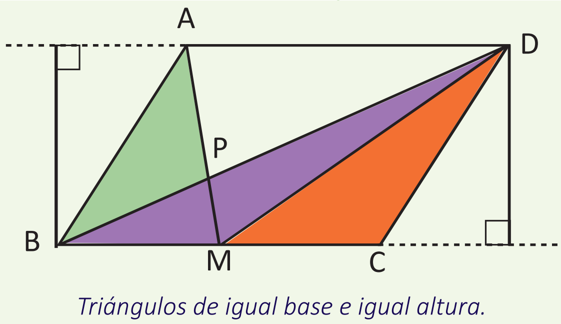


Ilustración de la proposición I. 47, texto Los Elementos *de Euclides.*

El matemático y geómetra griego Euclides, estableció relaciones entre paralelogramos y triángulos con la misma base, que se forman entre rectas paralelas; estas relaciones fueron utilizadas para demostrar otras como la mostrada en la imagen, que corresponde a la proposición I. 47 del libro *Los Elementos*.

Los triángulos son utilizados como base para construir puentes, ventanas, puertas, veleros, señales de tránsito, ganchos para colgar la ropa, etc. Esto debido a que el triángulo es la única figura que no se puede deformar, se haga lo que se haga, seguirá siendo un triángulo.

Pasarela del Redondel Masferrer, San Salvador.



Triángulos de igual base e igual altura.

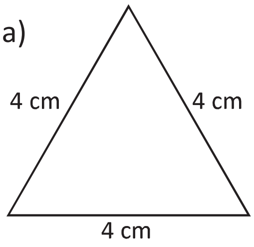
En el desarrollo de los contenidos de esta unidad, conocerás y demostrarás propiedades de triángulos y cuadriláteros, mediante el uso de los criterios de congruencia de triángulos, así como la relación entre las áreas de triángulos y cuadriláteros.

1.1 Triángulos isósceles

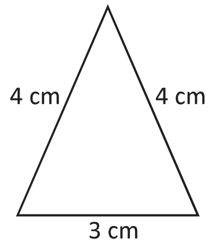
P

Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.

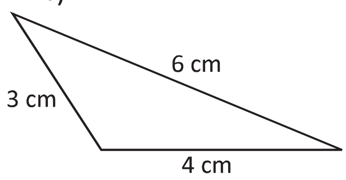
a)



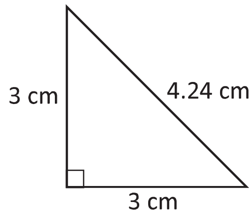
b)



c)



d)



S

a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

Observa que también cada triángulo se puede clasificar por sus ángulos:

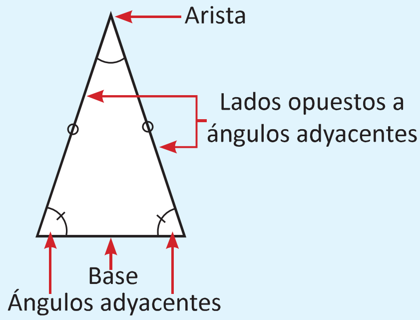
a) Es acutángulo (3 ángulos agudos).
b) También es acutángulo.
c) Es obtusángulo (un ángulo es obtuso).
d) Es rectángulo (un ángulo recto).

C

La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.

Las partes de un triángulo isósceles son:

Arista: Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
Base: Es el lado opuesto a la arista.
Ángulos adyacentes: Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
Lados opuestos a ángulos adyacentes: Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.



E

Verifica la construcción de un triángulo isósceles utilizando papel y comprueba que dos de sus lados y ángulos son iguales. Realiza los siguientes pasos:

1. Toma una hoja de papel y dóblala formando un rectángulo tal como se muestra en la figura 1.
2. Señala la diagonal de ese rectángulo y corta con la tijera exactamente en la diagonal (figura 2).
3. El triángulo que queda en medio, divídelo por la mitad tomando punta a punta y comprueba que es isósceles viendo que sus ángulos y lados coinciden (figura 3).

Figura 1

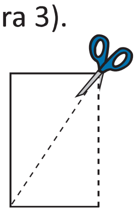


Figura 2

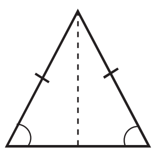
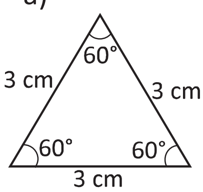


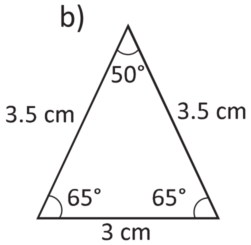
Figura 3

Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.

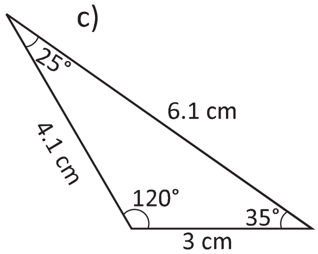
a)



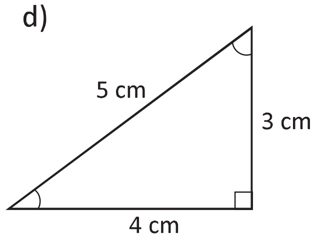
b)



c)



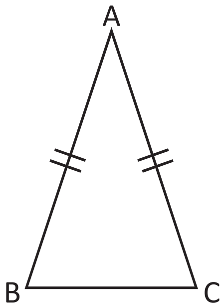
d)



1.2 Teorema del triángulo isósceles

P

Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se tiene la demostración de un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros, que establece que "En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes" (un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes y el tercer lado se le llama base). Pinasco, J. (2009). *Las Geometrías*.

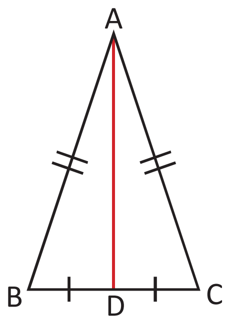
S

Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

DB = DC (por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB (por la congruencia de los triángulos).

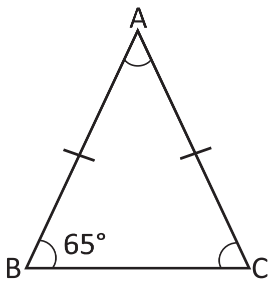


C

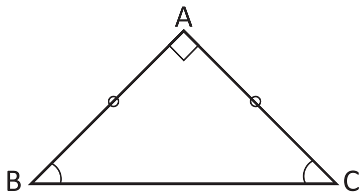
En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema demostrado.

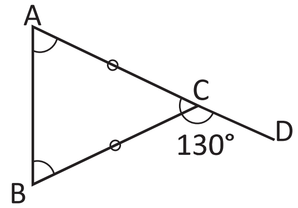
a)



b)



c)



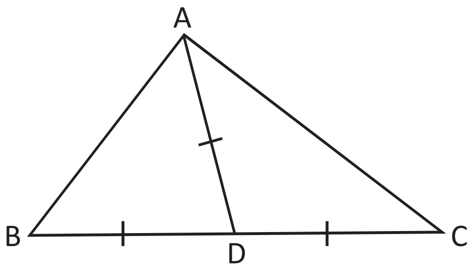
2. En la siguiente figura considera que BD = CD = AD. Justifica las igualdades planteadas en cada literal dejando constancia de lo realizado.

a) ∢DAB = ∢DBA

b) ∢DAC = ∢DCA

c) ∢DBA + ∢ACB = 90°

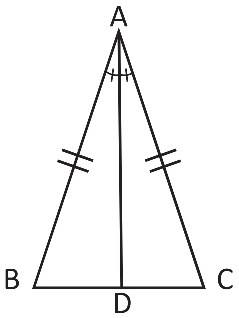
d) ∢CAB = 90°



1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

P

Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.



La bisectriz de un triángulo: es el segmento que divide a cualquiera de sus tres ángulos en dos partes iguales y termina en el correspondiente lado opuesto.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento y que lo divide a la mitad.

