Área y volumen de sólidos geométricos

7 Unidad

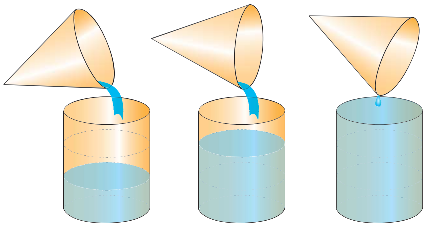
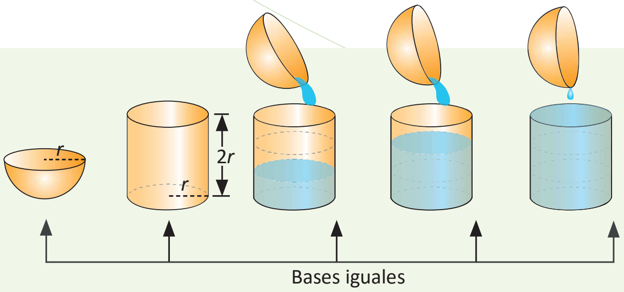


Ilustración de la relación entre volumen del cono y del cilindro.

El matemático y geómetra Euclides, relacionó los volúmenes de los prismas y pirámides, estableciendo en la proposición 10 del libro XII del texto ***Los Elementos***, que el volumen del cono es un tercio comparado con el volumen del cilindro que tiene la misma base y altura; aunque es importante mencionar que él no fue el primero en dedicarse al estudio de los sólidos, pues ya Platón había estudiado los sólidos regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro conocidos en la actualidad como sólidos platónicos.

En la vida cotidiana, los sólidos son utilizados como base para construir objetos decorativos, diseño de edificios, materiales deportivos, educativos, depósitos para almacenar diferentes productos medicinales, cosméticos, industriales, etc.

Edificio de la Lotería Nacional (1970)



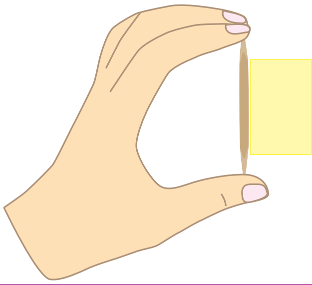
Deducción del volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro.

En esta unidad conocerás el origen de los sólidos más comunes, sus características, cálculo de áreas, volúmenes y relaciones que existen entre el volumen del cilindro, cono y esfera; así como su uso en diferentes contextos del entorno.

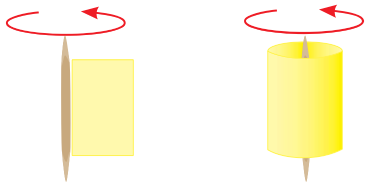
1.1 Sólidos de revolución

Se tiene un trozo de cartulina en forma de rectángulo, como muestra la figura.

Si se gira alrededor de un palillo de dientes, ¿qué se puede observar? ¿Se forma algún sólido geométrico que ya conoces?



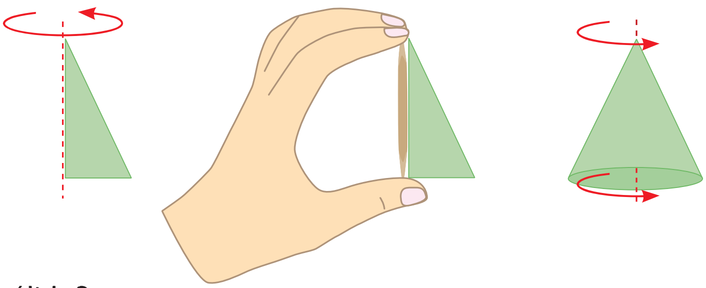
Al doblar el rectángulo a modo que gire, se puede ver que el sólido que se forma es un cilindro.



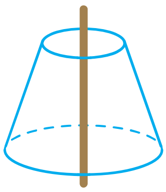
A los sólidos geométricos que pueden generarse girando una figura plana alrededor de un eje se les llama **sólidos de revolución**.

1. ¿Qué sólido se genera si se gira un triángulo rectángulo alrededor de un cateto?

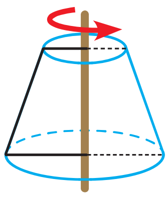
   El sólido que se forma es un cono.



2. ¿Con qué figura se ha generado el siguiente sólido?

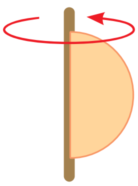


Para generar el sólido, la figura plana que se ha rotado es la mitad de un trapecio isósceles, como se puede ver a la derecha.

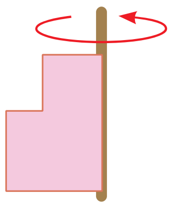


1. Dibuja el sólido que se forma al girar:

   a) Un semicírculo

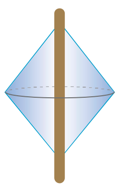


   b) Dos rectángulos

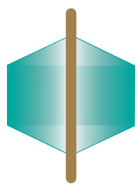


2. ¿Cuál es la figura plana que se ha girado para obtener los siguientes cuerpos geométricos?

   a)



   b)

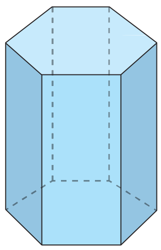


1.2 Características y elementos del cono y la esfera

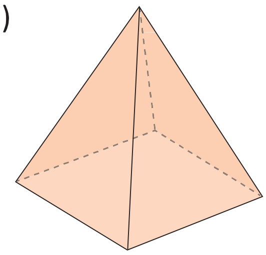
P

Escribe las características de los siguientes cuerpos geométricos:

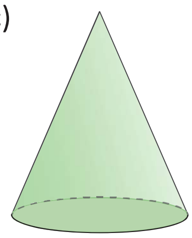
a)



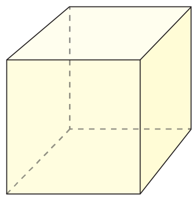
b)



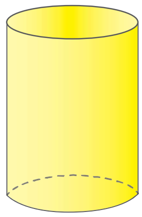
c)



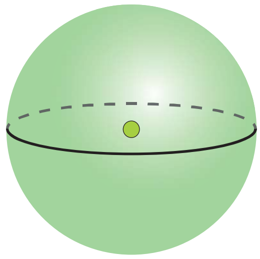
d)



e)



f)



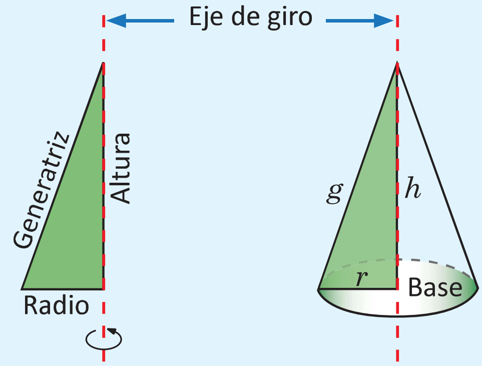
S

a) Tiene dos bases poligonales y sus caras son planas.
b) Tiene una sola base y una cúspide, además sus caras son planas.
c) Está formado por una sola cara plana círcular, un vértice y su cara lateral es curva.
d) Todas sus caras son planas y cuadradas.
e) Tiene dos bases circulares y su cara lateral es curva.
f) Es una superficie totalmente curva, no tiene caras laterales ni bases.

