Unidad 7

Área y volumen de sólidos geométricos

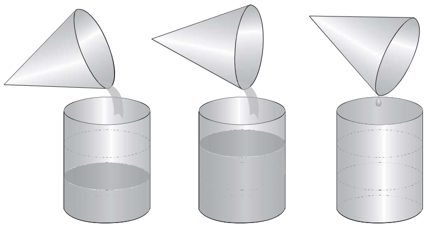
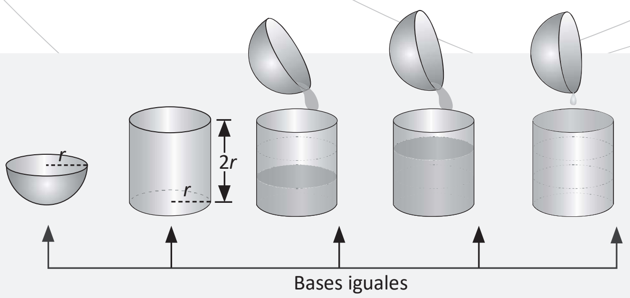


Ilustración de la relación entre volumen del cono y del cilindro.

El matemático y geómetra Euclides, relacionó los volúmenes de los prismas y pirámides, estableciendo en la proposición 10 del libro XII del texto ***Los Elementos***, que el volumen del cono es un tercio comparado con el volumen del cilindro que tiene la misma base y altura; aunque es importante mencionar que él no fue el primero en dedicarse al estudio de los sólidos, pues ya Platón había estudiado los sólidos regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro conocidos en la actualidad como sólidos platónicos.

En la vida cotidiana, los sólidos son utilizados como base para construir objetos decorativos, diseño de edificios, materiales deportivos, educativos, depósitos para almacenar diferentes productos medicinales, cosméticos, industriales, etc.

Edificio de la Lotería Nacional (1970)



Deducción del volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro.

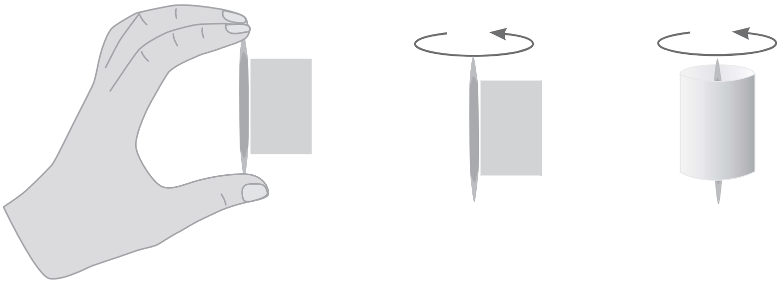
En esta unidad conocerás el origen de los sólidos más comunes, sus características, cálculo de áreas, volúmenes y relaciones que existen entre el volumen del cilindro, cono y esfera; así como su uso en diferentes contextos del entorno.

1.1 Sólidos de revolución

A los sólidos geométricos que pueden generarse girando una figura plana alrededor de un eje se les llama **sólidos de revolución**.

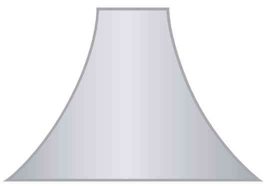
Por ejemplo, imagina que tienes un trozo de cartulina en forma de rectángulo, como muestra la figura. Si lo giras alrededor de un palillo de dientes, ¿qué puedes observar?, ¿se forma algún sólido geométrico que ya conoces?

Al mover el rectángulo de modo que gire, puedes observar lo siguiente:
El sólido que se forma es un cilindro.



1. Dibuja la figura plana y el eje que hace que se genere dicha figura.

Lámpara

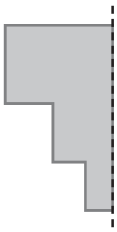


Vaso

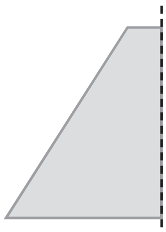
2. Dibuja el sólido que se genera al girar la figura alrededor del eje indicado:

a)

b)



c)

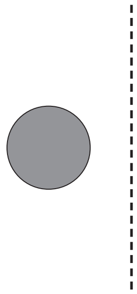


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

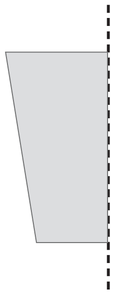
1.2 Características y elementos del cono y la esfera

R 1. Dibuja la figura al girar:

a)



b)