Bisectriz Mediatriz

S

En la figura ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

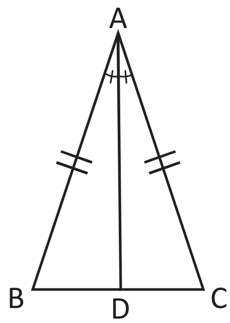
Entonces DB = DC (por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC (por la congruencia de triángulos) . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° (por ser ángulos suplementarios) . . . (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por (1) y (2)).

Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥BC.



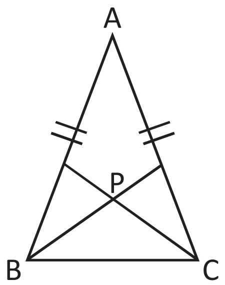
Por lo tanto, AD es mediatriz de BC (DB = DC y AD ⊥ BC).

C

En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud, también es altura y mediana del triángulo isósceles.

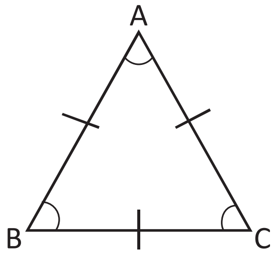
Demuestra que si el ΔABC es isósceles y si se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes, siendo P el punto de intersección entre las dos bisectrices, entonces el ΔPBC es isósceles.



1.4 Triángulos equiláteros

P

Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.



Un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados tienen igual longitud.

S

$\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$BCA (ya que AB = AC) . . . (1)

$\sphericalangle$BCA = $\sphericalangle$CAB (ya que BC = BA) . . . (2)

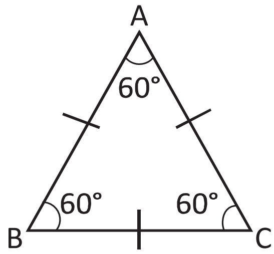
Por lo tanto, $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$BCA = $\sphericalangle$CAB (por (1) y (2)).

Sea x la medida del ángulo:

$3x$ = 180° (por la suma de los ángulos internos de un triángulo).

Entonces, x = 60° (resolviendo la ecuación).

Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60°.

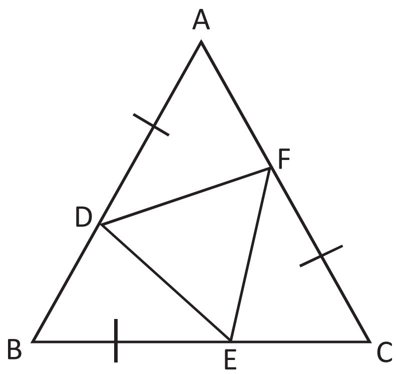


A un triángulo que posee sus tres ángulos de igual medida se le puede llamar **equiangular**.

C

En un triángulo equilátero cada uno de los ángulos internos mide 60°.

Sea el ΔABC equilátero, y además BE = CF = AD. Demuestra que el ΔDEF es equilátero.

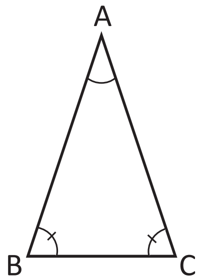


Unidad 6

1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

P

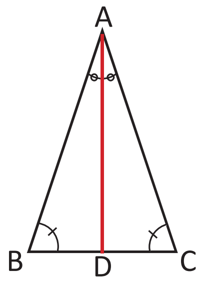
Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



Este resultado se suele enunciar como "a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud".

S

Trazando la bisectriz de ∢CAB, se tiene que



∢DBA = ∢DCA (por hipótesis) . . . (1)
∢DAB = ∢DAC (por construcción de la bisectriz) . . . (2)
∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB) (teorema de ángulos internos de triángulos).
= 180° – (∢DCA + ∢DAC) (por 1 y 2).
= ∢CDA

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio ALA, AD es común, ∢BDA = ∢CDA y ∢DAB = ∢DAC).

Por lo tanto, AB = AC (por la congruencia).

C

En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

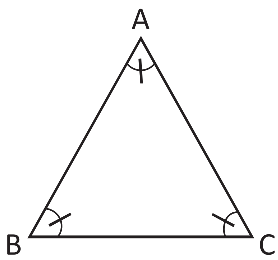
E

Demuestra que si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces es un triángulo equilátero.

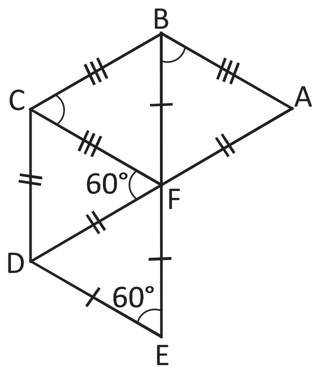
AB = AC (por ∢BCA = ∢ABC, aplicando el resultado demostrado). . . (1)

CA = BC (por ∢ABC = ∢CAB, aplicando el resultado demostrado). . . (2)

Por lo tanto, AB = BC = CA, y el triángulo es equilátero (por (1) y (2)).



Utilizando los datos en la siguiente figura, demuestra que ΔFAB, ΔFBC, ΔFCD y ΔFDE son equiláteros.



1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

P

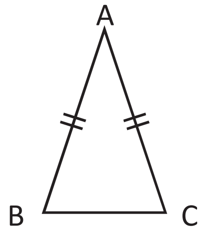
Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

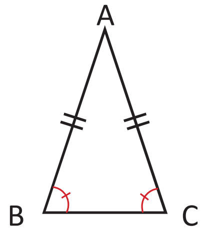
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

S

Analizando el primer teorema: “Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida”.

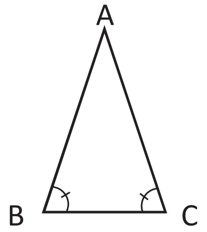
Condición cierta (hipótesis): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

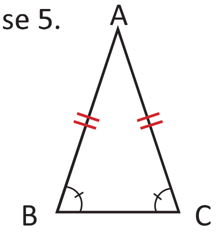




Analizando el segundo teorema: “Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles”.

Condición cierta (hipótesis): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). Demostrado en la clase 5.





El primer teorema es diferente del segundo, pues la condición que se cumple en el primero es la que hay que demostrar en el segundo, y la condición que se cumple en el segundo es la que hay que demostrar en el primero.

C

El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**. El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

E

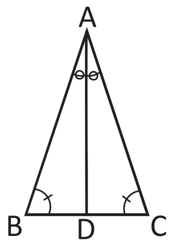
Escribe el recíproco del siguiente enunciado, en el caso de no ser cierto, dar un contraejemplo que lo justifique: “Todo triángulo equilátero es isósceles”.

Recíproco: “Todo triángulo isósceles es equilátero”. No se cumple, observa el contraejemplo.

Contraejemplo: El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

1. Determina el recíproco: “Si los 3 ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles”. Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.

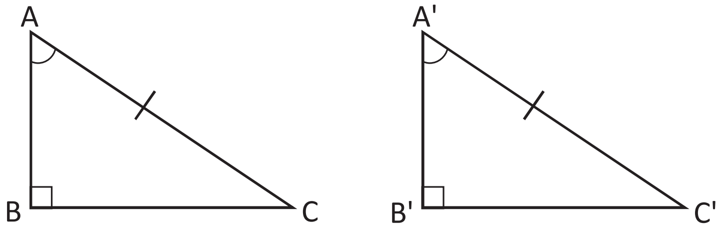
2. Determina el recíproco: “En el triángulo ABC, si AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB, entonces AD es mediatriz de BC”. Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.



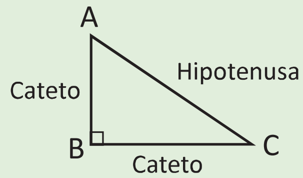
1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si en los triángulos rectángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se cumple que $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 90°$ y $AC = A'C'$; entonces, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



Recuerda que los lados de un triángulo rectángulo tienen los siguientes nombres:

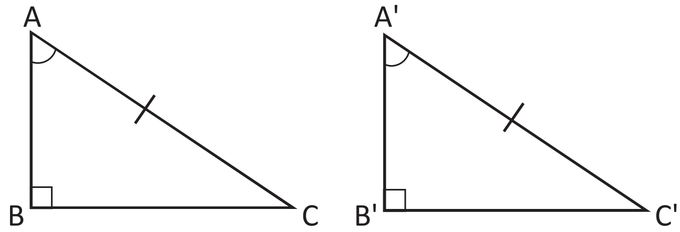


S

Los triángulos tienen los tres ángulos de igual medida porque son rectángulos.

