Paralelismo y ángulos de un polígono

Unidad 4

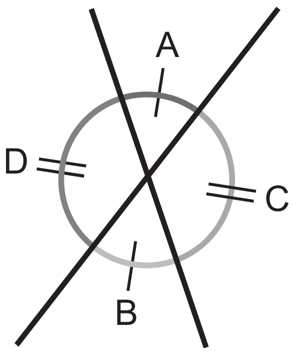


Ilustración que demuestra que los ángulos opuestos por el vértice son iguales; según Pinasco, Juan Pablo (2009) Las Geometrías.

Tales de Mileto (Miletus, Turquía; 620 a. C. - 545 a. C.) fue el primer matemático a quien se le atribuyó una serie de resultados teóricos generales, es decir, de teoremas. Si bien no se sabe cómo los demostró originalmente, hoy son parte de la geometría básica, entre ellos se tienen:

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Dadas dos paralelas y una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.

Los ángulos y rectas paralelas se utilizan en diferentes contextos, entre los que se pueden mencionar: la construcción de edificios, puentes, escaleras, vías férreas y carreteras; en el diseño de los instrumentos musicales, cables del tendido eléctrico, diseño de pisos, etc.

Bulevar Monseñor Romero

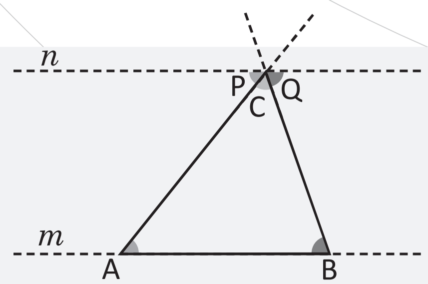


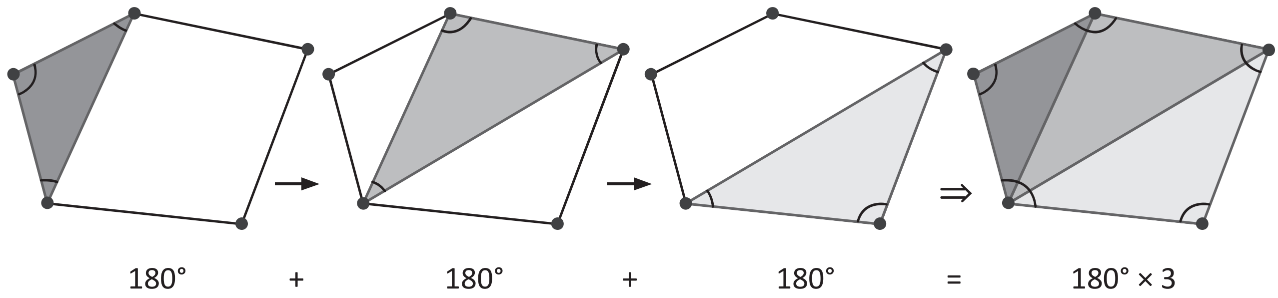
Ilustración de la demostración pitagórica de los ángulos internos de un triángulo.

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad recordarás la relación entre los ángulos internos de un triángulo, que te servirá de base para el estudio de los ángulos internos y externos de un polígono, así como la relación entre los ángulos que se forman entre paralelas y sus aplicaciones en situaciones cotidianas.

1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es 180° × (n – 2).

Por ejemplo, determinando la suma de los ángulos internos de un pentágono se realizó el siguiente análisis:



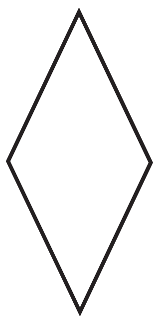
El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un trángulo es 180°, entonces:

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

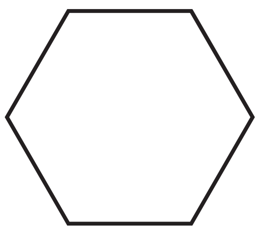
La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2. Y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

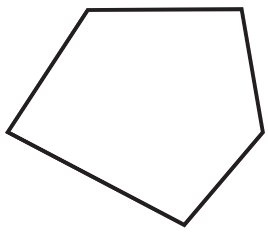
a)



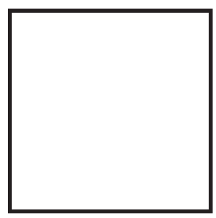
b)



c)



d)

