Unidad 1. Multiplicación de polinomios

Competencia de la Unidad

Adquirir habilidades del dominio del álgebra elemental, a través de los procesos de multiplicación y factorización de polinomios, apoyándose en justificaciones geométricas que faciliten su visualización para resolver problemas de matemática y de su entorno.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 4: Comunicación con símbolos
- Expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Representación de relaciones entre expresiones matemáticas

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 1: Operaciones algebraicas
- Operaciones con polinomios
- Aplicación de las expresiones algebraicas

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 1: Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Multiplicación de polinomios	1	1. Multiplicación de monomio por binomio
	1	2. Binomio por binomio, parte 1
	1	3. Binomio por binomio, parte 2
	1	4. Binomio por trinomio
	1	5. Trinomio por trinomio
	1	6. Practica lo aprendido
2. Productos notables	1	1. Productos de la forma $(x + a)(x + b)$
	1	2. Cuadrado de un binomio, parte 1
	1	3. Cuadrado de un binomio, parte 2
	1	4. Suma por la diferencia de binomios
	1	5. Desarrollo de productos notables utilizando sustitución
	1	6. Combinación de productos notables
	1	7. Cuadrado de un trinomio
	1	8. Valor numérico y cálculo de operaciones
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Practica lo aprendido
3. Factorización	1	1. Factorización de polinomios
	1	2. Factor común
	1	3. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1
	1	4. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2
	1	5. Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Lección	Horas	Clases
	1	6. Factorización de diferencias de cuadrados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1
	1	9. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2
	1	10. Factorizaciones sucesivas
	1	11. Combinación de factorizaciones
	1	12. Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización
	1	13. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 1

29 horas clase + prueba de la Unidad 1

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Multiplicación de polinomios

Se estudia la multiplicación de polinomios. Utilizando el área de rectángulos se justifica geométricamente el significado de la multiplicación de los polinomios; se establecen los algoritmos para la multiplicación de monomio por binomio, binomio por binomio, binomio por trinomio y trinomio por trinomio.

Lección 2: Productos notables

Se establecen productos especiales llamados productos notables; por ejemplo, el cuadrado de un binomio, la suma por la diferencia de binomios y el cuadrado de un trinomio. Además, se realiza el desarrollo de productos que involucran expresiones más complejas utilizando la sustitución de variables. Este conocimiento servirá de base para la siguiente unidad donde se realizarán productos de raíces cuadradas.

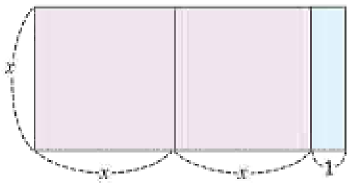
Lección 3: Factorización

Se establece la factorización como el proceso inverso del desarrollo de un producto de polinomios y utilizando áreas de rectángulos se desarrollan ideas intuitivas de algunos algoritmos de factorización. Se estudiará el factor común, factorización de trinomios y trinomios cuadrados perfectos, diferencia de cuadrados y factorizaciones utilizando cambio de variable.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



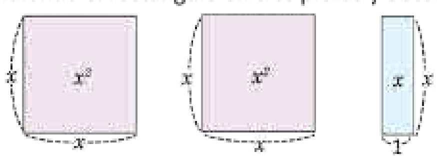
En potenciación se cumple que $a \times a = a^2$

S

Primera forma:
La altura del rectángulo es x, mientras que su base es: $x + x + 1 = 2x + 1$. El área del rectángulo formado por las tres piezas es: $x(2x + 1)$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un término o por la suma de dos o más términos. Un **monomio** es el polinomio formado por un solo término.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en tres piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:

$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x$.

Por tanto, el área del rectángulo también es: $2x^2 + x$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo, podemos decir, por tanto: $x(2x + 1) = 2x^2 + x$.

Realizando el producto:
Lo anterior también pudo encontrarse algebraicamente multiplicando x por cada uno de los términos del polinomio $2x + 1$:

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

C

En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

A este proceso se le llama: **desarrollo**.

E

Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

   a) $x(3x + 2)$ $= 3x^2 + 2x$ b) $2x(x + y)$ $= 2x^2 + 2xy$

2. Desarrolla los siguientes productos:

   a) $-x(xy + x)$ $= -x^2y - x^2$

   b) $-3y(x - y)$ $= -3xy + 3y^2$

   c) $(xy + x)xy$ $= x^2y^2 + x^2y$

   d) $xy(xy + x + y)$ $= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Indicador de logro

1.1 Desarrolla el producto de monomio por binomio.

Secuencia

El álgebra simbólica se estudia formalmente desde séptimo grado, donde se traducen expresiones del lenguaje coloquial al algebraico y se realizan operaciones que involucran un número y una expresión algebraica. Posteriormente, en octavo grado, se continúa el estudio de las operaciones suma y resta de polinomios y se determina el valor numérico de polinomios. El estudiante hasta este momento, utiliza símbolos para generalizar un patrón, es decir, representar una variable con letra, pero también para indicar una incógnita a través de la solución de una ecuación. En esta clase se estudia el producto de un monomio con un binomio, ya que en octavo grado se estudió el producto de monomio con monomio.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Para facilitar la comprensión se presenta una situación gráfica a través de la cual se pueda relacionar el producto de un monomio con un binomio utilizando áreas de rectángulos, el área puede encontrarse de dos formas diferentes, lo que permite establecer una igualdad entre ambas expresiones.
Ⓒ Se establece el algoritmo para realizar la multiplicación de un monomio por un binomio. Es importante mencionar que al proceso de multiplicar polinomios se le llama **desarrollo** y es una aplicación de la propiedad distributiva. En la solución de ejercicios se utiliza directamente el algoritmo establecido en la conclusión para desarrollar los productos. Hay que prestar atención al signo; además, en el literal b), el orden de los factores es binomio por monomio.

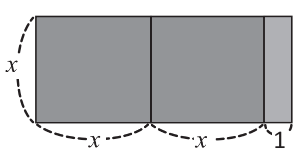
Solución de algunos ítems:

2. a) $-x(xy + x) = -x(xy) + (-x)(x)$
$= -x^2y - x^2$

d) $xy(xy + x + y)$
$= xy(xy) + xy(x) + xy(y)$
$= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Fecha: **U1 1.1**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $x(2x + 1)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1.$
Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $x(2x + 1) = 2x^2 + 1$.

Ⓔ Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$
$= 2x(x) - 2x(y)$
$= 2x^2 - 2xy$

b) $(xy - y)(-2x)$
$= xy(-2x) - y(-2x)$
$= -2x^2y - (-2xy)$
$= -2x^2y + 2xy$

Ⓡ 1.
a) $3x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 2xy$

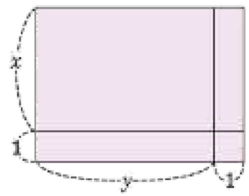
2.
a) $-x^2y - x^2$ b) $-3xy + 3y^2$
c) $x^2y^2 + x^2y$ d) $x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Tarea: página 2 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Binomio por binomio, parte 1

P

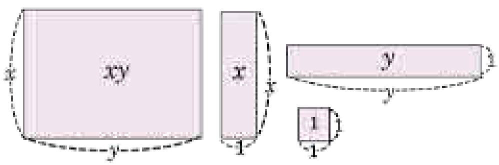
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $y + 1$ y su base es $x + 1$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(y + 1)$.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$xy + x + y + 1$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$xy + x + y + 1$.

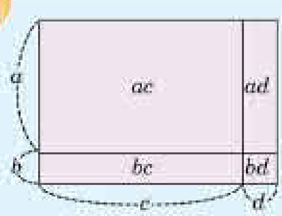
En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

> Al polinomio formado por dos términos se le llama: **binomio.**

Realizando el producto:
Lo anterior puede encontrarse multiplicando cada término del primer binomio por cada uno de los términos del segundo, es decir:

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

Desarrolla el producto: $(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

> Los términos $4xy$ y $3xy$ son semejantes, pues tienen la misma parte literal xy. Para sumarlos, se suman sus coeficientes 4 y 3, conservando la parte literal.

Por lo tanto, $(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$.

Desarrolla:

a) $(2x + 1)(y + 1)$
$= 2xy + 2x + y + 1$

b) $(2x + 3)(3y + 2)$
$= 6xy + 4x + 9y + 6$

c) $(xy + 3x)(y + 1)$
$= xy^2 + 4xy + 3x$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$
$= 6x^2y + 19xy + 15y$

e) $(x + 1)(x + y)$
$= x^2 + xy + x + y$

f) $(2x + 3)(x + y)$
$= 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

Indicador de logro

1.2 Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo.

Secuencia

En la clase anterior se obtuvo el algoritmo para multiplicar un monomio por un binomio, en esta clase se amplía hasta deducir el algoritmo para multiplicar un binomio por un binomio, que puede verse como una extensión del algoritmo anterior, cuando los dos factores son binomios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Para entender que aparecen cuatro términos, se utiliza el área de rectángulos para deducir el algoritmo de multiplicación de un binomio por binomio.
Los algeblocks pueden elaborarse utilizando material sencillo como cualquier tipo de papel que sea manipulable, se pueden utilizar fotocopias del material complementario que aparece al final del Libro de texto de noveno grado. Es importante que los estudiantes tengan a disposición el material antes de comenzar la clase y no utilizar el tiempo de la misma en organización o preparación del material.

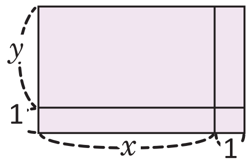
Ⓒ En lugar de utilizar directamente la propiedad distributiva, multiplicar asociando una variable a cada paréntesis. Utilizar un modelo de áreas para hacer más comprensible su desarrollo. Para esta clase únicamente se realiza el desarrollo del producto de binomios que involucran signos positivos para facilitar la comprensión.

Posibles dificultades:
En este punto, algunos estudiantes confunden el uso de las letras en expresiones algebraicas, dándoles significado como incógnita; es decir, el estudiante busca que la letra tome un valor numérico concreto. Es importante hacer notar que en estos procesos algebraicos la variable no representa una incógnita, los modelos de área de rectángulos pueden ayudar a evitar este error.

Fecha:

U1 1.2

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
base × altura = $(x + 1)(y + 1)$
Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$xy + x + y + 1$
Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(2xy + x)(3y + 2)$
$= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)$
$= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x$
$= 6xy^2 + 7xy + 2x$

Ⓡ
a) $2xy + 2x + y + 1$
b) $6xy + 4x + 9y + 6$
c) $xy^2 + 4xy + 3x$
d) $6x^2y + 19xy + 15y$
e) $x^2 + xy + x + y$
f) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

Tarea: página 3 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Binomio por binomio, parte 2

P

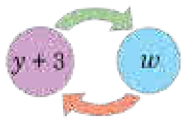
Desarrolla el producto: $(2x - 1)(y + 3)$.

La resta $a - b$ puede escribirse como una suma:
$$a - b = a + (-b)$$

S

Se debe tener en cuenta el signo $(-)$ del primer binomio. El producto puede desarrollarse de las siguientes formas:

1. Se escribe $2x - 1$ como una suma: $2x + (-1)$. El producto se desarrolla como en la clase anterior:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= [2x+(-1)](y+3)\\ &= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)\\ &= 2xy+6x+(-y)+(-3)\\ &= 2xy+6x-y-3\end{aligned}$$



2. Se toma $y + 3 = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= 2x(w)-1(w) && \text{Tomando } w = y+3,\\ &= 2x(y+3)-(y+3) && \text{sustituyendo nuevamente } y+3=w,\\ &= 2xy+6x-y-3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2xy + 6x - y - 3$.

C

Para resolver el producto de un binomio por otro se puede hacer de 2 formas:

1. Se escribe $a - b = a + (-b)$ y luego se desarrolla el producto.
$$\begin{aligned}(a-b)(c+d) &= [a+(-b)]\,(c+d)\\ &= ac+ad+(-b)c+(-b)d\\ &= ac+ad+(-bc)+(-bd)\\ &= ac+ad-bc-bd\end{aligned}$$

2. Se toma $c + d = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio.

E

Desarrolla: $(3x - 5)(2y - 4)$.

Se escribe el primer término como $3x + (-5)$ y el segundo término como $2y + (-4)$:
$$\begin{aligned}(3x-5)(2y-4) &= [3x+(-5)][2y+(-4)]\\ &= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)\\ &= 6xy-12x-10y+20\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 5)(2y - 4) = 6xy - 12x - 10y + 20$.