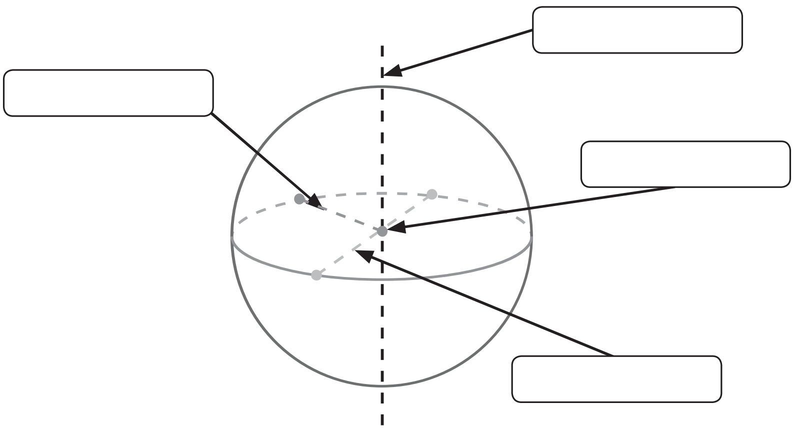
2. Dibuja la figura plana y el eje que hace que se genere dicha figura:

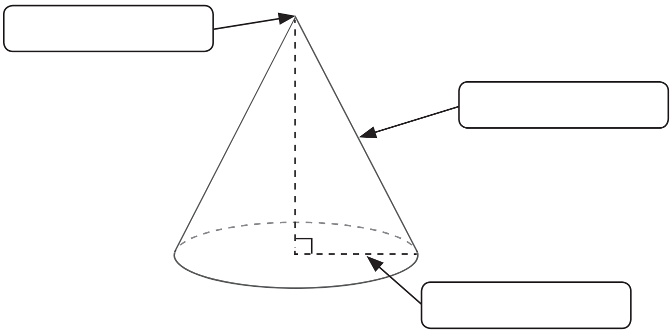
Pino de boliche

C **El cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.
El cono puede verse como una superficie de revolución. La superficie plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.

Una esfera es un cuerpo redondo, formado por una sola superficie curva. Puede verse también como un sólido de revolución, haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

Completa colocando los nombres de los elementos de la esfera y el cono, luego los elementos que hace falta señalar en la imagen con su respectivo nombre.





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

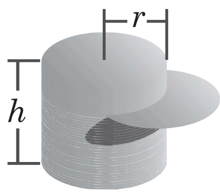
2.1 Volumen del prisma y del cilindro

R Escribe los elementos de:

Cono: ____
____
____

Esfera: ____
____
____

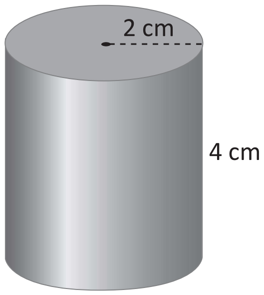
C El volumen del cilindro se obtiene de una manera análoga al volumen de un prisma, es decir, el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base ($A_B = \pi r^2$) por la altura (h).



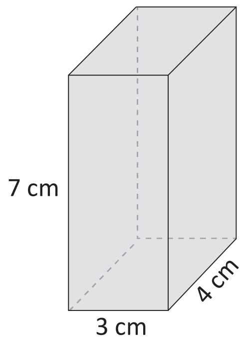
$$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$$

1. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y la altura.

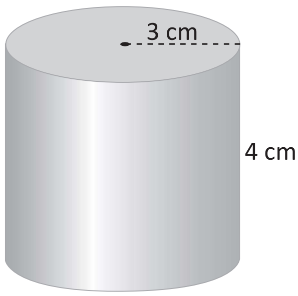
a)



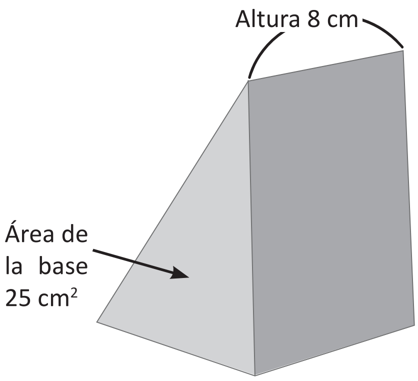
b)

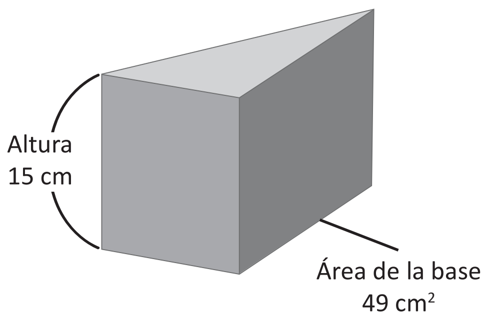


c)



2. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y su altura.