C

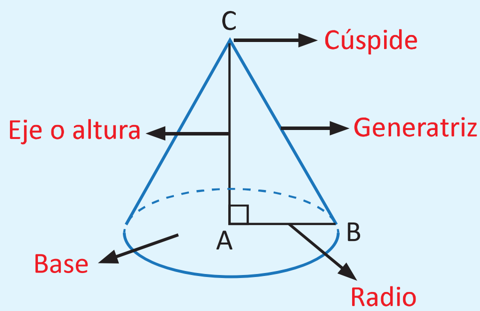
El **cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.

El cono puede verse como una superficie de revolución. La figura plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.



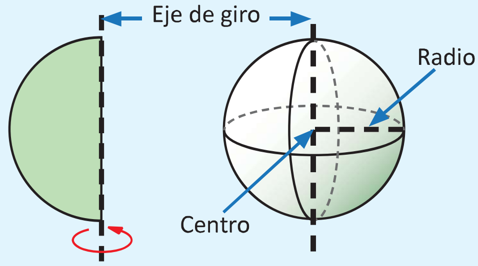
Los elementos que componen un cono son:

- Generatriz (g): es la línea que mediante la rotación genera el cono.
- Base: cara circular sobre la cual se apoya el cono.
- Radio (r): radio de la base.
- Vértice o cúspide.
- Altura (h): segmento que une el vértice y el centro de la base. La altura está contenida en el eje de giro.



Unidad 7

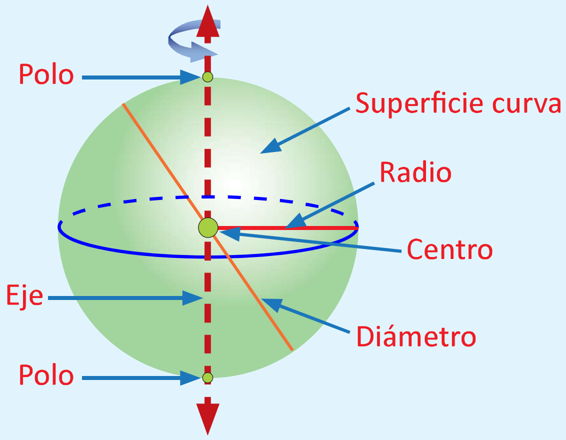
Una **esfera** es un cuerpo redondo formado por una sola superficie curva. Puede verse también como un sólido de revolución, haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.



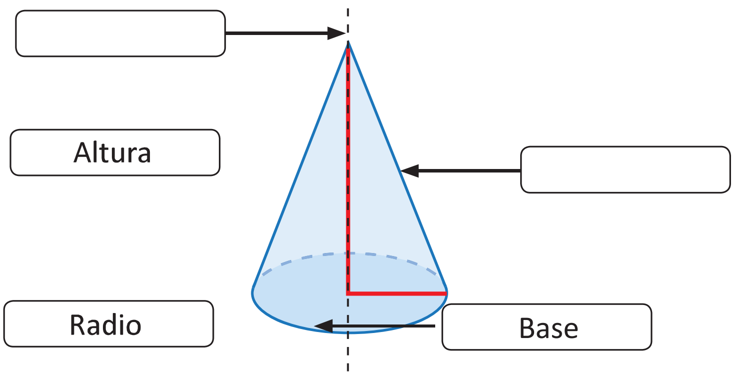
Todo punto sobre la superficie curva equidista de un punto llamado **centro**.

Los elementos de una esfera son:

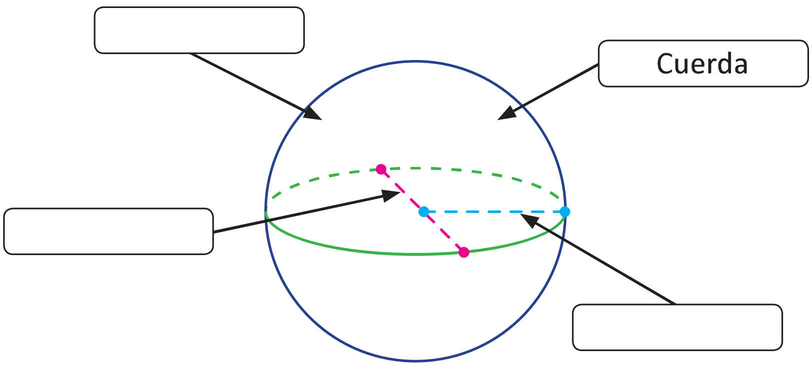
- Centro: punto interior de la esfera que equidista de cualquier punto de la esfera.
- Radio: distancia del centro a un punto cualquiera de la esfera.
- Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la esfera.
- Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- Polos: puntos donde la esfera corta al eje de rotación.



1. Dibuja en tu cuaderno los siguientes sólidos, luego escribe el nombre a los elementos que se indican con los espacios en blanco y donde sea necesario, traza una flecha para relacionar el nombre con el respectivo elemento.



2. Completa colocando los nombres de los elementos de la esfera o dibujando lo que falte, donde corresponda.

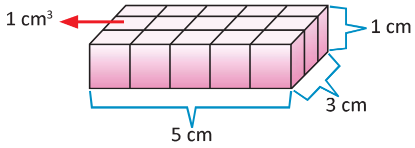


2.1 Volumen del prisma y del cilindro

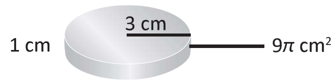
P

Observa las siguientes situaciones, luego contesta:

1) Con cubitos de 1 cm^3 se forma una base como se muestra:
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 4 bloques?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.

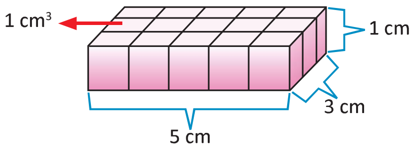


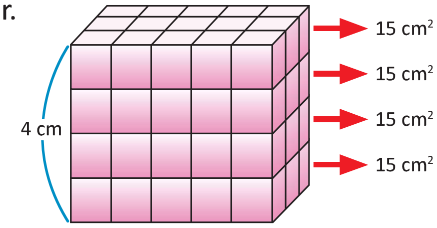
2) Se tiene un disco de radio 3 cm y altura 1 cm
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 5 discos?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.