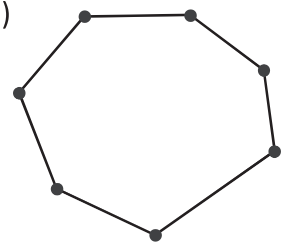


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

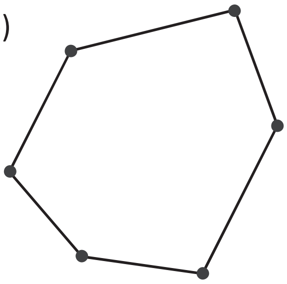
1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

R Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

a)



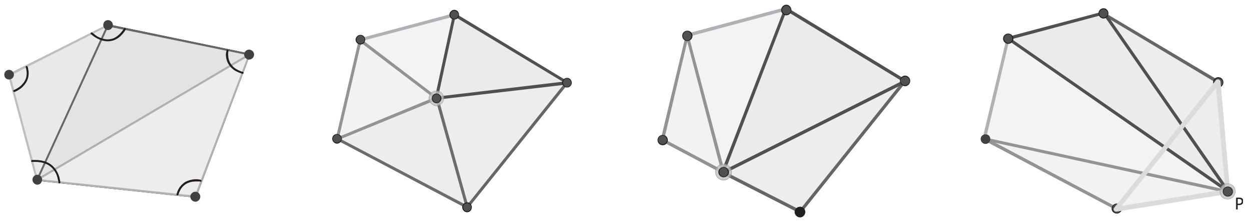
b)



C La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

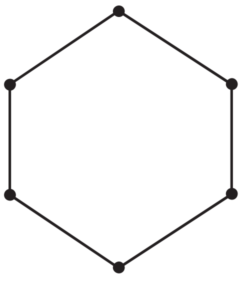
a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

Por ejemplo, el pentágono se puede triangular utilizando cualquiera de las siguientes formas:

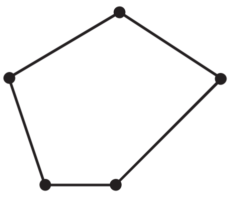


Determina la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos, utiliza al menos dos de las estrategias de triangulación.

a)



b)



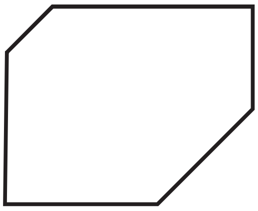
Unidad 4

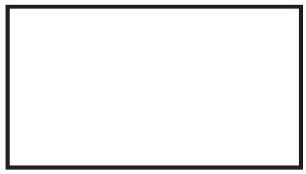
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

R

Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras mediante la estrategia de triangulación, luego utiliza la fórmula vista en la clase 1.1.

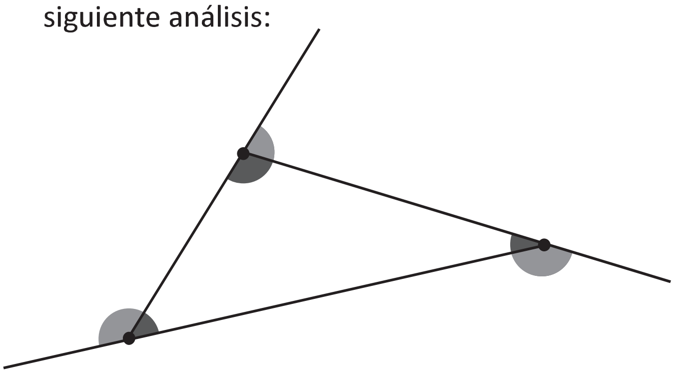
a) 

b) 

C

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

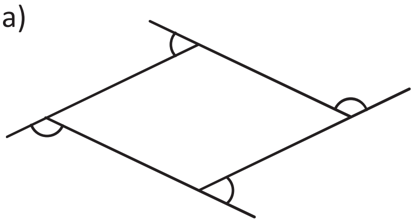
Por ejemplo, para determinar la suma de los ángulos externos de un triángulo fue necesario realizar el siguiente análisis:

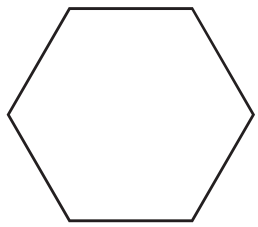


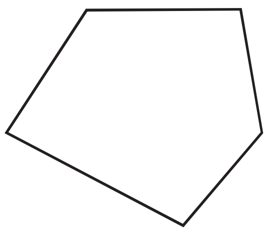
En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3 = 540°.

