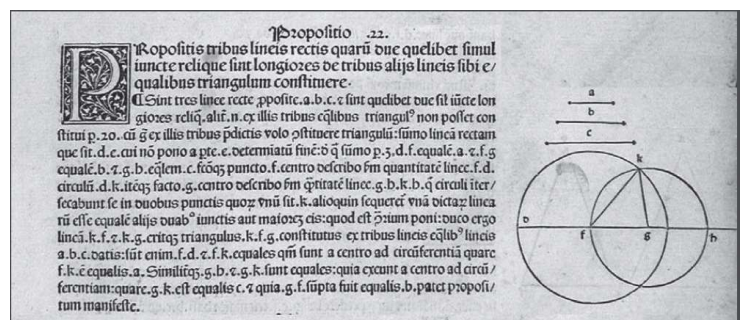


# 5 Unidad

## Criterios de congruencia de triángulos

El texto *Los Elementos* de Euclides, es el tratado de matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la historia de la cultura, incluso mucho más allá de la propia matemática y ciencias afines. Desde la proposición 16 hasta la 26 del libro I, Euclides presenta resultados generales acerca de los triángulos; por ejemplo, construcciones elementales con regla y compás, congruencias de triángulos y cuadriláteros, desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, etc.

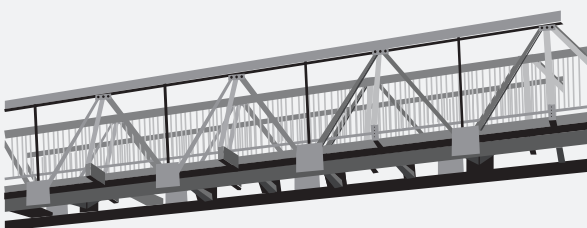


Proposición 1. 22 del texto *Los Elementos* de Euclides.

La congruencia de figuras, es utilizada en la construcción arquitectónica, ensamble de equipo y mobiliario, diseño de interiores, fabricación de automóviles, reconstrucción de infraestructura, etc.



La congruencia, se puede utilizar en el diseño de muebles en serie.



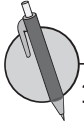
La congruencia de figuras se puede utilizar para el diseño de pasarelas.

En esta unidad estudiarás el sentido de la congruencia de triángulos y los criterios que permiten determinar si dos o más triángulos son congruentes; así como sus aplicaciones para demostrar propiedades matemáticas o para resolver situaciones de la vida cotidiana.

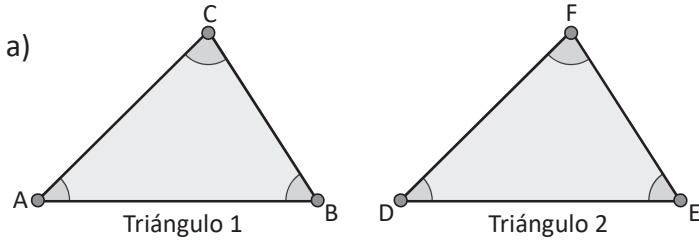
# 1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras



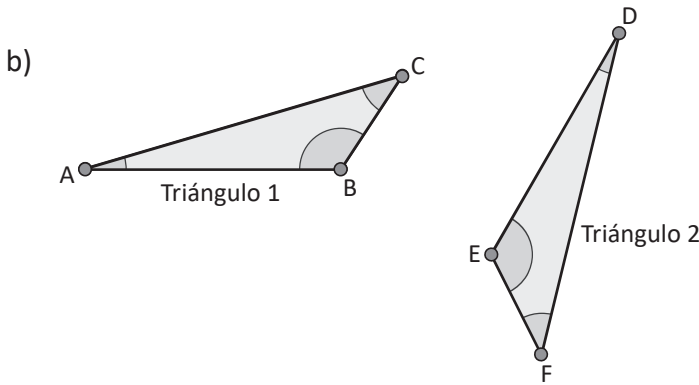
Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen se llaman **congruentes**. Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.



1. Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.