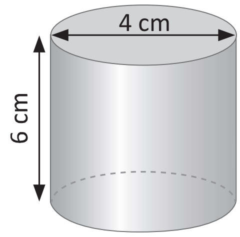


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

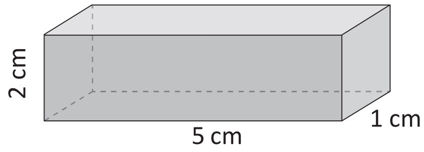
2.2 Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular

Encuentra el volumen de los siguientes sólidos:

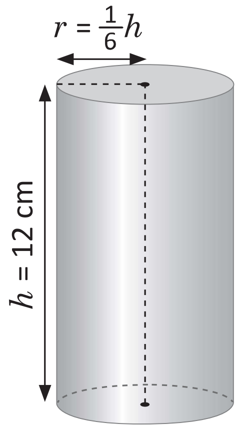
a)



b)



c)

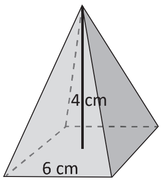


El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base (A_B) por su altura (h):

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

Volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo.

Ejemplo:
Encontrar el volumen de la pirámide que tiene un cuadrado de base de lado 6 cm y de altura 4 cm.

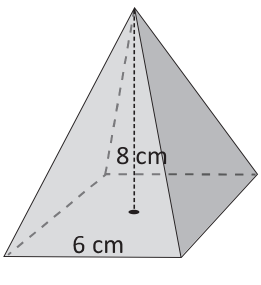


El área de la base como es un cuadrado: $A_{cuadrado} = 6 \times 6 = 36$ cm^2

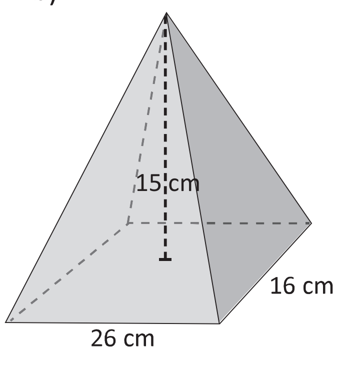
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 4 = 48 \text{ cm}^3$$

1. Encuentra el volumen de las siguientes pirámides donde a) y c) tienen de base un cuadrado y b) tiene de base un rectángulo.

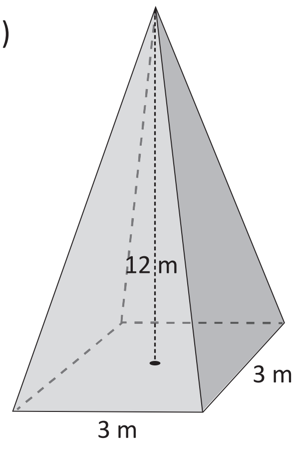
a)



b)



c)



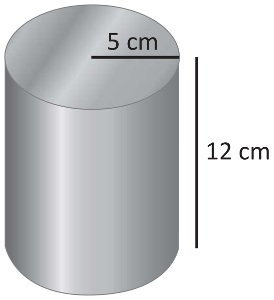
2. Encuentra la altura de una pirámide si se sabe que su volumen es 225 cm^3 y el área de la base es 25 cm^2.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

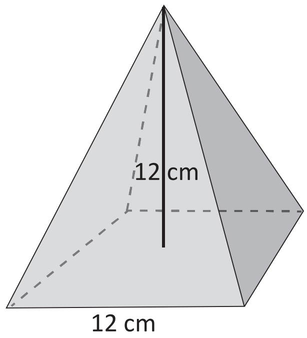
2.3 Volumen de la pirámide triangular

R

1. Encuentra el volumen del cilindro.



2. Encuentra el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular.



3. Encuentra el área de la base de la pirámide, si su volumen es 100 cm^3 y la altura mide 12 cm.

C

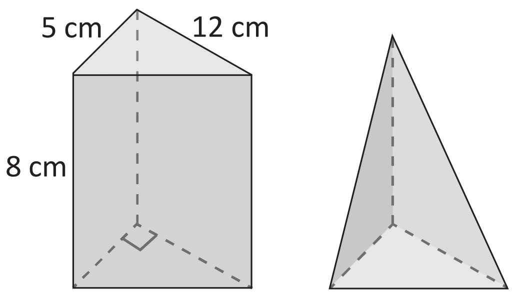
El volumen de una pirámide triangular es $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$, que es igual a la de una pirámide cuadrangular, lo que cambia es el área de la base.