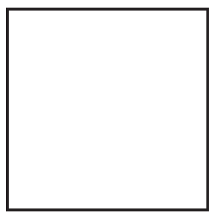
Pero 540° contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2) = 180°; por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es 540° – 180° = 360.

Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

a) 

b) 

c) 

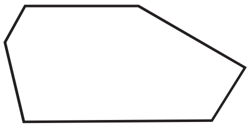
d) 

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

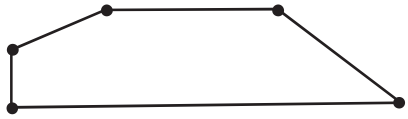
1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

1. Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

a)

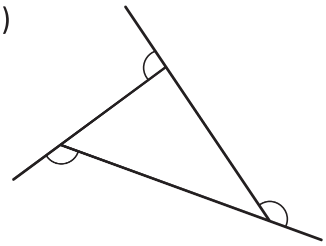


b)

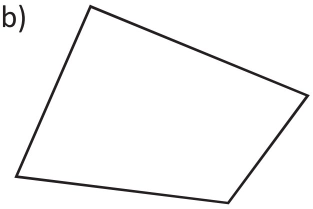


2. Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

a)

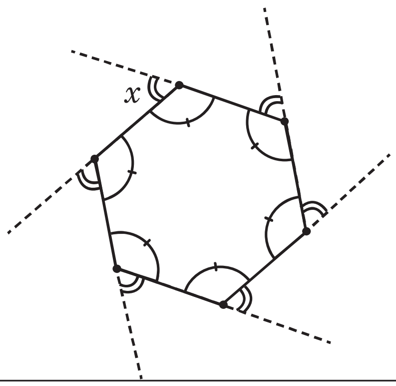


b)



En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

Por ejemplo para calcular el valor x:



Los ángulos internos del hexágono suman $180° (6 - 2) = 720°$.

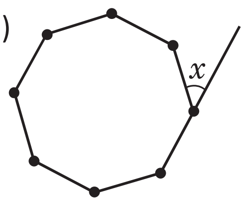
Entonces cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

A partir de lo anterior, se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$.

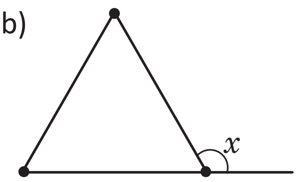
Por tanto, $x = 60°$.

1. Determina el valor de x en los siguientes polígonos regulares:

a)

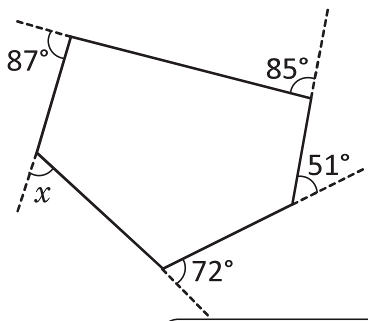


b)

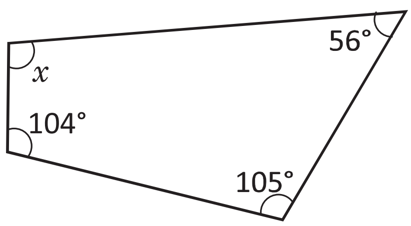


2. Encuentra la medida del ángulo x en cada caso.

a)



b)

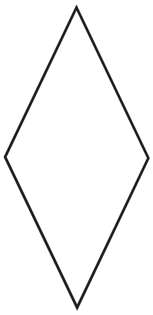


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

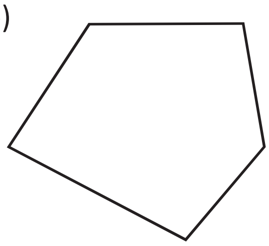
2.1 Ángulos opuestos por el vértice

1. Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

a)

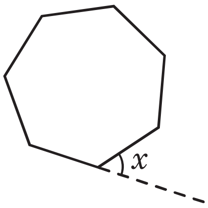


b)

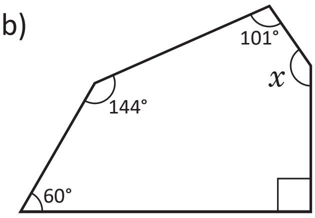


2. Determina el valor de x en los siguientes polígonos:

a)