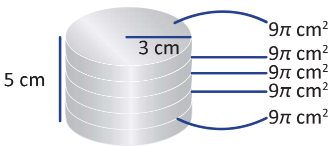
S

1. a) Se obtiene un prisma rectangular.
   b) $V = 15\text{ cm}^2 \times 4\text{ cm}$





2. a) Se obtiene un cilindro.
   b) $V = 9\pi\text{ cm}^2 \times 5\text{ cm}$



Un cilindro es un sólido limitado por dos caras circulares y por una superficie curva. La superficie curva se llama cara lateral y las dos caras circulares se llaman bases.

El volumen de un prima es:

V_{Prisma} = Área de base × altura

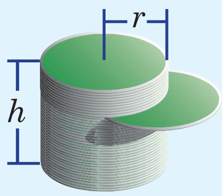
El área de un círculo de radio r está dado por la fórmula:

$A_{círculo} = \pi r^2$

C

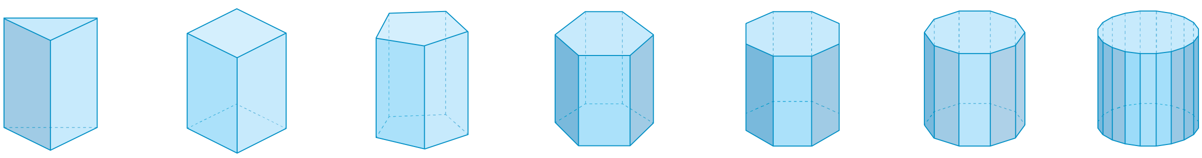
Se deduce entonces, que el volumen del cilindro se obtiene de una manera análoga al volumen de un prisma, es decir, el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base ($A_B = \pi r^2$) por la altura (h).

$$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$$



E

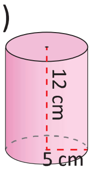
Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos, ¿a qué figura plana se aproxima la base del prisma cuando se aumenta el número de lados?



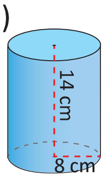
La base se aproxima a un círculo. Por tanto, el volumen del prisma se aproxima al volumen del cilindro cuando el número de lados de la base aumenta.

Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y la altura.

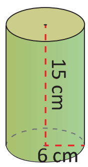
a)



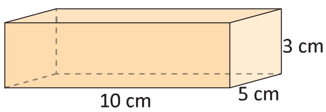
b)



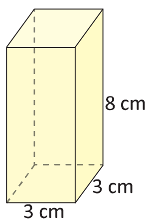
c)



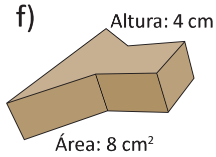
d)



e)



f)



Unidad 7

2.2 Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular

P

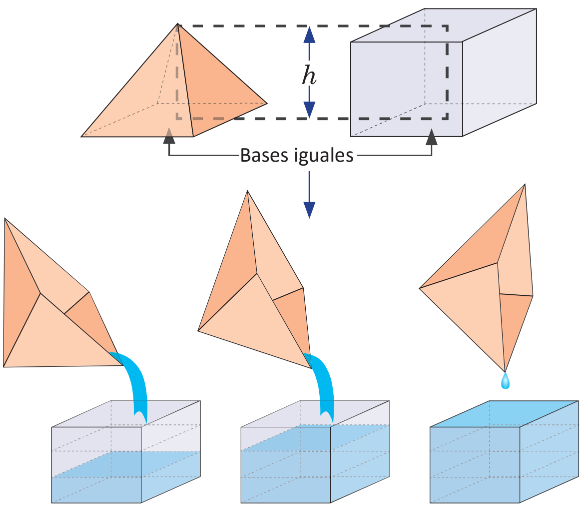
Si se tiene un prisma y una pirámide que tienen una base cuadrangular congruente e igual altura, ¿cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el prisma?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras planas y que encierran un volumen.

Una pirámide es un poliedro limitado por una sola base poligonal y por varias caras laterales, con forma triangular, que tienen un vértice común.

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la pirámide como el prisma, están hechos de un material resistente al agua.



Para determinar cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el del prisma, se llena de agua la pirámide y se vierte en el prisma, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.

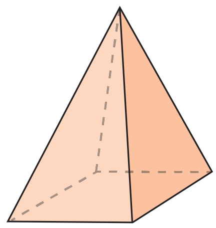
A partir de este resultado se concluye que el prisma tiene tres veces el volumen de la pirámide. Es decir, el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

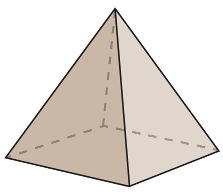
C

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base (A_B) por su altura (h):

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

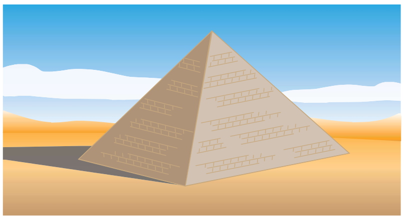
1. ¿Cuál es el volumen de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 4 cm y tiene una altura de 9 cm?





2. ¿Cuál es la altura de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y tiene por volumen 16 m^3?

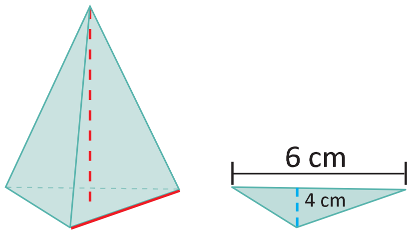
3. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?



2.3 Volumen de la pirámide triangular

P

Calcula el volumen de una pirámide de base triangular, si su base tiene las dimensiones mostradas en la figura y la altura de la pirámide es 7 cm.



Observa que la base en este ejemplo es triangular.

S

Se sabe que el volumen de una pirámide es igual a $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_B \times h$ y como en este caso la base es un triángulo, entonces el área de la base es:

$$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Luego, el volumen de la pirámide es: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$.

C

El volumen de la pirámide triangular, se determina de manera similar al de la pirámide cuadrangular $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$. En general, para una pirámide de base cualquiera el volumen se calcula de manera similar.

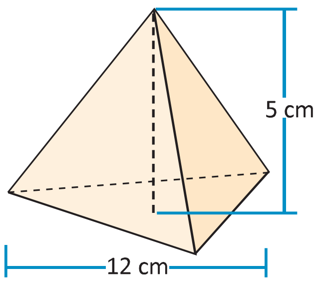
E

¿Cuál es el volumen de la pirámide mostrada si la altura del triángulo de la base es de 6 cm?