Ejemplo: Encuentra el volumen de una pirámide de área de base 12 cm^2 y altura 6 cm.

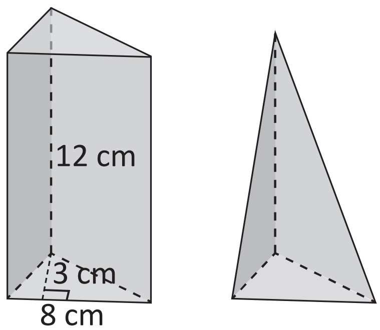
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$$

1. Calcula el volumen de los siguientes prismas y luego relaciona cuál sería el volumen de las pirámides respectivas.

a)



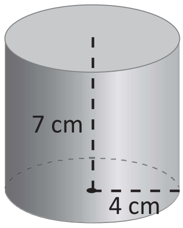
b)



2. Encuentra el volumen de una pirámide triangular cuya base es 30 cm^2 y 5 cm de altura.

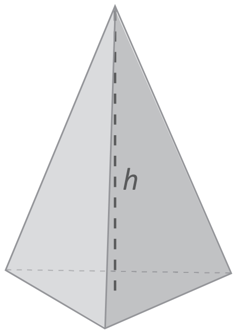
2.4 Volumen del cono

1. ¿Cuál es el volumen del siguiente cilindro?



2. ¿Cuál es el radio de un cilindro que tiene un volumen de 54 π cm^3 si su altura es de 6 cm?

3. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular que tiene por área de la base 48 cm^2 y tiene una altura de 7 cm?

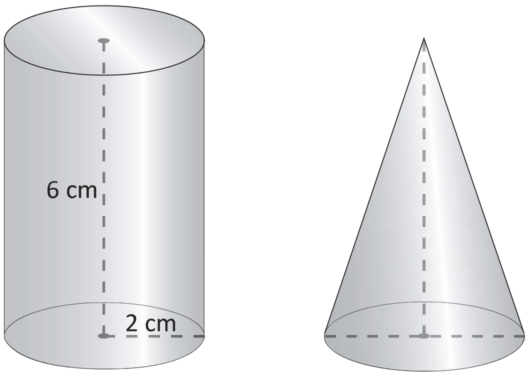


El volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro; es decir, es un tercio del producto del área de la base (A_B) por su altura (h).

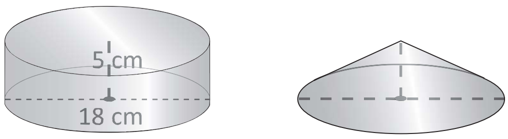
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

1. Encuentra el volumen del cilindro y luego compara el resultado para obtener el volumen del cono de la misma base y altura que el cilindro.

a)



b)



2. Encuentra el volumen de los siguientes conos:

a) Área de la base: 9π cm^2 y altura: 7 cm
b) Área de la base: 27π cm^2 y altura: 5 cm

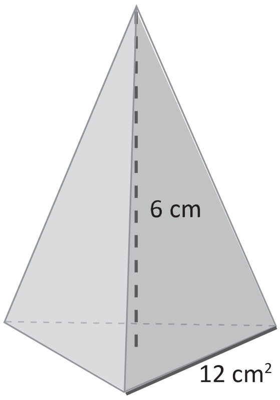
3. Encuentra la altura de un cono cuyo volumen es: 108π cm^3 y el área de la base es: 36π cm^2.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

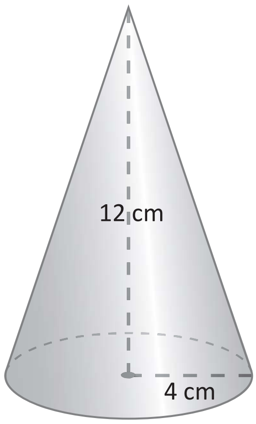
2.5 Volumen de la esfera

R

1. Encuentra el volumen de la pirámide triangular con área de la base 12 cm² y altura 6 cm.



2. Encuentra el volumen del cono de altura 12 cm y radio 4 cm.



C

El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera.