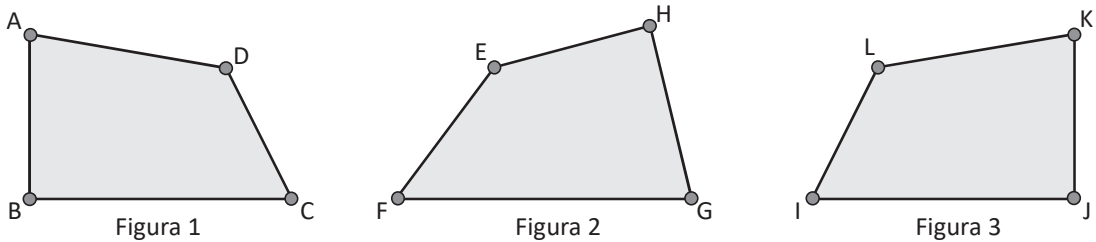


Vértices correspondientes	Lados correspondientes	Ángulos correspondientes



Vértices correspondientes	Lados correspondientes	Ángulos correspondientes

2. Compara las siguientes figuras e identifica las que son congruentes; indica los lados y ángulos correspondientes.

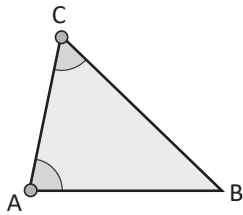


Vértices correspondientes	Lados correspondientes	Ángulos correspondientes

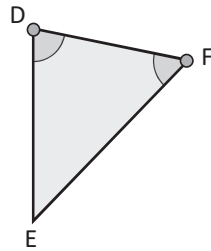
## 1.2 Congruencia de triángulos



Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Triángulo 1



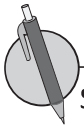
Triángulo 2

Vértices correspondientes	Lados correspondientes	Ángulos correspondientes

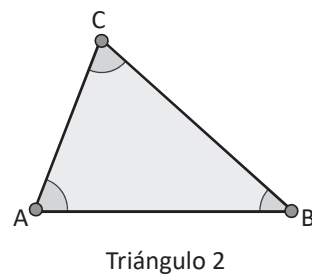
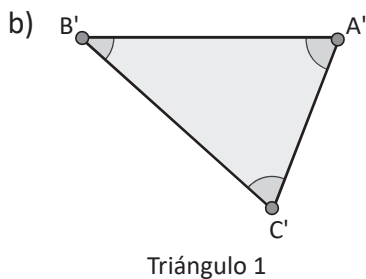
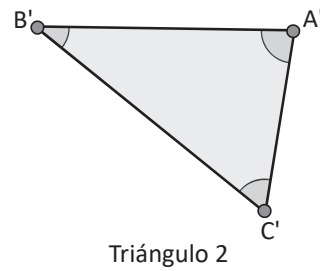
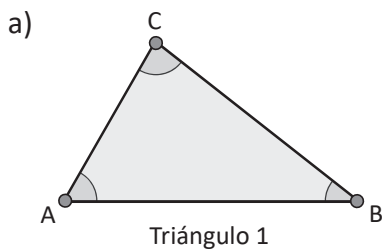


En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales.

Para indicar que los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo  $\cong$ ; es decir,  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'**.



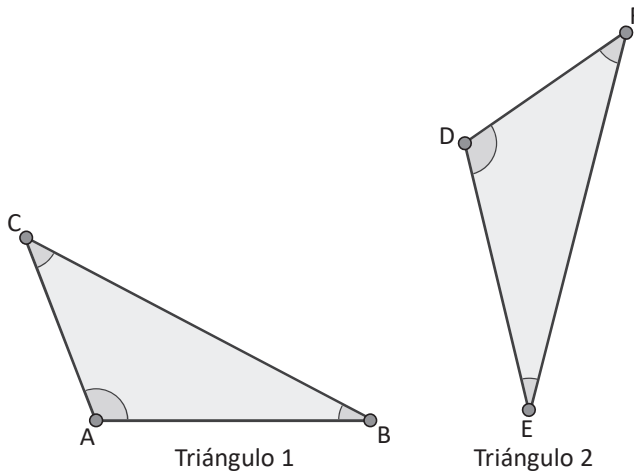
Si el  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo  $\cong$ .