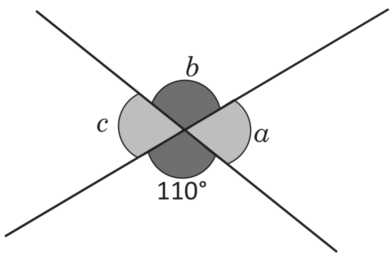
b)



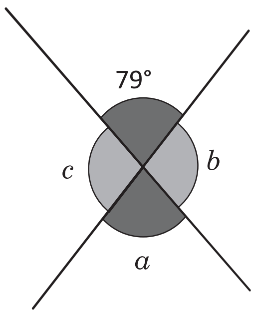
Un ángulo es opuesto por el vértice cuando los lados son la prolongación de los lados de otro ángulo, estos ángulos tienen igual medida. Además los ángulos cuyas medidas suman 180° se llaman suplementarios.

Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.

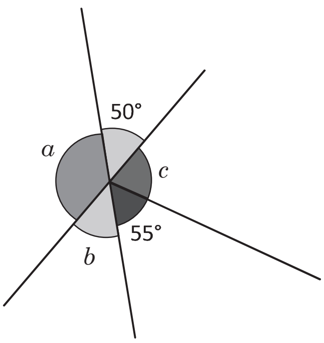
a)



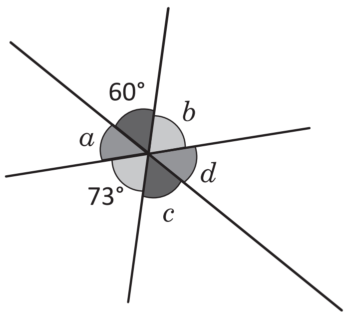
b)



c)



d)

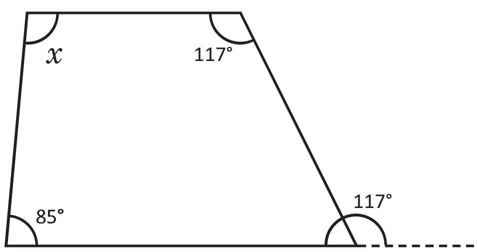


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

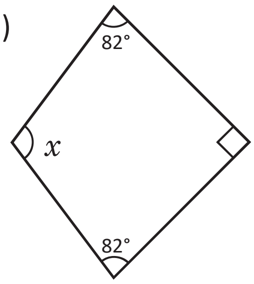
2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

R 1. Encuentra la medida del ángulo x en cada caso.

a)

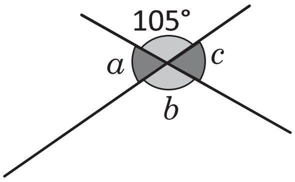


b)

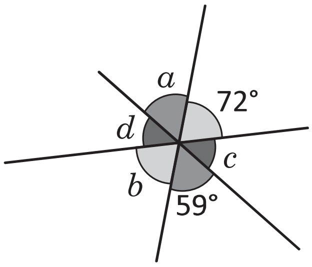


2. Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.

a)

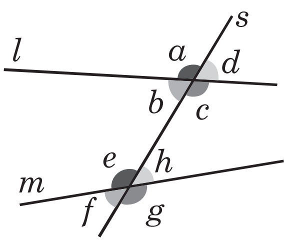


b)



C

Cuando se tienen dos rectas cortadas por una secante se pueden identificar los siguientes tipos de ángulos:



Internos:
$\measuredangle b$, $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$

Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$

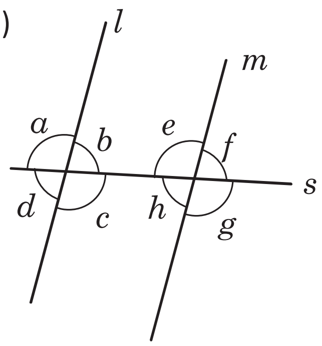
Alternos internos:
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

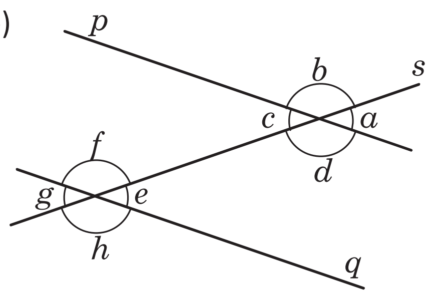
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$,
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$

Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)



b)

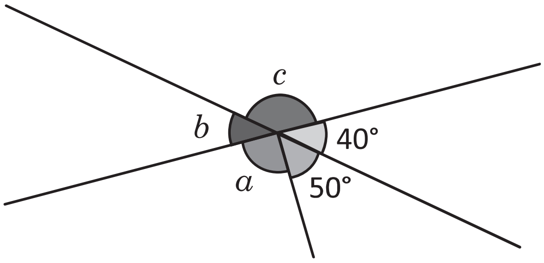


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

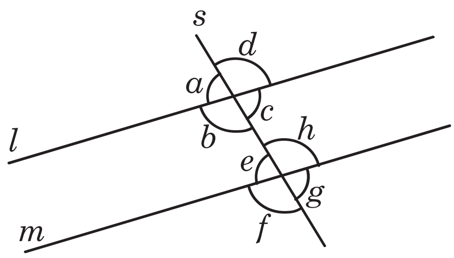
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

R

1. Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.



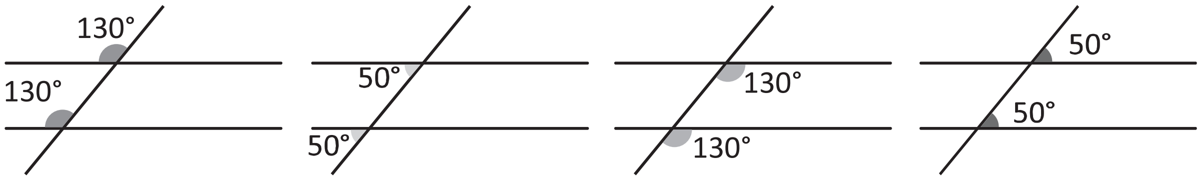
2. Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.



C

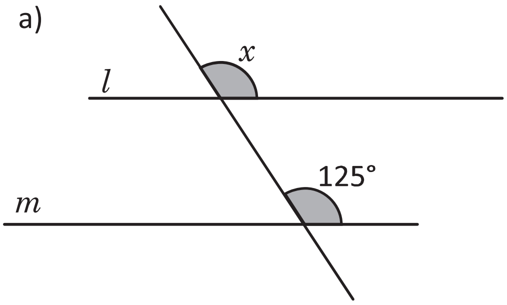
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

Por ejemplo, se puede medir con transportador los siguientes ángulos y verificar la igualdad:

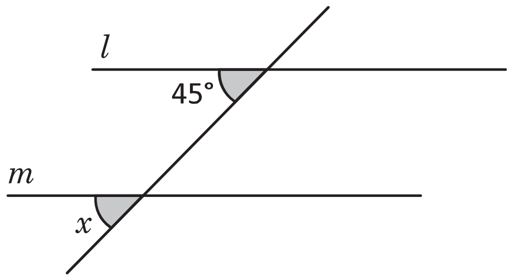


Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

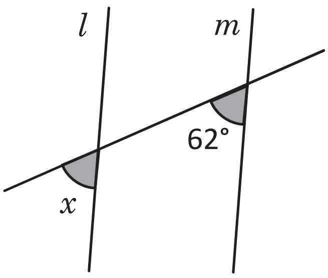
a)



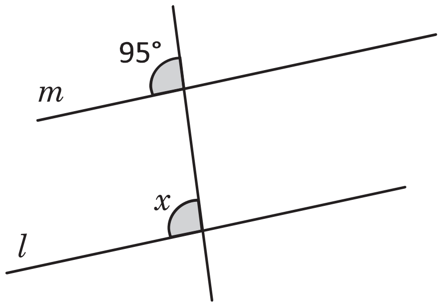
b)



c)



d)

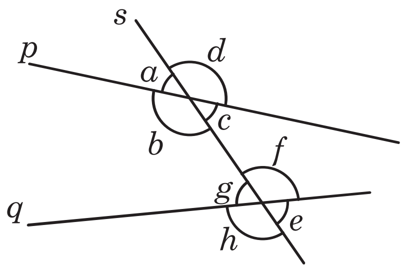


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

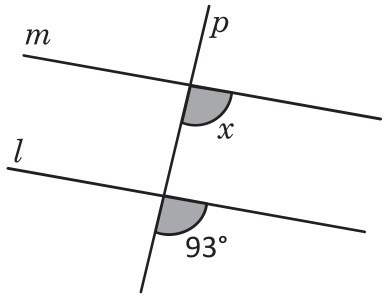
2.4 Caracterización de los ángulos alternos

R

1. Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.