Además, $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$.

Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (por criterio ALA).

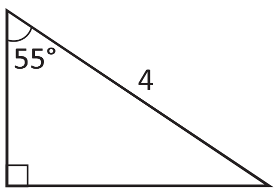


C

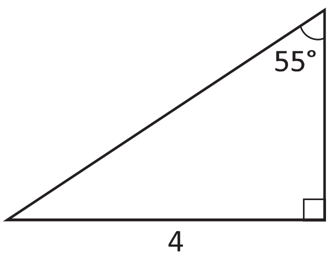
Si en un triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En los siguientes triángulos rectángulos, identifica los congruentes entre sí. Justifica tu respuesta.

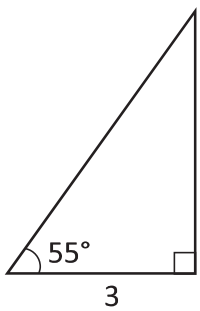
a)



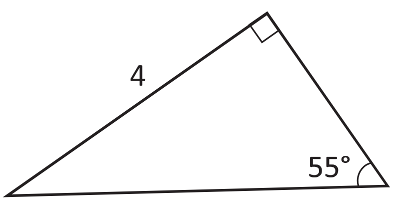
b)



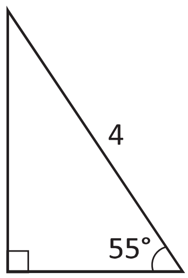
c)



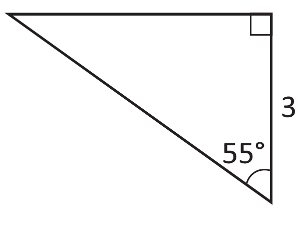
d)



e)



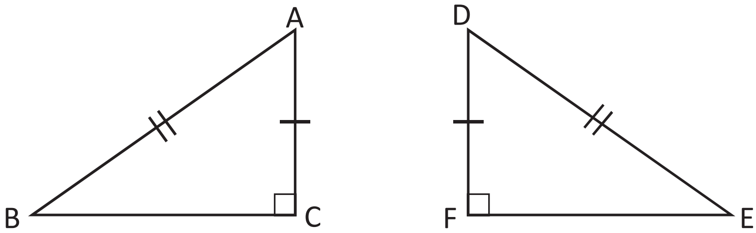
f)



1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



S

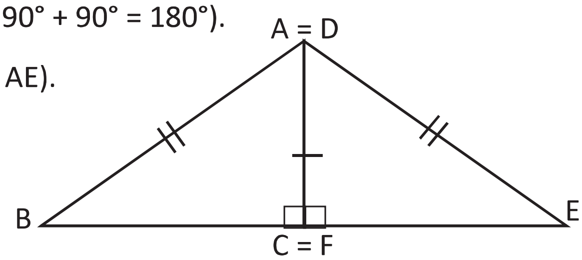
Haciendo coincidir los lados AC y DF.

Los puntos B, C, E están alineados (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°).

Entonces, ΔABE es isósceles (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

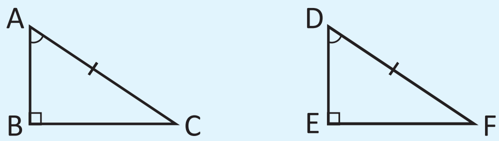


C

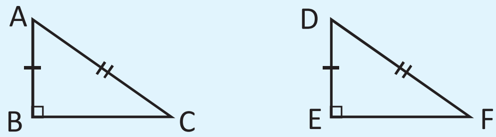
Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.



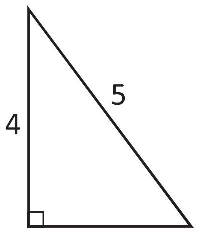
2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.



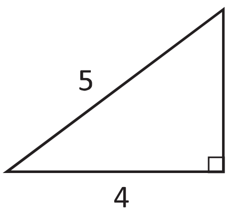
1. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

Observa que si dos catetos tienen igual medida también los triángulos son congruentes por criterio LAL.

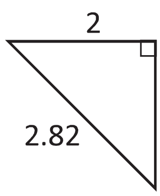
a)



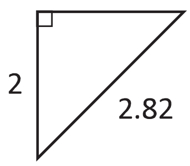
b)



c)



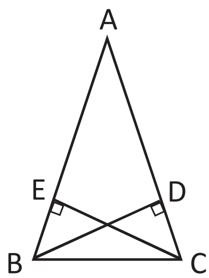
d)



2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que

   a) ΔBCD ≅ ΔCBE

   b) AE = AD



Unidad 6

1.9 Condiciones necesarias y suficientes

Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero   B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

a) Si un triángulo ABC cumple la condición A, también cumple B; pues los triángulos equiláteros tienen los 3 lados iguales y para ser isósceles únicamente necesita 2 lados iguales; por tanto si se cumple A también se cumple B.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero; porque la medida del tercer lado (base), puede ser igual o distinta a la medida de los otros 2 lados.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

Escribe N si A es necesaria para B y escribe S, si A es suficiente para B, para cada una de las situaciones siguientes:

a) Para un triángulo DEF:	A: DEF es isósceles,	B: DEF es equilátero.
b) Para un triángulo DEF:	A: DEF es rectángulo,	B: DEF es isósceles.
c) Para un triángulo DEF:	A: DEF tiene 3 ángulos iguales,	B: DEF es isósceles.
d) Para un cuadrilátero DEFG:	A: DEFG es cuadrado,	B: DEFG es rectángulo.

1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

P

Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: ∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C'.

B: ΔABC ≅ ΔA'B'C'.

S

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C'= 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria para B; pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, la condición A(∢ABC = ∢A'B'C' = 90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C') es necesaria y suficiente para B(ΔABC ≅ ΔA'B'C').

C

Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición "si A entonces B" y la recíproca "si B entonces A".

Para el ejemplo presentado, la proposición "si A entonces B", corresponde que para los dos triángulos rectángulos dados se cumple que ∢ABC = ∢A'B'C'=90°, ∢CAB = ∢C'A'B', AC = A'C', entonces los triángulos son congruentes; mientras que la recíproca "si B entonces A" corresponde a que si dos triángulos son congruentes, entonces tienen iguales sus lados y ángulos correspondientes.

1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

a) A: Isósceles — B: Tiene dos ángulos de igual medida

b) A: Equilátero — B: Tiene tres ángulos de igual medida

c) A: Isósceles — B: Equilátero

d) A: Rectángulo — B: Equilátero

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

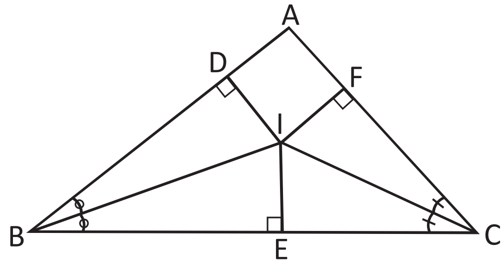
Unidad 6

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

P

En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:

a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.



S

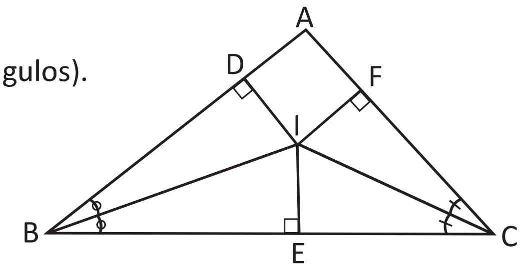
a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ID = IE (por la congruencia) . . . (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, IE = IF (por la congruencia) . . . (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por (1) y (2))

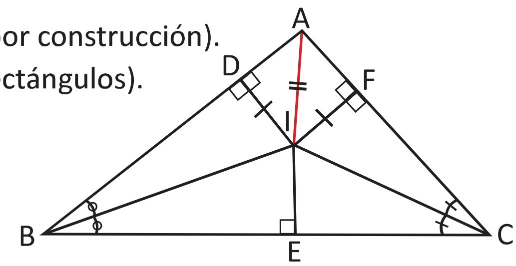


En b) para demostrar que ∢IAF = ∢IAD se necesita demostrar que ΔFIA ≅ ΔDIA.

b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido (por el literal **a** y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.