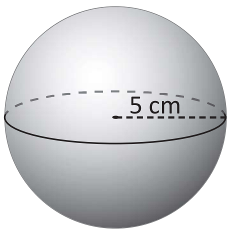
$$\begin{aligned} V_{esfera} &= \tfrac{2}{3}(V_{cilindro}) \\ &= \tfrac{2}{3}(\pi r^2 h) \\ &= \tfrac{2}{3}(\pi r^2(2r)) \\ &= \tfrac{2}{3}(2\pi r^3) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{esfera} &= \tfrac{2}{3}(V_{cilindro}) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}}$$

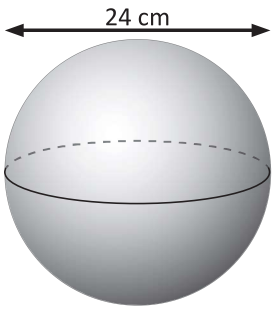
Ejemplo: Encuentra el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi (3)^3 \\ &= \frac{4 \times 3 \times 3 \times \cancel{3}}{\cancel{3}}\pi \\ &= 36\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

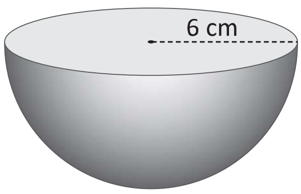
1. Calcula el volumen de una pelota de 5 cm de radio.



2. Calcula el volumen de una esfera con un diámetro de 24 cm como se muestra a continuación:



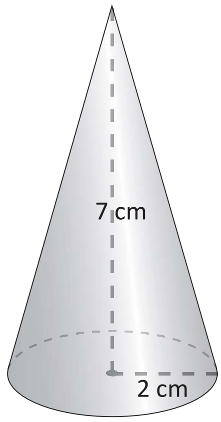
3. Encuentra el volumen de la semiesfera de radio 6 cm.



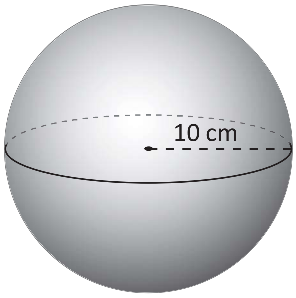
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Volumen de sólidos compuestos

1. Encuentra el volumen del cono cuya altura es 7 cm y radio 2 cm.



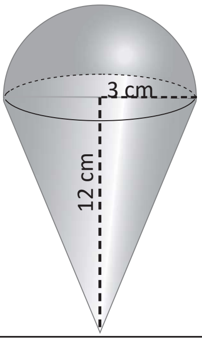
2. Encuentra el volumen de la esfera de radio 10 cm.



Para determinar el volumen de sólidos compuestos, se descompone el sólido en cuerpos geométricos conocidos, se calculan sus volúmenes y luego se suman.

Ejemplo: Calcula el volumen de la siguiente figura (V_{figura}):

Primero se encuentra el volumen de la semiesfera $\frac{1}{2}V_{esfera}$:



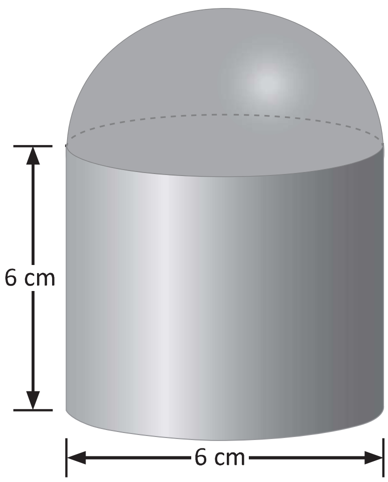
$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
$$= \frac{2}{3}(\pi \times 27)$$
$$= 18\pi \text{ cm}^2$$

Luego se encuentra el volumen del cono:

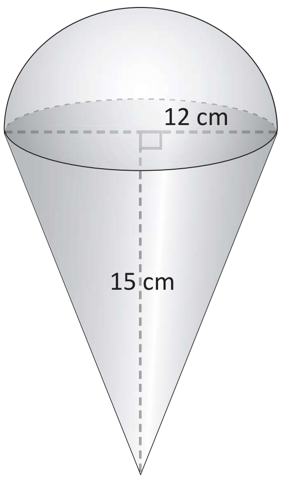
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 12$$
$$= 36\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{figura} = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono}$$
$$= 18\pi + 36\pi$$
$$= 54\pi \text{ cm}^3$$

1. Encuentra el volumen de la siguiente figura:



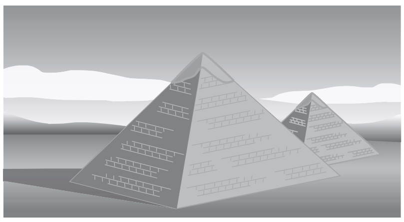
2. Calcula el volumen y el área del sólido si el radio mide 12 cm y la altura 15 cm.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Autoevaluación de lo aprendido