Desarrolla:

a) $(x + 1)(y - 1)$
$= xy - x + y - 1$

b) $(x - 1)(y - 1)$
$= xy - x - y + 1$

c) $(2x + 2)(-y + 2)$
$= -2xy + 4x - 2y + 4$

d) $(-x - 2)(2y - 3)$
$= -2xy + 3x - 4y + 6$

e) $(xy - x)(y + 10)$
$= xy^2 + 9xy - 10x$

f) $(2xy - y)(5x - 3)$
$= 10x^2y - 11xy + 3y$

4

Indicador de logro

1.3 Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo y negativo.

Secuencia

Anteriormente se utilizaron áreas de rectángulos para deducir el algoritmo de productos de binomios donde todos los términos son positivos. Para esta clase se utiliza este hecho para desarrollar productos que involucren también signos negativos; cambiando la resta a la suma o sustituyendo un binomio por variable.

Propósito

Ⓟ Proponer al estudiante una variante de las situaciones de la multiplicación de un binomio por binomio que aprendió en la clase anterior.
Ⓢ Presentar dos formas distintas de realizar la multiplicación de los binomios. La primera utiliza el algoritmo visto en la clase anterior; en la segunda forma se utiliza por primera vez la técnica del cambio de variable mediante la sustitución $w = y + 3$ y luego realizando el producto de monomio por binomio. Es importante que el alumno no memorice la identidad, lo importante es que sepa utilizar el algoritmo del desarrollo y apoyarse en diferentes técnicas como el cambio de variable. Cuando los estudiantes estén acostumbrados, se espera que omitan el proceso descrito en la parte 1 de la conclusión.

En la sección de ejercicios se presenta una variante al Problema inicial cuando los dos términos son una resta, se debe hacer énfasis en que las técnicas utilizadas en el Problema inicial también sirven para desarrollar este producto.

Solución de algunos ítems:

$$
\begin{aligned}
(-x-2)(2y-3) &= [-x+(-2)][2y+(-3)]\\
&= -x(2y) - x(-3) + (-2)(2y) + (-2)(-3)\\
&= -2xy + 3x - 4y + 6
\end{aligned}
$$

Posibles dificultades:
Manejo de las operaciones con signos. Por ejemplo, un error común es el siguiente: $-x(-3) = -3x$.

Fecha:

U1 1.3

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(2x-1)(y+3)$

Ⓢ 1. $(2x-1)(y+3)$
$= [2x+(-1)](y+3)$
$= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)$
$= 2xy + 6x + (-y) + (-3)$
$= 2xy + 6x - y - 3$

2. $(2x-1)(y+3)$
$= 2x(w) - 1(w)$ Tomando $w = y + 3$
$= 2x(y+3) - (y+3)$ Sustituyendo $y + 3 = w$
$= 2xy + 6x - y - 3$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(3x-5)(2y-4)$
$= [3x+(-5)][2y+(-4)]$
$= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)$
$= 6xy - 12x - 10y + 20$

Ⓡ a) $xy - x + y - 1$
b) $xy - x - y + 1$
c) $-2xy + 4x - 2y + 4$
d) $-2xy + 3x - 4y + 6$
e) $xy^2 + 9xy - 10x$
f) $10x^2y - 11xy + 3y$

Tarea: página 4 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Binomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x + 2)(xy + y + 1)$.

El polinomio $xy + y + 1$ se llama **trinomio**, ya que posee tres términos, $(x + 2)(xy + y + 1)$ es el producto de un binomio por un trinomio.

S

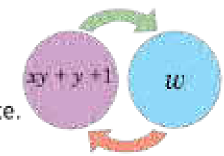
El producto puede desarrollarse de las siguientes maneras:

1. Multiplicando cada término del binomio por cada uno de los términos del trinomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ (x + 2)(xy + y + 1) &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

2. Se toma $xy + y + 1 = w$, y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w) && \text{Tomando } xy + y + 1 = w,\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2 && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$



Por lo tanto, $(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$.

C

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

E

Desarrolla $(2x - 1)(2x - y + 3)$ de las dos formas dadas en la conclusión.

1. Primero, se escribe $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

2. Se sustituye $w = 2x - y + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w && \text{Tomando } w = 2x - y + 3,\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

Desarrolla de la forma que más se te facilite:

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$
$= 4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$

b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$
$= 10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$

c) $(2x - 3)(x - y - 4)$
$= 2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

5

Indicador de logro

1.4 Determina el desarrollo del producto de un binomio por trinomio.

Secuencia

En las clases anteriores se han trabajado los algoritmos para desarrollar productos, hasta el caso donde los factores poseen dos términos, es por esta razón que para esta clase se estudia el caso cuando uno de los factores posee tres términos. Se debe hacer notar que todos los algoritmos estudiados hasta el momento implican multiplicar los términos del primer polinomio por cada término del segundo.

Propósito

Ⓟ Resolver una variante de la multiplicación de polinomios, cuando uno de sus factores posee tres términos.

Ⓢ Resolver de dos formas distintas el producto de un binomio con un trinomio. La primera es la que permite establecer el algoritmo para desarrollar el producto de un binomio con un trinomio y la segunda es una alternativa de solución, pero es igualmente importante que el alumno la domine. Notar que al hacer un cambio de variable, el producto se transforma en otro ya conocido; en ejercicios posteriores, el estudiante podrá utilizar la forma con la que se sienta más cómodo. La variante presentada en Ⓔ involucra signos negativos en algunos de los términos. Se debe indicar que puede resolverse multiplicando los polinomios o utilizando cambio de variable.

Posibles dificultades:
Es muy común que los estudiantes realicen lo siguiente, $2x(2x) = 4x$, este error puede darse también en clases anteriores.

Recordar que $2x(2x)$ representa el área de un cuadrado de lado $2x$. Por tanto, su área se expresa como $4x^2$, cuando $x > 0$.

Fecha:

U1 1.4

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + 2)(xy + y + 1)$

Ⓢ 1. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

2. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= (x + 2)w$ Tomando $xy + y + 1 = w$
$= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(2x - 1)(2x - y + 3)$
$= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)$
$= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)$
$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$

Ⓡ a) $4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$
b) $10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$
c) $2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

Tarea: página 5 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Trinomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x - y + 1)(x + y + 3)$.

¿Deben multiplicarse cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo?

S

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

C

En el producto de un trinomio por un trinomio, se multiplica cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes.

E

Desarrolla el producto: $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$.

Como en el Problema inicial, se debe multiplicar cada término del primer trinomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2x - 4y - y^2 - 3$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$
$= x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$
$= 5x^2 + 13xy + 17x - 17y - 6y^2 - 12$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$
$= 8x^2 - 30xy - 8x - 3y + 18y^2 - 6$

6

Indicador de logro

1.5 Desarrolla el producto de un trinomio por un trinomio.

Secuencia

En las clases anteriores se realizaron productos de polinomios, donde el proceso para efectuar este desarrollo del producto resulta ser similar en todos los casos. También aprendieron a utilizar el cambio de variable para realizar el producto de polinomios, esta técnica es útil cuando no se conoce el proceso para desarrollar el producto, ya que la multiplicación se reduce al realizar otra de la que sí se conoce el algoritmo de su desarrollo.

Propósito

Ⓟ Resolver una situación desconocida de la multiplicación de polinomios cuando los dos factores son trinomios. A partir de lo aprendido en clases anteriores se debe de intuir que el producto se puede realizar multiplicando cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo. Aquí se omite el uso de cambio de variable.
Ⓒ Formalizar el proceso para multiplicar un trinomio con otro trinomio a partir de las conclusiones obtenidas en el Problema inicial.

Posibles dificultades:
Al sumar términos semejantes; por ejemplo, expresar la respuesta final ignorando el hecho de que xy puede sumarse con yx.

Fecha: U1 1.5

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x - y + 1)(x + y + 3)$

Ⓢ $(x - y + 1)(x + y + 3)$
$= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)$
$= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3$
$= x^2 + 4x - y^2 + y + 3$

Por lo tanto,
$(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 + y + 3.$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$
$= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)$
$= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9$
$= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$

Ⓡ a) $x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$
b) $x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$
c) $x^2 + 2x - y^2 - 4y - 3$
d) $x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

Tarea: página 6 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Practica lo aprendido

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

a) $x(y + 3)$
$= xy + 3x$

b) $(x + 2)(y + 1)$
$= xy + x + 2y + 2$

2. Desarrolla los siguientes productos:

Monomio por binomio:

a) $(-x)(y - 5)$
$= -xy + 5x$

b) $(4x)(xy + y)$
$= 4x^2y + 4xy$

c) $(-xy)(x - y)$
$= -x^2y + xy^2$

d) $(-3xy + 2y)(-xy)$
$= 3x^2y^2 - 2xy^2$

Binomio por binomio:

a) $(y + 2)(2x + 1)$
$= 2xy + 4x + y + 2$

b) $(x + 1)(xy + y)$
$= x^2y + 2xy + y$

c) $(2x - 5)(y + 4)$
$= 2xy + 8x - 5y - 20$

d) $(xy + 3)(x - y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio:

a) $(x + 3)(3xy + 2x + 4y)$
$= 3x^2y + 2x^2 + 13xy + 6x + 12y$

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

c) $(xy - 1)(-10xy + 3x + 2y)$
$= -10x^2y^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 10xy - 3x - 2y$

d) $(2x - 3y)(-xy + 4x - 5y)$
$= -2x^2y + 3xy^2 + 8x^2 - 22xy + 15y^2$

Trinomio por trinomio:

a) $(x + y + 1)(x - y + 2)$
$= x^2 - y^2 + 3x + y + 2$

b) $(2x + 5y - 3)(-xy + 3x + 3)$
$= -2x^2y - 5xy^2 + 6x^2 + 18xy - 3x + 15y - 9$

c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

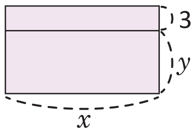
d) $(2xy + 3y - 6)(5xy + 2y + 10)$
$= 10x^2y^2 + 19xy^2 - 10xy + 6y^2 + 18y - 60$

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas utilizando la multiplicación de polinomios.

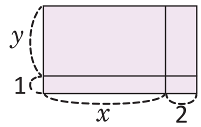
Solución de algunos ítems:

1. a)



Área:
$xy + 3x$

b)



Área:
$xy + x + 2y + 2$

2. Monomio por binomio.

c) $(-xy)(x - y) = (-xy)[x + (-y)]$
$= (-xy)x + (-xy)(-y)$
$= -x^2y + xy^2$

Binomio por binomio.

d) $(xy + 3)(x - y)$
$= (xy + 3)[x + (-y)]$
$= (xy)x + (xy)(-y) + 3x + 3(-y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio.

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$
$= y(3xy) + y(5x) + y(y) + (-2)(3xy) +$
$(-2)(5x) + (-2)(y)$
$= 3xy^2 + 5xy + y^2 - 6xy - 10x - 2y$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

Trinomio por trinomio.

c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$
$= (-xy)(2xy) + (-xy)(2x) + (-xy)(1) + x(2xy) + x(2x) + x(1) +$
$(-1)(2xy) + (-1)(2x) + (-1)(1)$
$= -2x^2y^2 - 2x^2y - xy + 2x^2y + 2x^2 + x - 2xy - 2x - 1$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

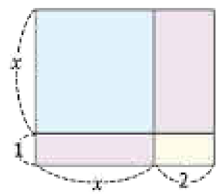
Tarea: página 7 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Productos notables

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

P

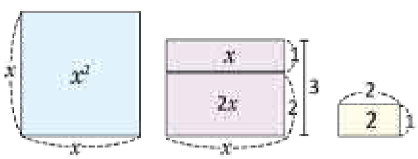
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)\ (x + 2)$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.

Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

C

El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

E

Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

Desarrolla:

a) $(x + 3)(x + 5)$
$= x^2 + 8x + 15$

b) $(x + 4)(x - 5)$
$= x^2 - x - 20$

c) $(x - 5)(x + 2)$
$= x^2 - 3x - 10$

d) $(y - 1)(y + 2)$
$= y^2 + y - 2$

e) $(y - 2)(y - 3)$
$= y^2 - 5y + 6$

f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$
$= y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

8

Indicador de logro

2.1 Determina productos de la forma $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En la lección anterior se realizaron productos de polinomios desde monomio por binomio hasta trinomio por trinomio, se debe notar que al desarrollar los productos, las potencias de las variables nunca son mayores que dos. En esta lección se trabajan productos de polinomios que poseen una característica especial, a este tipo de productos se les conoce como **productos notables**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Obtener el desarrollo del producto $(x + a)(x + b)$. Es un caso especial del producto estudiado en la clase 1.2, donde $y = x$.
Ⓒ Establecer la identidad que permite desarrollar productos de la forma:
$(x + a)(x + b)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
Es importante que el estudiante memorice esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\left[y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{8}$$

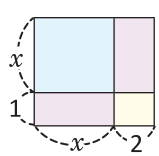
Posibles dificultades:
Al plantear el desarrollo de productos de la forma $(x + a)(x + b)$ que involucren signos negativos.
Por ejemplo:
$(y - 3)(y - 2) = y^2 + [-3 + (-2)]y + (-3)(-2)$.

Este tipo de desarrollo es muy difícil de concebir para algunos estudiantes. Un método es escribir el proceso:
$(y - 3)(y - 2) = [y + (-3)][y + (-2)]$.

Fecha:

U1 2.1

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $(x + 1)(x + 2)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Las dos formas describen la misma área.
Por tanto, $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Ⓔ Desarrolla $(x + 2)(x - 3)$
$= (x + 2)[x + (-3)]$
$= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)$
$= x^2 - x - 6$

Por lo tanto,
$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

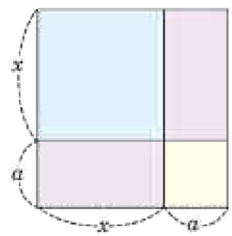
Ⓡ a) $x^2 + 8x + 15$
b) $x^2 + x - 20$
c) $x^2 - 3x - 10$
d) $y^2 + y - 2$
e) $y^2 - 5y + 6$
f) $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

Tarea: página 8 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:

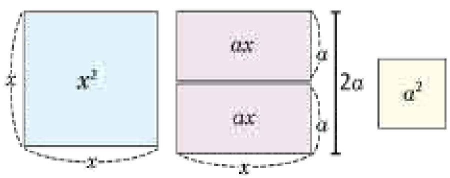


El área de un cuadrado de lado l es igual a l^2.

S

Primera forma: El lado del cuadrado formado por las cuatro piezas es $x + a$, por tanto su área será igual a $(x + a)^2$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$$x^2 + 2ax + a^2.$$

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Realizando el producto:
El producto $(x + a)^2$ también puede desarrollarse algebraicamente, utilizando lo visto en la clase anterior:

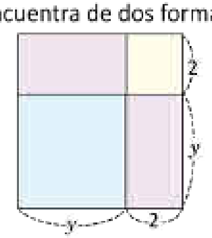
$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$
Por ejemplo:
$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

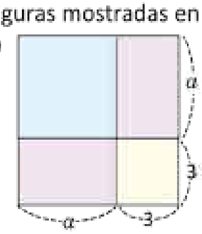
1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las figuras mostradas en cada literal:

a)



$y^2 + 4y + 4$

b)



$a^2 + 6a + 9$

2. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2$ $= x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2$ $= x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$ $= x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $(x + \frac{1}{4})^2$ $= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Indicador de logro

2.2 Justifica geométricamente el desarrollo del cuadrado de una suma.

Secuencia

Al inicio de la segunda lección se estudió el producto notable de la forma: $(x + a)(x + b)$, utilizando áreas se dedujo el desarrollo de este producto. Por tanto, es conveniente que para esta clase se analice el caso particular de estos productos, cuando los dos factores son iguales, es decir, $(x + a)(x + a)$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ La fórmula de esta clase se puede obtener haciendo $b = a$ en la fórmula de la clase anterior. Para justificar y recordar la aparición del coeficiente 2 en el término $2ax$ se utiliza la gráfica.

Ⓒ Establecer formalmente el desarrollo del producto notable $(x + a)^2$:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. En esta clase se estudia únicamente el caso para el cuadrado de una suma, el cuadrado de una resta se estudia hasta la siguiente. Además de la idea intuitiva, hay que memorizar esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

1. a) Forma 1

Calculando el área:

altura × base = $(y + 2)(y + 2)$

Forma 2

Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$y^2 + 2y + 2y + 2^2 = y^2 + 4y + 4$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$.

2. a)

$(x + 1)^2 = x^2 + 2(1)x + 1$

$= x^2 + 2x + 1$

Posibles dificultades:

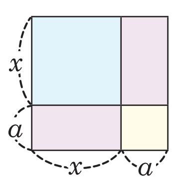
Comprender que el segundo término de la expansión del binomio es una multiplicación. Por ejemplo, en la expansión: $(x + 3)^2 = x^2 + 2(3)x + 3^2$, los estudiantes pueden dudar sobre el tipo de operación que se debe realizar con todos los términos involucrados.

Indicar que los tres términos se están multiplicando y el producto con x solo se indica dado que es una variable y no se puede conocer el resultado del producto

Fecha:

U1 2.2

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área: $(x + a)^2$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Ⓡ 1. a) $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$

b) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$

2. a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2(\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2})^2$

$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Tarea: página 9 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(x - a)^2$.

$(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

S

Se escribe $(x - a)^2$ como $[x + (-a)]^2$ y se utiliza lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2\\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a)\\ &= a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ ....(1)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ ....(2)}$$

E

Desarrolla:

$(x - 2)^2$

Utilizando el caso (2) del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Desarrolla:

a) $(x - 1)^2$
$= x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2$
$= x^2 - 6x + 9$

c) $(x - 4)^2$
$= x^2 - 8x + 16$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$
$= x^2 - x + \frac{1}{4}$

e) $(x - \frac{1}{4})^2$
$= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

f) $(x - \frac{1}{3})^2$
$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

10

Indicador de logro

2.3 Determina el desarrollo del cuadrado de una resta.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó el desarrollo del cuadrado de un binomio cuando la expresión es una suma, para esta clase se estudia particularmente el caso cuando la expresión es una resta.

Se prescinde del uso de modelos de áreas para obtener este producto notable ya que la manipulación de áreas negativas no es muy razonable y crea confusión en el estudiante; sin embargo, se utiliza un procedimiento algebraico más simple y comprensible.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Deducir el desarrollo del producto notable de la forma $(x - a)^2$, utilizando la forma $(x + a)^2$.
Ⓒ Comparar con el desarrollo del cuadrado de una suma, visto en la clase anterior; para recordar los signos, hay que memorizar esta fórmula, aclarando que el acto de memorizar la fórmula se logrará con la práctica de los ejercicios.

Solución de algunos ítems:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

Fecha:

U1 2.3

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x - a)^2$

Ⓢ $(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$
$= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2$
$= x^2 - 2ax + a^2$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Ⓔ Desarrolla:
$(x - 2)^2$
$(x - 2)^2 = x^2 - 2(2)x + 2^2$
$= x^2 - 4x + 4$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Ⓡ a) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

Tarea: página 10 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Suma por la diferencia de binomios

P

Desarrolla el producto: $(x + a)(x - a)$.

S

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$ y luego se desarrolla:

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x+a)[x+(-a)]\\ &= x^2 + (a-a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

En la solución:
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
Es decir, este producto se desarrolla de forma diferente al cuadrado de un binomio.

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

C

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma: $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

E

Desarrolla:

$$(x - 2)(x + 2)$$

Utilizando suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

1. Desarrolla:
   a) $(x + 1)(x - 1)$ $= x^2 - 1$
   b) $(x + 3)(x - 3)$ $= x^2 - 9$
   c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$ $= x^2 - \frac{1}{4}$
   d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$ $= x^2 - \frac{1}{16}$

2. Desarrolla los siguientes productos:
   a) $(y - 8)(y - 10)$ $= y^2 - 18y + 80$
   b) $(x + 11)^2$ $= x^2 + 22x + 121$
   c) $(y - 9)^2$ $= y^2 - 18y + 81$
   d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$ $= y^2 - \frac{16}{9}$

Indicador de logro

2.4 Desarrolla la suma por la diferencia de binomios.

Secuencia

Desde la clase 1 de esta lección se han estudiado productos notables donde ambos factores son un binomio, estudiando el caso particular cuando ambos binomios son el mismo. Esta clase es una extensión de ese estudio para el caso particular $(x + a)(x - a)$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la fórmula:
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ para desarrollar el producto $(x + a)(x - a)$ obteniendo una expresión que permita desarrollar este tipo de productos.
Ⓒ Formalizar el desarrollo del producto de la suma por la diferencia de binomios, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$. Realizar un recordatorio de todos los productos notables y su desarrollo, estudiados hasta esta clase. Al igual que en las anteriores hay que memorizar esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

1. d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. b) $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 121$

Fecha: **U1 2.4**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + a)(x - a)$

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$:

Ⓢ
$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

Ⓔ Desarrolla: $(x - 2)(x + 2)$

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

Ⓡ 1. a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$
d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4}) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. a) $y^2 - 18y + 80$
b) $x^2 + 22x + 121$

Tarea: página 11 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

P

Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$.

¿Puede realizarse el producto de forma similar a $(x + a)^2$?

S

Se toman $3x = w$, $4y = z$ y se desarrolla el producto como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 \\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2\end{aligned}$$

Tomando $3x = w$ y $4y = z$,

sustituyendo nuevamente w por $3x$ y z por $4y$.

Por tanto, $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

C

Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

E

Desarrolla, aplicando productos notables:

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

Ambos binomios tienen el término $2x$. Se toma $2x = w$ y se desarrolla el producto de la misma forma que lo visto en la clase 1:

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) && \text{Tomando } 2x = w, \\ &= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\ &= w^2 + 4w + 3 \\ &= (2x)^2 + 4(2x) + 3 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x.\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$.

Desarrolla:

a) $(5x - 3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$
$= 9x^2 - 15x + 6$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$
$= 4x^2 - 9y^2$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$
$= 9y^2 - 3y + \frac{1}{4}$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$
$= \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} + 6$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$
$= 9y^2 - \frac{1}{25}$

12

Indicador de logro

2.5 Multiplica polinomios utilizando un cambio de variable.

Secuencia

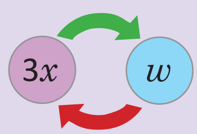
Hasta la clase 2.4 se desarrollaron algunos productos notables para los casos donde los factores que intervienen en el producto son binomios, además, en la lección 1 se utilizó el cambio de variable para simplificar productos a otros más sencillos, en esta clase se utiliza el cambio o sustitución de variables para desarrollar productos notables que involucren expresiones un poco más complejas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Enfrentarse a una situación variante del cuadrado de un binomio, donde ambos términos son variables. En la solución del libro se utiliza el método de cambio de variable, un estudiante bien podría obtener la solución directamente, sin embargo, es indispensable que se desarrolle también la solución planteada en el LT, dado que es el objetivo inmediato de la clase.
Ⓒ Cuando el estudiante esté acostumbrado, se espera que haga el cambio de variable mentalmente.
Ⓔ Resolver un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ utilizando la sustitución de variables.

Posibles dificultades:
Al realizar un cambio de variable y desarrollar el producto no se debe olvidar volver a la variable original, este puede ser un paso que genere dificultad para algunos estudiantes.

En la imagen, la flecha verde indica el primer cambio y la flecha roja indica volver a la variable original.



Fecha:

U1 2.5

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(3x + 4y)^2$

Ⓢ $(3x + 4y)^2$
$= (w + z)^2$ Tomando $3x = w$ y $4y = z$
$= w^2 + 2wz + z^2$
$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$
Sustituir nuevamente w por $3x$ y z por $4y$
$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Por tanto,
$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

Ⓔ Desarrolla $(2x + 1)(2x + 3)$:
$(2x + 1)(2x + 3)$
$= (w + 1)(w + 3)$ Tomando $2x = w$
$= w^2 + (1 + 3)w + 1(3)$
$= w^2 + 4w + 3$
$= (2x)^2 + 4(2x) + 3$ Sustituyendo $w = 2x$

Por tanto,
$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

Ⓡ a) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $9x^2 - 15x + 6$

Tarea: página 12 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Combinación de productos notables

P

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

¿Qué productos notables están involucrados en ambos literales? Por ejemplo, los trinomios del primer literal tienen en común la suma $x + y$.

S

a) Ambos trinomios tienen en común la suma $x + y$, y el número 1 es positivo en el primero y negativo en el segundo. Se toma $x + y = w$ y el producto se desarrolla como una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && \text{Tomando } x + y = w,\\ &= w^2 - 1^2 \\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

b) Los productos involucrados son cuadrados de un binomio y productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Después de desarrollar ambos, se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$.