C

El punto "I" donde se intersecan dos bisectrices de un triángulo se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto "I" perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto "I"; es decir, las 3 bisectrices se intersecan en el incentro.

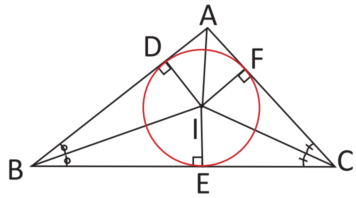
Comprueba utilizando un triángulo de papel que las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **incentro**.

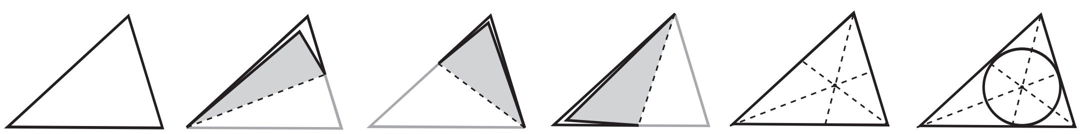
a) Dobla cada ángulo del triángulo por la mitad.

b) Marca el punto donde se intersecan las 3 bisectrices.

c) Dibuja la circunferencia inscrita.

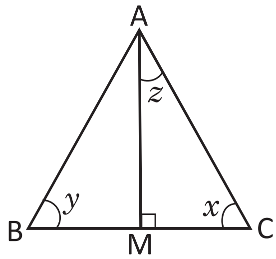
Observa que si el incentro equidista de los tres lados, es posible trazar una circunferencia cuyo radio sea igual a la distancia del incentro a alguno de los lados. Dicha circunferencia se conoce como: **circunferencia inscrita**.



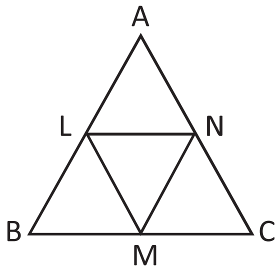


1.12 Practica lo aprendido

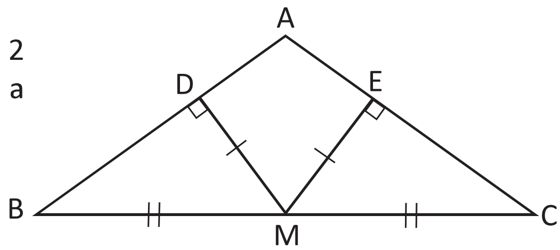
1. En el triángulo equilátero ABC, AM ⊥ BC, responde:



a) ¿Cómo se llama el segmento AM?
b) Determina el valor de los ángulos x, y, z.



2. En la siguiente figura L, M, N son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuestra que el ΔLMN es equilátero.



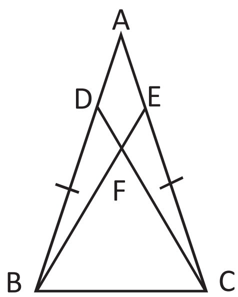
3. En el ΔABC, desde el punto medio M del lado BC se trazan 2 segmentos perpendiculares a AB y AC, e intersecan en D y E a AB y AC respectivamente, Si MD = ME, demuestra:
    a) ΔBDM ≅ ΔCEM
    b) ΔADM ≅ ΔAEM
    c) El ΔABC es isósceles.
    d) Si se traza el segmento DE, entonces DE ∥ BC.

4. En los siguientes enunciados sobre triángulos determina si la condición A es necesaria y/o suficiente para B.
    a) A: Dos triángulos son congruentes.
       B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

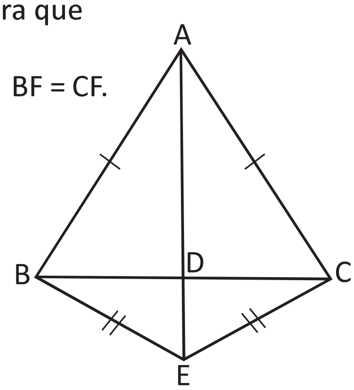
    b) En dos triángulos rectángulos:
       A: La hipotenusa y un ángulo agudo tienen igual medida.
       B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

1.13 Practica lo aprendido

1. En los siguientes enunciados acerca de triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.
    a) A: Equilátero; B: La mediana y la altura coinciden en cada vértice.
    b) A: La mediana y la bisectriz coinciden en cada vértice.
       B: La mediana y la mediatriz coinciden en cada vértice.



2. En un triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados de igual medida AB y AC. Si BD = CE. Demuestra que
    a) BE = CD
    b) Si F es el punto donde se cortan BE y CD entonces BF = CF.



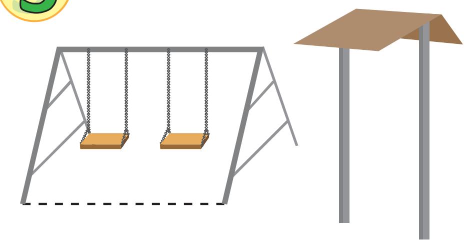
3. En los triángulos isósceles ΔABC y ΔEBC, demuestra que AE ⊥ BC.
    Sugerencia: considera la mediatriz del segmento BC.

4. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

2.1 El paralelogramo

a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.

b) Luego menciona 3 ejemplos de tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

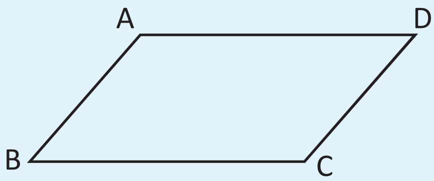


a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros, tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos; al igual que el techo del deslizadero.

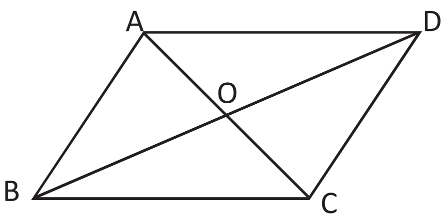
b) Ejemplo 1. La pizarra es un paralelogramo.
Ejemplo 2. Los vidrios de las ventanas.
Ejemplo 3. El escritorio de la profesora o algunos pupitres.

Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumple la condición de ser un paralelogramo.

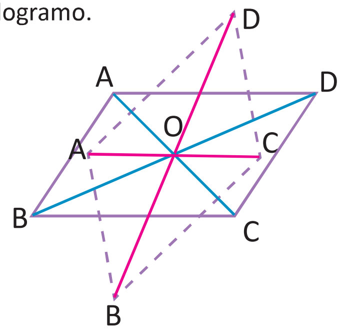


En el paralelogramo ABCD mostrado a continuación, tomando la intersección de las diagonales en el punto O, ¿cuáles pares de segmentos y ángulos son iguales?

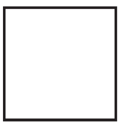


a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

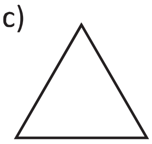
Aunque se gire un ángulo cualquiera con respecto al punto O como punto central, se mantiene el paralelogramo.

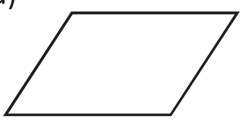


Identifica, en las siguientes figuras, cuáles son paralelogramos. Justifica cada caso.

a) 

b) 

c) 

d) 

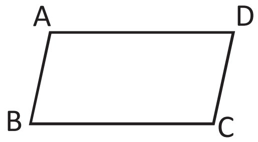
e) 

2.2 Características de los paralelogramos

P

Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.



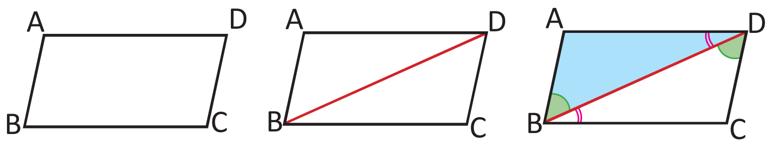
Observa que para demostrar que
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA

Es suficiente demostrar que ΔDBA ≅ ΔBDC, trazando la diagonal BD.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:



∢ABD =∢ CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de (1), (2) y BD es común).