El área de la base es $A_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$.

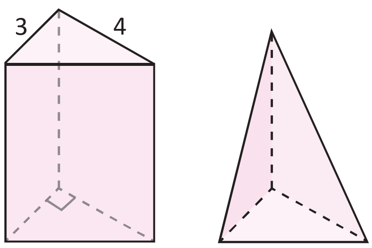
Por tanto, el volumen de la pirámide es:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3.$$

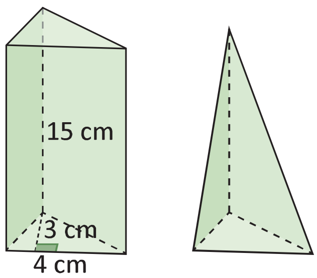


1. Para cada uno de los casos, calcula el volumen del prisma y luego el volumen de la respectiva pirámide:

a)

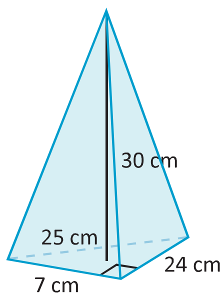


b)



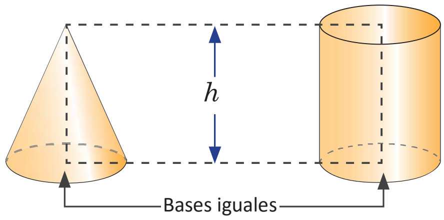
2. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es 25 cm² y su altura es 9 cm.

3. Encuentra el volumen de una pirámide cuyos lados del triángulo rectángulo, se muestran en la figura, y la altura de la pirámide mide 30 cm.



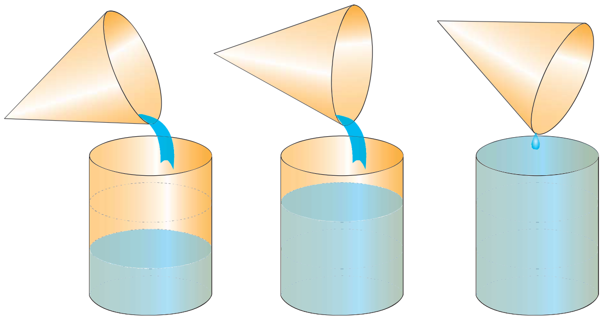
2.4 Volumen del cono

Se tiene un cilindro y un cono de bases congruentes, ¿cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?



Para resolver la situación planteada es importante considerar que tanto el cono como el cilindro están hechos de un material resistente al agua.

Para determinar cuántas veces cabe el volumen del cono en el del cilindro, se llena de agua el cono y se vierte en el cilindro, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.

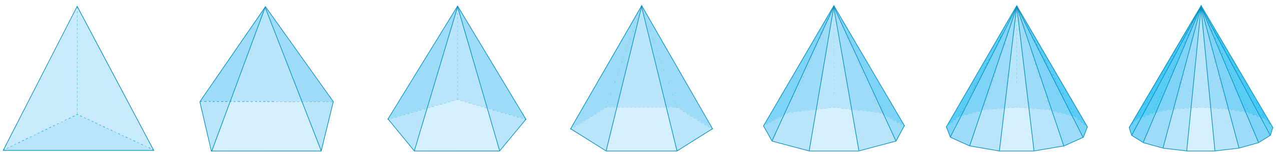


A partir de este resultado se puede concluir que el cilindro tiene tres veces el volumen del cono. Es decir, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

El volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro; es decir, es un tercio del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{cono} = \frac{1}{3}A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de su base por su altura. Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos:

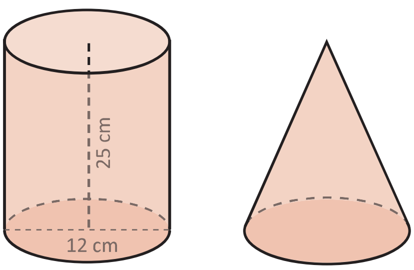


¿A qué figura se aproxima la base de la pirámide cuando aumentas su número de lados?

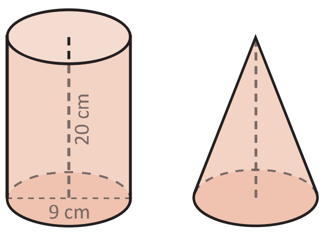
Solución.
La base se aproxima a un círculo. Así, cuando el número de lados de la base de una pirámide aumenta más y más, esta se aproxima a un cono.

Calcula el volumen del cilindro, luego encuentra el volumen del cono de igual base y altura que el cilindro.

a)



b)

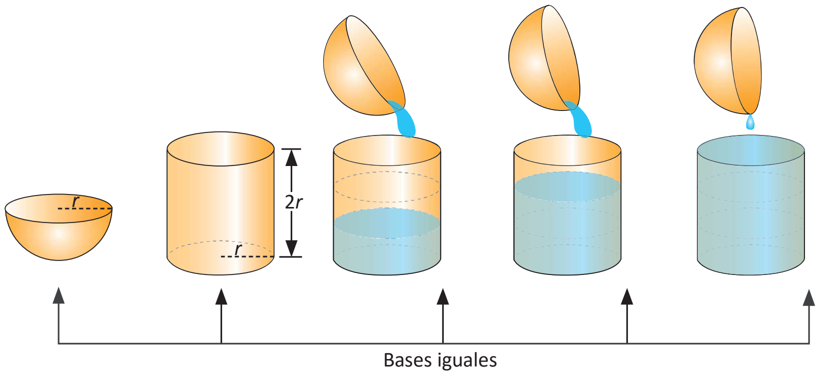


2.5 Volumen de la esfera

P Se tiene una esfera y un cilindro con el mismo radio, la altura del cilindro es el diámetro de la esfera, ¿cuántas veces cabe el volumen de la esfera en el cilindro?, ¿qué puedes concluir con el resultado obtenido?

S Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la esfera como el cilindro, están hechos de un material resistente al agua.

Se considera la mitad de una esfera hueca. Se llena de agua la mitad de la esfera y se vierte en el cilindro. Para llenar el cilindro se necesita hacer este procedimiento tres veces.



A partir de este resultado, se puede concluir que el volumen de la semiesfera es la tercera parte del volumen del cilindro; pero la esfera está formada por dos semiesferas. Entonces, el volumen de la esfera es dos terceras partes del volumen del cilindro.

El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera. Es decir,

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad (\text{ pero } h \text{ del cilindro es } 2r)$$

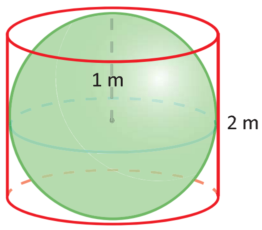
$$= \frac{2}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

A la mitad de una esfera se le conoce como semiesfera.