C

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identificar cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarrollar los productos teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reducir los términos semejantes, si los hay.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$
$= x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$
$= -24x^2 - 9x + 7$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$
$= -8y^2 - 12y - 5$

e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= x^4 - 1$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$
$= x^4 + y^2 - 13$

Indicador de logro

2.6 Multiplica polinomios utilizando combinación de productos notables.

Secuencia

Para esta clase se utilizan los productos notables estudiados a lo largo de la lección para desarrollar problemas que involucren más de un producto notable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver ejercicios donde se combinen las operaciones con productos notables, desarrollando más de un producto notable en cada problema; es posible también utilizar la sustitución para simplificar el ejercicio. En a) es un producto de trinomios, se debe utilizar la sustitución de variables para aplicar productos notables.

Ⓒ Observar que hay casos donde para aplicar productos notables hay que agrupar los términos.

Solución de algunos ítems:

Solución del ítem a.

$(x - y + 1)(x - y - 1)$

Tomando $x - y = w$

$= (w + 1)(w - 1)$
$= w^2 - 1$
$= (x - y)^2 - 1$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

Fecha:

U1 2.6

Ⓟ Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

Ⓢ a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

$= (w + 1)(w - 1) \qquad x + y = w$
$= w^2 - 1^2$
$= (x + y)^2 - 1$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 1$

Por lo tanto,
$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1.$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

$= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)$
$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10$
$= 5x^2 + 3x + 11$

Por lo tanto,
$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11.$

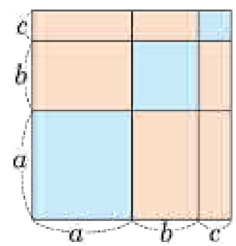
Ⓡ a) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
b) $x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$
c) $-24x^2 - 9x + 7$
d) $-8y^2 - 12y - 5$

Tarea: página 13 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Cuadrado de un trinomio

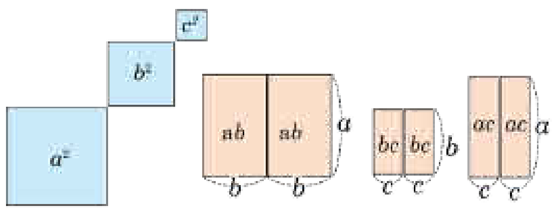
P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



S

Primera forma: Como se trata de un cuadrado de lado $a + b + c$ su área se expresa como $(a + b + c)^2$.
Segunda forma: Se divide el cuadrado en piezas iguales y se tienen sus áreas respectivas:



Como se muestra en la imagen, la suma de las áreas de cada pieza es:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Realizando el producto: Se toma $b + c = w$ y se desarrolla como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + w)^2 && \text{Tomando } b + c = w,\\ &= a^2 + 2aw + w^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w = b + c.\\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2\\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc)\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Por tanto: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Al desarrollar este producto es común colocar su desarrollo en este orden:

C

El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

E

Desarrolla: $(5x - 3y + 4)^2$.

El trinomio $5x - 3y + 4$ puede escribirse como $5x + (-3y) + 4$. Luego, el cuadrado se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2\\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$

b) $(2x + y + 3)^2 = 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy + 6y + 12x$

c) $(3x - 2y + 5)^2$
$= 9x^2 + 4x^2 + 25 - 12xy - 20y + 30x$

d) $(x - 5y - 1)^2$
$= x^2 + 25y^2 + 1 - 10xy + 10y - 2x$

Indicador de logro

2.7 Desarrolla el cuadrado de un trinomio.

Secuencia

En clases anteriores se han estudiado los productos notables, cuando los factores que intervienen son binomios, para esta clase se estudia el caso donde ambos factores son el mismo trinomio.

Propósito

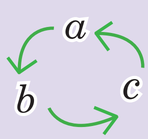
Ⓟ Encontrar el área de un cuadrado donde la medida de su lado se expresa como $a + b + c$.

Ⓢ Se presentan dos formas para encontrar el desarrollo de un trinomio cuadrado, uso de áreas y cambio de variable. La gráfica ayudará a comprender cuáles son los términos resultantes.

Ⓒ Prestar atención en la forma de los productos y sus coeficientes para poder memorizarla.

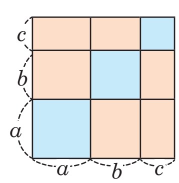
Ⓔ Observar que la resta siempre se convierte en una suma.

El gráfico representa el orden en el que se colocan los términos en el desarrollo del trinomio y en los productos dos a dos de cada término.



Fecha: **U1 2.7**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado.



Ⓢ

Forma 1.
Calculando el área:
altura × base = $(a + b + c)^2$

Forma 2.
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Por tanto,
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Realizando el producto:

$(a + b + c)^2$
$= (a + w)^2$
$= a^2 + 2aw + w^2$
$= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$
$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc)$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ⓔ $(5x - 3y + 4)^2$
$= (5x + (-3y) + 4)^2$
$= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x)$
$= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x$

Tarea: página 14 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

P

¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

¿En cuál producto notable están involucradas las expresiones $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, ab?

S

En el problema NO se pretende encontrar los valores de a y b, sino de $(a + b)^2$. Observa que $a^2 + b^2$ y ab corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En una suma, el orden de los sumandos no altera el total: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Se sustituyen los valores en lo anterior:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

E

Calcula 98 × 102 usando productos notables.

Los números 98 y 102 pueden escribirse como 100 – 2 y 100 + 2, respectivamente:

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$

Lo anterior es una suma por diferencia de binomios:

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto: $(100 - 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 - 2)$.

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10\,000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9\,996\end{aligned}$$

1. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 34$ y $ab = 15$? $(a - b)^2 = 4$

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a - b = 2$ y $a^2 - b^2 = 16$? $a + b = 8$

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

a) 97 × 103
= 9 991

b) 95 × 105
= 9 975

c) 102^2
= 10 404

d) 105^2
= 11 025

Indicador de logro

2.8 Calcula el valor numérico de expresiones algebraicas y de operaciones aritméticas utilizando productos notables.

Secuencia

Hasta la clase anterior se han estudiado todos los productos notables necesarios para un estudiante de noveno grado; posteriormente en bachillerato se ampliarán utilizando el binomio de Newton para desarrollar productos de binomios con exponente mayor a 2. Para esta clase es necesario analizar qué producto notable se debe utilizar para resolver un problema particular.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se trata de expresar $(a + b)^2$ utilizando los términos, $a^2 + b^2$ y ab que aparecen en su desarrollo.

Ⓒ Identificar que se pueden utilizar productos notables, no solo en la resolución de problemas algebraicos sino también para simplificar cálculos aritméticos.

Solución de algunos ítems:

1. b) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$16 = (a + b)(2)$

$8 = a + b$

2. a) 97×103

$$97 \times 103 = (100 - 3)(100 + 3)$$
$$= 100^2 - 3^2$$
$$= 10\,000 - 9$$
$$= 9\,991$$

d) $(105)^2$

$$(100 + 5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + (5)^2$$
$$= 10\,000 + 1\,000 + 25$$
$$= 11\,025$$

Fecha: **U1 2.8**

Ⓟ ¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

Ⓢ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$

$= 6 + 2(3)$

$(a + b)^2 = 12$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

Ⓔ Calcula 98×102

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$

$98 \times 102 = 100^2 - 2^2$

$= 10\,000 - 4$

$98 \times 102 = 9\,996$

Ⓡ 2. a) 9 991

b) 9 975

c) 10 404

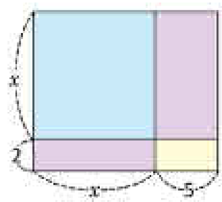
d) 11 025

Tarea: página 15 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Practica lo aprendido

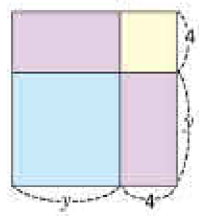
1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las siguientes figuras:

a)



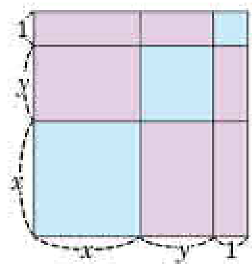
$(x + 5)(x + 2)$ y $x^2 + 2x + 5x + 10$

b)



$(y + 4)^2$ y $y^2 + 4y + 4y + 16$

c)



$(x + y + 1)^2$ y $x^2 + y^2 + 1 + xy + xy + x + x + y + y$

2. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $(x + 1)(x + 9)$
$= x^2 + 10x + 9$

b) $(x + 3)(x - 6)$
$= x^2 - 3x - 18$

c) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{3}{6})$
$= x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

d) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{3}{2})$
$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

e) $(y - 1)(y + 2)$
$= y^2 + y - 2$

f) $(x - 4)(x - 2)$
$= x^2 - 6x + 8$

3. Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios:

a) $(x + 6)^2$
$= x^2 + 12x + 36$

b) $(y - 6)^2$
$= y^2 - 12y + 36$

c) $(x + \frac{1}{5})^2$
$= x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{1}{4})^2$
$= y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$

e) $(x + 5)^2$
$= x^2 + 10x + 25$

f) $(y - 2)^2$
$= y^2 - 4y + 4$

g) $(x + 2)^2$
$= x^2 + 4x + 4$

h) $(y - \frac{1}{3})^2$
$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$
$= x^2 - 49$

b) $(x + 10)(x - 10)$
$= x^2 - 100$

c) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$
$= y^2 - \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{2}{3})(y + \frac{2}{3})$
$= y^2 - \frac{4}{9}$

e) $(x + 4)(x - 4)$
$= x^2 - 16$

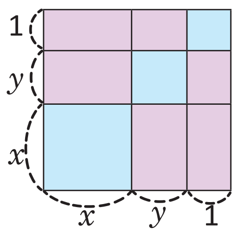
f) $(x + 9)(y - 9)$
$= xy - 9x + 9y - 81$

Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas utilizando productos notables.

Solución de algunos ítems:

1. c)



Forma 1:
altura × base = $(x + y + 1)^2$
Forma 2:
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$$x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$$

Por tanto,
$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$

2. d) $\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)$

$= \left[y + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[y + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

$= y^2 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]y + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$= y^2 + \left[-\frac{4}{2}\right]y + \frac{3}{4}$

$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

3. a) $(x + 6)^2$

$= x^2 + 2(6)x + 6^2$

$= x^2 + 12x + 36$

h) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$

$= y^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)y + \frac{1^2}{3^2}$

$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. c) $\left(y + \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)$

$= y^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$= y^2 - \frac{1}{25}$

Tarea: página 16 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(6x - 10)(6x - 2)$ $= 36x - 72x + 20$

b) $(\frac{x}{2} + 2)(\frac{x}{2} + 4)$ $= \frac{x^2}{4} + 3x + 8$

c) $(5x - 6y)^2$ $= 25x^2 - 60xy + 36y^2$

d) $(6x + 10y)^2$ $= 36x^2 + 120xy + 100y^2$

e) $(2x - 3)(2x - 1)$ $= 4x^2 - 8x + 3$

f) $(5x - 3y)^2$ $= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

g) $(\frac{y}{3} - 3)^2$ $= \frac{y^2}{9} - 2y + 9$

h) $(2x + \frac{1}{2})(2x - \frac{1}{2})$ $= 4x^2 - \frac{1}{4}$

2. Desarrolla:

a) $(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

b) $(x + y)(x - y) + (x + y)^2$
$= 2x^2 + 2xy$

c) $(2x - 3)^2 - (5y - 1)(5y + 2)$
$= 4x^2 - 25y^2 - 12x - 5y + 11$

d) $(y^2 + 1)(y^2 - 1) - (y^2 + 1)^2$
$= -2y^2 - 2$

e) $(5x + 10y + 3)^2$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x + 60y + 9$

f) $(4x - 2y - 6)^2$
$= 16x^2 - 16xy + 4y^2 - 48x + 24y + 36$

3. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$, si $a^2 + b^2 = 104$ y $ab = 20$? $(a - b)^2 = 64$

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a - b$, si $a + b = 8$ y $a^2 - b^2 = 32$? $a - b = 4$

c) ¿Cuál es el valor numérico de xy, si $x + y = 6$ y $x^2 + y^2 = 1$? $xy = \frac{35}{2}$

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando productos notables:

a) 101^2
$= (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 200 + 1$
$= 10\,201$

b) 102×101
$= (100 + 2)(100 + 1)$
$= 10\,000 + 200 + 100 + 2$
$= 10\,302$

c) 49×51
$= (50 - 1)(50 + 1)$
$= 50^2 - 1^2$
$= 2\,499$

d) 99^2
$= (100 - 1)^2$
$= 100^2 - 200 + 1$
$= 9\,801$

Indicador de logro

2.10 Resuelve problemas utilizando productos notables.

1. f) Sea $w = 5x$ y $z = 3y$.