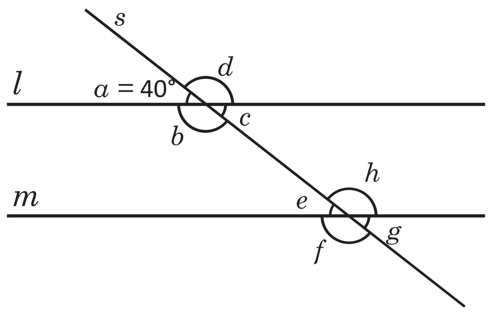
2. Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.



C

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

Por ejemplo:



$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle h\\ \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí;

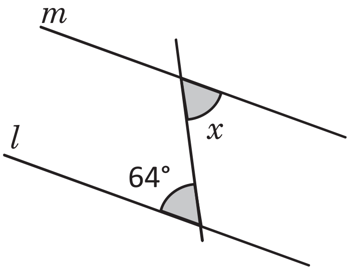
$\sphericalangle b = \sphericalangle h = 140°$ y $\sphericalangle c = \sphericalangle e = 40°$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle g\\ \sphericalangle d \text{ y } \sphericalangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí;

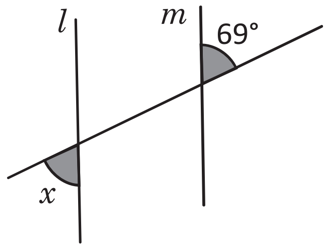
$\sphericalangle a = \sphericalangle g = 40°$ y $\sphericalangle d = \sphericalangle f = 140°$

Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

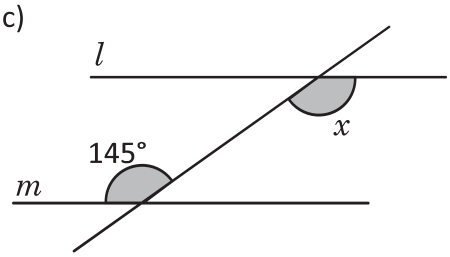
a)



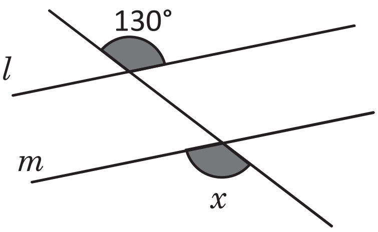
b)



c)



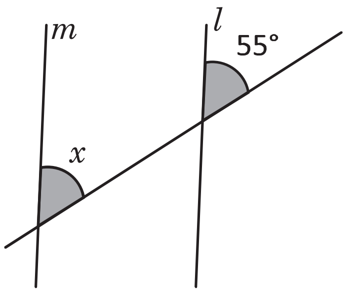
d)



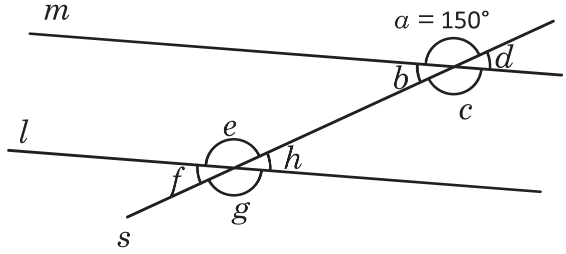
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

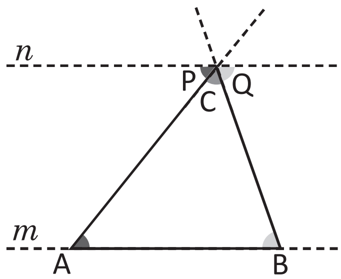
1. Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.



2. Dado que $l \parallel m$. Identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.



Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas, tal como se muestra a continuación:



∢P + ∢C + ∢Q = 180° (por formar un ángulo llano).

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo).

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

1. Llena los espacios en blanco y demuestra que la medida del ángulo externo del vértice B, es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC; es decir, ∢CBD = ∢BCA + ∢CAB.