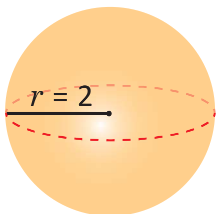
C El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro; es decir, es dos tercios del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

1. Calcula el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura.



2. Determina el volumen de la siguiente esfera.

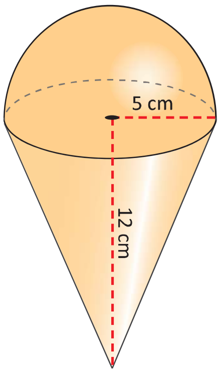


3. Calcula el volumen de una semiesfera de 10 cm de radio.

3.1 Volumen de sólidos compuestos

P

Calcula el volumen del siguiente sólido:



Puedes descomponer el sólido en cuerpos geométricos conocidos.

S

Primero se encuentra el volumen de la semiesfera:

$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 5^3) = \frac{500}{6}\pi = \frac{250}{3}\pi = 83.3\pi \text{ cm}^3.$$

Luego se encuentra el volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3.$$

Entonces el volumen del sólido es:

$$V = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono} = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3 + 100\pi \text{ cm}^3 = \frac{550}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 183.3\pi \text{ cm}^3.$$

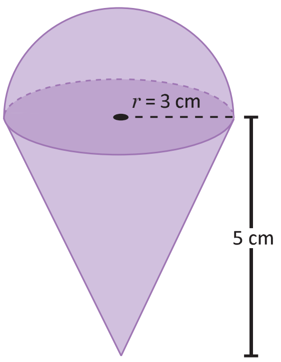
C

Para determinar el volumen de sólidos compuestos, se realiza lo siguiente:

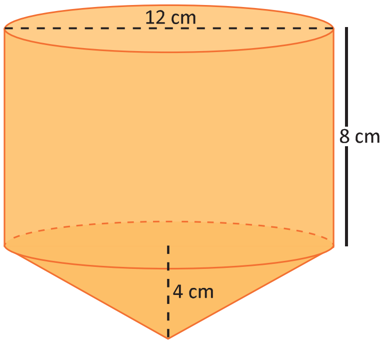
- Se descompone el sólido en cuerpos geométricos conocidos y se calculan sus volúmenes.
- Se suman los volúmenes calculados.

Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

a)

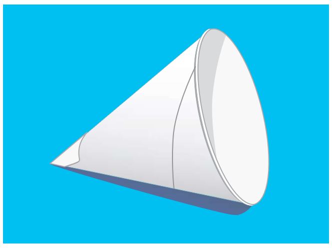


b)



3.2 Practica lo aprendido

1. Un vaso de papel en forma de cono tiene un radio de 3 cm y una altura de 9 cm, ¿cuánta agua puede contener?



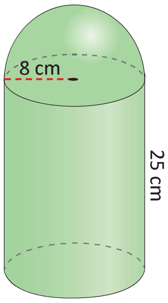
Puedes considerar que

$1\ cm^3 = 1\ ml = 0.0338135\ fl\ oz$
(fl oz: onzas fluidas).

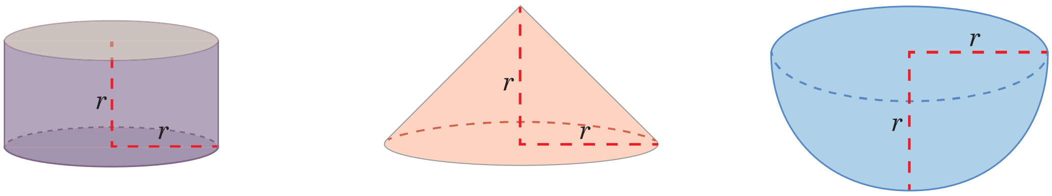
2. ¿Qué cantidad de agua puede almacenar un recipiente esférico con radio igual a 18 cm?

3. Calcula el volumen de una pelota cuyo diámetro mide 16 cm.

4. Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico:



5. Compara los volúmenes de los tres cuerpos, ¿qué relación encuentras entre ellos?



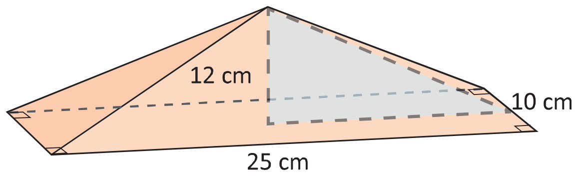
6. Si el radio de la Tierra es de 6 370 km, calcula el volumen de nuestro planeta utilizando distintas aproximaciones del número π:
   a) 3 b) 3.14 c) π

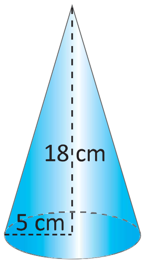
7. Encuentra el volumen de un depósito cilíndrico cuya circunferencia de la base (longitud de la circunferencia) mide 8π m y la altura 6.3 m.

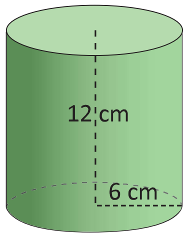
8. Un laboratorio farmacéutico envasa alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calcula la capacidad en litros de cada frasco de alcohol.

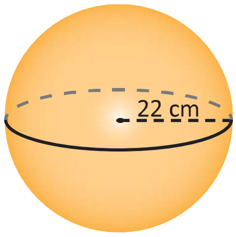
3.3 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos.









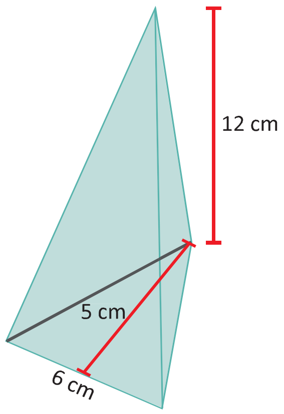
2. Si un cilindro de radio 5 cm tiene un volumen de 300π cm^3, ¿cuál es su altura?

3. Encuentra la altura de un cilindro cuyo volumen es de 60π cm^3 y el radio de la base es de 8 cm.

4. Encuentra el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 8 cm de diámetro.

5. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 cm de lado. Su altura es de 15 cm. Encuentra su volumen.

6. Calcula el volumen de una pirámide triangular que tiene de altura 12 cm y las características del triángulo base son: 5 cm de altura y 6 cm de base.



7. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene un volumen de 135π cm^3 y 9 cm de radio?