$(5x - 3y)^2 = (w - z)^2$
$= w^2 - 2(w)(z) + z^2$
$= (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

2. a) Sea $w = 2x + y$.

$(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= (w + 2)(w - 2)$
$= w^2 - 2^2$
$= (2x + y)^2 - 4$
$= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2 - 4$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

$= (5x)^2 + (10y)^2 + 3^2 + 2(5x)(10y) +$
$2(10y)(3) + 2(3)(5x)$
$= 25x^2 + 100y^2 + 9 + 100xy +$
$60y + 30x$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x +$
$60y + 9$

3. c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$6^2 = 1 + 2xy$
$36 - 1 = 2xy$
$35 = 2xy$
$xy = \frac{35}{2}$

4. b) $(100 + 2)(100 + 1)$

$= (100)^2 + (2 + 1)(100) + 2(1)$
$= 10\,000 + 300 + 2$
$= 10\,302$

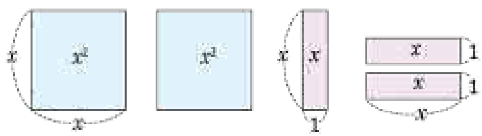
Tarea: página 17 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3 Factorización

3.1 Factorización de polinomios

P

Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:

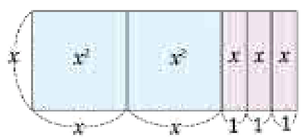


Las piezas azules son cuadrados de lado x; mientras que las piezas moradas son rectángulos de altura x y base 1.

a) ¿Cómo quedará el rectángulo?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido por Antonio?

S

a) El lado de los cuadrados azules es igual a la altura de los rectángulos morados (ambos miden x). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b) El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea, $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$.
c) Las medidas de la altura y la base son:

Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

El área del rectángulo formado por las piezas se calcula como Altura × Base.

C

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$; a cada uno de los polinomios x y $2x + 3$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

Factorizar

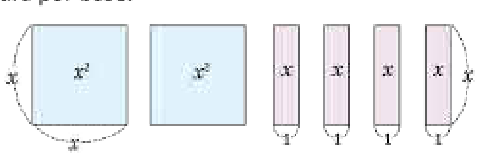
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Desarrollar

En la lección anterior, se daban las dimensiones del rectángulo para encontrar su área; ahora se da el área total para encontrar las dimensiones.

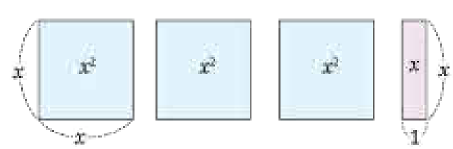
1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



$2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$

b)



$3x^2 + x = x(3x + 1)$

2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $2x(5x - 3)$ Factores

b) $-x(3x + 2)$ Factores

c) $(x + 4)(2x - 3)$ Factores

d) $3x(x - 5)(2x - 1)$ Factores

Indicador de logro

3.1 Relaciona la factorización como proceso inverso de la multiplicación de polinomios.

Secuencia

En el contenido de la lección anterior se estudiaron todos los casos de productos notables que son necesarios para el desarrollo de esta lección y otros contenidos a estudiar.
Se entenderá la factorización como el proceso inverso de la multiplicación, por lo que es importante dominar el desarrollo de productos notables para establecer las relaciones con los diferentes tipos de factorización.

Propósito

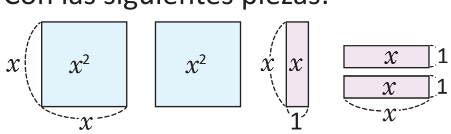
Ⓟ, Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado. Este es el proceso inverso de descomponer el rectángulo en piezas.
Ⓢ Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. El área de las piezas se escribe al lado izquierdo de la igualdad y el producto altura con base al lado derecho, contrario a como se escribía en la lección anterior.
Ⓒ Definir el término **factorización** como el proceso inverso al desarrollo de la multiplicación de polinomios. Se utiliza el ejemplo para mostrar que el polinomio $2x^2 + 3x$ se puede escribir como la multiplicación del monomio x y el binomio $2x + 3$.

En el numeral 1 se espera un desarrollo similar al del Problema inicial, mientras que en el numeral 2 se deben identificar los factores involucrados en el producto, esto facilitará la comprensión del lenguaje utilizado para factorizar polinomios en las próximas clases. En a) se puede considerar que los factores son 2, x y $5x - 3$; sucede lo mismo con b) y d).

Fecha:

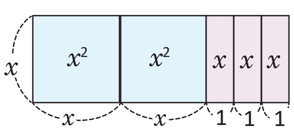
U1 3.1

Ⓟ Con las siguientes piezas:



a) Forma un rectángulo.
b) Encuentra el área total.
c) Encuentra la altura y la base del rectángulo.

Ⓢ
a)

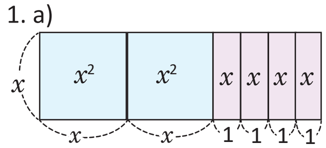


b) $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$

c) altura $\rightarrow$ x
base $\rightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

Además, $2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

Ⓡ
1. a)



$2x^2 + 4x = x(2x + 4)$

2. a) Factores: $2x$ y $5x - 3$
b) Factores: $-x$ y $3x + 2$

Tarea: página 18 del Cuaderno de Ejercicios.

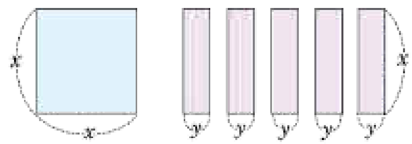
3.2 Factor común

P

Realiza lo siguiente:

a) Escribe en tu cuaderno el área descrita por las piezas.

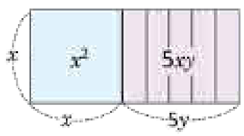
b) Forma un rectángulo y escribe su área en términos de su altura y su base.



S

a) El área de las piezas es: $x^2 + 5xy$.

b) El área del rectángulo es:



Altura $\longrightarrow$ x

Base $\longrightarrow$ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Su área es: $x(x + 5y)$.

Para factorizar la expresión, se debe escribir $x^2 + 5xy$ como producto de polinomios más simples. Observa lo siguiente:

$$x^2 = x(x)$$

$$5xy = x(5y)$$

Ambos términos tienen en común el monomio x. Entonces:

$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y)$ $\longrightarrow$ Identificar términos comunes.

$= x(x + 5y)$ $\longrightarrow$ Propiedad distributiva.

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

C

Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio, utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.

E

Factoriza el polinomio:

$$5y^2 - 10xy$$

¿Qué tienen en común los términos $5y^2$ y $5xy$?

Se debe identificar el factor común en ambos polinomios:

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$

$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 5 y 10 es 5.

Luego, se extrae dicho factor y se utiliza la propiedad distributiva:

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$

$$= 5y(y - 2x)$$

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + xy$ $= x(2x + y)$

b) $10x^2 - 5xy$ $= 5x(2x - y)$

c) $x^2y + xy$ $= xy(x + 1)$

d) $2x^2y - 4xy$ $= 2xy(x - 2)$

e) $2x^2y - 3xy + y$ $= y(2x^2 - 3x + 1)$

f) $3x^2 + 6y + 12xy$ $= 3(x^2 + 2y(1 + 2x))$

g) $x^2y + x^2 - x$ $= x(xy + x - 1)$

h) $4xy - 6y$ $= 2y(2x - 3)$

i) $xy + 16x^2y^2$ $= xy(1 + 16xy)$

Indicador de logro

3.3 Factoriza polinomios cuyo factor común es un monomio.

Secuencia

En la clase anterior se estudió el significado del término factorización como el proceso inverso de la multiplicación. En esta clase se comienza el estudio de las factorizaciones, con el caso más sencillo, cuando los términos tienen un monomio común.

Propósito

Ⓟ, Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado.
Ⓢ Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. En Ⓒ se realiza el proceso de factorización a través de la identificación del monomio común de ambos términos y utilizando la propiedad distributiva.

Solución de algunos ítems:

b) $10x^2 - 5xy$

Se tiene que:

$10x^2 = 5(x)(2x)$

$5xy = 5(x)(y)$

Por tanto,

$10x^2 - 5xy = 5(x)(2x) - 5(x)(y)$

$= 5x(2x - y)$.

g) $x^2y + x^2 - x$

Se tiene que:

$x^2y = (x)(xy)$

$x^2 = (x)(x)$

$x = (x)(1)$

Por tanto,

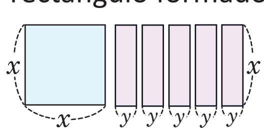
$x^2y + x^2 - x = (x)(xy) + (x)(x) - (x)$
(1)

$= x(xy + x - 1)$.

No hay que olvidar el signo al factorizar $-(x)(1)$.

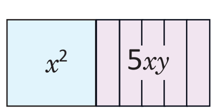
Fecha: **U1 3.2**

Ⓟ a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Encuentra la altura y la base del rectángulo formado.



Ⓢ a) Área de las piezas: $x^2 + 5xy$

b)



Altura → x
Base → $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Además, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

Ⓔ Factoriza: $5y^2 - 10xy$

Se tiene que:

$5y^2 = 5y(y)$

$10xy = 5y(2x)$

Por tanto,

$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$

$= 5y(y - 2x)$.

Ⓡ a) $x(2x + y)$

b) $5x(2x - y)$

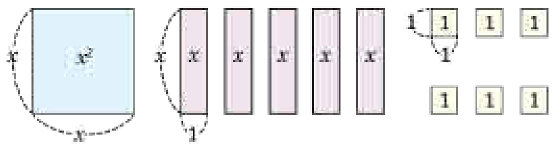
Tarea: página 19 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

P

Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

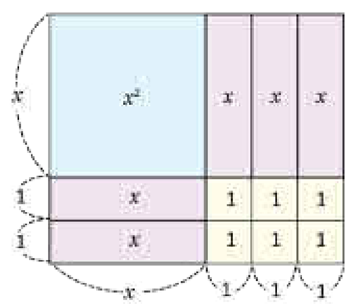
$x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes piezas. Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ se debe encontrar la altura y la base del rectángulo.



¿Cómo queda factorizado $x^2 + 5x + 6$?

S

El rectángulo formado con las piezas se muestra en la figura. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5
−2 y −3	+6	−5

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Esto por la ley de los signos para la multiplicación:
$(+)(+) = +$
$(-)(-) = +$

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

C

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).

2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

E

Factoriza $y^2 + 13y + 30$:
Se deben buscar dos números cuyo producto sea +30 y cuya suma sea +13. Como la suma es positiva, entonces ambos números deben ser positivos:

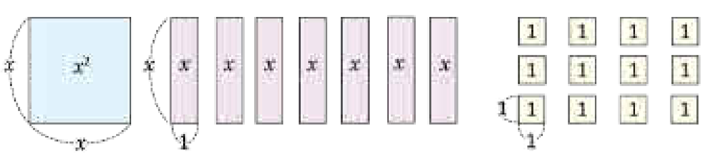
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

Por lo tanto, $a = 3$, $b = 10$ y
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$.

1. En la siguiente figura:

   a) Reubica las siguientes piezas de modo que se forme un rectángulo.

   b) Encuentra el área del rectángulo formado en términos de su base y altura.



x^2	x	x	x	x
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1

$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

2. Factoriza los siguientes trinomios:

   a) $x^2 + 3x + 2$ $= (x + 1)(x + 2)$

   b) $x^2 + 9x + 20$ $= (x + 4)(x + 5)$

   c) $y^2 + 8y + 12$ $= (y + 6)(y + 2)$

   d) $y^2 + 11y + 30$ $= (y + 5)(y + 6)$

Indicador de logro

3.3 Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

Anteriormente se ha definido el término factor común y se estudió únicamente el caso cuando existe un factor monomio común a los términos del polinomio, utilizando para ello la propiedad distributiva del producto sobre la suma. En esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, para factorizarlo se utiliza uno de los productos notables vistos en las clases anteriores.