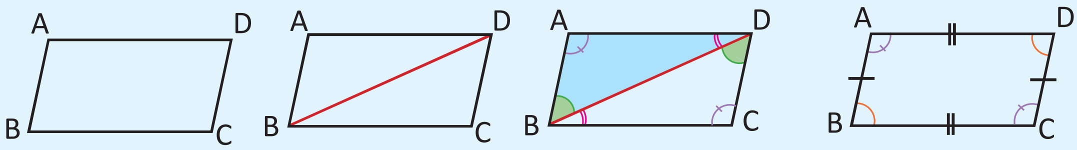
Entonces, AB = DC, AD = BC, ∢DAB =∢ BCD, ∢ABC =∢ CDA.

Observa que ∢ABC = ∢CDA porque en el paralelogramo se cumple que ∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADB.

Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180° (mitad de la suma de los ángulos interno de un cuadrilátero).

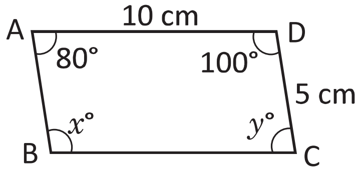
C

En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.



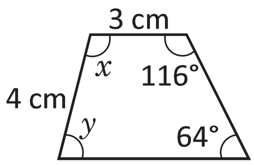
E

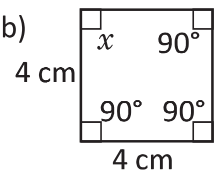
Encuentra los ángulos y lados según las características de los paralelogramos:

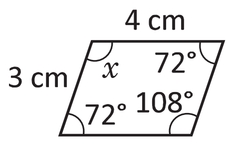


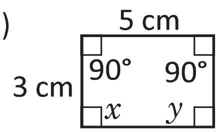
∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

1. Dadas las siguientes figuras, explica si son paralelogramos según sus lados y ángulos, encuentra las medidas de lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.

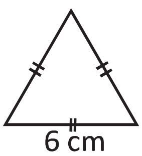
a) 

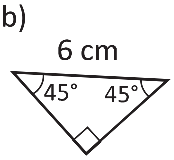
b) 

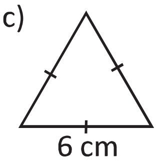
c) 

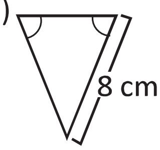
d) 

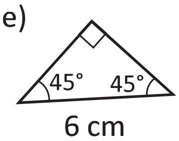
2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirse forman un paralelogramo y explica por qué son paralelogramos.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Unidad 6

2.3 Diagonales de un paralelogramo

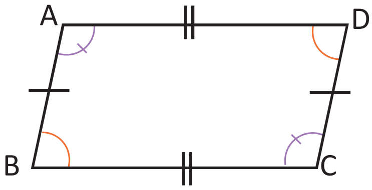
P

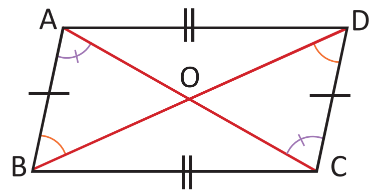
Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Recuerda que un cuadrilátero tiene 2 diagonales.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.





Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)

∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(2)

∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(3)

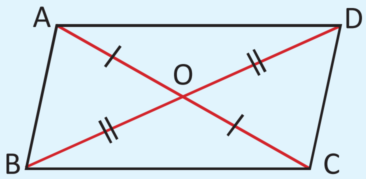
Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

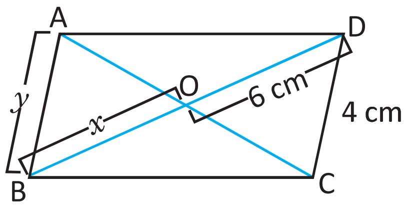
Para demostrar que OA = OC y OB = OD es suficiente demostrar que ΔOAB ≅ ΔOCD.

C

En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



1. Escribe qué característica del paralelogramo ABCD se debe utilizar para determinar el valor de x y y.



2. En el siguiente dibujo las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en el punto O y el segmento PQ pasa por el punto O. Completa la demostración de que PO = QO colocando en los espacios en blanco lo que corresponde:

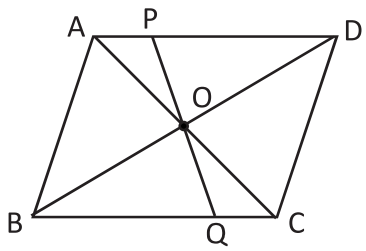
☐ = ☐ (por propiedad de los paralelogramos) . . .(1)

☐ = ☐ (por ser ángulos alternos internos entre las paralelas) . . .(2)

☐ = ☐ (son ángulos opuestos por el vértice) . . . (3)

ΔAOP ≅ ΔCOQ (por criterio de congruencia ALA, de (1), (2) y (3)).

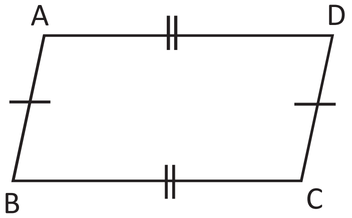
Por lo tanto, PO = QO (☐).



2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Para demostrar que AD∥BC y AB∥DC es suficiente, demostrar que ΔABD ≅ ΔCDB, trazando la diagonal BD.

S

Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD≅ ΔCDB (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común).

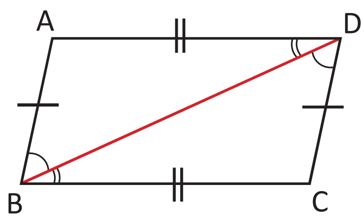
Entonces, ∢ABD = ∢CDB (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

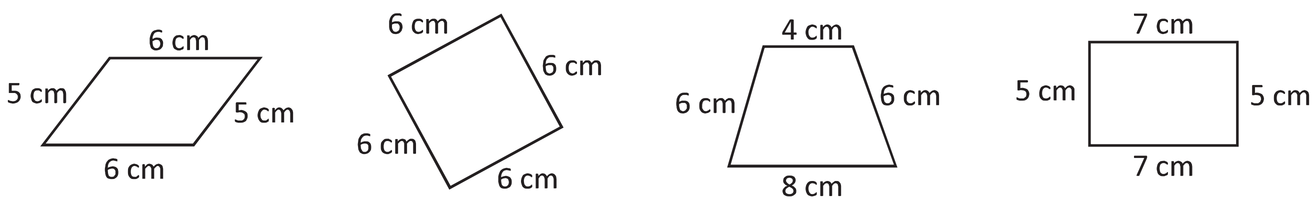


C

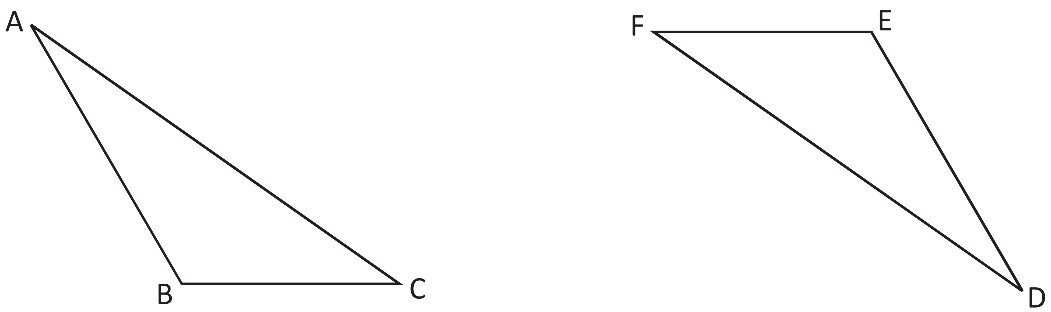
Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de “en un paralelogramo los pares de lados opuestos son de igual medida”.

Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

1. En los siguientes cuadriláteros describe los que cumplen la condición de paralelogramos.



2. ΔABC y ΔDEF son congruentes. Explica por qué al unir estos triángulos se forma un paralelogramo.



Unidad 6

2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.

Estableciendo los puntos E y F sobre la prolongación de los lados BC y CD respectivamente. Para demostrar que AB ∥ DC y BC ∥ AD es suficiente, demostrar que ∢ABC = ∢DCE, ∢BCD = ∢ADF.

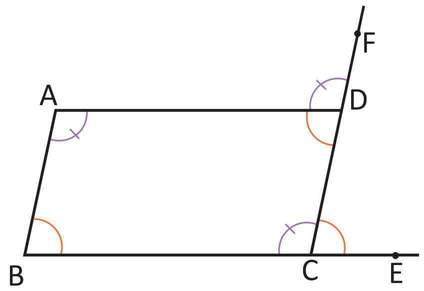
S

Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;

2∢ABC + 2∢BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA).

Entonces ∢ABC + ∢BCD = 180° (dividiendo por 2) . . . (1)

También ∢BCD + ∢DCE = 180° (por ángulos suplementarios) . . . (2)



Luego, ∢ABC = ∢DCE (restando (2) de (1)).

Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).

De la misma manera se procede para demostrar que BC ∥ AD.

Una vez se realiza la demostración se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

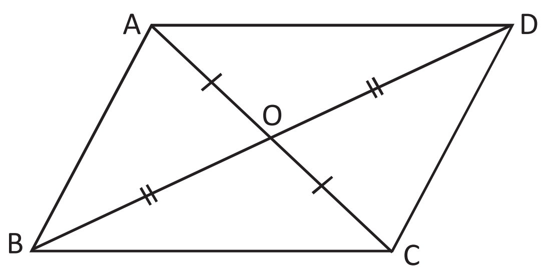
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C

Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero entonces es un paralelogramo, este es el recíproco del teorema: "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

Ser paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio es un paralelogramo.



Es suficiente comprobar que los lados opuestos son de igual medida para demostrar que ABCD es paralelogramo. Para ello, se puede pensar en los cuatro triángulos que se forman dentro del paralelogramo.

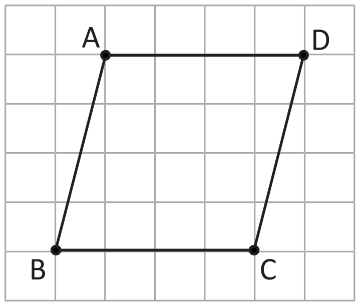
2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

P

Dibuja en tu cuaderno la figura, para ello realiza los siguientes pasos; luego responde:

1. Traza un segmento AD utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud.
2. Traza otro segmento BC utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud, 4 líneas más abajo de la primera.
3. Traza los segmentos AB y CD.

¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.



S

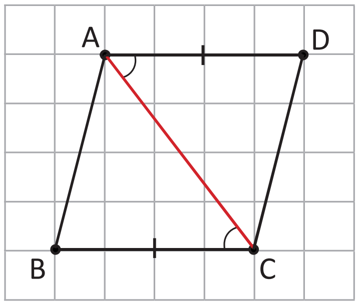
Por los pasos que se siguieron para construir la figura AD = BC = 4 cm y AD∥BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.

Trazando la diagonal AC.

Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).

Luego, AB = CD (por la congruencia).

Por lo tanto, ABCD es paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).



C

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

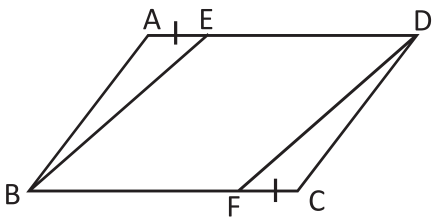
E

Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestra que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

ED ∥ BF

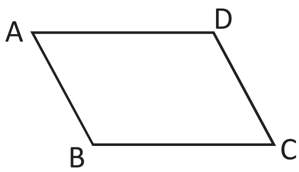
ED = AD – AE = BC – FC = BF

Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

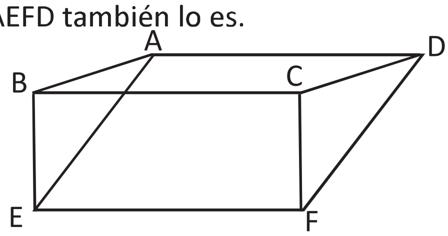


1. En el cuadrilátero ABCD determina cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

   a) BA = AD, BC = CD
   b) AB = DC, AD = BC
   c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA



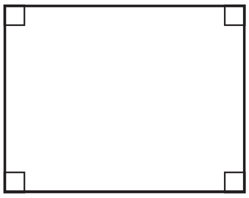
2. En el dibujo los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestra que el cuadrilátero AEFD también lo es.

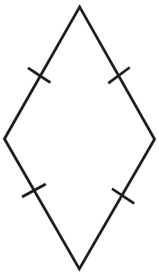


2.7 Características del rectángulo y el rombo

P

Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.





Definición de un rectángulo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos congruentes.

Definición de rombo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

S

- Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.
- Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

C

El rectángulo es un paralelogramo por sus ángulos y por sus lados, el rombo también lo es.

E

Demuestra los siguientes resultados sobre las diagonales del rombo y el rectángulo.

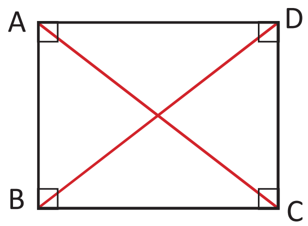
a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Para demostrar que AC = DB, es suficiente demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.

1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.

   Entonces $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (por criterio LAL, AB = DC, BC es común y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 90°$).

   Por lo tanto, AC = BD (por la congruencia).



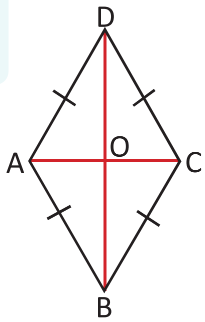
2. Trazando las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y llamando O al punto donde se intersecan.

   Entonces, ΔACD es isósceles (por ser rombo DA = DC).

   Para demostrar que $BD \perp AC$, es suficiente demostrar que DO es la altura de ΔACD.

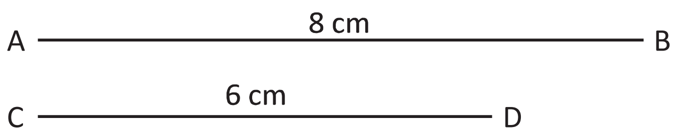
   Luego, DO es mediatriz de ΔACD (por ser paralelogramo las diagonales se intersecan en el punto medio).

   Por lo tanto, $DB \perp AC$ (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediatriz, según la clase 1.3).



1. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

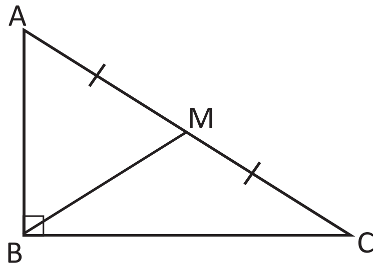
2. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con los segmentos AB y CD.



2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

P

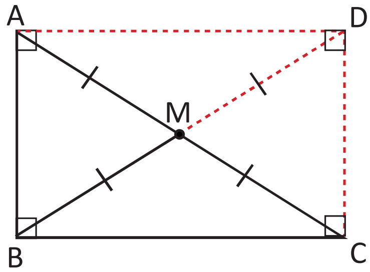
Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Recuerda que en un rectángulo las diagonales se intersecan en su punto medio.

S

Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD, que se intersecan en el punto medio, por ser paralelogramo M.



BM = $\frac{1}{2}$ BD (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (2)

Además AC = BD (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC (de (1), (2) y (3)).

C

En todo triángulo rectángulo, el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, tiene una longitud congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

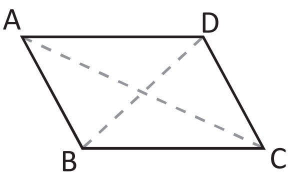
E

¿El cuadrado es un paralelogramo?
Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes entonces, los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

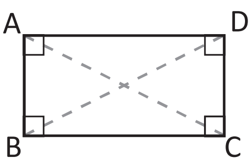
Recuerda que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y 4 lados congruentes.