Solución.

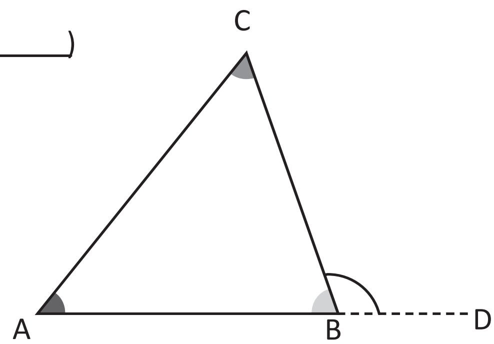
∢ABC + ∢CBD = __________ . . . (1) (por ser suplementarios)

∢ABC + ∢BCA + ∢CAB = 180° . . . (2) (____________________________)

∢CBD = 180° – ∢ABC .. (por 1)

∢BCA + ∢CAB = _________________ . (por 2)

Por lo tanto ____



2. Define con tus palabras qué entiendes por demostración matemática.___________________________

____

____

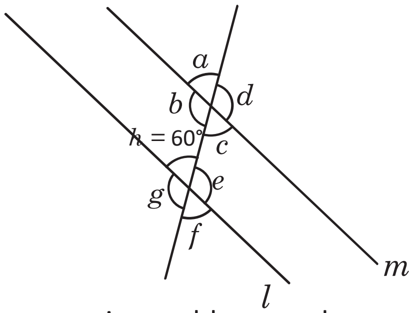
____

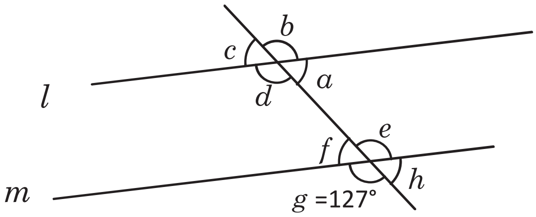
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Elementos de una demostración

R

1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos, alternos externos y determina sus respectivas medidas.





2. Llena los espacios en blanco y demuestra que en un paralelogramo, los ángulos opuestos son de igual medida.

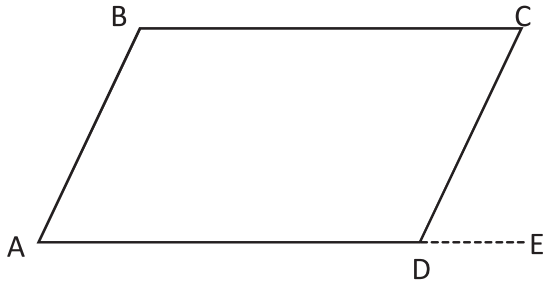
Solución.

Prolongando el lado AD hasta el punto E.

∢BAD = _________ (porque AB ∥ DC)

Entonces ∢CDE = ∢DCB (________________________)

Por lo tanto, ∢BAD = ∢DCB.



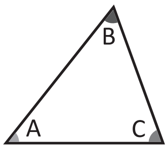
C

A la expresión de la forma “si $\boxed{}$, entonces ( )”, se le llama **proposición**.
A la parte representada por $\boxed{}$ se le llama **hipótesis**; y la representada por ( ) se llama **conclusión**.

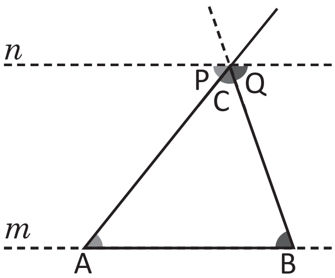
Analiza el siguiente ejemplo de demostración:

Si $\boxed{\text{∢A, ∢B y ∢C , son ángulos internos de un triángulo, entonces:}}$

∢A + ∢B + ∢C = 180°



∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**



Afirmación	**Justificación**	
1. $n \parallel m$.	Por construcción.	**Afirmaciones justificadas**
2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180°	Por formar un ángulo llano.	
3. ∢P = A; ∢Q = ∢B.	Por ser alternos internos entre paralelas.	
4. ∢A + ∢B + ∢C = 180°	Por 2 y 3.	**Conclusión**

Encierra en un cuadrado la hipótesis y en un óvalo las conclusiones de los siguientes enunciados:

a) Si un número es divisible por 4 entonces es par.
b) Un triángulo es isósceles, si tiene dos lados de igual longitud.
c) Si ABC es un triángulo, entonces sus ángulos interiores suman 180°.
d) Si $n \parallel m$, entonces los ángulos correspondientes tienen igual medida.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