### 1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

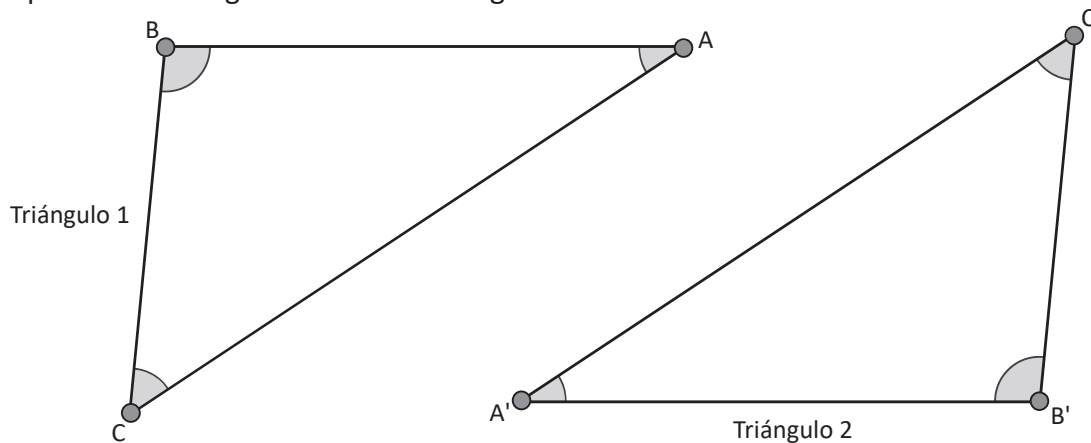


1. Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



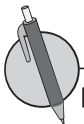
Vértices correspondientes	Lados correspondientes	Ángulos correspondientes

2. Si el  $\Delta ABC$  y  $\Delta A'B'C'$  son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo  $\cong$ .



Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL)**; es decir,  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$  dado que  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  y  $BC = B'C'$ .

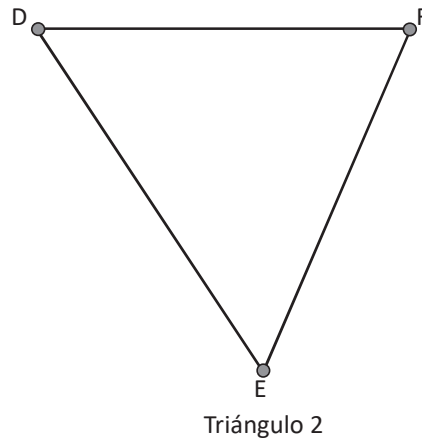
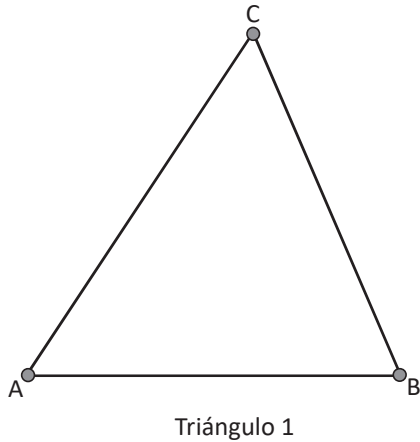


Identifica los pares de triángulos congruentes:

- a)  $\Delta ABC$ ;  $AB = 6$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 8$
- b)  $\Delta DEF$ ;  $DE = 5$ ,  $EF = 4$ ,  $FD = 7$
- c)  $\Delta GHI$ ;  $GH = 5$ ,  $HI = 6$ ,  $IG = 3$
- d)  $\Delta JKL$ ;  $JK = 6$ ,  $LJ = 8$ ,  $KL = 5$
- e)  $\Delta MNO$ ;  $MN = 5$ ,  $OM = 3$ ,  $NO = 6$
- f)  $\Delta PQR$ ;  $PQ = 5$ ,  $QR = 4$ ,  $RP = 7$

## 1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

- R** 1. Si los triángulos siguientes son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo  $\cong$ .