1. ¿Cuáles son las condiciones que se deben adicionar para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado? Escoge del literal **a** al literal **d** las condiciones correspondientes.

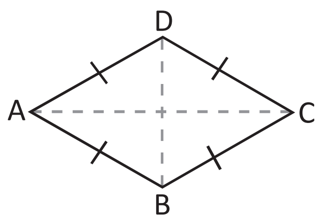
a) $\measuredangle A = 90°$ b) AB = BC c) AC = BD d) AC⊥BD



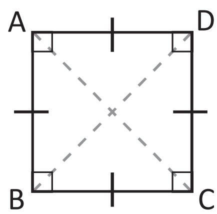
Paralelogramo



Rectángulo

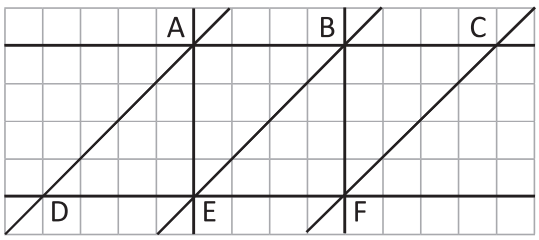


Rombo



Cuadrado

2. En la siguiente figura identifica los paralelogramos que se forman, luego clasificalos según sean rectángulos, cuadrados, rombos, o solamente paralelogramos.

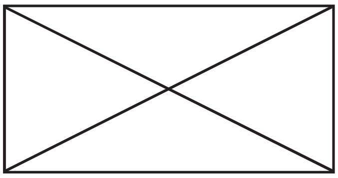


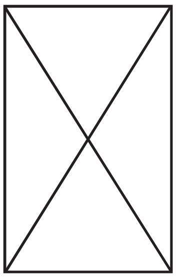
Unidad 6

2.9 Recíproco de características de rectángulos

P

¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero no sean rectángulos?





Piensa en el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales".

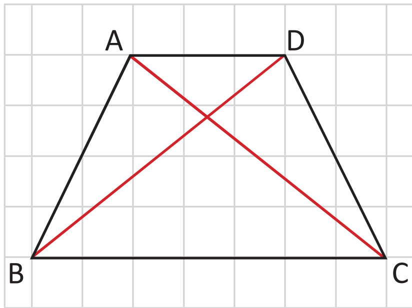
El trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

S

Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ para determinar que AC = DB.

Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, no significa que el cuadrilátero es rectángulo, puede ser otro tipo de cuadrilátero.



C

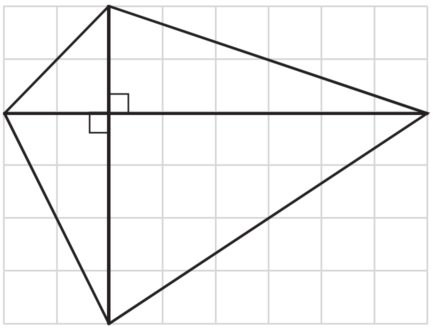
El recíproco del enunciado "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo propuesto.

Para demostrar la veracidad del recíproco del teorema, en este caso, se utilizó un **contraejemplo**.

En este caso como no se cumple, también se puede decir que ser rectángulo es una condición **suficiente** para que las diagonales sean congruentes, pero **no es necesaria.**

E

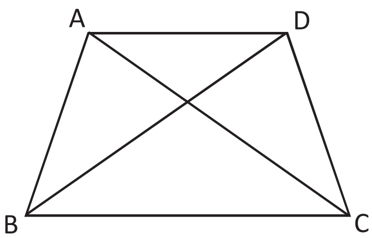
¿Un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan perperdicularmente, es un rombo?



Esto no es cierto ya que el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, pero no es un rombo, ya que sus lados son desiguales.

Este enunciado es el recíproco de "en un rombo las diagonales se intersecan perperdicularmente".

1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles que no es un paralelogramo son congruentes.

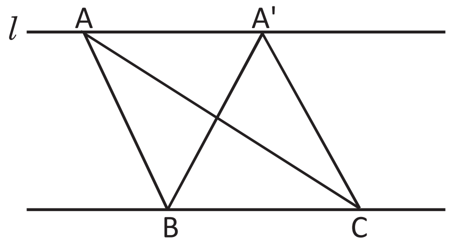


2. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

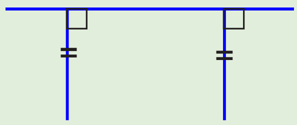
2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

P

En la siguiente figura, la línea l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.

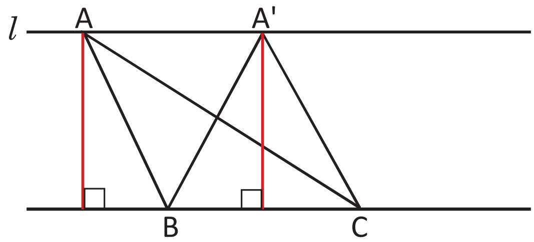


En un par de líneas paralelas, las líneas perpendiculares trazadas desde dos puntos de una línea paralela a la otra, tienen la misma longitud.



S

Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.



Estos triángulos tienen la misma base y al determinar la altura a cada uno de ellos, las dos son congruentes, dado que están entre dos rectas paralelas.

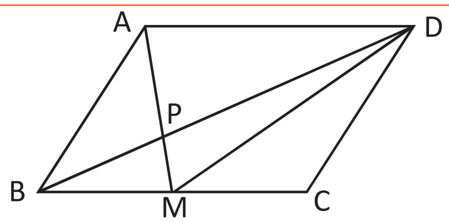
Por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

C

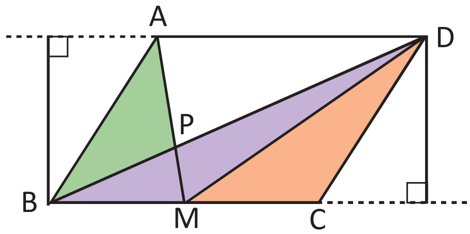
Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra, tienen igual longitud.

E

ABCD es un paralelogramo; M es el punto medio del segmento BC, P el punto de intersección del segmento BD y AM. Establece cuáles son los triángulos que tienen la misma área.

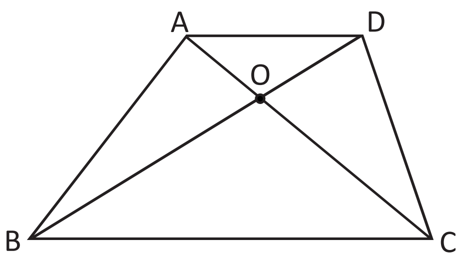


Los triángulos ABM, DBM y DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD y BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura, dada la propiedad que entre líneas paralelas los segmentos perpendiculares tienen la misma longitud.



También se puede decir que las áreas de los triángulos ABP y DMP son iguales, puesto que las áreas de ABM y DBM son iguales y se les está restando la misma porción de área a ambos (MPB).

Si se establece como punto O la intersección de diagonales en el trapecio ABCD con AD‖BC, demuestra que las áreas de los triángulos AOB y DOC son iguales.

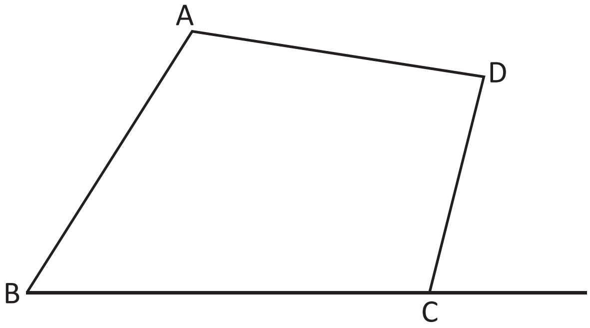


Unidad 6

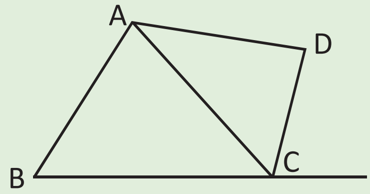
2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

P

En el cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?