Propósito

Ⓟ Utilizar la manipulación de las piezas para ejemplificar el algoritmo para factorizar trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$. Ⓢ Con este ejemplo se muestra que el coeficiente de x es la suma de dos números y el término constante es su producto. Para encontrar estos números se utiliza un procedimiento por prueba y error.
Hay finitas maneras de expresar 30 como producto de dos números, mientras que hay infinitas formas de expresar 13 como suma de dos números, por esta razón en la tabla se deben escribir primero dos números cuyo producto sea +30 y se escribe el resultado de la suma en la siguiente columna, se repite este procedimiento hasta que la suma sea +13, el número que se busca.

Solución de algunos ítems:

2. b) $x^2 + 9x + 20$

Pareja	Producto	Suma
1 y 20	+20	+21
2 y 10	+20	+12
4 y 5	+20	+9

Por lo tanto,
$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

d) $y^2 + 11y + 30$

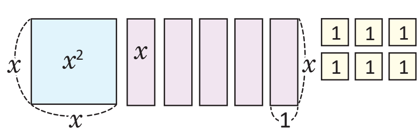
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13
5 y 6	+30	+11

Por lo tanto,
$y^2 + 11y + 30 = (y + 5)(y + 6)$.

Posibles dificultades:
Formar el rectángulo con las piezas no resulta sencillo, el alumno debe manipular las piezas mentalmente o en material concreto hasta obtener una figura sin espacios vacíos. Es común olvidar las medidas de los lados de cada pieza y tratar de encajar con los lados de otras piezas que no son de su misma medida.

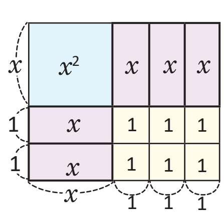
Fecha: **U1 3.3**

Ⓟ Con las siguientes piezas:



Forma un rectángulo y encuentra la factorización de $x^2 + 5x + 6$.

Ⓢ Rectángulo formado.



$x^2 + 5x + 6$
$= (x + 2)(x + 3)$

Buscar dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6.

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5

Ⓔ Factorizar $y^2 + 13y + 30$:

Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

$y^2 + 13y + 30$
$= (y + 3)(y + 10)$

Tarea: página 20 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

P

Factoriza los polinomios:

a) $x^2 - 13x + 36$

b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) El trinomio cumple las condiciones para factorizarlo en el producto notable $(x + a)(x + b)$. Se buscan dos números cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13. Como la suma es negativa y el producto positivo, ambos números deben ser negativos:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Puedes desarrollar $(x - 4)(x - 9)$ para comprobar si la factorización es correcta.

Entonces:

$$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$$
$$= (x - 4)(x - 9)$$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) De nuevo, se buscan dos números cuyo producto sea −40 y cuya suma sea −6. Como el producto es negativo (−40), entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

En la tabla faltan las parejas 5, −8 y −5, 8, pero ya se han encontrado los números que satisfacen.

Entonces:

$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$$
$$= (y + 4)(y - 10)$$

Por lo tanto, $y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

C

Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan 2 números positivos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan 2 números negativos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan 2 números, uno positivo y el otro negativo cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$, según sea el caso.

Factoriza:

a) $x^2 + x - 2$
$= (x + 2)(x - 1)$

b) $x^2 - 10x + 21$
$= (x - 7)(x - 3)$

c) $x^2 - 7x - 30$
$= (x - 10)(x + 3)$

d) $y^2 - 4y - 32$
$= (y - 8)(y + 4)$

e) $y^2 - 14y + 33$
$= (x - 3)(x - 11)$

f) $x^2 + 13x + 42$
$= (x + 6)(x + 7)$

Indicador de logro

3.4 Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ que involucren términos con signo negativo en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En la clase anterior se formalizó el proceso para factorizar polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en esta clase se factoriza este mismo tipo de polinomios con la diferencia de que en estos casos los términos pueden tener signo negativo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se utiliza el siguiente hecho:
$ab > 0$, si a y b tienen el mismo signo. $ab < 0$, si a y b tienen diferente signo.
Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.
Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$.
Así se puede disminuir la cantidad de parejas a probar.

Establecer el proceso para factorizar trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$ para todos los casos posibles. Es importante mencionar que $a > 0$ y $b > 0$, para evitar confusión en el uso del signo negativo.

Solución de algunos ítems:

2. a) $x^2 + x - 2$

Pareja	Producto	Suma
1 y −2	−2	−1
−1 y 2	−2	+1

Por lo tanto,
$$x^2 + x - 2 = (x + (-1))(x + 2) = (x - 1)(x + 2).$$

d) $y^2 - 4y - 32$

Pareja	Producto	Suma
−1 y 32	−32	+31
−2 y 16	−32	+14
−4 y 8	−32	+4
−8 y 4	−32	−4

Por lo tanto,
$$y^2 - 4y - 32 = (y + (-8))(y + 4) = (y - 8)(y + 4).$$

Fecha: **U1 3.4**

Ⓟ Factoriza los polinomios:
a) $x^2 - 13x + 36$
b) $y^2 - 6y - 40$

Ⓢ a)

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Por lo tanto,
$$x^2 - 13x + 36 = (x + (-4))(x + (-9)) = (x - 4)(x - 9).$$

b)

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

Por lo tanto,
$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y + (-10)) = (y + 4)(y - 10).$$

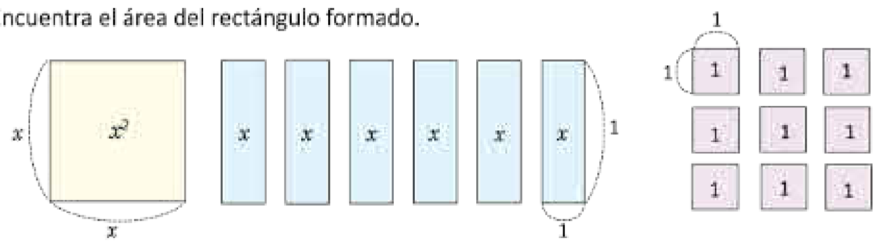
Ⓡ a) $(x + 2)(x - 1)$
b) $(x - 7)(x - 3)$

Tarea: página 21 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

P Realiza lo siguiente:

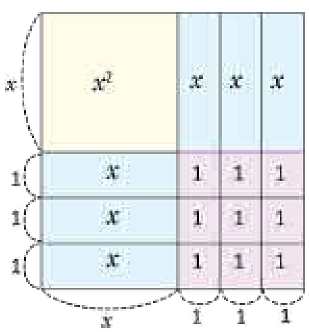
a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Coloca las piezas de modo que se forme un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo formado.



S

a) El área descrita por las piezas es:
$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9$.

b) El rectángulo formado por las piezas es:



Altura $\longrightarrow$ $x + 3$
Base $\longrightarrow$ $x + 3$

c) Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:
$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$
Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Puede utilizarse lo visto en las clases anteriores, buscar dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2$.

La factorización resulta en el cuadrado de un binomio. Este producto notable se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 6x + 9$ en el cuadrado de un binomio debe buscarse un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, justamente es 3. Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

C

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9.$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de 3($3^2 = 9$); además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2. \end{aligned}$$

E

Factoriza:

$$x^2 - 10x + 25$$

Es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a) El término independiente es el cuadrado de un número:
25 es el cuadrado de 5 ($5^2 = 25$, y se tiene $a = 5$).

b) El coeficiente de x es el doble de 5:
$2a = 2(5) = 10$.

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 4$
$= (x + 2)^2$

b) $x^2 - 8x + 16$
$= (x - 4)^2$

c) $y^2 - 18y + 81$
$= (x - 9)^2$

d) $y^2 + 14y + 49$
$= (x + 7)^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$
$= \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$

24

Indicador de logro

3.5 Factoriza trinomios cuadrados perfectos en el producto notable $(x + a)^2$ o $(x - a)^2$.

Secuencia

En las clases anteriores se estudió el concepto de factorización y se han factorizado trinomios cuadrados utilizando productos notables, también se han utilizado áreas para ejemplificar geométricamente lo que sucede al factorizar un polinomio. Para esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es un **trinomio cuadrado perfecto**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Verificar que el rectángulo formado con las piezas dadas, es en realidad un cuadrado y utilizar este hecho para ejemplificar la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.
Ⓔ Establecer el procedimiento para factorizar un trinomio cuadrado perfecto en el producto notable $(x + a)^2$ o $(x - a)^2$, dependiendo de si el signo del segundo término del trinomio es positivo o es negativo.

Solución de algunos ítems:

1. a) $x^2 + 4x + 4$

Se tiene que:

$$4 = 2^2$$
$$4 = 2(2)$$

Por tanto,

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

Se tiene que:

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

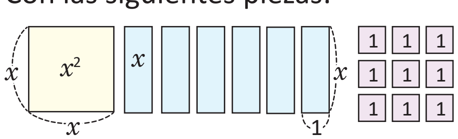
Por tanto,

$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Posibles dificultades:
Comprender que el objetivo del problema es manipular las piezas hasta que se forme perfectamente un rectángulo. Las indicaciones dadas deben presentarse con la mayor claridad posible.

Fecha: **U 3.5**

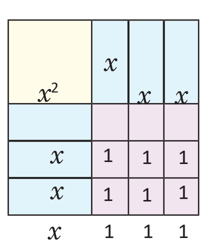
Ⓟ Con las siguientes piezas:



a) Escribe el área que describen.
b) Forma un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo.

Ⓢ a)
Área de las piezas:
$x^2 + 6x + 9$

b)



c) $(x + 3)^2$
Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 10x + 25$
Se observa que:
$25 = 5^2$
$10 = 2(5)$
$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(5)x + 5^2$
$= (x - 5)^2$

Ⓡ
a) $(x + 2)^2$
b) $(x - 4)^2$
c) $(x - 9)^2$

Tarea: página 22 del Cuaderno de Ejercicios.

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

P

En la figura 1, al cuadrado de lado x se le ha quitado un cuadrado de lado a (figura 2); dando como resultado la figura 3, cuya área es: $x^2 - a^2$.

Realizando un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

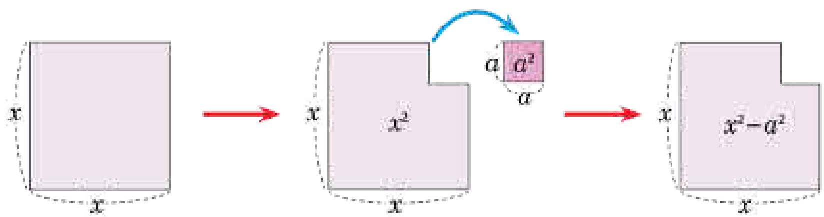


Figura 1 Figura 2 Figura 3

S

Se puede hacer un corte y reubicar las piezas como se muestra a continuación:

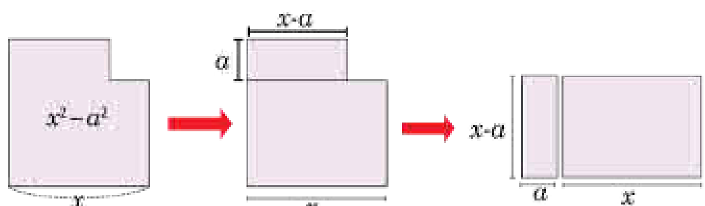


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para la solución se dividió el rectángulo en estas piezas, sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Observa que el área de la figura 1 es $x^2 - a^2$ y que el área de la figura 3 es $(x + a)(x - a)$.
Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

Factoriza: $x^2 - 9$.

Para factorizar $x^2 - 9$, el término independiente 9 es igual al cuadrado de 3, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Factoriza:

a) $x^2 - 1$
$= (x + 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 16$
$= (x + 4)(x - 4)$

c) $y^2 - 25$
$= (y + 5)(y - 5)$

d) $x^2 - y^2$
$= (x + y)(x - y)$

e) $y^2 - \frac{1}{4}$
$= \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$

f) $x^2 - \frac{1}{9}$
$= \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Indicador de logro

3.6 Factoriza la diferencia de cuadrados como el producto notable $(x + a)(x - a)$.

Secuencia

En clases anteriores se han estudiado métodos para factorizar trinomios utilizando productos notables que se estudiaron en la lección anterior. Ahora se estudiará cómo factorizar una diferencia de cuadrados utilizando el producto notable de la suma por la diferencia de un binomio.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Formar un rectángulo utilizando piezas de papel manipulables a partir de la figura 2, que representa un cuadrado de lado x al que se le ha quitado un cuadrado de lado a.
Ⓒ Formalizar el proceso para factorizar la diferencia de cuadrados, a partir del resultado obtenido en la solución.