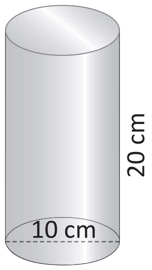
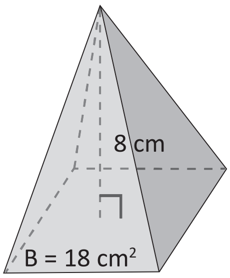
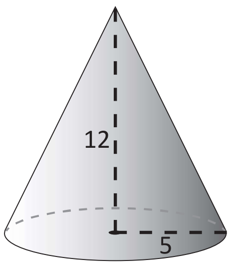
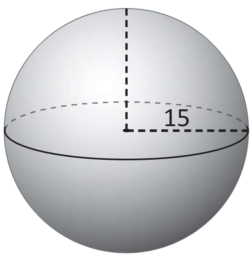
Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. En un laboratorio farmacéutico se envasa el alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calculo la capacidad en centímetros cúbicos de cada frasco de alcohol. 				
2. Una empresa comercializa latas para refrescos. La lata estándar tiene forma cilíndrica de radio 3 cm y altura 10 cm. ¿Cuánto es la capacidad de líquido que dicha lata puede contener? 				
3. Una pirámide egipcia de base cuadrada tiene 150 metros de altura y 139 metros de arista de la base. ¿Cuál es el volumen de dicha pirámide? 				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

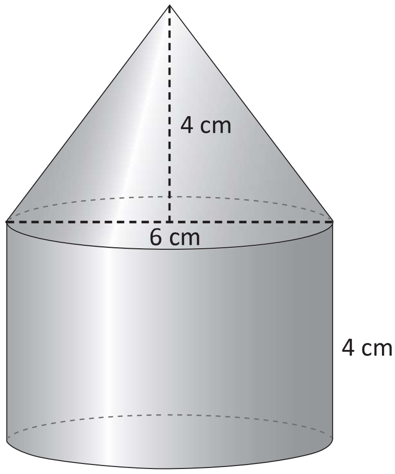
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro el volumen del siguiente cilindro de altura 20 cm y diámetro 10. 				
2. Encuentro el volumen de la siguiente pirámide de base 18 cm^2 y altura 8 cm. 				
3. Encuentro el volumen del siguiente cono de altura 12 cm y radio 5 cm. 				
4. Encuentro el volumen de la esfera de radio 15 cm. 				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.1 Desarrollo del cono y longitud de arco

1. Encuentra el volumen de una semiesfera de radio 12 cm.

2. Encuentra el volumen de la siguiente figura.

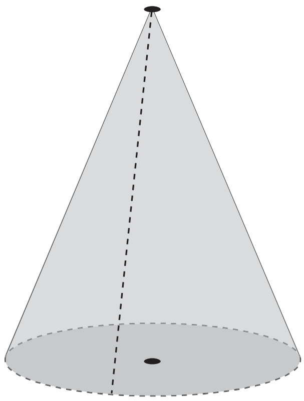


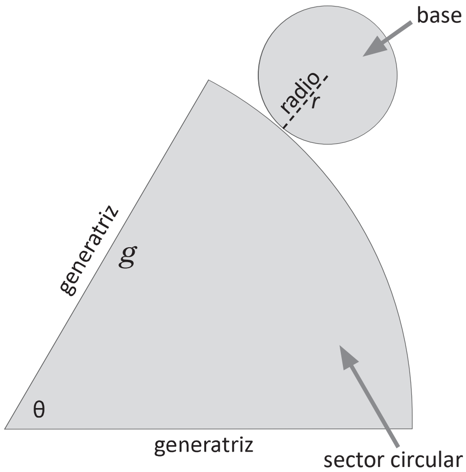
El patrón del cono está compuesto por un círculo de radio r, que es el radio del cono, y por un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y el ángulo central □. Las fórmulas para calcular la longitud de arco *L*, de un sector circular son:

$L = 2\pi r$ ... ... (1)

$L = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$ ... ... (2)

Radio del cono: r
Ángulo central del sector circular: θ
Generatriz del cono: g
Arco del sector circular: L





1. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono cuya generatriz mide g = 6 cm y el ángulo central es de □ = 120°.

2. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono, cuyo radio mide 8 cm.

3. Encuentra de dos maneras diferentes, la longitud de arco del sector circular L de un cono, si su generatriz mide g = 9 cm, □ = 120° y el radio r = 3 cm.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.2 Relación entre los elementos del patrón del cono

1. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono L, cuya generatriz mide g = 3 cm y el ángulo central es de θ = 210°.

2. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono L cuyo radio mide r = 6 cm.