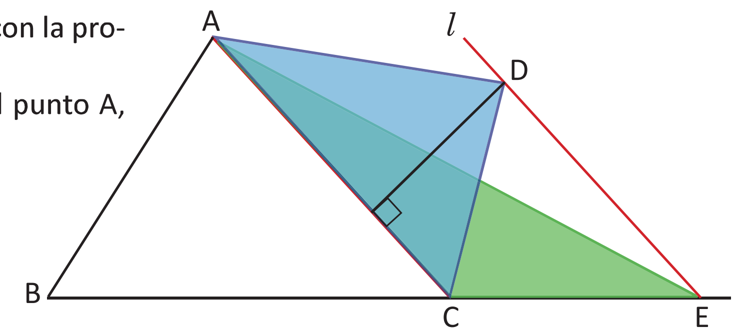
Puedes intentar encontrar el triángulo que tenga la misma área que el triángulo ACD, relacionando rectas paralelas y áreas.



S

Para elaborar el ΔABE que tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, puedes seguir los pasos:

1. Trazar la diagonal AC.
2. Trazar la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se intersecta con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.



Con esta construcción se tiene que área de ΔDAC = área de ΔEAC (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = área de ΔABC + área de ΔDAC.
Área de ΔABE = área de ΔABC + área de ΔEAC.

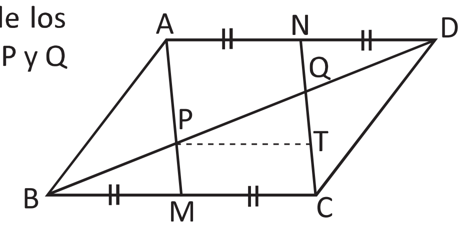
Por lo tanto, área de ΔABE = área del cuadrilátero ABCD (área de ΔDAC = área de ΔEAC).

C

Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

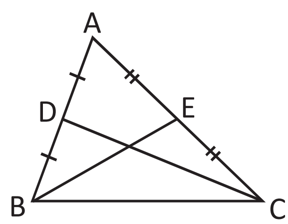
1. En un paralelogramo ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados BC y AD, el segmento BD intersecta a AM y CN en los puntos P y Q respectivamente, si BQ = 12, calcula la longitud de QD.

Puedes establecer el punto T de modo que PT sea paralelo a MC.



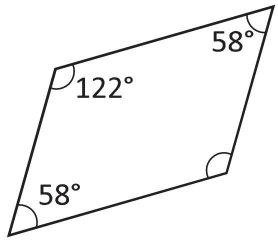
2. En el triángulo ABC los puntos medios de los lados AB y AC se establecen como D y E respectivamente, se traza el segmento DE paralelo a BC y DE = $\frac{1}{2}$BC. Demuestra:

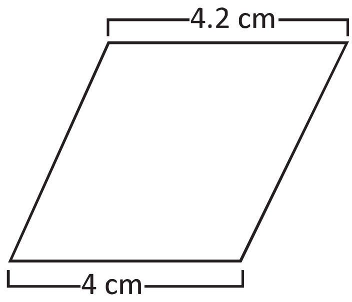
   a) El área de los triángulos DBE, ADE, DCE es igual.
   b) Dos veces el área del triángulo DBE es igual al área del triángulo ABE e igual al triángulo EBC.

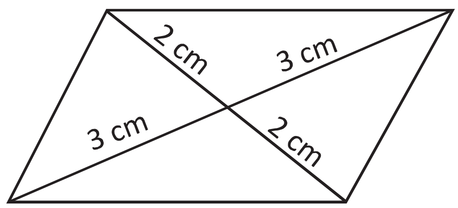


2.12 Practica lo aprendido

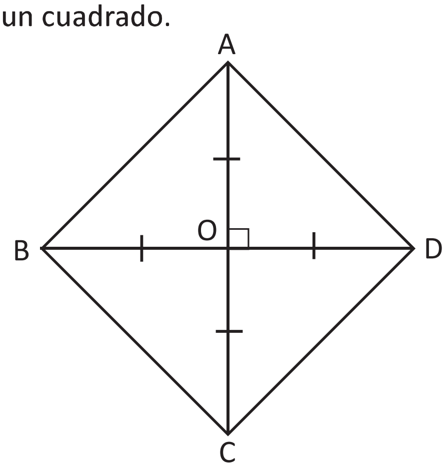
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden ser paralelogramos? Menciona qué condición aprendida en la clase 6 de esta lección se aplica.



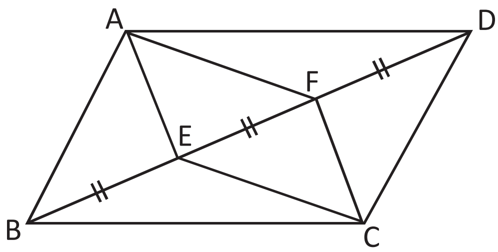




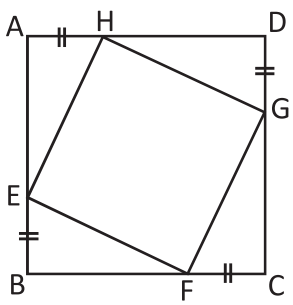
2. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado.



3. En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y BE = EF = FD. Demuestra que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



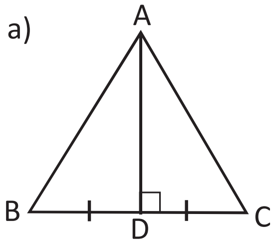
4. ABCD es un cuadrado y los lados señalados son congruentes. Demuestra que EFGH también es un cuadrado.



2.13 Practica lo aprendido

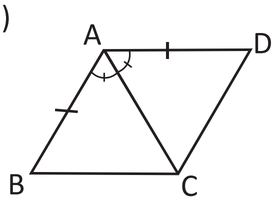
1. Según la información mostrada, determina si los triángulos indicados son congruentes o no. Explica tu respuesta.

a)



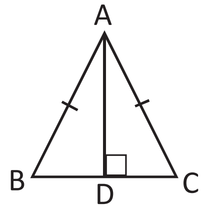
ΔABD y ΔACD

b)



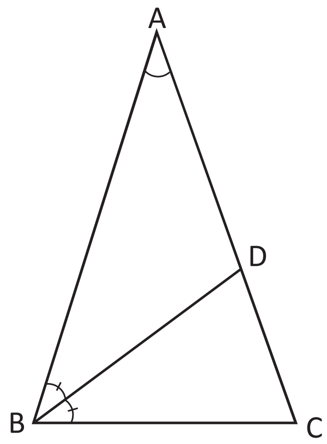
ΔABC y ΔACD

c)

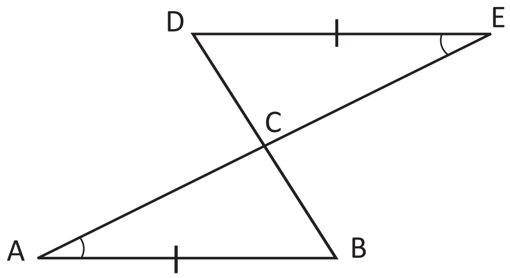


ΔABD y ΔACD

2. En el ΔABC, AB = AC y ∢CAB=36°. DB es la bisectriz del ∢ABC que corta el lado AC en el punto D. Demuestra que BC = BD = DA.

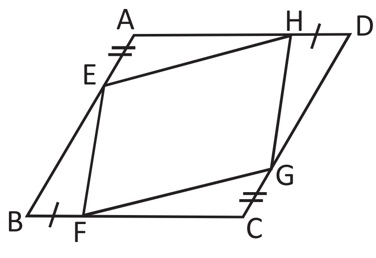


3. En la siguiente figura DE = AB y ∢DEC= ∢BAC, demuestra que AD = BE.



4. Se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

   [Sugerencia: Observa que AH = CF, deduce que ΔAEH ≅ ΔCGF]



5. En la figura el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, se tiene que BE y DF son bisectrices de ∢ABC y ∢CDA, respectivamente.

   Demuestra que BE ∥ DF. Utiliza la condición 3 de los paralelogramos.