Ⓔ Se expresan los cuadrados de x y 3 con el objetivo de hacer evidente que se trata de una diferencia de cuadrados.

Solución de algunos ítems:

b) $x^2 - 16$

$x^2 - 16 = x^2 - 4^2$
$= (x + 4)(x - 4)$

d) $x^2 - y^2$

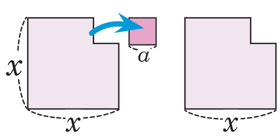
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Observación:
En la página 182 del Libro de Texto aparece la misma imagen de la figura 2 ampliada, se pueden utilizar fotocopias de esta página para facilitar la distribución del material a manipular.

Fecha:

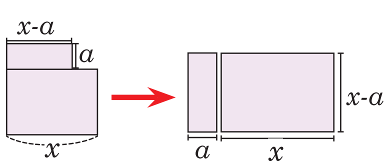
U1 3.6

Ⓟ Al cuadrado de lado x se le quita un cuadrado de lado a.



Divide en piezas la figura y forma un rectángulo.

Ⓢ



Área: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 9$

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$
$= (x + 3)(x - 3)$

Por lo tanto,
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Ⓡ

a) $x^2 - 1$

$x^2 - 1 = x^2 - 1^2$
$= (x + 1)(x - 1)$

b) $(x + 4)(x - 4)$

c) $(y + 5)(y - 5)$

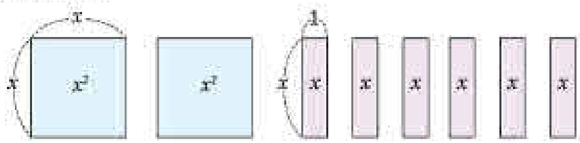
Tarea: página 23 del Cuaderno de Ejercicios.

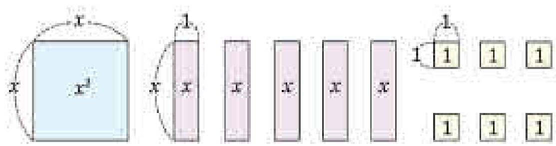
3.7 Practica lo aprendido

A continuación se presenta un resumen de las factorizaciones vistas hasta esta clase:

	Se factoriza:	Por ejemplo:
Factor común $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a) 

b) 

2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $5x(x - 1)$

b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$

d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$

f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. Para el trinomio $x^2 - 11x + 18$:

a) Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es −11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta. $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

b) Factoriza el trinomio. $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2 + 6xy$ $= 2x(5x + 3y)$

b) $7xy - 21y^2$ $= 7y(x - 3y)$

c) $-x^3 + 2xy - 3xy^2$ $= -x(x - 2y + 3y^2)$

d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$ $= 3xy(3x - 5 - 7y)$

e) $x^2 - 6x - 55$ $= (x - 11)(x + 5)$

f) $y^2 + 5y - 50$ $= (y + 10)(y - 5)$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$ $= \left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$ $= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2$

i) $x^2 - 81$ $= (x + 9)(x - 9)$

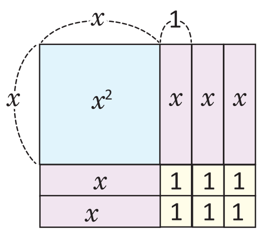
j) $y^2 - \frac{25}{36}$ $= \left(y + \frac{5}{6}\right)\left(y - \frac{5}{6}\right)$

Indicador de logro

3.7 Resuelve problemas utilizando la factorización.

Solución de algunos ítems:

1. a)



Área total: $(x + 3)(x + 2)$

2. a) Factores: $5x$ y $x - 1$
   b) Factores: $-2x$ y $x + 10$
   c) Factores: $x + y$ y $5x - y$
   d) Factores: x, $x - 5$ y $2x + 3$
   e) Factores: $2x$, $3x + 4$ y $y + 1$
   f) Factores: $-y$, $2y + 9$ y $10 - 11y$

3. a) Como el producto es positivo (+), los dos números deben tener el mismo signo. Si los dos números son positivos, su suma sería positiva (+), pero si los dos números son negativos, el resultado de la suma sería de signo negativo. Por tanto, ambos números son negativos.

   b) $(x - 9)(x - 2)$

4. f) $y^2 + 5y - 50$

Pareja	Producto	Suma
1 y −50	−50	−49
−1 y 50	−50	+49
2 y −25	−50	−23
−2 y 25	−50	+23
5 y −10	−50	−5
−5 y 10	−50	−5

Por tanto,

$y^2 + 5y - 50 = (y - 5)(y + 10)$.

j) $y^2 - \frac{25}{36}$

$y^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{6}\right)\left(y + \frac{5}{6}\right)$

Tarea: página 24 del Cuaderno de Ejercicios.

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

P

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 25y^2$

¿Es posible utilizar factor común en cada caso? ¿Cuáles de los métodos vistos en clases anteriores puedes utilizar?

S

a) Los términos del trinomio no tienen un monomio común, pero puede utilizarse directamente uno de los métodos vistos en clases anteriores. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el tercero es el cuadrado de $3y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

Además, $2(2x)(3y) = 12xy$, por lo que $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Se toman $2x = w$ y $3y = z$ y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$	Tomando $2x = w$ y $3y = z$,
$= w^2 + 2wz + z^2$	
$= (w + z)^2$	factorizando,
$= (2x + 3y)^2$	sustituyendo nuevamente $w = 2x$ y $z = 3y$.

Por lo tanto, $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) Igual que en el caso anterior, los términos del binomio, no tienen un monomio común. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el segundo es el cuadrado de $5y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

Se toman $2x = w$, $5y = z$ y se factoriza como diferencia de cuadrados:

$4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2$	Tomando $2x = w$ y $5y = z$,
$= w^2 - z^2$	factorizando,
$= (w + z)(w - z)$	sustituyendo nuevamente,
$= (2x + 5y)(2x - 5y)$.	

Por lo tanto, $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza:

a) $9x^2 - 30x + 25$ $= (3x - 5)^2$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ $= (4x + 3y)^2$

c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$ $= \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$

d) $36x^2 - 25$ $= (6x + 5)(6x - 5)$

e) $x^2 - 100y^2$ $= (x + 100y)(x - 100y)$

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$ $= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$

Indicador de logro

3.8 Utiliza el cambio de variable por un monomio para factorizar polinomios.

Secuencia

El cambio de variable fue utilizado anteriormente para reducir el producto de dos polinomios a otro más sencillo, o para transformar el producto de dos expresiones en apariencia complejas, en un producto notable ya conocido. Siguiendo con esta misma idea, en esta clase se utiliza el cambio de variable para que la factorización de los polinomios resulte más evidente y natural.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Factorizar expresiones algebraicas utilizando alguno de los tipos de factorización vistos anteriormente. En un primer momento el alumno puede solucionar como le resulte más conveniente, si es posible, siempre se debe resolver el problema utilizando cambio de variables para ejemplificar lo útil que resulta, pues hace más evidente la factorización a utilizar.

Ⓒ Establecer el uso del cambio de variable como herramienta que ayuda a factorizar polinomios.

Solución de algunos ítems:

a) $9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(5)(3x) + 5^2$

Sea $3x = w$
$= w^2 - 2(5)w + 5^2$
$= (w - 5)^2$
$= (3x - 5)^2$

Por tanto,
$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$, sea $\frac{x}{2} = w$
$= w^2 - y^2$
$= (w + y)(w - y)$
$= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$

Por tanto,
$\frac{x^2}{4} - y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$.

Para el plan de pizarra, en la parte de la solución, se omite la expresión con el cambio de variable ya que es necesario exigirlo a los estudiantes.

Fecha: **U1 3.8**

Ⓟ Factoriza los siguientes polinomios:
a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

Ⓢ a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
Sea $2x = w$ y $3y = z$
$(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = w^2 + 2(w)(z) + (z)^2$
$= (w + z)^2$
$= (2x + 3y)^2$

Por tanto: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) $4x^2 - 25y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $25y^2 = (5y)^2$
$4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2$
$= (2x + 5y)(2x - 5y)$

Por tanto: $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

Ⓡ a) $(3x - 5)^2$
b) $(4x + 3y)^2$
c) $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$
d) $(6x + 5)(6x - 5y)$

Tarea: página 25 del Cuaderno de Ejercicios.

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

P

Factoriza:

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

No desarrolles los productos que se encuentran dentro de cada polinomio. Utiliza un procedimiento similar al de la clase anterior para poder factorizar.

S

a) Observa que $(x-1)^2$ es el cuadrado de $x-1$, $(y+1)^2$ es el cuadrado de $y+1$ y ambos se están restando. Puede factorizarse como diferencia de cuadrados, se toman $x-1=w$ y $y+1=z$ y se factoriza la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(y+1)^2 &= w^2-z^2 && \text{Tomando } x-1=w \text{ y } y+1=z,\\ &= (w+z)(w-z) && \text{factorizando,}\\ &= (x-1+y+1)[x-1-(y+1)] && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= (x+y)(x-y-2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$.

b) Observa que $(x+1)^2$ es el cuadrado de $x+1$, y^2 es el cuadrado de y, además el segundo término es el producto de 2 por $x+1$ por y. Luego, el polinomio puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto: se toma $x+1=w$ y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)y+y^2 &= w^2+2wy+y^2 && \text{Tomando } x+1=w,\\ &= (w+y)^2 && \text{factorizando,}\\ &= (x+1+y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } x+1=w,\\ &= (x+y+1)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Recuerda que cuando utilices un cambio de variable: después de factorizar debes realizar el cambio nuevamente, reducir los términos semejantes (si los hay) y ordenar los términos de los factores.

Factoriza:

a) $4x^2-(y+2)^2$
$=(2x+y+2)(2x-y-2)$

b) $(x+3)^2-9y^2$
$=(x-3y+3)(x+3y+3)$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$
$=(x+y-6)(x-y-4)$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$
$=(y-x-3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$
$=(2x-y+7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$
$=(x+y-5)^2$

28

Indicador de logro

3.9 Utiliza el cambio de variable por un binomio para factorizar polinomios.

Secuencia

El estudio del cambio de variable para factorizar un polinomio, realizado en la clase anterior, fue únicamente cuando la variable a sustituir era un monomio, en esta clase se resuelven problemas donde es necesario realizar un cambio de variable por un binomio.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el cambio de variable por un binomio para transformar la expresión en otra más simple y con la que es más evidente el tipo de factorización a utilizar.
Ⓒ Establecer en plenaria el proceso de factorización utilizando el cambio de variable por un binomio y recordar que al factorizar una expresión utilizando este método no se debe olvidar regresar a las variables originales.

Solución de algunos ítems:

$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2$

Sea $x + 3 = w$

$= y^2 - 2(w)y + w^2$
$= (y - w)^2$
$= (y - (x + 3))^2$
$= (y - x - 3)^2$

Por tanto,
$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2 = (y - x - 3)^2$.

Fecha:

U1 3.9

Ⓟ Factoriza:

a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$
b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

Ⓢ a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$

Tomando: $x - 1 = w$ y $y + 1 = z$

$(w)^2 - (z)^2$
$= (w + z)(w - z)$
$= (x - 1 + (y + 1))(x - 1 - (y + 1))$
$= (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)$

Por tanto:
$(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)$
$= (x + y)(x - y - 2)$.

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

Tomando: $x + 1 = w$

$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$
$= (w)^2 + 2(w)y + y^2$
$= (w + y)^2$
$= (x + 1 + y)^2$

Por tanto:
$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 = (x + 1 + y)^2$.

Ⓡ a) $(2x + y + 2)(2x - y - 2)$
b) $(x - 3y + 3)(x + 3y + 3)$
c) $(x + y - 6)(x - y - 4)$
d) $(y - x - 3)^2$

Tarea: página 26 del Cuaderno de Ejercicios.

3.10 Factorizaciones sucesivas

P

Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

¿Es posible utilizar directamente alguno de los métodos vistos en las clases anteriores? ¿Qué deberías hacer primero?

S

Lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

El trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$: los dos números (uno positivo y otro negativo) cuyo producto es -6 y cuya suma es $+1$ son 3 y -2. Luego:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

E

Factoriza el siguiente polinomio: $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$.