Las medidas del cono se pueden calcular cuando la relación de la circunferencia de la base es igual a la longitud del sector circular; es decir:

$$L = 2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Ejemplo: encontrar el ángulo central del sector circular θ, dada la generatriz g = 30 cm y el radio del cono r = 4 cm.

Solución.
Como $2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$, entonces $\theta = \frac{360°}{g} \times r$ = 48°.

Sustituyendo: $\theta = \frac{360°}{30} \times 4$ = 48°.

1. Encuentra el ángulo θ del sector circular del plano desarrollado del cono, si la generatriz g = 6 cm y el radio del cono es r = 5 cm.

2. Encuentra el radio r de un cono, si su generatriz g = 8 cm y el ángulo del sector circular del desarrollo del cono es θ = 90°.

3. Encuentra la generatriz g del cono, si su radio r mide 8 cm y el ángulo θ mide 80°.

4. Encuentra la generatriz g del cono, si su ángulo θ = 270° y su longitud de arco es 10π.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.3 Área superficial del cono

R

1. Encuentra la longitud de arco L del sector circular de un cono, si g = 15 cm y □ = 120°.

2. Encuentra el ángulo □ del sector circular del plano desarrollado del cono si la generatriz g = 8 cm y el radio del cono es de r = 2 cm.

C

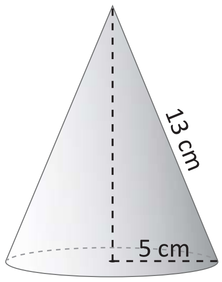
Se utiliza el plano desarrollado del cono para calcular su área lateral y total, cuando el radio del cono es r y la generatriz es g:

Área lateral $A_{Lateral}$: Es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Su área está dada por: $A_{Lateral} = \pi r g$

Área total A_{Total}: Es la suma del área lateral y el área de la base. Como la base del cono es un círculo, se tiene que el área total es:

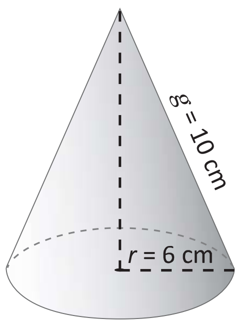
$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

1. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total A_{Total} del cono que se muestra en la figura:



2. Encuentra la generatriz de un cono g que tiene un radio de r = 8 cm y un área lateral de $A_{Lateral}$ = 128π cm^2.

3. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total A_{Total} del cono que se muestra en la figura:

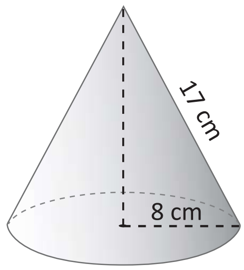


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

4.4 Área superficial de la esfera

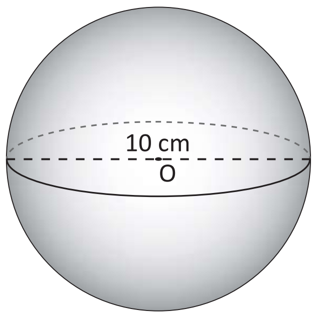
1. Encuentra la generatriz g del cono, si su radio r mide 16 cm y el ángulo □ mide 120°.

2. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total A_{Total} del cono que se muestra en la figura:



Como el área de un círculo de radio r es igual a πr^2, el área superficial de la esfera es: $A = 4\pi r^2$.

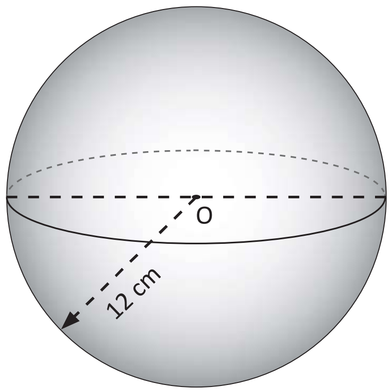
Ejemplo: Encuentra el área superficial de la esfera cuyo diámetro es 10 cm.



Primero se encuentra el radio, dado que el diámetro es 10 cm, el radio vale 5 cm; por tanto, el área de la esfera es:

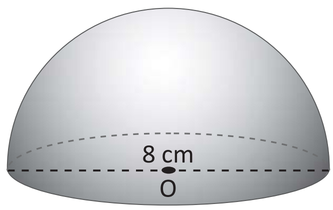
$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi \text{ cm}^2.$$