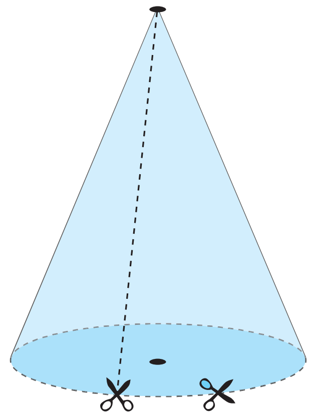
8. Calcula el volumen de un cono de 4 cm de radio de la base y 9 cm de altura.

9. Encuentra el radio de una esfera cuyo volumen es 36π cm^3.

4.1 Desarrollo del cono y longitud de arco

P

Dado un cono de papel, se hace un corte como indica la figura, y además, se corta el círculo por la orilla, pero sin despegarlo del resto del cono:



a) ¿Qué figura se obtiene? Dibújalo en tu cuaderno.

b) ¿Cómo se llama la figura que se obtuvo?

c) Describe qué figuras geométricas que ya conoces aparecen en el cono desplegado.

d) Identifica, sobre tu dibujo, las generatrices y el radio del cono, ¿cuál es la longitud de arco que forma el patrón de un cono?

S

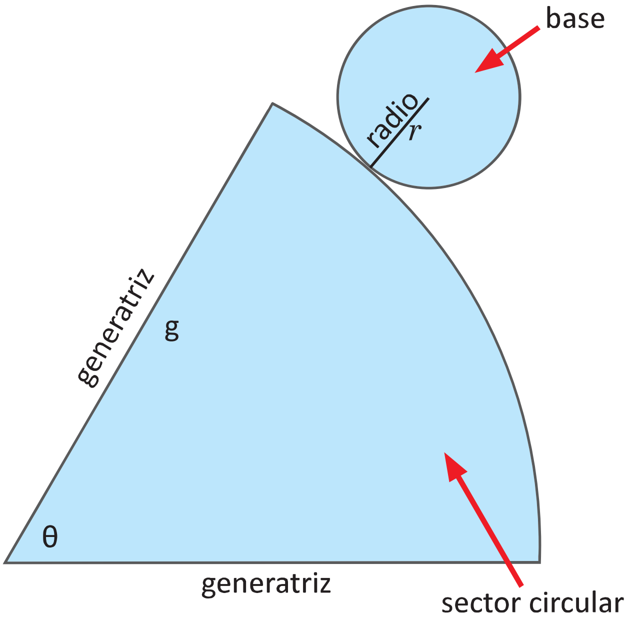
a) Al cortar el cono como sugiere la indicación, se obtiene una figura compuesta, tal como se muestra en la imagen de la derecha.

b) Una figura plana compuesta que describe un sólido geométrico, se conoce como **patrón** o **plano desarrollado** del sólido.

c) En el patrón del cono aparece un círculo con radio r, que corresponde al radio del cono y un sector circular, cuyo radio es la generatriz g del cono.

d) La circunferencia de la base es $2\pi r$, si se vuelve a armar el cono, el arco del sector circular se enrolla en la circunferencia de la base. Así, el arco tiene una longitud de

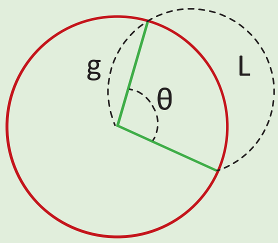
$$L = 2\pi r$$



Otra forma de calcularlo es tomando el radio del sector circular como g, y el ángulo central que es la porción del círculo limitada por dos radios, que son las generatrices del cono; el arco del sector circular es $\frac{\theta}{360}$ veces la circunferencia del círculo que forma el sector, así la longitud del arco del sector es:

$$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360°} = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Un sector circular es la porción de círculo limitada por dos radios, que forman el ángulo central θ.



Unidad 7

C

El patrón del cono está compuesto por un círculo de radio r, que es el radio del cono; y por un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y el ángulo central θ.

Las fórmulas para calcular la longitud de arco de un sector circular son:

$$L = 2\pi r \;...(1)$$

$$L = \frac{\theta}{180°}\pi g \;...(2)$$

E

Encuentra la longitud de arco en los siguientes casos:

a) El radio de la base es r = 8 cm
b) La generatriz g = 12 cm y el ángulo central θ = 240°

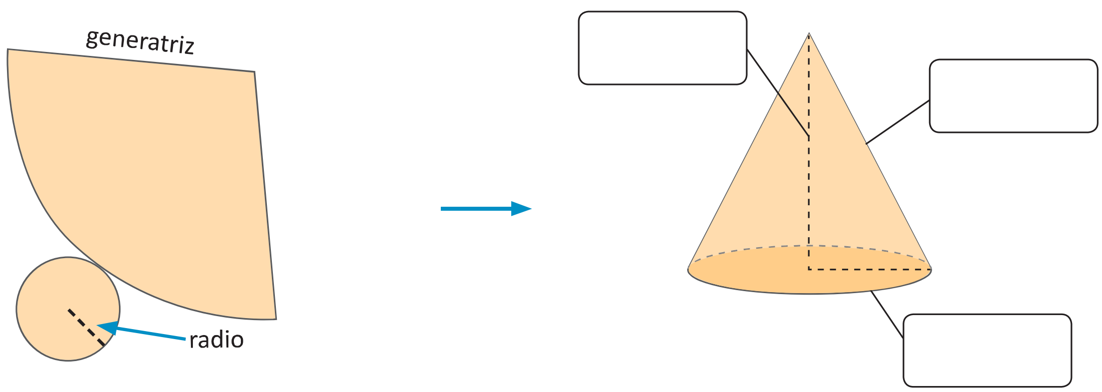
Solución.

a) $L = 2\pi r$; entonces, $L = 2\pi \times 8 = 16\pi$; o bien,

b) $L = \frac{\theta}{180°}\pi g$; entonces, $L = \frac{240°}{180°}\pi \times 12 = \frac{4}{3}\pi \times 12 = 4\pi \times 4 = 16\pi$.

Es importante observar que los elementos conocidos son los que determinan la fórmula que se utilizará para calcular la longitud de arco.

1. Dada la siguiente figura del patrón del cono, escribe el nombre a los elementos indicados.



2. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuya generatriz mide 10 cm y el ángulo central es 60°.

3. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuyo radio mide 5 cm.

4.2 Relación entre los elementos del patrón del cono

P

Utilizando las fórmulas de la clase anterior, determina las medidas de los siguientes elementos:

1. El radio r, dado el ángulo central θ del sector circular y la generatriz g del cono.
2. El ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g y el radio r del cono.
3. La generatriz g, dado el ángulo central θ y la longitud de arco del sector circular.
4. La generatriz g dado ángulo central θ y del arco del sector circular L.