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \qquad \text{Factorizando } x^2 - 4x + 4 \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Ejercicios

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

b) $2x^2 + 32x + 30$
$= 2(x + 15)(x + 1)$

c) $3x^2 + 12x + 12$
$= 3(x + 2)^2$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$
$= 5x(y - 3)(y - 2)$

e) $2x^2 - 18$
$= 2(x + 3)(x - 3)$

f) $-3y^2 + 300$
$= -3(y + 10)(y - 10)$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x - 2)^2$

h) $2x^2y - 12xy + 18y$
$= (2y)(x - 3)^2$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

Indicador de logro

3.10 Factoriza polinomios extrayendo factor común y utilizando productos notables.

Secuencia

Para esta clase se realiza más de un tipo de factorización en una misma expresión. A diferencia de las clases 3.8 y 3.9, los términos que aparecen en la expresión poseen un factor monomio común, por lo que el primer paso siempre es identificar el factor común y luego factorizar, a diferencia de las clases anteriores, donde la factorización resultaba inmediata al realizar un cambio de variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un problema donde se deban realizar dos factorizaciones para que la expresión quede totalmente factorizada; si la solución no es muy evidente en un principio, se puede utilizar la pista que se describe en el Problema inicial, generando la pregunta, ¿qué se debe hacer primero?
Ⓒ Formalizar el uso de las factorizaciones sucesivas, enfatizando el hecho de que el primer paso siempre debe ser verificar si las expresiones tienen un factor común.
Ⓔ Ejemplificar lo descrito en la solución, en un primer paso se extrae el factor común y posteriormente se utiliza la factorización de un trinomio cuadrado perfecto. Usualmente, si el término que está elevado al cuadrado es negativo, el monomio común es con signo negativo.

Solución de algunos ítems:

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= (-2)(x^2) + (-2)(-5x) + (-2)(4)$
$= -2(x^2 - 5x + 4)$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= (3z)(x^2) - (3z)(4y^2)$
$= 3z(x^2 - 4y^2)$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

Observación:
En i) no se utiliza el cambio de variable, este caso se estudiará en la siguiente clase.

Fecha: **U1 3.10**

Ⓟ Factoriza:
a) $2x^2 + 2x - 12$

$2x^2 + 2x - 12$

Ⓢ Extraer factor común 2.
$2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2) + 2(x) - 2(6)$
$= 2(x^2 + x - 6)$
Factorizando en la forma $(x + a)(x + b)$
$= 2(x + 3)(x - 2)$
Por tanto:
$2x^2 + 2x + 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

Ⓔ $-2x^2y + 8xy - 8y$
Extraer factor común $-2y$.
$-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4)$
$= -2y(x^2 - 4x + 4)$
$= -2y(x - 2)^2$
Por tanto:
$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Ⓡ a) $-2(x - 1)(x - 4)$
b) $2(x + 15)(x + 1)$
c) $3(x + 2)^2$

Tarea: página 27 del Cuaderno de Ejercicios.

3.11 Combinación de factorizaciones

P

Factoriza: $18x^2 - 200y^2$.

Debes extraer primero el factor común en cada caso.

S

Los coeficientes de x^2 y y^2 tienen factor común 2:

$$\begin{aligned} 18x^2 - 200y^2 &= 2(9x^2) - 2(100y^2) \\ &= 2(9x^2 - 100y^2) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $9x^2 = (3x)^2$, $100y^2 = (10y)^2$

$$\begin{aligned} &= 2[(3x)^2 - (10y)^2] && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 10y = z, \\ &= 2(w^2 - z^2) && \text{factorizando,} \\ &= 2(w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,} \\ &= 2(3x + 10y)(3x - 10y). \end{aligned}$$

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un monomio común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de sus factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= (3z)(2x + 3y)^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$
$= 4m(3n + 1)^2$

30

Indicador de logro

3.11 Factoriza polinomios que impliquen combinaciones de los métodos vistos en clases anteriores.

Secuencia

Anteriormente se realizaron factorizaciones sucesivas, donde el primer paso fue extraer el factor común y luego realizar la factorización, en esta clase se estudian siempre factorizaciones sucesivas, con la diferencia de que para la segunda factorización se debe realizar un cambio de variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Factorizar la expresión haciendo uso de factorizaciones sucesivas, utilizando el factor común y posteriormente un cambio de variable.
Ⓒ Se establece en general, el proceso que se debe seguir para factorizar un polinomio. La indicación es: buscar siempre un factor común como primer paso y luego utilizar otra factorización, si la expresión no posee factor común se debe proceder a factorizar directamente.

Solución de algunos ítems:

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(9n^2 + 3n - 2)$

Tomando $3n = w$.
$= 2m(w^2 + w - 2)$
$= 2m(w + 2)(w - 1)$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(9m^2 - 25n^2)$

Tomando $3m = w$ y $5n = z$.
$= 3(w^2 - z^2)$
$= 3(w + z)(w - z)$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= 3z(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

Tomando $2x = m$ y $3y = n$.
$= 3z(m^2 + 2mn + n^2)$
$= 3z(m + n)^2$
$= 3z(2x + 3y)^2$

Fecha:

U1 3.11

Ⓟ Factoriza: $18x^2 - 200y^2$

Ⓢ $18x^2 - 200y^2$
Extrayendo factor común 2
$18x^2 - 200y^2$
$= 2(9x^2) - 2(100y^2)$
$= 2(9x^2 - 100y^2)$
$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$ Tomando $3x = w$ y $10y = z$
$= 2(w^2 - z^2)$
$= 2(w + z)(w - z)$ Sustituyendo nuevamente
$= 2(3x + 10y)(3x - 10y)$
Por tanto:
$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y)$.

Ⓡ a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(9x^2y^2 - 16)$
Tomando $3xy = w$
$-2(9x^2y^2 - 16)$
$= -2(w^2 - 4^2)$
$= -2(w + 4)(w - 4)$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3z(x + 2y)(x - 2y)$
c) $2m(3n + 2)(3n - 1)$
d) $3(3m + 5n)(3m - 5n)$
e) $3z(2x + 3y)^2$

Tarea: página 28 del Cuaderno de Ejercicios.

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

P

Utilizando factorización, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

S

a) La operación es una diferencia de cuadrados:

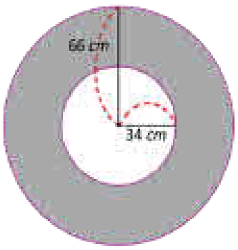
$$\begin{aligned} 99^2 - 1 &= (99 + 1)(99 - 1) \\ &= (100)(98) \\ 99^2 - 1 &= 9\,800 \end{aligned}$$

b) La operación también es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 35^2 - 15^2 &= (35 + 15)(35 - 15) \\ &= (50)(20) \\ 35^2 - 15^2 &= 1\,000 \end{aligned}$$

E

Calcula el área de la región sombreada (deja expresado el resultado en términos de π).



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. La región delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**.

Para calcular el área de la región sombreada debe restarse del área del círculo mayor, el área del círculo menor. El círculo mayor tiene radio 66 *cm*, y área:

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

El círculo menor tiene radio 34 *cm* y área:

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

Entonces, el área de la región sombreada es:

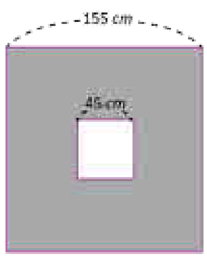
$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$	Se extrae factor común π,
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$	se factoriza como diferencia de cuadrados,
$= (100)(32)\pi$	se calculan las operaciones en los paréntesis,
$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$	se deja expresado en términos de π.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $3\,200\pi$ cm^2.

1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $35^2 - 25^2$ = 600 b) $45^2 - 35^2$ = 800 c) $98^2 - 4$ = 9 600

2. Calcula el área de la región sombreada (ambos cuadriláteros son cuadrados):



= 22 000 cm^2

Indicador de logro

3.12 Calcula operaciones aritméticas y áreas de regiones utilizando factorización.

Secuencia

A lo largo de la lección se estudiaron distintas técnicas de factorización, ahora se utilizará el álgebra de las factorizaciones para simplificar los cálculos aritméticos en algunas operaciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver dos problemas del cálculo aritmético utilizando el álgebra aprendida en esta lección.
Ⓒ Ejemplificar el uso de la factorización en el cálculo de áreas, simplificando las operaciones aritméticas. El área de la parte sombreada es la del círculo más grande menos el área del círculo contenido, como el área del círculo es el cuadrado del radio, la factorización que se utiliza es la diferencia de cuadrados.

Solución de algunos ítems:

1. a) $35^2 - 25^2$
$= (35 + 25)(35 - 25)$
$= (60)(10)$
$= 600$

2. Como el área de la región sombreada es la diferencia de las áreas de los dos cuadrados, entonces se puede aplicar la diferencia de cuadrados para resolver.

$155^2 - 45^2$
$= (155 + 45)(155 - 45)$
$= 200 \times 110$
$= 22\,000$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $22\,000$ cm^2.

Fecha: **U1 3.12**

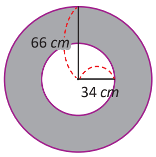
Ⓟ Encuentra el resultado de las siguientes operaciones. Utiliza la factorización.

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

Ⓢ a) $99^2 - 1$
$= 99^2 - 1^2$
$= (99 + 1)(99 - 1)$
$= (100)(98)$
$= 9\,800$

b) $35^2 - 15^2$
$= 35^2 - 15^2$
$= (35 + 15)(35 - 15)$
$= (50)(20)$
$= 1\,000$

Ⓔ Calcula el área de la región sombreada.



$66^2\pi - 34^2\pi$
$= (66^2 - 34^2)\pi$
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$
$= (100)(32)\pi$
$= 3\,200\pi$

Por tanto:
El área es: $3\,200\pi$ cm^2

Ⓡ 1. a) 600 b) 800 c) 9 600

2. 22 000 cm2.

Tarea: página 29 del Cuaderno de Ejercicios.

3.13 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 24x - 60$ $= 3(x + 10)(x - 2)$

b) $-4y^2 - 16y - 12$ $= -4(y + 3)(y + 1)$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$ $= 5\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$ $= (6x - 5y)^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$ $= \left(2x + \frac{y}{2}\right)^2$

f) $64x^2 - 49y^2$ $= (8x + 7y)(8x - 7y)$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$ $= \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$ $= -(5x + 7)(x - 11)$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$ $= 4z(x - 2y)^2$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$ $= 5x(y + 11)(y + 10)$

2. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

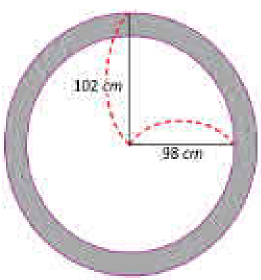
a) $75^2 - 25^2$ $= 5\,000$

b) $95^2 - 25$ $= 9\,000$

c) 101^2 $= 10\,201$

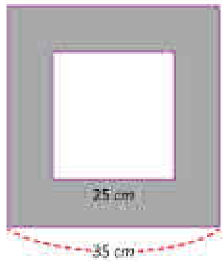
d) 47×53 $= 2\,491$

3. Calcula el área de la región sombreada:



$= 800\pi \text{ cm}^2$

4. Calcula el área de la región sombreada:



$= 600 \text{ cm}^2$

32

Indicador de logro

3.13 Resuelve problemas utilizando factorizaciones sucesivas.

Solución de algunos ítems:

1. a) $3x^2 + 24x - 60$

$= 3(x^2 + 8x - 20)$

$= 3(x + 10)(x - 2)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$

Sea $w = 6x$ y $z = 5y$

$= w^2 - 2wz + z^2$

$= (w - z)^2$

$= (6x - 5y)^2$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$

Sea $w = 2x + 9$ y $z = 3x - 2$

$= w^2 - z^2$

$= (w + z)(w - z)$

$= (2x + 9 + 3x - 2)(2x + 9 - 3x + 2)$

$= (5x + 7)(-x + 11)$

$= -(5x + 7)(x - 11)$

2. c) 101^2

$101^2 = (100 + 1)^2$

$= 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$

$= 10\,000 + 201 + 1$

$= 10\,201$

3. $102^2\pi - 98^2\pi$

$102^2\pi - 98^2\pi$

$= (102^2 - 98^2)\pi$

$= (102 + 98)(102 - 98)\pi$

$= 200 \times 4\pi$

$= 800\pi \text{ cm}^2$

Tarea: página 30 del Cuaderno de Ejercicios.