R

1. Llena los espacios en blanco y demuestra si la recta ED es paralela a la recta BC, los ángulos α y β son iguales.

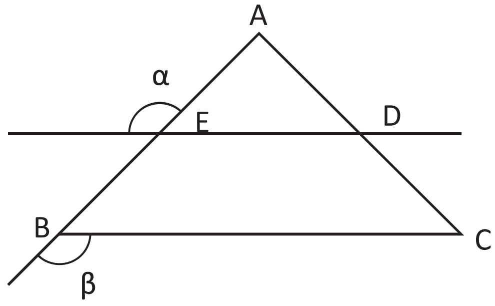
Solución.

Considerando BA como una recta secante que corta a las dos paralelas.

∢α = ________ (por ser opuestos por el vértice)

Entonces ∢BED = ∢β (____________________)

Por lo tanto, ∢α = ∢β.



2. Encierra en un cuadrado la hipótesis y en un óvalo las conclusiones de los siguientes enunciados.

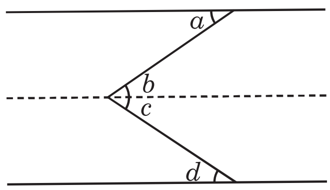
a) Si un número es divisible por 5 entonces su último dígito es 0 o 5.

b) Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

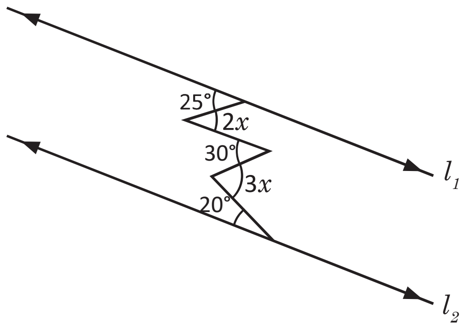
C

Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

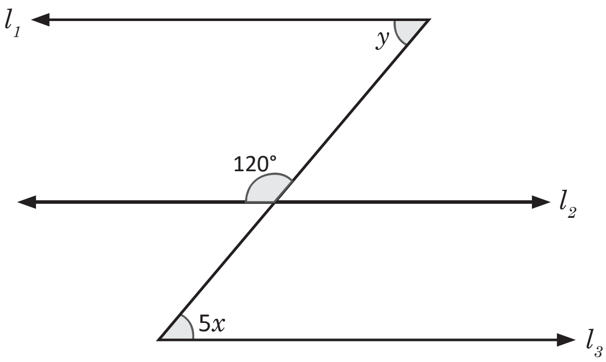
Recuerda para ángulos entre rectas paralelas como los de la figura, se cumple que
$\sphericalangle a + \sphericalangle d = \sphericalangle b + \sphericalangle c$



1. En la figura, l_1 es paralela a l_2, hallar el valor de x.



2. En la figura, las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas, determina el valor de x y y.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

Calles y avenidas

La figura muestra parte del mapa de la Ciudad de Santa Tecla, observa con atención y responde:

a) Escribe el nombre de dos calles que sean paralelas a la Calle Daniel Hernández.
b) Escribe el nombre de dos avenidas que son perpendiculares a la Avenida Manuel Gallardo.
c) Identifica una calle o avenida que sea oblicua al Paseo Concepción.
d) Si te encuentras con un turista en la intersección de la 3.ª Calle Poniente y la 10.ª Avenida Norte, ¿cómo le explicarías para que llegue al Palacio Tecleño de la Cultura y las Artes?

Plaza Morazán

Fue inaugurada el 15 de marzo de 1882. Está ubicada en el Centro Histórico de San Salvador frente al Teatro Nacional, cuna de la cultura y el arte. En el centro de la plaza se encuentra la estatua de mármol en honor al expresidente Francisco Morazán creada por el arquitecto italiano Francisco Durini.

Observa la fotografía y responde:

a) Identifica todos los polígonos en la Plaza Morazán y clasifícalos por sus lados.
b) Determina la suma de los ángulos internos y externos de los polígonos que encontraste.
c) ¿En qué otras partes de la fotografía puedes identificar polígonos?, márcalos y compara con tus compañeros.

Unidad 4

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?