S

Se tienen las siguientes fórmulas; encuentra la longitud de arco L:

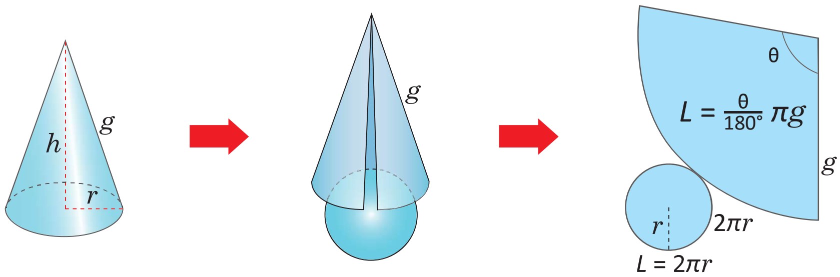
$L = 2\pi r$ ....(1) $\qquad L = \frac{\theta}{180°}\pi g$ ....(2)

1. Por (1) y (2), se obtiene la siguiente relación:

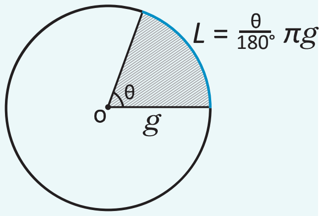
$$2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

$$r = \frac{\theta}{360°}\,g \text{ .... (3)}$$

2. Por (3), $\theta = \frac{360°}{g}r$ .... (4)
3. Por (3), $g = \frac{360°}{\theta}r$ .... (5)
4. Por (2), $g = \frac{180°}{\theta\pi}\text{L}$ .... (6)



Longitud de arco de un sector circular.



Con el ángulo central θ y generatriz g.

C

Las medidas del cono se pueden calcular cuando la relación de la circunferencia de la base es igual a la longitud de arco del sector circular, es decir:

$$L = 2\pi r \text{ ....(1)},\ 2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Radio del cono: r
Ángulo central del sector circular: θ
Generatriz del cono: g
Longitud del arco del sector circular: L

E

Encuentra el ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g = 30 cm y el radio del cono r = 4 cm.

Solución.

Como $2\pi r = \frac{\theta}{180°} \times \pi g$; luego $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, sustituyendo los valores se tiene:

$$\theta = \frac{360°}{g} \times r = \frac{360°}{30} \times 4 = 48°;\ \text{entonces, } \theta = 48°.$$

1. Encuentra el ángulo θ del sector circular del plano desarrollado del cono, si la generatriz g = 18 cm y el radio del cono es r = 9 cm.
2. Encuentra el radio r de un cono, si su generatriz g = 6 cm y el ángulo del sector circular del desarrollo del cono es θ = 120°.
3. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su radio mide 4 cm y el ángulo central del sector circular mide 60°.
4. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su ángulo es θ = 120° y la longitud de su arco es L = 8π cm.

Unidad 7

4.3 Área superficial del cono

P

El patrón del cono está formado por los siguientes elementos:

a) La cara lateral del cono que es un sector circular con ángulo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, g es la generatriz del cono, el cual es el radio del sector circular,

b) Un círculo de radio r.

Expresa el área de la cara lateral y del círculo del cono. ¿Cuál es su área total?

S

a) El área lateral del cono $A_{Lateral}$, es el área del sector circular en el patrón del cono, el cual es proporcional al área total del círculo con el radio g; πg^2, por el ángulo central θ del sector circular:

$$A_{Lateral} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \quad \ldots (1)$$

Luego por (1) y sustituyendo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$ en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} A_{Lateral} &= \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \theta \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \frac{360°}{g} \times r. \\ A_{Lateral} &= \pi r g \end{aligned}$$

b) El área de la base es: $A_{Base} = \pi r^2$.

El área total será la suma del área lateral más el área de la base, es decir:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

C

Se utiliza el plano desarrollado del cono para calcular su área lateral y total, cuando el radio del cono es r y la generatriz es g:

Área lateral $A_{Lateral}$: Es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Su área está dada por:

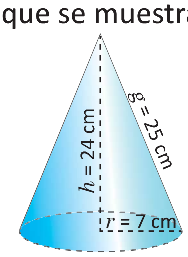
$$A_{Lateral} = \pi r g$$

Área total A_{Total}: Es la suma del área lateral y el área de la base.

Como la base del cono es un círculo, se tiene que el área total es:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

1. Calcula el área lateral y total del cono que se muestra en la figura:



2. Encuentra la generatriz de un cono que tiene las siguientes especificaciones: radio de r = 6 cm y una área lateral de $A_{Lateral}$ = 120π cm^2.

4.4 Área superficial de la esfera

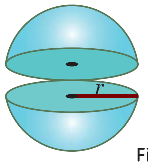
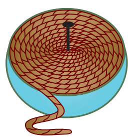
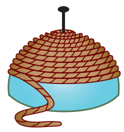
Se tiene una esfera y un círculo de radio r, ¿qué relación existe entre el área de la esfera comparada con la del círculo?, ¿qué se puede concluir sobre el área de la esfera?

Para resolver esta situación, es necesario tomar una esfera que se pueda cortar, un cordel y un clavo. Luego se realiza lo siguiente:

1. Se corta la esfera en 2 partes iguales, formando así dos semiesferas (ver figura A).
2. Se fija el cordel en el centro del círculo de una de las semiesferas, se enrolla hasta cubrir todo el círculo y se corta lo que sobra (ver figura B); luego se desenrolla el cordel utilizado.
3. Se fija el cordel sobre uno de los polos de la esfera y se enrolla (ver figura C), se repite este proceso hasta cubrir la esfera.

Al hacer este procedimiento, debes tomar en cuenta que para recubrir totalmente la esfera, es necesario cortar 3 pedazos de cordel con igual longitud que el primero.

Con este resultado, se tiene que el área superficial de la esfera es cuatro veces el área del círculo de igual radio.

Corta por el medio una esfera (bola) de radio r	Envuelve el cordel alrededor de un alfiler colocado en el centro de la región circular	Envuelve el cordel alrededor del hemisferio
 Figura A	 Figura B	 Figura C

Como el área de un círculo de radio r es igual a πr^2, entonces el área superficial de la esfera es:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

Otra forma de ver el área de la esfera

Al comparar el área de la esfera con el área lateral de un cilindro, cuyo radio sea igual al de la esfera y su altura es el diámetro de la esfera, ¿qué se obtiene?, ¿cuál es la relación entre el área de la esfera y el área lateral del cilindro?

Se puede hacer la misma actividad anterior, pero ahora cubriendo el cilindro con el cordel y luego cubrir la esfera con ese mismo cordel.

Solución.
Se puede concluir que, el área de una esfera de radio r es igual al área lateral de un cilindro de radio r y altura $2r$. Es decir, $A = 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.