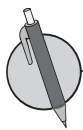
2. Identifica los pares de triángulos congruentes:

- $\triangle ABC$ ;  $AB = 8$ ,  $BC = 4$ ,  $CA = 9$
- $\triangle DEF$ ;  $DE = 7$ ,  $EF = 5$ ,  $FD = 8$
- $\triangle GHI$ ;  $GH = 8$ ,  $IG = 7$ ,  $IH = 5$
- $\triangle JKL$ ;  $JK = 8$ ,  $LJ = 4$ ,  $KL = 9$



Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.  
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  dado que  $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ .



Identifica los pares de triángulos congruentes:

- $\triangle ABC$ ;  $BC = 5$ ,  $\sphericalangle B = 55^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 85^\circ$
- $\triangle DEF$ ;  $EF = 6$ ,  $\sphericalangle E = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 95^\circ$
- $\triangle GHI$ ;  $GH = 7$ ,  $\sphericalangle G = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle H = 80^\circ$
- $\triangle JKL$ ;  $JK = 6$ ,  $\sphericalangle J = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle K = 95^\circ$
- $\triangle MNO$ ;  $MO = 7$ ,  $\sphericalangle M = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle O = 40^\circ$
- $\triangle PQR$ ;  $PR = 5$ ,  $\sphericalangle P = 85^\circ$ ,  $\sphericalangle R = 55^\circ$

## 1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos



1. Identifica los pares de triángulos congruentes:

- a)  $\triangle ABC$ ;  $AB = 9$ ,  $BC = 4$ ,  $CA = 6$
- b)  $\triangle DEF$ ;  $DE = 7$ ,  $EF = 4$ ,  $FD = 6$
- c)  $\triangle GHI$ ;  $GH = 4$ ,  $HI = 6$ ,  $IH = 9$
- d)  $\triangle JKL$ ;  $JK = 6$ ,  $LJ = 7$ ,  $KL = 4$

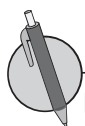
2. Identifica los pares de triángulos congruentes:

- a)  $\triangle ABC$ ;  $BC = 12$ ,  $\sphericalangle B = 25^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 105^\circ$
- b)  $\triangle DEF$ ;  $EF = 8$ ,  $\sphericalangle E = 65^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 80^\circ$
- c)  $\triangle GHI$ ;  $GH = 8$ ,  $\sphericalangle G = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle H = 65^\circ$
- d)  $\triangle JKL$ ;  $JK = 12$ ,  $\sphericalangle J = 25^\circ$ ,  $\sphericalangle K = 105^\circ$



Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL)**;  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  dado que  $BC = B'C'$ ,  $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$  y  $CA = C'A'$ .

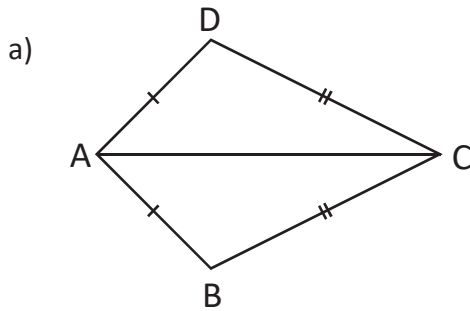


Identifica los pares de triángulos congruentes:

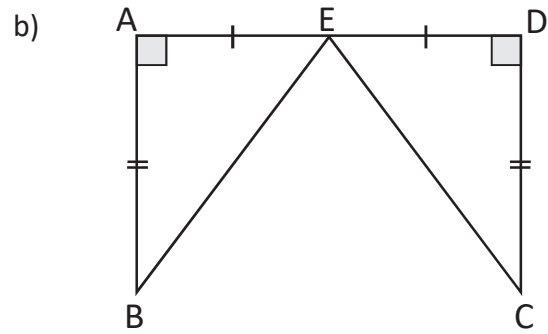
- a)  $\triangle ABC$ ;  $BC = 7$ ,  $CA = 10$ ,  $\sphericalangle C = 80^\circ$
- b)  $\triangle DEF$ ;  $EF = 5$ ,  $FD = 10$ ,  $\sphericalangle F = 55^\circ$
- c)  $\triangle GHI$ ;  $GH = 6$ ,  $IG = 4$ ,  $\sphericalangle G = 105^\circ$
- d)  $\triangle JKL$ ;  $JK = 6$ ,  $KL = 4$ ,  $\sphericalangle K = 105^\circ$
- e)  $\triangle MNO$ ;  $OM = 10$ ,  $NO = 7$ ,  $\sphericalangle O = 80^\circ$
- f)  $\triangle PQR$ ;  $RP = 10$ ,  $PQ = 5$ ,  $\sphericalangle P = 55^\circ$

## 1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

**R** Analiza si las condiciones dadas en cada caso son suficientes para que los triángulos sean congruentes, en caso de que lo sean, escribe el criterio que cumplen.



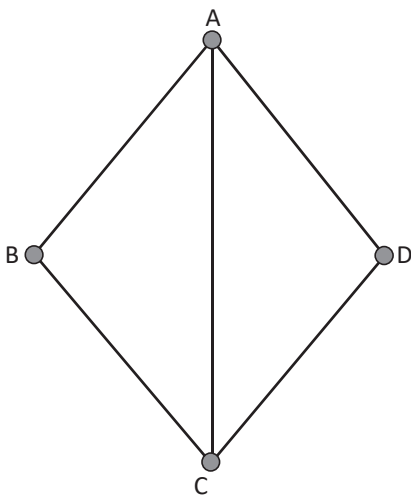
$$\begin{aligned} AB &= AD \\ BC &= DC \\ \triangle ABC &\_\_\_ \triangle ADC \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= DC \\ AE &= DE \\ \triangle ABE &\_\_\_ \triangle DCE \end{aligned}$$

**C** A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración**.

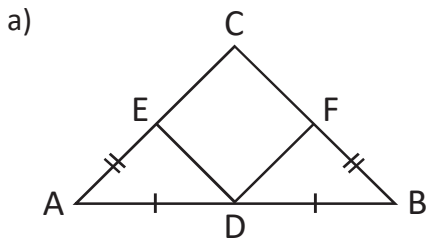
**P** Dado que el cuadrilátero ABCD es un rombo y AC es diagonal, demuestra que  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ .



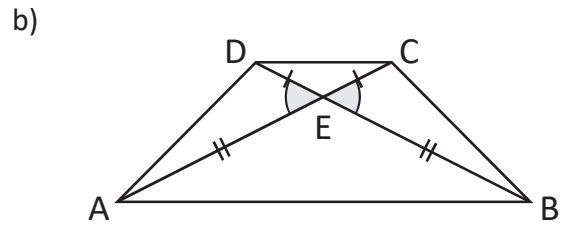
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

- R** 1. Analiza si las condiciones dadas son suficientes para que los triángulos sean congruentes, en caso de que lo sean, escribe el criterio que cumplen.

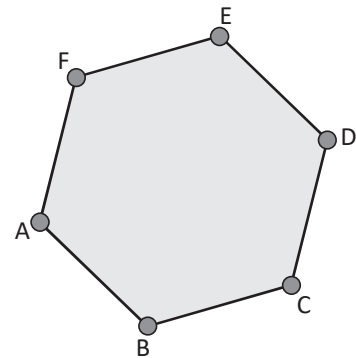


$AC = BC$ , el cuadrilátero CEDF es un rombo  
 D es el punto medio del lado AB  
 $\triangle ADE \cong \triangle BDF$



$AE = BE$   
 $DE = CE$   
 $\triangle AED \cong \triangle BEC$

2. Dado el hexágono regular, justifica por qué  $\triangle AEF \cong \triangle DFE$ .

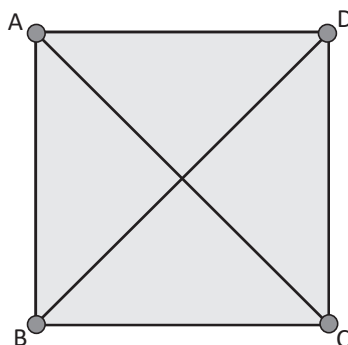


En matemática se usa el lenguaje: Si , entonces .

corresponde a la hipótesis y , corresponde a la **conclusión**.



- Los segmentos AC y DB son las diagonales del cuadrado ABCD. Demuestra que  $AC = DB$ , luego escribe la hipótesis y la conclusión.

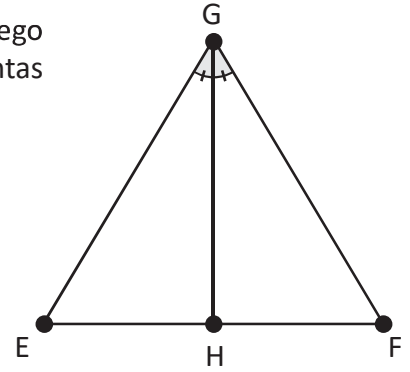




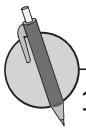
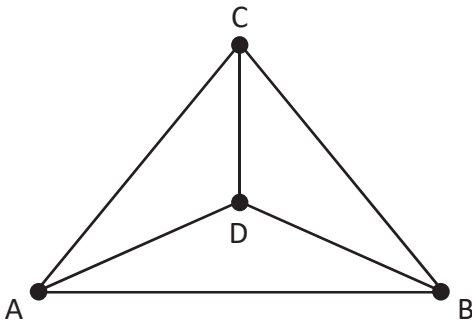
## 1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

**R**

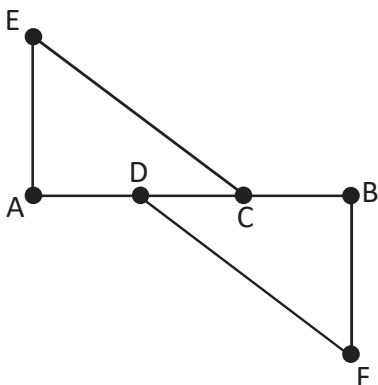
1. Dado el triángulo EFG isósceles, justifica por qué  $\triangle EHG \cong \triangle FHG$ ; luego analiza si la justificación es única, caso contrario escribe las distintas formas de justificar.



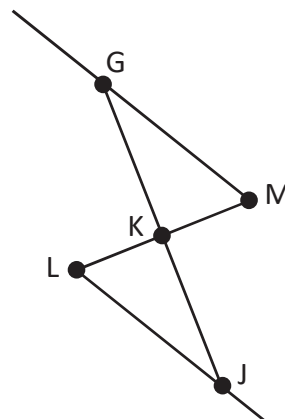
2. En la figura, los triángulos ABC y ABD son isósceles. Demuestra que  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ , luego escribe la hipótesis y la conclusión.



1. En la figura,  $AD = BC$  y  $AE = BF$ , además  $AE \perp AB$  y  $BF \perp AB$ . Demuestra que  $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ .

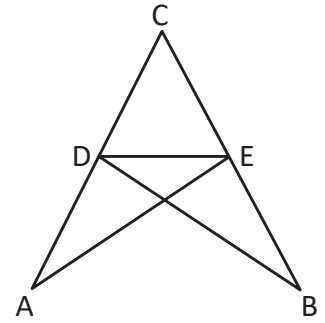


2. En la figura,  $GM \parallel LJ$  y K es el punto medio de GJ, demuestra que  $\triangle K LJ \cong \triangle K MG$ .

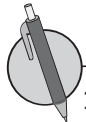
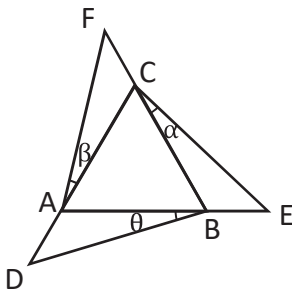


## 1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

- R** 1. Si,  $AD = BE$  y  $DC = CE$ , demuestra que  $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ; luego escribe la hipótesis y la conclusión.



2. El triángulo ABC es equilátero,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$  son prolongaciones de los lados del  $\triangle ABC$ . Además  $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta = \sphericalangle\theta$ , demuestra que  $\triangle ADB \cong \triangle BEC \cong \triangle CFA$ .

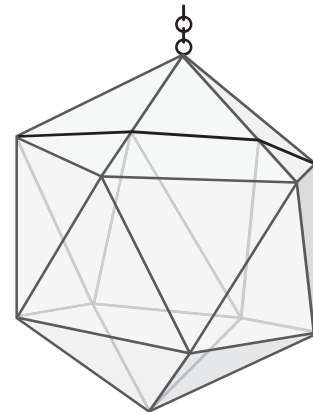


1. La empresa A elabora juegos de comedor triangulares, si un cliente quiere 6 iguales al de la imagen.



- ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar como mínimo para replicar la mesa y que todas sean iguales?
- Si se quiere que los tres lados de la mesa sean iguales, ¿cuáles serían las medidas de los ángulos?

2. Para decorar la casa, Ana ha diseñado un adorno para lámpara, si en su casa tiene 10 lámparas y quiere colocarles adornos iguales a todas, determina:



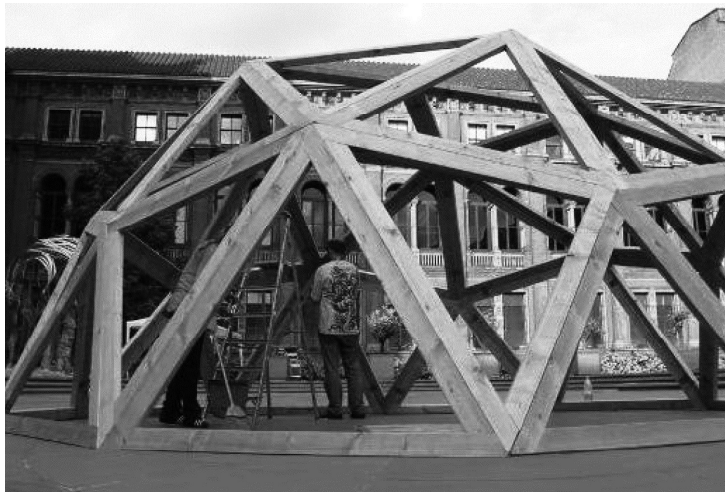
- ¿Qué medidas debe tomar como mínimo para que todas le queden iguales?
- Busca los materiales adecuados y elabora un adorno para lámpara como el de la figura.

## Problemas de aplicación

### Los triángulos en la industria

El icosidodecaedro tiene 20 caras triangulares y 12 pentagonales está especialmente indicado para construir cúpulas desmontables por su esfericidad. Esta propiedad no ha pasado desapercibida para la industria: una vivienda desmontable muy eficaz es un hemicosododecaedro.

- ¿Qué características tienen los triángulos que forman el hemicosododecaedro?
- ¿En qué otras construcciones se evidencia el uso de triángulos? Escribe al menos 3 ejemplos.
- ¿Qué medidas debes tomar para hacer una réplica exacta de la cúpula mostrada en la figura?  
Escribe los diferentes casos.



### Organizando el salón de clases

En Educación Inicial, el aula se organiza procurando que los niños y niñas tengan un ambiente agradable, afectivo, familiar, seguro atractivo, con imágenes y objetos que además de ser significativos sirvan para cultivar valores, conocimientos, actitudes y el desarrollo de habilidades. También los niños y niñas deben tener espacio para desplazarse así como para realizar diferentes actividades. En ese sentido la profesora Carmen quiere distribuir las mesas formando 5 hexágonos como el de la figura. Observa la figura y realiza lo siguiente:

- Calcula el área de cada mesa triangular.
- ¿Qué tipo de triángulos deben ser las mesas para que sea factible formar las mesas hexagonales ?
- Determina el área que ocupa cada mesa hexagonal.
- ¿Cuánto espacio necesita la maestra para colocar las 5 mesas hexagonales?