1. Encuentra el área superficial de la esfera que tiene radio 12 cm.



2. Calcular el radio de una esfera si su área superficial es 36π cm^2.

3. Encuentra el área superficial de la parte curva de una semiesfera cuyo diámetro es 8 cm.

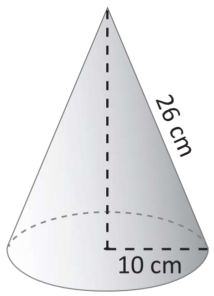


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

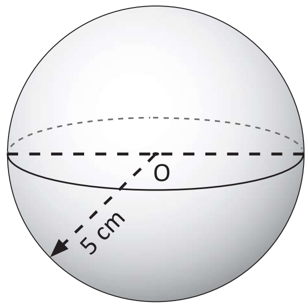
5.1 Áreas superficiales en sólidos compuestos

R

1. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total A_{Total} del cono que se muestra en la figura:



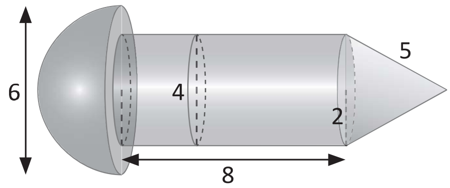
2. Encuentra el área de la esfera de radio 5 cm.



C

Para encontrar el área superficial de figuras compuestas, se suman o se restan las áreas de cada una de ellas en el problema.

Ejemplo.
Encuentra el área superficial de la siguiente figura:



Primero se encuentra el área de la semiesfera. Utilizando la fórmula se tiene:

$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$

El área lateral del cono:

$A_{Lcono} = \pi r g = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2$

Luego se calcula el área lateral del cilindro:

$A_{Lateral} = 2\pi r h = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi \text{ cm}^2$

Luego del área del círculo de la semiesfera se resta el círculo de la tapa del cilindro:

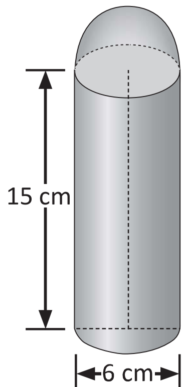
$A_{círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2$

Por tanto, el área de la figura A:

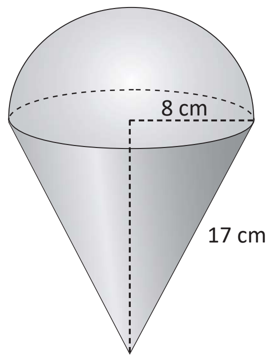
$A_{Figura} = A_{semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{círculos} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi \text{ cm}^2$.

Encuentra el área de las siguientes figuras:

a)



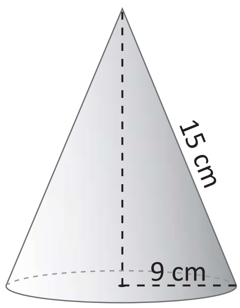
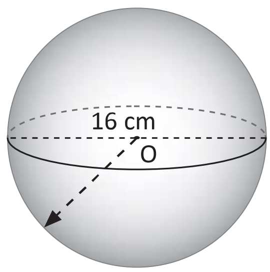
b)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

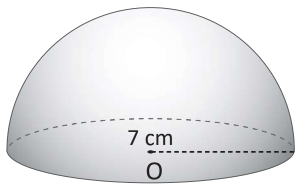
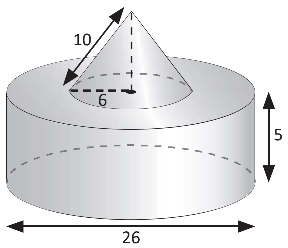
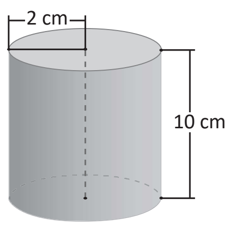
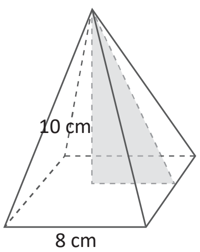
5.2 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro la longitud de arco L de un cono cuya generatriz mide g = 10 cm y el ángulo central es de □ = 90°.				
2. Encuentro el radio r de un cono, si su generatriz g mide 15 cm y el ángulo central □ del sector circular del desarrollo del cono es 216°.				
3. Calculo el área lateral y total de un cono cuya altura mide 12 cm, la generatriz mide 15 cm y el radio de la base es de 9 cm. 				
4. Encuentro el área de una esfera de diámetro 16 cm. 				

5.3 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro el área de la semiesfera de radio 7 cm. 				
2. Encuentro el área superficial de la siguiente figura: 				
3. Calculo el volumen de un cilindro cuyo radio es de 2 cm y la altura es de 10 cm 				
4. Calculo el volumen de una pirámide cuadrangular cuyo lado de la base mide 8 cm y la altura 10 cm. 				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?