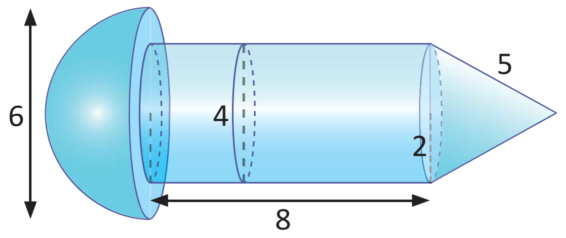
1. ¿Cuál será el área total de una esfera cuyo diámetro es igual a 12 cm?

2. ¿Cuál es el diámetro de una esfera cuya área es igual a 144π cm^2?

5.1 Áreas superficiales en sólidos compuestos

P

Encuentra el área superficial del siguiente sólido:



Área de la semiesfera:	$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
Área lateral del cilindro:	$A_{Lateral} = 2\pi rh$
Área lateral del cono:	$A_{Lcono} = \pi rg$
Área del círculo:	$A_{círculo} = \pi r^2$

S

Primero se encuentra el área de la semiesfera:

$$A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, se calcula el área lateral del cilindro:

$$A_{Lateral} = 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi \text{ cm}^2.$$

El área lateral del cono:

$$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, del área del círculo de la semiesfera se resta el área del círculo de la tapa del cilindro:

$$A_{Círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2.$$

Por tanto, el área de la figura A:

$$A_{Figura} = A_{Semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{Círculos} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi \text{ cm}^2.$$

C

Para encontrar el área superficial de figuras compuestas, se suman o se restan las áreas de cada uno de los sólidos que aparecen en el problema.

1. Encuentra el área del cuerpo geométrico que se muestra en la figura 1.

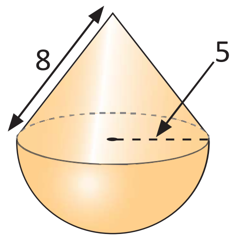


Figura 1

2. Calcula el área superficial de las esferas cuyos radios son: 5 cm, 10 cm y 50 cm. ¿Qué relación hay entre las áreas de las esferas?

3. Se construirá una bodega con la forma de un cilindro para almacenar granos básicos, con un techo semiesférico como se muestra en la figura 2. Si las paredes del cilindro tienen una altura de 10 m y el área lateral del cilindro es de 100π m^2, determina el radio del cilindro.

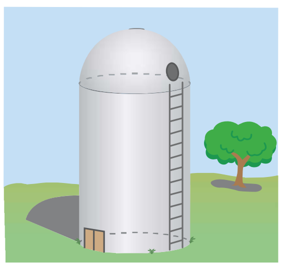
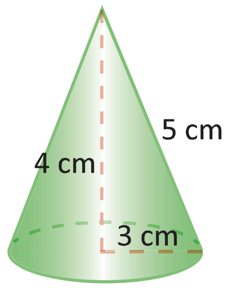


Figura 2

5.2 Practica lo aprendido

1. Calcula el área lateral y total de un cono cuya altura mide 4 cm, la generatriz mide 5 cm y el radio de la base es de 3 cm.



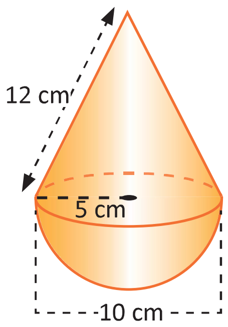
2. Calcula el área de una semiesfera de 10 cm de radio.

3. Encuentra el área de una esfera que tiene un volumen de 144π cm^3.

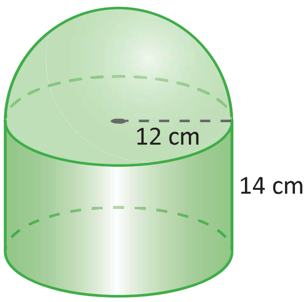
4. Una esfera de radio 4 cm será recubierta con una capa metálica de 1 cm de espesor. Calcula la cantidad de material necesario para recubrir la esfera.

5. Calcula el área superficial de las siguientes figuras:

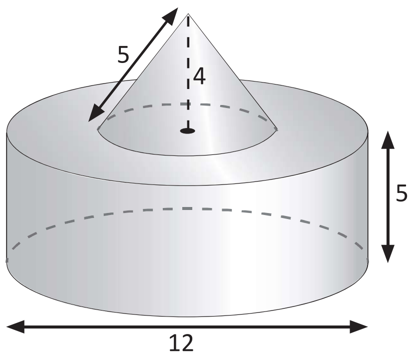
a)



b)



6. Encuentra el volumen de la siguiente figura, si el diámetro del cono es 6 cm.



5.3 Practica lo aprendido

Volúmenes de sólidos geométricos:

Volumen de un cilindro: $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

Volumen de un cono: $V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Volumen de la pirámide: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h$

Volumen de la esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$

Áreas de sólidos geométricos:

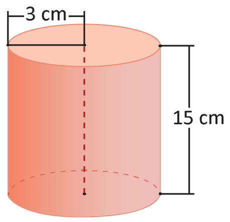
Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi r h$

Área total del cono: $A_{cono} = \pi r(g + r)$

Área total del cilindro: $A_{cilindro} = 2\pi r(h + r)$

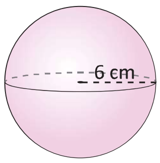
Área de la esfera: $A_{esfera} = 4\pi r^2$

1. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyo radio es de 3 cm y su altura es de 15 cm?

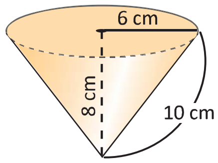


2. Calcula el área y volumen de los siguientes sólidos:

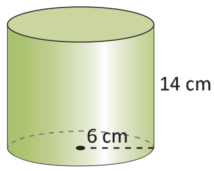
a)



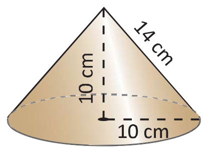
b)



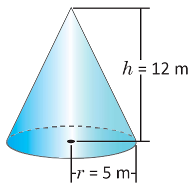
c)



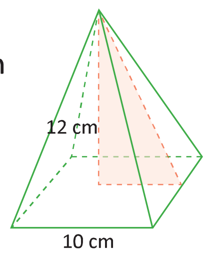
3. Encuentra el área total de un cono rectangular (altura = radio) de radio 10 cm.



4. Calcula el volumen del siguiente cono:



5. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene de lado 10 cm y 12 cm de altura.



6. Calcula el área total y volumen de un cono de 7 cm de radio de la base, 24 cm de altura y generatriz 25 cm.

7. Calcula el área total y volumen de la siguiente figura compuesta: