Unidad 5. Figuras semejantes

Competencia de la Unidad

– Identificar y construir figuras semejantes a partir de las características de sus lados y sus ángulos.
– Utilizar semejanza de triángulos, para deducir y aplicar propiedades de figuras y sólidos semejantes en la resolución de situaciones problemáticas.

Relación y desarrollo

Sexto grado

Unidad 4: Razones y porcentajes
- Razones
- Porcentajes

Unidad 5: Proporcionalidad
- Proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa

Séptimo grado

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Octavo grado

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Semejanza	1	1. Razón entre segmentos
	1	2. Segmentos proporcionales
	1	3. Figuras semejantes
	1	4. Características de figuras semejantes, parte 1
	1	5. Características de figuras semejantes, parte 2
	1	6. Construcción de figuras semejantes
	1	7. Practica lo aprendido
2. Semejanza de triángulos	1	1. Primer criterio de semejanza de triángulos
	1	2. Segundo criterio de semejanza de triángulos
	1	3. Tercer criterio de semejanza de triángulos
	1	4. Practica lo aprendido
	1	5. Practica lo aprendido
3. Semejanza y paralelismo	1	1. Teorema de la base media, parte 1
	1	2. Teorema de la base media, parte 2
	1	3. Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero
	1	4. Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 1
	1	5. Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2
	1	6. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1
	1	7. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2
	1	8. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

Lección	Horas	Clases
	1	9. Practica lo aprendido
4. Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes	1	1. Distancia entre puntos sobre un mapa
	1	2. Áreas de polígonos semejantes
	1	3. Volumen de sólidos semejantes
	1	4. Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos
	1	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 5
	1	Prueba del segundo trimestre

26 horas clase + prueba de la Unidad 5 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Semejanza
Se estudian los conceptos de razón entre segmentos y segmentos proporcionales, estos conceptos se utilizan posteriormente para abordar las características de dos figuras semejantes que posteriormente se construyen utilizando regla y compás.

Lección 2: Semejanza de triángulos
Utilizando las características de dos figuras semejantes se establecen los tres criterios de semejanza y se utilizan para resolver distintos problemas.

Lección 3: Semejanza y paralelismo
En esta lección se utiliza la semejanza de triángulos para estudiar algunos resultados importantes de la geometría, como lo son el teorema de la base media, el teorema sobre segmentos paralelos y el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo.

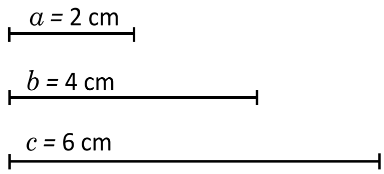
Lección 4: Aplicación de semejanza y triángulos semejantes
Utilizando todo lo correspondiente a semejanza de triángulos y figuras; además de los conceptos vistos sobre proporción entre segmentos, se estudian algunas de las aplicaciones de la semejanza ya sea en situaciones del contexto o en la misma matemática.

1.1 Razón entre segmentos

P

a) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento b?

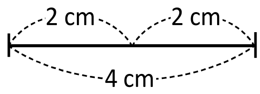
b) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento c? ¿Y la de b con respecto a c?



S

a) Al comparar las longitudes del segmento a con respecto a la del segmento b se tiene que a es $\frac{1}{2}$ de b.

b) Se calcula el cociente $\frac{a}{c}$ y se tiene que la longitud de a es $\frac{1}{3}$ de la longitud de c. De igual forma, la longitud de b es $\frac{2}{3}$ de la longitud de c.

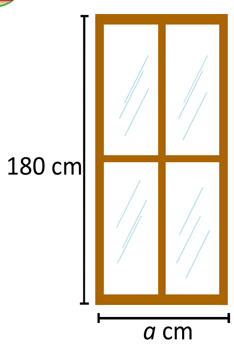


C

Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

En el Problema inicial, la razón entre los segmentos a y b es $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Hay que prestar atención al orden de a y b. Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.

E



¿Cuál es la medida del ancho de una ventana de alto 180 cm cuyas dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$? (ver figura)

Iguala el ancho y alto de la ventana con la razón entre ambas. Debes cuidar el orden, es decir, colocar la longitud menor entre la mayor o viceversa, según sea el caso.

Se denota por a la medida del ancho de la ventana en centímetros. Si las dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$, entonces:

$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$

Se sustituyen los valores en la ecuación anterior y se despeja a:

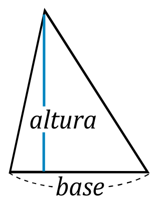
$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$

$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$a = 80$$

Por lo tanto, la medida del ancho de la ventana es 80 cm.

1. Calcula la razón entre el segmento a = 4 cm y el segmento b = 20 cm.
   Razón $\frac{1}{5}$
2. La base y la altura de un triángulo están a razón $\frac{5}{7}$. Si la base mide 10 cm, ¿cuánto mide la altura del triángulo? (ver figura)
   Altura = 14 cm



Indicador de logro

1.1 Encuentra la longitud de un segmento dada su razón.

Secuencia

El concepto de razón no es un conocimiento nuevo para el estudiante, en los primeros grados se inició este estudio con el concepto de **cantidad de veces**, estableciendo una razón como la comparación entre dos cantidades. Por ejemplo, una razón se representa de la forma 5 : 3 y al número $\frac{5}{3}$ se le conoce como valor de razón. En sexto grado se realiza un estudio más detallado de este contenido y en séptimo grado se centra en el análisis de la proporción directa e inversa, incluyendo las gráficas de cada una de ellas. Para esta unidad el concepto de razón y el concepto de proporción son de vital importancia, pues se trata de la comparación entre segmentos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ El objetivo es comparar las longitudes de los segmentos a y b con c y encontrar la razón entre ambos segmentos. Para esta actividad se pueden utilizar cordeles con las medidas establecidas.

Ⓒ Hacer referencia al concepto de razón entre dos longitudes y su forma de expresarse.

Ⓔ Es importante prestar atención al orden de la razón. En el ejemplo, ancho es el numerador y alto es el denominador, de esta forma para cualquier razón si se menciona a y b, se puede establecer como la fracción $\frac{a}{b}$; pero si se menciona b y a se debe establecer como la fracción $\frac{b}{a}$.

Solución de algunos ítems:

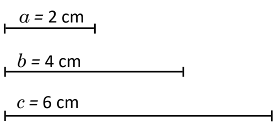
2.
$$\frac{\text{Base}}{\text{Altura}} = \frac{5}{7}$$
$$\frac{\text{Altura}}{10} = \frac{7}{5}$$
$$\text{Altura} \times 5 = 7 \times 10$$
$$\text{Altura} = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

Por tanto, la altura es 14 cm.

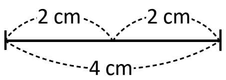
Posibles dificultades:
Si los estudiantes no dominan el concepto de razón y de proporción, se puede reforzar este contenido utilizando un tiempo no mayor a una hora clase.

Fecha: **U5 1.1**

Ⓟ a) ¿Cuántas veces es la longitud de a con respecto a la longitud de b?
b) Cuántas veces es la longitud de:
a con respecto a c.
b con respecto a c.



Ⓢ



a) a es $\frac{1}{2}$ de b.
b) a es $\frac{1}{3}$ de c, b es $\frac{2}{3}$ de c.

Ⓔ El ancho y alto están a razón de $\frac{4}{9}$.
Calcula el valor de a.

Como el ancho y alto están a razón de $\frac{4}{9}$, entonces:
$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$
$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$
$$a = 80$$

Ⓡ 1. $\frac{1}{5}$

2. Altura = 14 cm.

Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

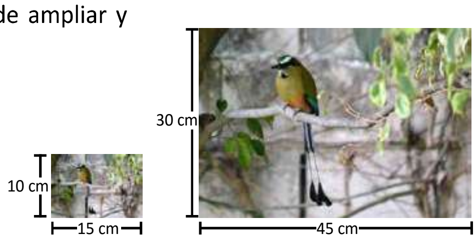
1.2 Segmentos proporcionales

P

Carlos tomó una fotografía a un torogoz, la cual decide ampliar y colocar en un cuadro.

a) ¿Cuál es la razón entre las alturas de la fotografía pequeña y la ampliada? ¿Y entre las bases?

b) ¿Qué relación hay entre ambas razones?



S

a) La altura de la fotografía pequeña es 10 cm y la de la fotografía ampliada es 30 cm. Entonces, la razón de ambas alturas (de la pequeña entre la ampliada) es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, que también puede escribirse como 1:3. De igual forma se procede para las bases, la razón entre ambas es $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1:3

b) Al simplificar ambas razones, el resultado es $\frac{1}{3}$, es decir, son equivalentes. Cuando esto ocurre, se dice que las alturas y las bases de la fotografía son "proporcionales".

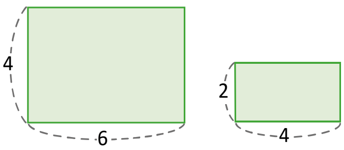
También se puede haber calculado la razón entre la altura de la grande y la de la pequeña como $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, que se escribe 3:1. De igual manera para las bases, solo se debe asegurar de tomar el mismo orden.

C

La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**. Por ejemplo, $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$, y al simplificar ambas pueden expresarse como $\frac{1}{3}$ o 1:3.

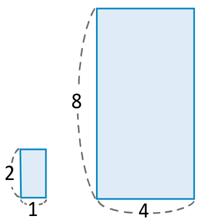
1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, ¿son proporcionales las bases y las alturas de cada pareja? Justifica tu respuesta.

a)



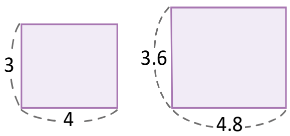
No son proporcionales.

b)



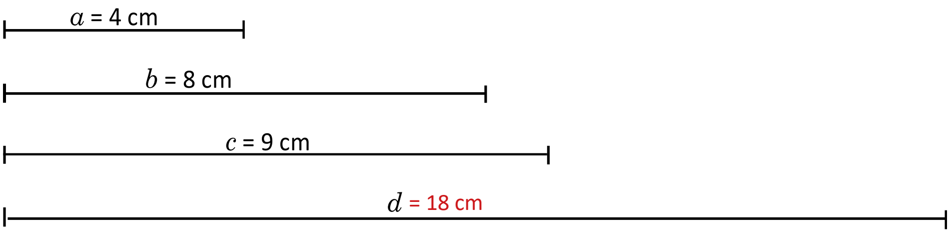
Son proporcionales. Se cumple $\frac{1}{4}$.

c)



Son proporcionales. Se cumple $\frac{5}{6}$.

2. En la siguiente figura, ¿qué longitud debe tener el segmento d para que a y b sean proporcionales a c y d?



Unidad 5

Indicador de logro

1.2 Utiliza la razón entre segmentos para determinar si una pareja de segmentos es proporcional a otros dos.

Secuencia

En primero y segundo ciclo se establece una proporción como la igualdad entre dos razones y se analizan cantidades que cumplan relaciones de proporción, así como la gráfica de una proporción directa o inversa. En esta unidad este concepto es muy importante dado que se establece que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y si sus lados guardan una relación de proporción.

Propósito

Ⓟ, En a) se resuelve un ítem similar a los presentados en la clase anterior. En b), el objetivo es comparar ambas razones y concluir que el valor de la razón es el mismo, de esta forma se introduce el concepto de **proporción entre dos segmentos**.

Establecer formalmente el concepto de proporción. La diferencia con la clase anterior, donde también se realizaba una comparación entre dos cantidades, es que en este caso, la comparación se realiza entre dos figuras diferentes.

Solución de algunos ítems:

1. c) Razón entre alturas:

$$\frac{3}{3.6} = \frac{3}{3.6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Razón entre bases:

$$\frac{4}{4.8} = \frac{4}{4.8} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

Luego, ambas razones son la misma, por tanto las bases y alturas son proporcionales.

2. Como se menciona a y b, debe escribirse $\frac{a}{b}$; como se aclaró en la página anterior.
Del enunciado:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{9}{d}$$

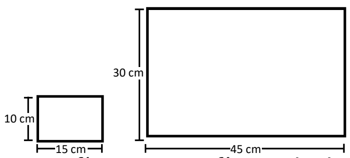
$$d(4) = 8(9)$$

$$d = \frac{72}{4} = 18$$

Por tanto, d = 18 cm.

Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ



Fotografía Fotografía ampliada

Ⓢ a) Calcula: Razón entre alturas
Razón entre bases
b) ¿Cómo son ambas razones?

a) Razón entre las alturas $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ o 1 : 3
Razón entre las bases $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1 : 3

b) En ambas razones el resultado es $\frac{1}{3}$.

Ⓡ 1. a) Razón entre alturas: $\frac{4}{2} = 2$
Razón entre bases: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
No son proporcionales.
b) Son proporcionales. Razón $\frac{1}{4}$
c) Son proporcionales. Razón $\frac{5}{6}$

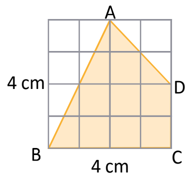
2. d = 18 cm.

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Figuras semejantes

P

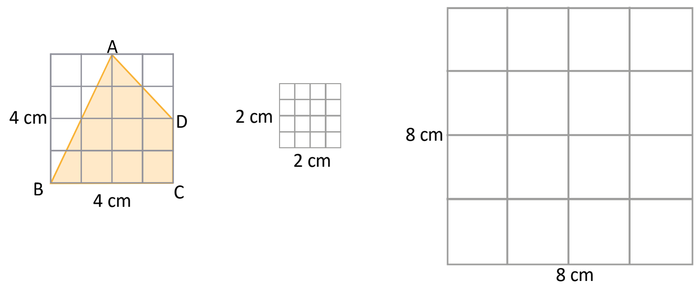
Reduce a la mitad y amplía al doble el cuadrilátero ABCD sin cambiar su forma.



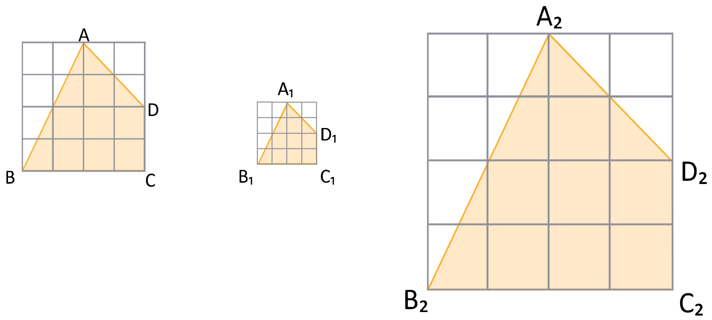
Reduce a la mitad y amplía al doble las longitudes de los lados de la cuadrícula.

S

Se dibujan dos cuadrados, uno de lado 2 cm y otro de lado 8 cm. La cuadrícula original tiene 16 cuadrados; de la misma forma se cuadriculan los cuadrados de 2 y 8 cm de tal manera que cada uno tenga en su interior 16 cuadrados:



Luego, se traza el cuadrilátero en ambas cuadrículas, respetando la forma del mismo.



Los cuadrados de la cuadrícula pequeña tienen 5 mm de lado, y los de la cuadrícula grande 2 cm de lado.

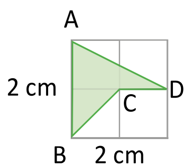
C

Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente, el mismo tamaño (como las del ejemplo anterior). Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo ~: el cuadrilátero ABCD ~ el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$" (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes) y el cuadrilátero ABCD ~ el cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

1. Amplía al doble el cuadrilátero ABCD de la derecha, dibujando la figura resultante.

2. ¿Cuáles serán las dimensiones de la cuadrícula si el cuadrilátero ABCD se amplía al triple? Dibuja la figura resultante.



100

Indicador de logro

1.3 Reduce y amplía cuadriláteros para dibujar figuras semejantes utilizando cuadrícula.

Secuencia

En primero y segundo ciclo se establece una proporción como la igualdad entre dos razones y se analizan cantidades que cumplan relaciones de proporción, así como la gráfica de una proporción directa o inversa. En esta unidad este concepto es muy importante dado que se establece que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y si sus lados guardan una relación de proporción.

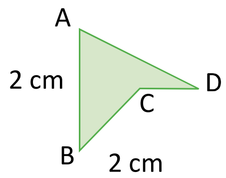
Propósito

Ⓟ, En a) se resuelve un ítem similar a los presentados en la clase anterior. En b), el objetivo es comparar ambas razones y concluir que el valor de la razón es el mismo, de esta forma se introduce el concepto de **proporción entre dos segmentos**.

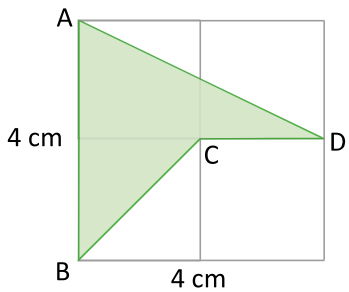
Establecer formalmente el concepto de proporción. La diferencia con la clase anterior, donde también se realizaba una comparación entre dos cantidades, es que en este caso, la comparación se realiza entre dos figuras diferentes.

Solución de algunos ítems:

1.



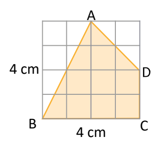
Ampliada al doble:



2. Si se amplía al triple el cuadrilátero ABCD, la cuadrícula deberá tener seis centímetros en cada lado y posteriormente dibujar la figura como en el numeral anterior.

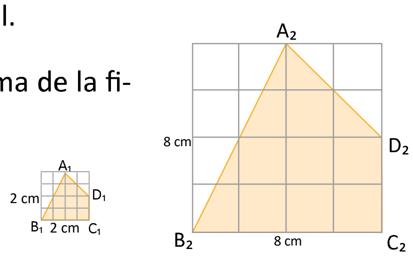
Fecha: **U5 1.3**

Ⓟ Para el cuadrilátero ABCD.
Utilizando regla y lápiz:
Reduce a la mitad.
Amplía al doble.

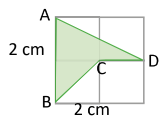


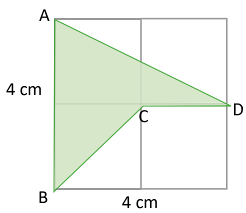
Ⓢ Dibujar 2 cuadrados uno de lado 2 cm y uno de lado 8 cm. Cuadricular ambos cuadrados según la figura original.

Respetar la forma de la figura original.



Ⓡ 1.





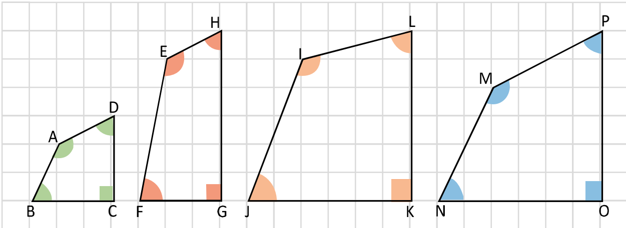
2. Las dimensiones de la cuadrícula deben ser 6 cm.

Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Características de figuras semejantes, parte 1

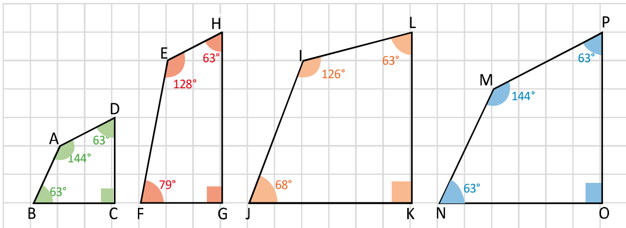
P

¿Cuál cuadrilátero es semejante al cuadrilátero ABCD?

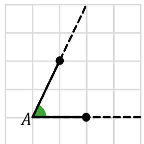


S

Al ampliar el cuadrilátero ABCD, el resultado es otro semejante al primero y solamente cambiarán las longitudes de sus lados pero no la medida de sus ángulos. Con un transportador, se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan:



Cuando se alargan los lados de un ángulo, la medida del ángulo se mantiene.



Para denotar la medida del ángulo cuyo vértice es A se escribe ∢A.

En los cuadriláteros ABCD y EFGH: ∢B no es congruente a ∢F y por lo tanto EFGH no es semejante a ABCD, por no tener la misma forma.

Algo similar ocurre si se comparan los ángulos de ABCD con los de IJKL: ∢J no es congruente al ∢B.

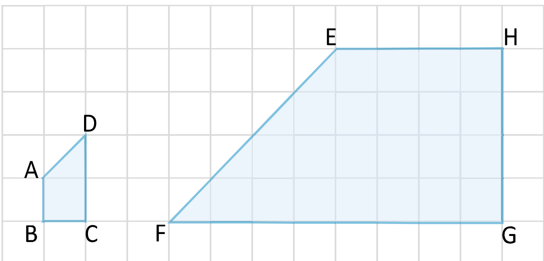
Finalmente, en los cuadriláteros ABCD y MNOP: los ángulos del primero son congruentes a los ángulos del segundo y se amplía ABCD al doble, el resultado es igual a MNOP. Por lo tanto, MNOP es semejante a ABCD.

C

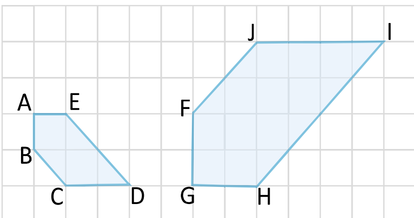
En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

En cada pareja de polígonos semejantes identifica los ángulos correspondientes.

a)



b)



Unidad 5

101

Indicador de logro

1.4 Identifica ángulos correspondientes entre polígonos y, con base a ello, determina polígonos semejantes.

Secuencia

En la clase anterior se definió que dos figuras son semejantes si conservan la misma forma, aunque sus tamaños sean distintos. Para el contenido abordado en esta clase, se trata de identificar que al conservar su forma, existen ángulos correspondientes, que conservan la misma medida.

Hay que tener cuidado en el hecho de que la congruencia de los ángulos correspondientes no necesariamente indica la semejanza. Ejemplo: un rectángulo.

Propósito

Ⓟ, Observar que en dos cuadriláteros que son semejantes, todos los ángulos que están en la misma posición deben tener la misma medida.
La idea es medir los ángulos de la primer figura y comparar con las tres figuras restantes, para este fin se recomienda utilizar las fotocopias de las páginas anexas para obtener más exactitud en los cálculos. También es posible recortar ABCD y sobreponer a las otras figuras, de esta forma será más visible la semejanza con MNOP.

Solución de algunos ítems:

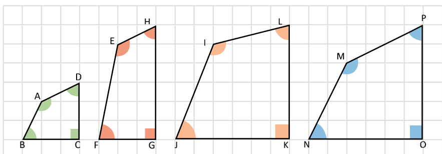
La intención de este ítem es analizar que la semejanza se mantiene aunque la figura haya sido rotada.

∢A es correspondiente con ∢E
∢B es correspondiente con ∢H
∢C es correspondiente con ∢G
∢D es correspondiente con ∢F

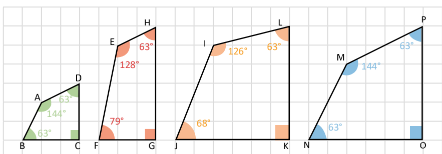
Posibles dificultades:
Si se dificulta medir los ángulos, indicar que se deben prolongar algunos lados de los cuadriláteros para que resulte más sencillo.

Fecha: **U5 1.4**

Ⓟ ¿Cuál es semejante al cuadrilátero ABCD?



Ⓢ Utilizando un transportador se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan.



Ⓡ En los cuadriláteros ABCD y MNOP las medidas de sus ángulos son congruentes, además los lados de MNOP son el doble que en ABCD.

1.

a) Son semejantes :
∢A = ∢E = 135°, ∢D = ∢F = 45° y
∢B = ∢H = ∢C = ∢G = 90°
Las figuras están rotadas.

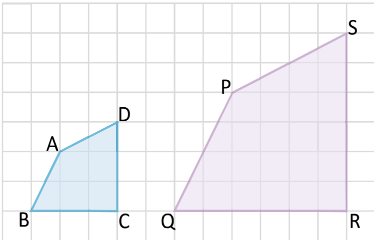
b) Son semejantes:
∢C = ∢J = 135°, ∢D = ∢I = 45° y
∢B = ∢F = 135°, ∢A = ∢G = 90° y
∢E = ∢H = 135°
Las figuras están rotadas.

Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Características de figuras semejantes, parte 2

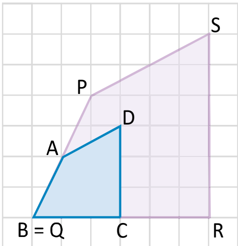
P

Los cuadriláteros ABCD y PQRS son semejantes. ¿Cuál es la relación entre las razones de los lados correspondientes a ambos cuadriláteros?



Lados correspondientes son los que se encuentran en la misma posición. Puedes sobreponer ambos cuadriláteros y comparar sus lados o utilizar regla para medir las longitudes y calcular las razones.

S



Se sobreponen los cuadriláteros, haciendo coincidir los vértices B y Q. De la figura se deduce lo siguiente:

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

Las razones son iguales, por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales.

C

En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. En el Problema inicial:

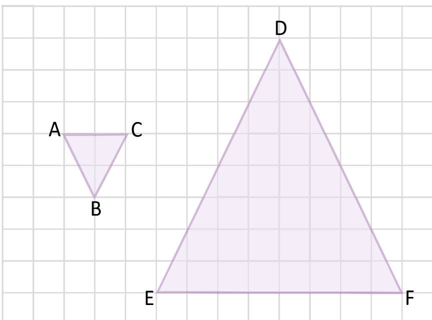
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

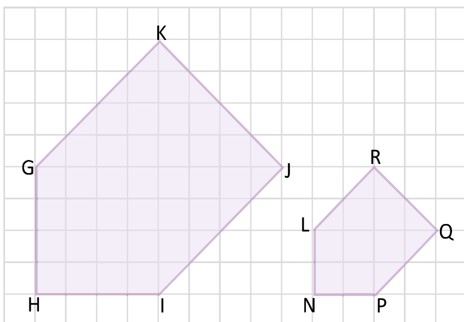
En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

En las figuras, el triángulo ABC es semejante al triángulo FDE, y el pentágono GHIJK es semejante a LNPQR. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza en cada pareja.

a)



b)



Indicador de logro

1.5 Identifica los lados correspondientes de figuras y calcula la razón de semejanza.

Secuencia

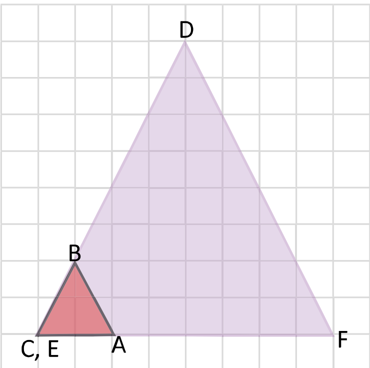
Hasta el momento se ha establecido que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes, y para esta clase se analizará qué relación debe cumplirse para sus lados. Para ello, se hará uso de la proporción entre segmentos estudiada en la clase 1.2.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Deducir que en dos figuras semejantes sus lados correspondientes son proporcionales y tienen el mismo valor de razón. Pueden utilizarse fotocopias de la imagen que aparece en el Problema inicial, estas se encuentran en el material complementario en la página 184. Sobreponer la imagen pequeña a la segunda y haciendo la coincidir en alguno de sus lados.
Para mayor comprensión de las últimas dos igualdades, es mejor sobreponer el vértice D en S.

Solución de algunos ítems:

a) Si se rota ΔABC 180°, la figura queda en la misma orientación que ΔDEF.



Los lados homólogos son:

AC con FE
BA con DF
BC con DE

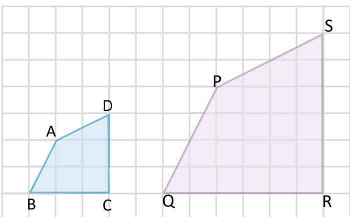
De la imagen. $FE = 4AC \Rightarrow \frac{AC}{FE} = \frac{1}{4}$
$DF = 4BA \Rightarrow \frac{BA}{DF} = \frac{1}{4}$
$DE = 4BC \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{1}{4}$

La razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.

Observaciones: La correspondencia de los vértices puede ser B con D, A con E y C con F. Aplica la misma observación al literal b.

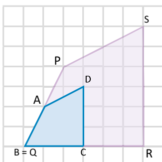
Fecha: **U5 1.5**

Ⓟ Para los siguientes cuadriláteros.



Encuentra las razones de los lados correspondientes.
¿Cuál es la relación entre las razones?

Ⓢ Sobreponer los cuadriláteros y hacer coincidir un vértice.



De la figura se obtiene:

$PQ=2AB \Longrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $QR=2BC \Longrightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$
$RS=2CD \Longrightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $SP=2DA \Longrightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

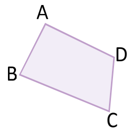
Las razones son iguales.
Sus lados correspondientes son proporcionales.

Ⓡ a) Los lados homólogos son:
AC con FE, BA con DF, BC con DE
La razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.
b) Los lados homólogos son:
GH con LN, HI con NP, IJ con PQ, JK con QR, GK con RL.
La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Construcción de figuras semejantes

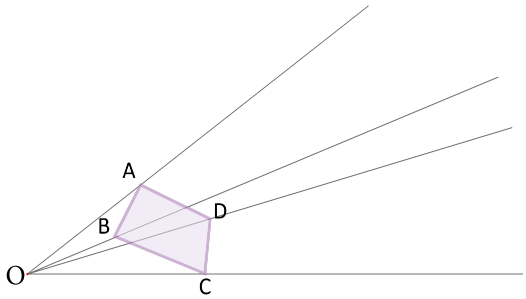
P Dibuja sobre una página de papel bond el siguiente cuadrilátero:



¿Cómo puedes dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3?

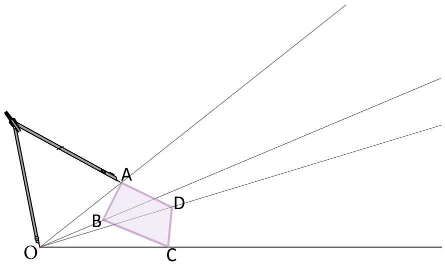
S Para poder dibujar un cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3 se hace lo siguiente:

1. Coloca un punto que se denotará por O. Traza semirrectas que pasen por el punto O y cada uno de los vértices del cuadrilátero.

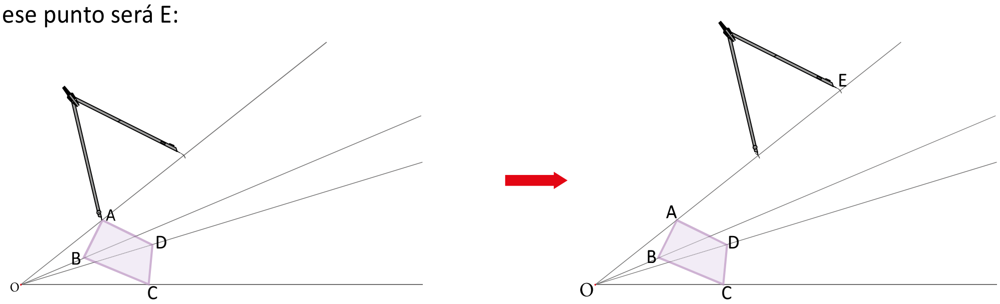


Una **semirrecta** está formada por todos los puntos sobre una línea recta que se encuentran a uno de los lados de un determinado punto fijo. También se le conoce como **rayo**.

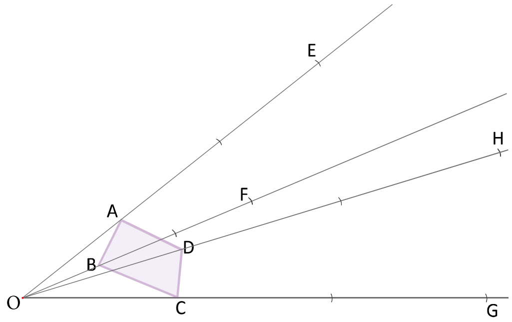
2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.



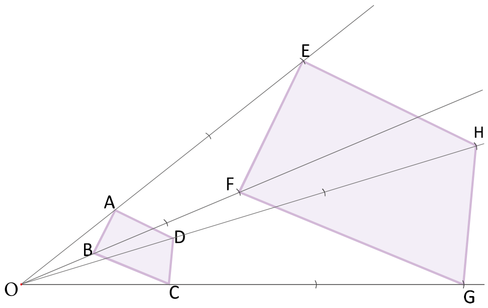
3. A partir del vértice A y sobre la semirrecta, marca un punto E que satisfaga OE = 3 OA. Esto se hace colocando la punta del compás en A y trazando un arco que corte a la semirrecta; luego se coloca la punta del compás en ese punto de intersección y se traza un segundo arco que corte a la semirrecta, ese punto será E:



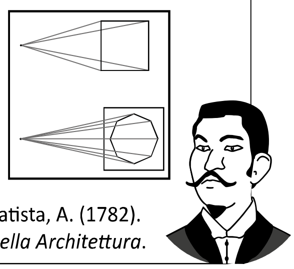
4. Haz lo mismo con los otros tres vértices del cuadrilátero, tomando las medidas OB, OC, OD, encontrando los puntos F, G, y H que satisfagan OF = 3OB, OG = 3OC y OH = 3OD:



5. Une los puntos para formar el cuadrilátero EFGH:



El italiano **Leon Battista Alberti** fue además de arquitecto, el primer teórico del arte del Renacimiento, desarrolló esta técnica en su obra *Della pintura*, en la que describe las leyes de la perspectiva. Un objeto disminuye su tamaño cuando se mira desde una larga distancia hasta que casi queda reducido a un punto.



Batista, A. (1782). *Della Architettura*.

C

El método anterior para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. Al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos** y la razón:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

se llama **razón de semejanza**.

1. Verifica que los cuadriláteros dibujados anteriormente son semejantes a razón 1:3.

2. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 1:2.

Indicador de logro

1.6 Construye figuras semejantes, mediante la homotecia.

Secuencia

En las clases 1.3 y 1.4 se ha estudiado que dos figuras son semejantes si entre ellas se cumple que sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales, en particular, esto se cumple para cualquier polígono. En esta clase se construyen figuras semejantes, utilizando regla y compás, mediante homotecias.

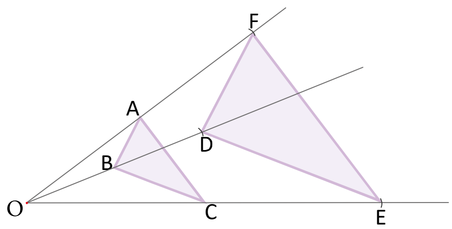
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar regla y compás para construir figuras semejantes. Para este caso en especial, el estudiante debe seguir la solución paso a paso, lo importante es que entienda que se debe colocar tres veces la distancia desde O hasta el vértice ya que los lados deben estar a razón 1 : 3, además se debe indicar claramente que el compás debe mantener la misma abertura al dividir la recta en tres partes.

Lo importante es comprender que dos figuras que son homotéticas entre sí, también son semejantes. Utilizando compás se puede comprobar que los lados de las figuras están a razón 1 : 3.

Solución de algunos ítems:

Utilizando compás.

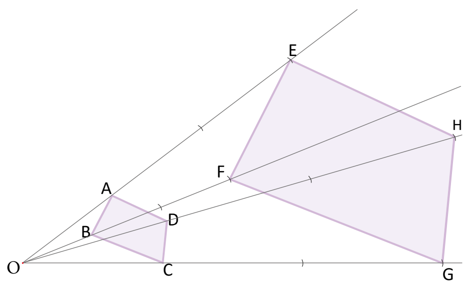


Los triángulos están a razón 1 : 2.

Fecha: **U4 1.6**

Ⓟ Dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD que este a razón 1 : 3.

Ⓢ Seguir el paso a paso.



1. Coloca un punto O y trazar rectas que pasen por los vértices.
2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.
3. Con la misma abertura, marca un punto E que cumpla OE = 3OA.
4. Repite el procedimiento anterior para los demás vértices.
5. Forma el cuadrilátero uniendo las marcas.

Ⓡ 1. Medir con un compás los lados correspondientes y verificar que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

Tarea: página 105 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.7 Practica lo aprendido

1. Las dimensiones ancho y largo del piso de un salón que tiene forma rectangular están a razón 3:4.

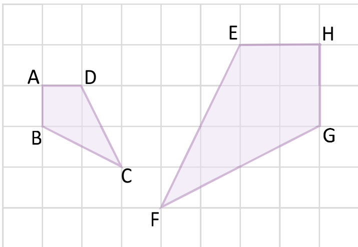
   a) Si el salón mide 8 m de largo, ¿cuánto mide el ancho? Ancho = 6 m

   b) Se colocará piso de cerámica en el salón. Si cada baldosa de cerámica tiene un área de 0.25 m^2 y un costo de $2.00, ¿cuánto costará colocar cerámica en todo el piso? $384

2. La Asamblea Legislativa de El Salvador decretó en la Ley de Símbolos Patrios, que las dimensiones de la bandera magna nacional son 3.35 m de largo por 1.89 m de ancho. Julia elabora versiones reducidas de la bandera, con un ancho de 20 cm. ¿Cuál es la medida del largo de la bandera elaborada por Julia, si tanto su versión como la original son semejantes? Encuentra la respuesta en cm hasta las décimas. largo = 35.4 cm

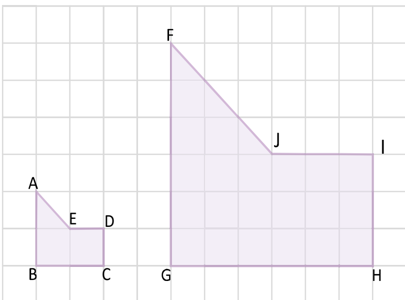
Las dimensiones de las banderas deben estar ambas en cm o en m.

3. Verifica que los cuadriláteros ABCD y HGFE son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



Razón: 1 : 2

4. Verifica que los polígonos ABCDE y FGHIJ son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



Razón: 1 : 3

5. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 2:3.

Indicador de logro

1.7 Resuelve problemas que involucren la semejanza de figuras.

Solución de algunos ítems:

1. Dado que ancho y largo están a razón 3 : 4, se cumple:

$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Largo}} = \frac{3}{4}$$

a) Si el largo = 8 m, entonces:

$$\frac{\text{Ancho}}{8 \text{ m}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Ancho} = \frac{3}{4}(8 \text{ m})$$

$$\text{Ancho} = 6 \text{ m}$$

b) Ancho = 6 m y Largo = 8 m, por tanto el área del terreno es

$6 \times 8 = 48$ m^2.

El área de cada baldosa es de 0.25 m^2, luego

48 m^2 ÷ 0.25 m^2 = 192.

Significa que se necesitan 192 baldosas para cubrir el piso.

Además, 2 × 192 = 384. Por tanto, para cubrir el piso de cerámica se necesitan $384.

Utilizar calculadora únicamente para resolver el ítem b.

2. Como ambas versiones son semejantes, sus lados son proporcionales y debe cumplirse que:

$$\frac{3.35 \text{ m}}{1.89 \text{ m}} = \frac{\text{largo}}{20 \text{ cm}}$$

Pasando todo a centímetros.

$$\frac{335 \text{ cm}}{189 \text{ cm}} = \frac{\text{largo}}{20 \text{ cm}}$$

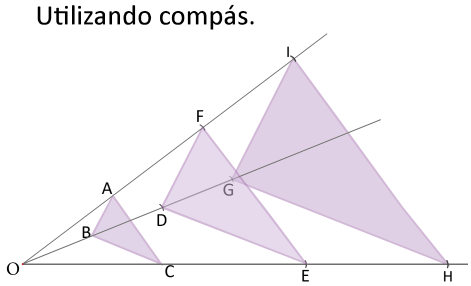
$$\text{largo} = \frac{335}{189} \times 20$$

$$= \frac{6\,700}{189}$$

$$= 35.4 \text{ cm}$$

5. Ejemplo de solución.

Utilizando compás.



En la figura, los triángulos DEF y GHI son homotéticos y están a razón 2 : 3.

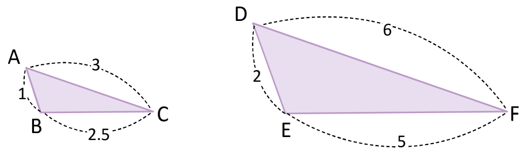
Tarea: página 106 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Semejanza de triángulos

2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF de la figura tienen sus lados proporcionales, a razón 1:2. ¿Son semejantes?



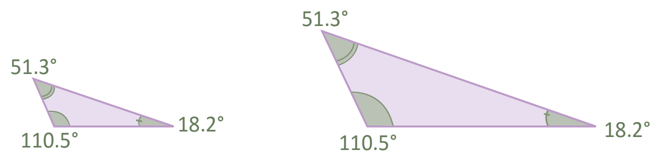
Para medir los ángulos del triángulo utiliza la figura que se encuentra en las páginas adicionales del libro.

S

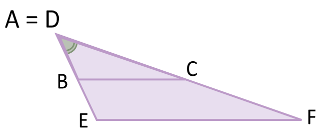
Los lados de ambos triángulos son proporcionales. Debe verificarse si sus ángulos correspondientes son congruentes; esto puede hacerse de las siguientes maneras:

1. Con un transportador, mide los ángulos de cada triángulo:

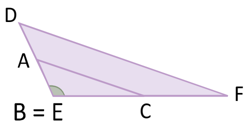
∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F



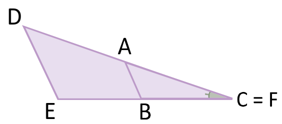
2. Sobrepone los triángulos y compara cada vértice:



∢A = ∢D



∢B = ∢E



∢C = ∢F

En los dos casos se verifica que los ángulos correspondientes de ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto, ΔABC ~ ΔDEF.

C

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

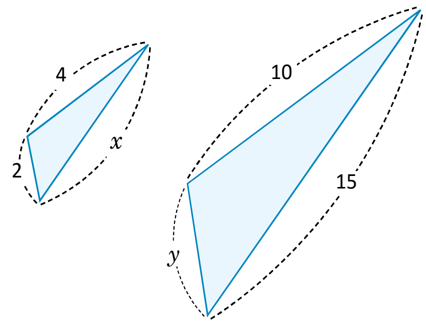
Criterio LLL:
Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces también son semejantes.
Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF del Problema inicial tienen sus lados correspondientes proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, ΔABC y ΔDEF son semejantes.

E

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos sean semejantes?



Según el resultado descrito en la conclusión, para que los triángulos sean semejantes bastaría con que sus lados sean proporcionales, es decir: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$.

Se calcula el valor de x:

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

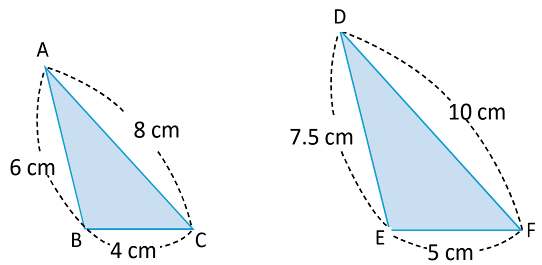
Se calcula el valor de y:

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Por lo tanto, los valores de x y y deben ser 6 y 5 respectivamente.

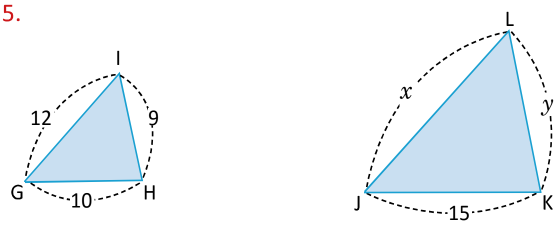
1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes. En caso de que lo sean calcula la razón de semejanza.



Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

2. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes?

$x = 18$ y $y = 13.5$.



Unidad 5

Indicador de logro

2.1 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio, “lados correspondientes proporcionales”.

Secuencia

En la lección anterior se definieron los conceptos de razón y proporción entre segmentos, utilizándose luego para definir formalmente que dos figuras son semejantes si sus segmentos correspondientes son proporcionales y si sus ángulos correspondientes son iguales, se construyen además figuras semejantes, haciendo uso de regla y compás.

En esta lección se reduce el estudio únicamente a los triángulos, analizando los tres criterios que una pareja de triángulos debe cumplir para que ambos sean semejantes, para esta clase se estudia el criterio **lados correspondientes proporcionales**, comúnmente conocido como **LLL**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Verificar que dos triángulos que tienen sus lados proporcionales son semejantes. Se debe recordar de las clases anteriores que cualquier figura semejante cumple tener sus lados proporcionales y sus ángulos correspondientes congruentes, de esta forma en el problema solo bastará verificar que los ángulos son congruentes.

Lo importante es recordar de la conclusión, que basta con que los tres lados correspondientes sean proporcionales y utilizar este hecho para encontrar los valores de ambas variables ya que existe la razón $\frac{4}{10}$ que permite realizar esto.

Solución de algunos ítems:

1.
Encontrando el valor de razón entre los lados proporcionales.

$$\frac{BC}{EF} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{7.5} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$$

De esta forma, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$. Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

2.
Si los triángulos son semejantes, debe cumplirse que: $\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL} = \frac{IG}{LJ}$

Luego, $\frac{10}{15} = \frac{9}{y} = \frac{12}{x}$

Tomando cada igualdad.

$$\frac{10}{15} = \frac{9}{y}$$
$$10y = 15 \times 9$$
$$y = \frac{135}{10} = 13.5$$

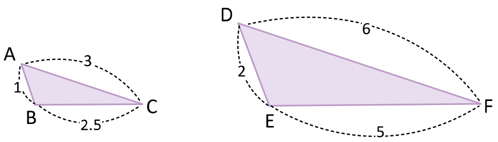
Además, $\frac{10}{15} = \frac{12}{x}$

$$10x = 15 \times 12$$
$$x = \frac{180}{10} = 18$$

Por tanto, $x = 18$ y $y = 13.5$.

Fecha: **U5 2.1**

Ⓟ

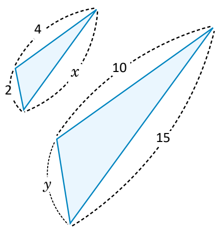


Se cumple: Lados proporcionales.
A razón 1 : 2.
Verificar si son semejantes.

Ⓢ Al medir con un transportador resulta que $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

En los triángulos:
Los lados son proporcionales.
Los ángulos correspondientes son iguales.
Por tanto, son semejantes.

Ⓔ Si son semejantes, debe cumplirse que: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$



Calculando x:
$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = \left(\frac{4}{10}\right)15$$
$$x = 6$$

Calculando y:
$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$4y = 2 \times 10$$
$$y = \frac{20}{4}$$
$$y = 5$$

Ⓡ 1. Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

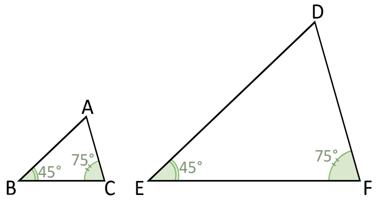
Tarea: página 107 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos

P

En los triángulos ABC y DEF: ∢B = ∢E y ∢C = ∢F. ¿Cuál es la medida de ∢A y ∢D? ¿Son ambos triángulos semejantes?

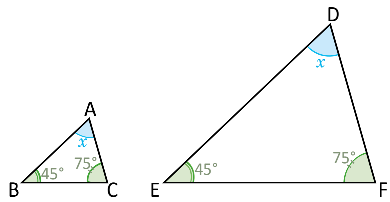


Los ángulos internos de todo triángulo suman 180°, y para que dos triángulos sean semejantes deben tener sus lados correspondientes proporcionales, y sus ángulos correspondientes congruentes.

S

Se denota por x la medida del tercer ángulo, que es igual en ambos triángulos. Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° – 120°$$
$$x = 60°$$



Por lo tanto, la medida del tercer ángulo en ambos triángulos es 60°.

Ahora mide con una regla las longitudes de los lados de cada triángulo que dibujaste en tu cuaderno y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales.

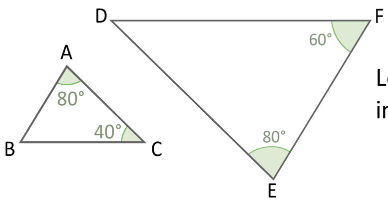
C

Criterio AA:
Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

E

¿Son semejantes los triángulos mostrados en la figura? Justifica tu respuesta.

Calcula el valor del tercer ángulo en alguno de ellos.



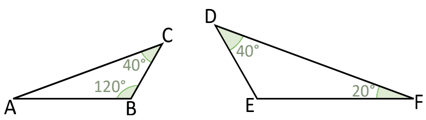
Los ángulos ∢A y ∢E son congruentes. Por propiedad de los ángulos internos de un triángulo:

$$∢A + ∢B + ∢C = 180°$$
$$∢B = 180° – 120°$$
$$∢B = 60°$$

Entonces, ∢B y ∢F son congruentes. Por el segundo criterio de semejanza de triángulos, ΔABC ~ ΔEFD.

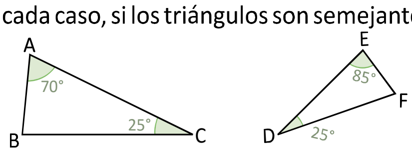
1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina, en cada caso, si los triángulos son semejantes.

a)



ΔABC ~ ΔDEF

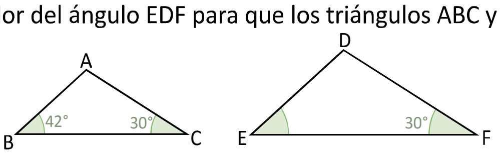
b)



ΔABC ~ ΔFED

2. ¿Cuál debe ser el valor del ángulo EDF para que los triángulos ABC y DEF sean semejantes?

∢EDF = 108°



Indicador de logro

2.2 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio “dos ángulos correspondientes congruentes”.

Secuencia

Utilizando la definición obtenida en la lección anterior para figuras semejantes, se analizarán los criterios para semejanza de triángulos. Así, en la clase 2.1 se analiza cuando los tres lados de los triángulos son proporcionales y para esta clase se estudia el criterio, cuando dos de los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Como los dos ángulos correspondientes son iguales, la medida del ángulo faltante será la misma para ambos triángulos pues la suma de los ángulos internos siempre es 180°, el alumno debe medir los lados correspondientes y comparar las razones para evidenciar que el último criterio para la semejanza de las figuras se cumple.

Ⓔ Al encontrar el ángulo ∢B faltante de ΔABC se observa que existen dos ángulos correspondientes que son congruentes y aplicando el criterio descrito en la Conclusión se tiene que los triángulos son semejantes.

Solución de algunos ítems:

1. a)
Los ángulos ∢C = ∢D son congruentes. Encontrando otro ángulo correspondiente congruente para que se cumpla el criterio de semejanza:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 160°$$
$$\sphericalangle A = 20°$$

Por el segundo criterio de semejanza:
ΔABC~ ΔDEF.

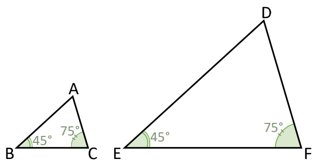
2.
En el ΔABC:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 72°$$
$$\sphericalangle A = 108°$$

Como el ∢A es correspondiente con el ∢D. Para que ΔABC ~ ΔDEF necesariamente debe ser ∢D = 108°.

Fecha: **U5 2.2**

Ⓟ



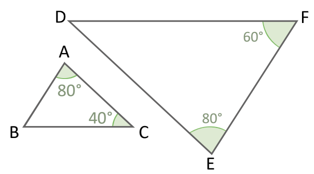
Ⓢ Encuentra ∢A y ∢D:
Verifica si los triángulos son semejantes.

Denotando por x la medida del tercer ángulo.

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$

Mide con una regla y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales. Por tanto, ΔABC ~ ΔDEF.

Ⓔ



Verificando que son semejantes:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 120°$$
$$\sphericalangle A = 60°$$

Como ∢A = ∢E y ∢B = ∢F. Por el segundo criterio de semejanza ΔABC ~ ΔEFD.

Ⓡ 1. a) Son semejantes.
b) Son semejantes.
2. ∢D = 108°

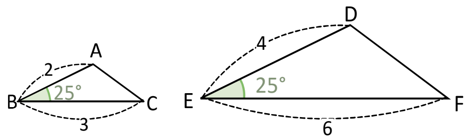
Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este ángulo son proporcionales a razón 1:2. ¿Son semejantes?

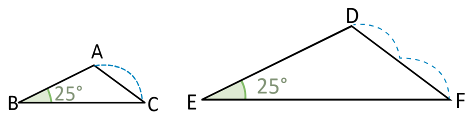


Utiliza regla (o compás) para calcular la razón entre $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$.

S

Con un compás se toma la medida del lado CA y se verifica (comparando con FD) que $\overline{CA}$ es la mitad de $\overline{FD}$.
Luego:

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$



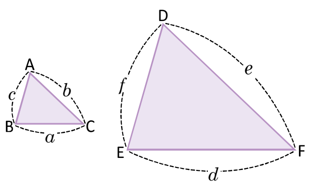
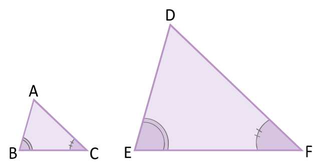
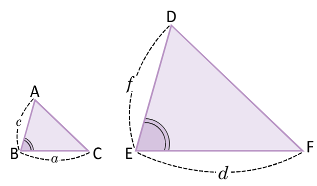
Es decir, los triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales. Por el primer criterio de semejanza, ΔABC ~ ΔDEF.

C

Criterio LAL:
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

A continuación, se resumen los tres criterios de semejanza de triángulos:

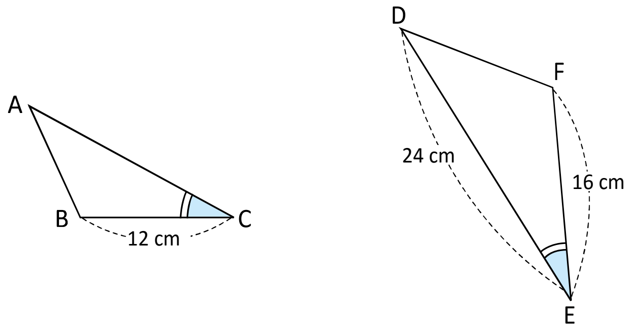
Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si cumplen al menos una de las siguientes condiciones:

1. Sus lados correspondientes son proporcionales (criterio LLL).	2. Dos pares de ángulos correspondientes son congruentes (criterio AA).	3. Un par de ángulos correspondientes es congruente y los lados adyacentes son proporcionales (criterio LAL).
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 ∢B = ∢E ∢C = ∢F	 ∢B = ∢E $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

Unidad 5

E

En los siguientes triángulos, los ángulos C y E son congruentes, ¿cuál debe ser la longitud del lado CA para que el ΔABC sea semejante al ΔDFE?



Como ya tienen un par de ángulos correspondientes congruentes (∢C y ∢E) entonces, para que sean semejantes, los lados adyacentes a estos ángulos deben ser proporcionales, es decir:

Se sustituyen los valores para encontrar CA: $\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$

$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$

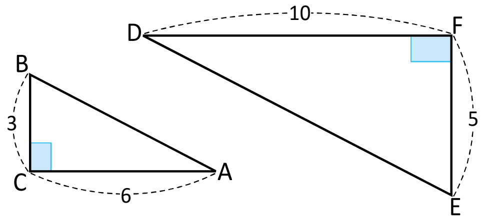
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$

$$CA = 18$$

Por lo tanto, la longitud del lado CA debe ser 18 cm para que los triángulos ABC y DFE sean semejantes.

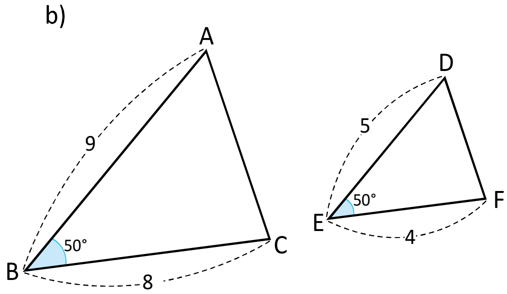
1. Usando el criterio LAL, determina si los siguientes triángulos son semejantes:

a)



Son semejantes

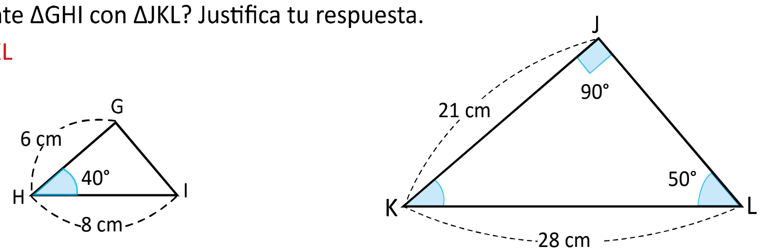
b)



No son semejantes

2. ¿Es semejante ΔGHI con ΔJKL? Justifica tu respuesta.

ΔGHI ~ ΔJKL



Indicador de logro

2.3 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio “un ángulo correspondiente congruente y lados adyacentes proporcionales”.

Secuencia

En la clase 2.1 y 2.2 se han estudiado dos criterios de semejanza de triángulos, utilizando la definición de figuras semejantes vista en la lección anterior. En la solución del Problema inicial se utiliza el primer criterio de semejanza, esto permite establecer el tercer criterio “cuando dos lados son proporcionales y el ángulo correspondiente es congruente”.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es que el estudiante note que al existir dos lados correspondientes proporcionales, basta con averiguar si el tercer lado también es proporcional a estos, para establecer que son semejantes a través del primer criterio de semejanza. Para verificar, se propone utilizar un compás, con la abertura del mismo se mide AC y se verifica que esta abertura cabe exactamente dos veces en el lado DF. También puede utilizarse una regla para medir las distancias y luego comparar el valor de razón.

Ⓔ Al igual que en clases anteriores, puede utilizarse **LAL**, “Lado - Ángulo - Lado” para memorizar fácilmente este criterio.

Solución de algunos ítems:

1. a)
En los triángulos $\measuredangle C = \measuredangle F$.

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Luego,

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Por tanto, por el tercer criterio de semejanza $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Solución:
Para el triángulo JKL.

$$\measuredangle J + \measuredangle K + \measuredangle L = 180°$$
$$\measuredangle K = 180° - 140°$$
$$\measuredangle K = 40°$$

Entonces, $\measuredangle K = \measuredangle H$, y para los lados adyacentes se tiene:

$$\frac{GH}{JK} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$
$$\frac{HI}{KL} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Luego,

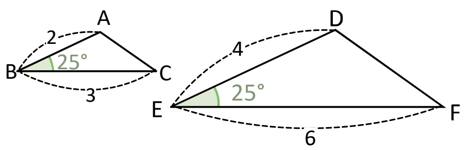
$$\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL}$$

Por tanto, por el tercer criterio de semejanza $\Delta GHI \sim \Delta JKL$.

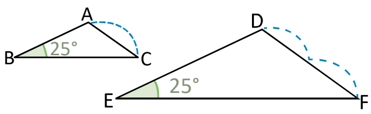
Posibles dificultades:
En el ejemplo, los triángulos han sido rotados por lo que puede ser difícil encontrar los lados correspondientes. En este caso se puede imaginar que los triángulos se sobreponen uno sobre otro, de forma que un lado quede sobre otro.

Fecha: **U5 2.3**

Ⓟ En la figura $\measuredangle B = \measuredangle E$ y los lados adyacentes son proporcionales.



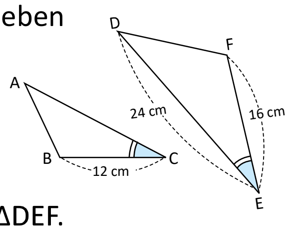
Ⓢ Tomando la medida de CA se tiene que:
$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}.$$
Luego, los lados son proporcionales y por el primer criterio de semejanza $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Ⓔ Como $\measuredangle C = \measuredangle E$, y los lados adyacentes deben ser proporcionales:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$
$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$
$$CA = 18$$

Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



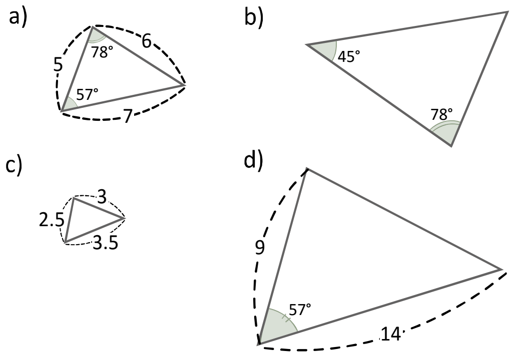
Ⓡ 1. a) Son semejantes.
b) No son semejantes.

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Practica lo aprendido

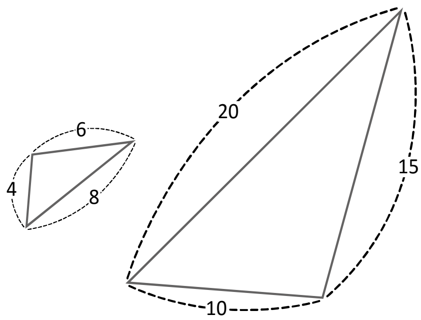
1. Determina cuáles de los siguientes triángulos son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste.

Las figuras a), b) y c) son semejantes.



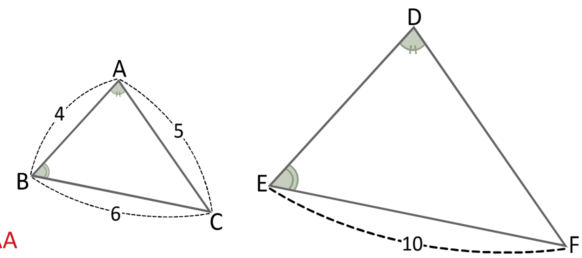
2. Verifica que los triángulos de la figura son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste y la razón de semejanza.

Los triángulos son semejantes y la razón entre ellos es 2 : 5



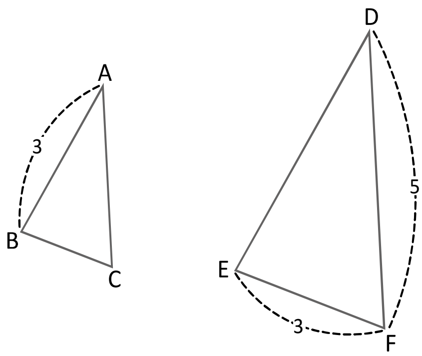
3. En la figura ∢A = ∢D y ∢B = ∢E
   a) ¿Cuál criterio puedes utilizar para justificar que los triángulos son semejantes?
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?

   a) Por el segundo criterio de semejanza AA
   b) DE = $\frac{20}{3}$



4. Los triángulos ABC y DEF son semejantes, a razón 2:3 ¿Cuáles son las medidas de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DE}$?

BC = 2, AC = $\frac{10}{3}$, ED = $\frac{9}{2}$



Indicador de logro

2.4 Resuelve problemas utilizando los criterios de semejanza de triángulos.

Solución de algunos ítems:

1.
En a), conociendo el último ángulo. Si le llamamos x, se cumple:

$$57° + 78° + x = 180°$$
$$x = 180° - 135°$$
$$x = 45°$$

Luego, por el criterio AA los triángulos en a) y b) son semejantes.

Para a) y c), los lados correspondientes son proporcionales con razón 1 : 2. Por tanto, por el primer criterio LLL, estos triángulos también son semejantes.

Como la figura en a) es semejante con c), sus ángulos correspondientes son congruentes. Por tanto, por el segundo criterio AA**,** las figuras b) y c) son semejantes.

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

3.
a) Como ∢A = ∢D y ∢B = ∢E, por el segundo criterio de semejanza AA, los triángulos son semejantes.

b) La razón entre BC y EF es 3 : 5. Por tanto debe cumplirse:

$$\frac{4}{DE} = \frac{3}{5}$$
$$DE = (5)\frac{4}{3}$$
$$DE = \frac{20}{3}$$

4.
Como son semejantes y están a razón 2 : 3, debe cumplirse:

$$\frac{BC}{3} = \frac{2}{3}$$
$$BC = 2$$

también $\frac{AC}{5} = \frac{2}{3}$

$$AC = \frac{10}{3}$$

también $\frac{3}{ED} = \frac{2}{3}$

$$ED = \frac{9}{2}$$

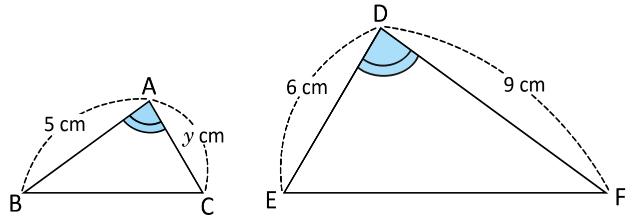
Por tanto,

BC = 2, AC = $\frac{10}{3}$, ED = $\frac{9}{2}$.

Lección 2

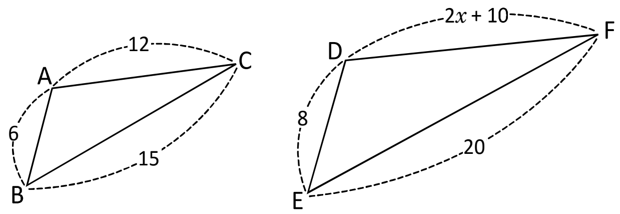
2.5 Practica lo aprendido

1. Los triángulos ABC y DFE cumplen ∢A = ∢D. Determina el valor de y de modo que los dos triángulos sean semejantes.



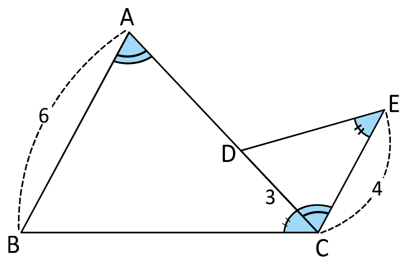
2. ¿Cuál debe ser el valor de x para que se cumpla ΔABC ~ ΔDEF?

   $x = -\frac{1}{2}$

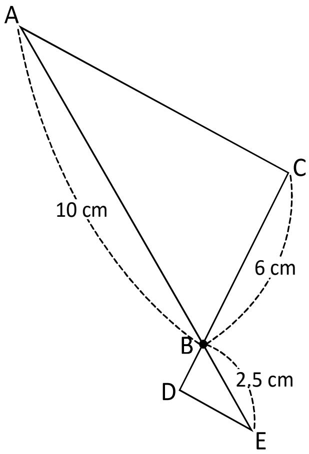


3. Calcula la longitud de $\overline{AD}$ si ∢BAC = ∢ECD y ∢ACB = ∢DEC.

   $\overline{AD} = 5$

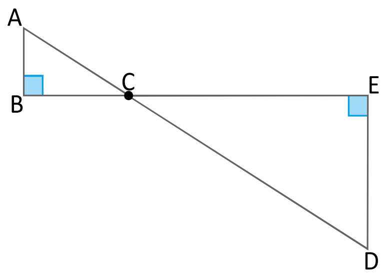


4. En la figura, los segmentos AC y DE son paralelos.
   a) Utiliza criterios de semejanza para comprobar que los triángulos ABC y EBD son semejantes.
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$? $BD = \frac{3}{2}$



5. ¿Son semejantes los triángulos ABC y DEC? Justifica tu respuesta.

   ΔABC ~ ΔDEC



Indicador de logro

2.5 Resuelve problemas utilizando los tres criterios de semejanza de triángulos.

Solución de algunos ítems:

1.
Los lados correspondientes son:
AB con DF, AC con DE y BC con FE.

También $\frac{AB}{DF} = \frac{5}{9}$.

Luego, $\frac{y}{6} = \frac{5}{9}$

$y = \frac{5}{9}(6)$

$y = \frac{10}{3}$

2.
Se tiene que: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{4}$.

Se cumple, $\frac{2x + 10}{12} = \frac{3}{4}$

$2x + 10 = 9$

$x = -\frac{1}{2}$

3.
Como ∢BAC = ∢ECD y ∢ACB = ∢DEC los triángulos son semejantes, por el segundo criterio de congruencia AA.

$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{AC} = \frac{1}{2}$

AC = 8

Además, AD = AC – DC = 8 – 3 = 5

Por tanto, AD = 5

4.
a) ∢ABC = ∢EBD por ser opuestos por el vértice.
∢BDE = ∢BCA por ser alternos internos entre paralelas. Luego por el segundo criterio AA, los triángulos ABC y EBD son semejantes.

b) Dado que son semejantes, se cumple:

$\frac{BD}{6} = \frac{2.5}{10}$

$BD = \frac{3}{2}$

5.
Ambos triángulos cuentan con un ángulo de 90°.
Además, ∢BCA = ∢ECD. Por ser opuestos por el vértice.
Luego, por el segundo criterio de semejanza AA, ΔABC ~ ΔDEC.

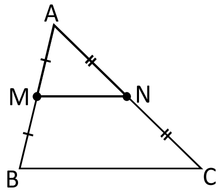
Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3 Semejanza y paralelismo

3.1 Teorema de la base media, parte 1

P

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CA respectivamente. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces AM = $\frac{1}{2}$ AB y NA = $\frac{1}{2}$ CA.

S

En los triángulos AMN y ABC:

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente).

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (criterio LAL).

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos NMA y CBA son ángulos correspondientes entre paralelas).

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

Por lo tanto, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$BC.

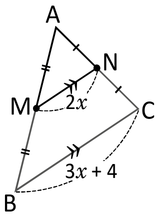
C

Teorema de la base media: El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

Unidad 5

E

¿Cuál es el valor de la incógnita x, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente?



Cuando dos segmentos son paralelos se coloca el símbolo ›› sobre los segmentos.

Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Se sustituyen los valores de los segmentos y se despeja la incógnita x:

$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

Por lo tanto, el valor de x es 4.

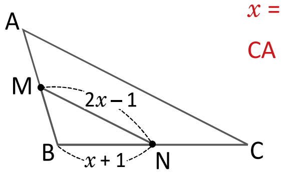
En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

a) Calcula el valor de x si BC = 8 cm.

b) ¿Cuál es la longitud del lado CA?

$x = 3$

CA = 10



Indicador de logro

3.1 Aplica el teorema de la base media para calcular las longitudes de segmentos.

Secuencia

En la lección 1 se analizaron las condiciones que deben cumplir dos figuras para que sean semejantes, a partir de ellas, en la lección 2 se estudiaron los criterios para que dos triángulos sean semejantes. Para esta lección se utilizan los criterios de semejanza para demostrar algunos teoremas y resultados importantes de la geometría.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el tercer criterio de semejanza de triángulos LAL para demostrar el teorema de la base media.

En la solución, se escriben paso a paso los elementos de la demostración y a un lado, encerrado entre paréntesis se escribe la justificación de este paso.

Ⓒ Lo esencial es identificar que se cumple la hipótesis del teorema de la base media, ya que el segmento MN une los puntos medios de los lados, entonces al aplicarse este teorema, lo que resulta es una ecuación lineal que da el valor de x.

Solución de algunos ítems:

a) Si BC = 8 entonces BN = 4 (Dado que N es punto medio de BC).
Como BN = 4 entonces $x = 3$.

b) CA = 2NM
$= 2(2x - 1)$
$= 4x - 2$
$= 4(3) - 2$
$= 10.$

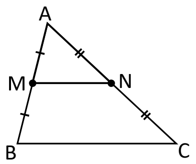
Por tanto, CA = 10.

Posibles dificultades:
Puede que el estudiante no recuerde los pasos de una demostración formal o se le dificulte identificar la hipótesis y conclusión en un enunciado. En este caso, puede utilizar una clase para reforzar este contenido; preferiblemente utilizar las clases 2.5 y 2.6 de la Unidad 4 de octavo grado.

Fecha: **U5 3.1**

Ⓟ M y N son los puntos medios de AB y CA. Justifica que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y que MN = $\frac{1}{2}$BC.

Utiliza semejanza de triángulos.



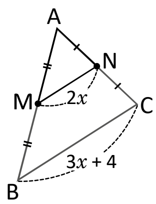
Ⓢ $\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (My N son puntos medios)
∢MAN = ∢BAC
ΔAMN~ΔABC (LAL)
∢NMA = ∢CBA (por la semejanza)
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (por ángulos correspondientes)
$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza)

Por tanto, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

Ⓔ Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, calcula el valor de x.

Se tiene que: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

$\frac{2x}{3x + 4} = \frac{1}{2}$
$4x = 3x + 4$
$x = 4$



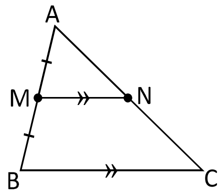
Ⓡ a) $x = 3$
b) CA = 10

Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Teorema de la base media, parte 2

P

En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. A partir de M se traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$ que corta al lado $\overline{CA}$ en el punto N. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que N es el punto medio de $\overline{CA}$ y $MN = \frac{1}{2}BC$.



S

En los triángulos AMN y ABC:

$\measuredangle MAN = \measuredangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\measuredangle NMA = \measuredangle CBA$ (ángulos correspondientes entre paralelas).

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (Criterio AA)

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (M es el punto medio de $\overline{AB}$)

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

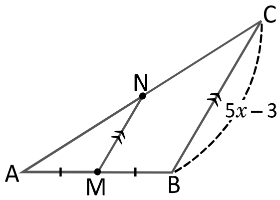
Por lo tanto, N es el punto medio de $\overline{CA}$ y $MN = \frac{1}{2}BC$.

C

Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a un segundo lado, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralela.

E

Calcula el valor de x, si M es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = 3.5$.



Si M es punto medio $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores correspondientes en lo anterior y despejando x:

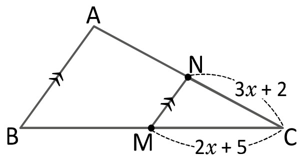
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

Por lo tanto, el valor de x es 2.

En el triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$.

a) Calcula el valor de x si CA = 10 cm. $x = 1$

b) ¿Cuál es la longitud del lado BC? BC = 16



Indicador de logro

3.2 Aplica una variante del teorema de la base media para encontrar la longitud de segmentos.

Secuencia

La diferencia de esta clase con la anterior está en las hipótesis del teorema, en la clase 3.1 las hipótesis eran los puntos medios M y N, para esta clase, las hipótesis son: un punto medio M y el segmento paralelo. Lo importante es saber identificar las hipótesis y aplicar los resultados del teorema.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el segundo criterio de semejanza de triángulos para demostrar el teorema de la base media.

En este caso, lo esencial es identificar que existen dos ángulos congruentes, uno de ellos gracias al paralelismo entre rectas.

Ⓒ Hay que comprender que es posible aplicar el teorema de la base media ya que se cumplen las dos condiciones descritas en la Conclusión.

Solución de algunos ítems:

a) Como M es el punto medio de BC se cumple que:

$$\frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3x + 2}{10} = \frac{1}{2}$$
$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

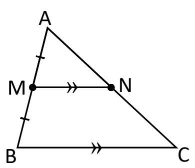
b) Como $x = 1$, MC = 7.

También se cumple que:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{7}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$BC = 14$$

Fecha: **U5 3.2**

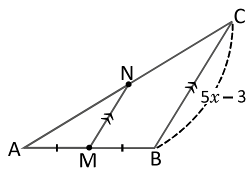
Ⓟ M es punto medio de AB y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.
Demuestra que N es punto medio de CA y MN = $\frac{1}{2}$BC.



Ⓢ ∢MAN = ∢BAC (es compartido).
∢NMA = ∢CBA (son correspondientes).
ΔAMN~ ΔABC (criterio AA).
$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$
Por tanto, N es punto medio y MN = $\frac{1}{2}$BC.

Ⓔ Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = 3.5, calcula el valor de x.
Por el Teorema de la base media se tiene que

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3.5}{5x - 3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$10 = 5x$$
$$x = 2$$



Ⓡ a) $x = 1$
b) BC = 14

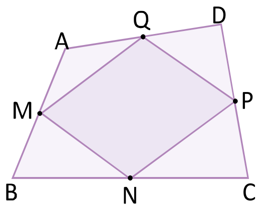
Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero

P

ABCD es un cuadrilátero y M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Utilizando el teorema de la base media justifica que MNPQ es paralelogramo.



Traza las diagonales del cuadrilátero.

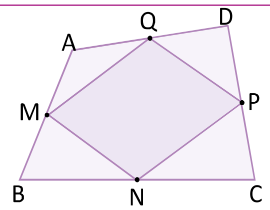
S

Se traza la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero:

$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media).

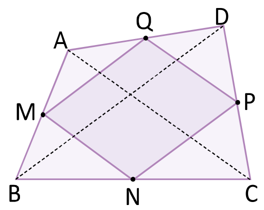
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media).

Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.



De forma similar se llega a $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, al trazar la diagonal $\overline{AC}$ del trapecio.

Por lo tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNPQ es paralelogramo.

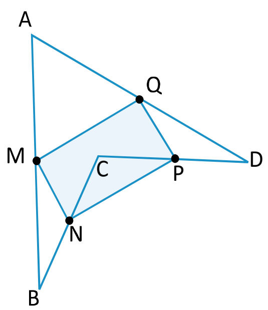


C

Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Demuestra que MNPQ es un paralelogramo.



El cuadrilátero ABCD del ejercicio se llama **cuadrilátero cóncavo**, ya que posee un ángulo mayor a 180° (∢DCB).

Unidad 5

Indicador de logro

3.3 Demuestra que los puntos medios de un cuadrilátero cóncavo forman un paralelogramo.

Secuencia

En las dos clases anteriores se estudió cómo aplicar el teorema de la base media, luego de identificar el cumplimiento de ciertas hipótesis. Para esta clase se utiliza dicho teorema para demostrar otro teorema importante que involucra un cuadrilátero y sus puntos medios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo indispensable es identificar que se cumplen las hipótesis del teorema de la base media, los dos puntos medios, por tanto la recta que pasa por ellos es paralela al tercer lado. Se debe tomar en cuenta la pista para que la solución sea más sencilla.

Ⓒ El resultado recibe el nombre de **Teorema de Varignon** y es aplicable para cualquier tipo de cuadriláteros, ya sean cóncavos o convexos.

Solución de algunos ítems:

Se traza la diagonal $\overline{BD}$.
$\overline{NP} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{BD} \parallel \overline{MQ}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

Se traza la diagonal $\overline{AC}$.
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.

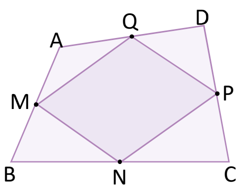
Por tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$, el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

Posibles dificultades:
Si es necesario, se debe recordar la definición de paralelogramo en un momento breve al principio de la clase.

Fecha: **U5 3.3**

Ⓟ En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios. Justifica que MNPQ es un paralelogramo.

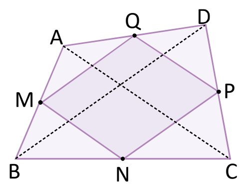
Traza las diagonales de ABCD.



Ⓢ Se traza la diagonal $\overline{BD}$.
$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

Se traza la diagonal $\overline{AC}$.
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$
$\overline{AC} \parallel \overline{QP}$

Entonces:
$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$



Por lo tanto; como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNQP es paralelogramo.

Ⓡ Trazar la diagonal $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ y utilizar el teorema de la base media.

Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

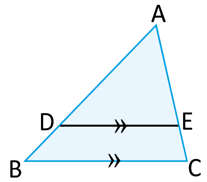
Lección 3

3.4 Semejanza utilizando segmentos paralalelos, parte 1

P

En el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$).
¿Son semejantes los triángulos ADE y ABC? Justifica tu respuesta.

¿Cuál criterio de semejanza de triángulos puedes utilizar?



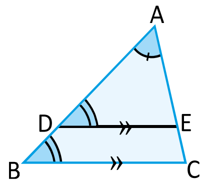
S

En los triángulos ADE y ABC:

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (ángulos correspondientes entre paralelas).

Por lo tanto, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (criterio AA).

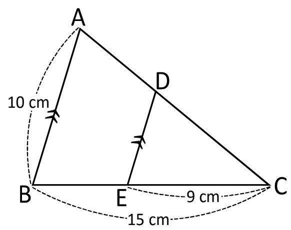


C

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original y se tiene que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

E

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB, ¿cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



Si el segmento DE es paralelo al lado AB, entonces, por el resultado anterior los triángulos DEC y ABC son semejantes. Luego:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

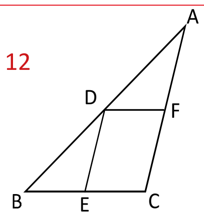
Se sustituyen los valores de AB, EC y BC en lo anterior: $\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

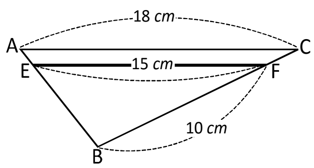
Por lo tanto, la longitud de $\overline{DE}$ es 6 cm.

$$DE = 6$$

1. En el triángulo ABC: $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.
   a) ¿Qué triángulos de los que se forman son semejantes entre sí? BC = 12
   b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$



2. En el triángulo ABC, FE es paralelo al lado CA, ¿cuál es la longitud del lado BC? $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$
   $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$



Indicador de logro

3.4 Calcula las longitudes de segmentos usando el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

Secuencia

Desde la clase 3.4 hasta la clase 3.7 se estudian dos teoremas importantes sobre la proporción y paralelismo de segmentos en triángulos, estos teoremas son necesarios para poder enunciar el teorema sobre la proporcionalidad y paralelismo, usualmente conocido con el nombre de **Teorema de Thales**, este es el resultado más importante de esta lección y se utilizará en Bachillerato.
Hay que notar que el teorema de la base media es un caso especial de estos teoremas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo indispensable es identificar que se cumplen las hipótesis del teorema de la base media, los dos puntos medios, por tanto la recta que pasa por ellos es paralela al tercer lado. Se debe tomar en cuenta la pista para que la solución sea más sencilla.

Ⓒ Como los triángulos son semejantes se cumple la proporción entre sus lados. De esta forma, puede agregarse una igualdad más, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, sin embargo, en futuros resultados solo se utilizarán las dos primeras igualdades.

Solución de algunos ítems:

1. a)
Como $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$: $\Delta ABC \sim \Delta ADF$.
Como $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.
Como $\overline{DF} \parallel \overline{BE}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$: $\Delta ADF \sim \Delta DBE$.

b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

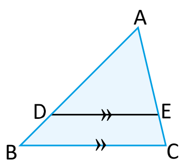
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$

2.
Como $\overline{FE} \parallel \overline{CA}$: $\Delta ABC \sim \Delta EBF$.
Luego,

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$$
$$\frac{10}{BC} = \frac{15}{18}$$
$$BC = \frac{180}{15}$$
$$BC = 12 \text{ cm}$$

Fecha: **U5 3.4**

Ⓟ En ΔABC $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. ¿Son semejantes ΔABC y ΔADE?

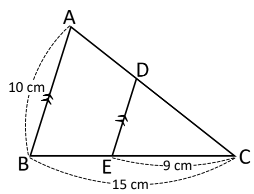


Ⓢ En ΔABC y ΔADE se cumple:
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido)
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (ángulos correspondientes)

Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Ⓔ En ΔABC, DE ∥ AB. ¿Cuánto mide $\overline{DE}$?
Por el resultado anterior $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$
$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$
$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$DE = 6 \text{ cm}$$



Ⓡ 1.
a) $\Delta ABC \sim \Delta ADF$
$\Delta ABC \sim \Delta DBE$
$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{EC}$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

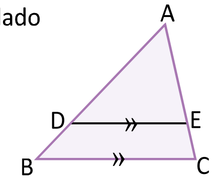
2. BC = 12 cm

Tarea: página 115 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2

P

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado BC. Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



Sustituye AB por AD + DB y AC por AE + EC.

S

Por el resultado de la clase anterior se tiene que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ Sustituir AB por AD + DB y AC por AE + EC,

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ restando 1 de ambos lados,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ tomando el recíproco de ambos lados.

Las siguientes proposiciones son equivalentes (una implica las otras):

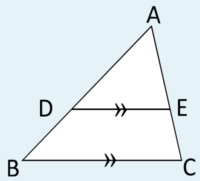
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

C

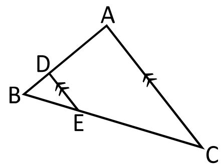
Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

En el ΔABC, si DE||BC entonces se tiene que

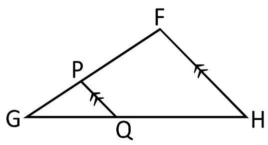
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ en el triángulo ABC, si BD = 4 cm, DA = 10 cm y BE = 6 cm.
   EC = 15



2. En el triángulo FGH $\overline{PQ} \parallel \overline{FH}$. Calcula la longitud del lado FG, si PG = 6 cm, GQ = 8 cm y QH = 12 cm.
   FG = 15



Unidad 5

Indicador de logro

3.5 Aplica el teorema de la base media para calcular las longitudes de segmentos.

Secuencia

En la clase 3.4 se estudió que en cualquier triángulo, un segmento paralelo a uno de los lados forma con los otros dos un triángulo semejante y se puede establecer una relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo. Para esta clase, se establece el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo, para ello se utiliza el resultado visto en la clase anterior, este teorema se utilizará nuevamente en la clase 3.8 para establecer otro teorema importante.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se trata de que el alumno observe que se cumplen las hipótesis del resultado de la clase anterior, para que así pueda utilizarlo.

Observación: Es necesario recordar que el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Ⓒ Además de lo establecido anteriormente, el teorema también establece, la proporción de los segmentos que quedan delimitados por los segmentos paralelos.

Solución de algunos ítems:

1.
Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

En los ítems anteriores, el estudiante debería justificar el uso del teorema, a partir de que se cuenta con dos segmentos paralelos, es decir, el cumplimiento de la hipótesis.

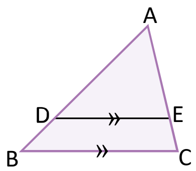
2.
Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{FG}{PG} = \frac{HG}{QG}$$
$$\frac{FG}{6} = \frac{20}{8}$$
$$FG = \frac{120}{8}$$
$$FG = 15 \text{ cm}$$

También se puede utilizar $\frac{GP}{PF} = \frac{GQ}{QH}$.

Fecha: **U5 3.5**

Ⓟ En la figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$.



Ⓢ Por el resultado de la clase anterior:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$$
$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \quad \text{Sustituir AD y AC}$$
$$1 + \frac{AD}{DB} = 1 + \frac{EC}{BE}$$
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \quad \text{Restando 1}$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{Por el recíproco}$$

Ⓡ 1. Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{DE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

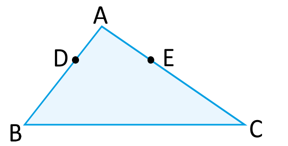
2. FG = 15 cm

Tarea: página 116 del Cuaderno de Ejercicios.

3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1

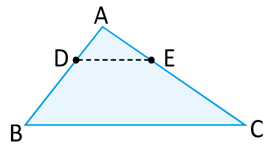
P

En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Se traza $\overline{DE}$ para formar el triángulo ADE.



En los triángulos ADE y ABC:

$\sphericalangle$DAE = $\sphericalangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (lo indica el enunciado del problema).

ΔADE ~ ΔABC (criterio LAL).

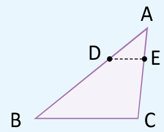
$\sphericalangle$EDA = $\sphericalangle$CBA (por la semejanza de los triángulos ADE y ABC).

$\overline{DE}$ || $\overline{BC}$ (los ángulos EDA y CBA son ángulos correspondientes).

Por lo tanto, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

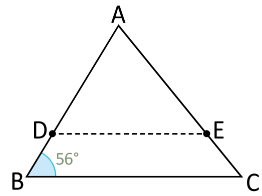
C

Dado un triángulo ABC, si D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE}$ || $\overline{BC}$.



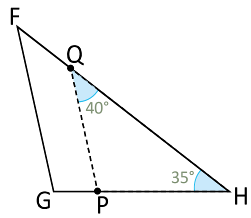
1. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre los lados AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. ¿Cuál es la medida del $\sphericalangle$EDA? Justifica tu respuesta.

   $\sphericalangle$EDA = 56°



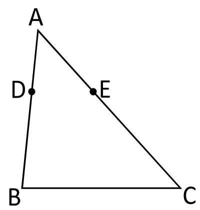
2. En el triángulo FGH, los puntos P y Q están sobre los lados HG y HF respectivamente, y satisfacen $\frac{HP}{HG} = \frac{HQ}{HF}$, ¿cuál es la medida del $\sphericalangle$HGF? Justifica tu respuesta.

   $\sphericalangle$HGF = 105°



3. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Comprueba que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

   Sustituye DB por AB – AD y EC por AC – AE



Indicador de logro

3.6 Calcula la medida de ángulos identificando segmentos paralelos a los lados de un triángulo.

Secuencia

En las dos clases anteriores se estableció el teorema sobre segmentos paralelos, cuya hipótesis es el paralelismo de los segmentos y su conclusión la proporcionalidad entre los segmentos que quedan delimitados. En las clases 3.6 y 3.7 se estudia el teorema sobre segmentos proporcionales, el cual tiene como hipótesis los lados proporcionales y como conclusión el paralelismo entre lados. Matemáticamente este teorema es una doble implicación, pero por razones didácticas ambas implicaciones se estudian por separado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Es fundamental identificar, en un primer momento la hipótesis del enunciado para luego poder identificar el criterio de semejanza que se puede utilizar para probar la semejanza de los triángulos.

Ⓒ Lo primordial es observar que solo se necesita conocer dos lados proporcionales de ambos triángulos para establecer el paralelismo.

Solución de algunos ítems:

1.
Dado que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ puede aplicarse el resultado visto anteriormente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. De ahí que, $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.
Por lo tanto, $\sphericalangle EDA = 56°$.

2.
Aplicando el resultado anterior:
$\overline{FG} \parallel \overline{PQ}$, entonces $\sphericalangle HQP = \sphericalangle HFG = 40°$.
Completando los ángulos internos de ΔFGH.

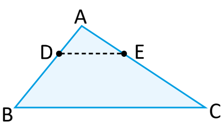
$$\sphericalangle HFG + 40° + 35° = 180°$$
$$\sphericalangle HFG = 180° - 75°$$
$$\sphericalangle HFG = 105°$$

3.
Solución:
Sustituyendo según se indica.

$$\frac{AD}{AB - AD} = \frac{AE}{AC - AE}$$
$$\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC + AE}{AE} \quad \text{(por el recíproco)}$$
$$\frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{(sumando 1)}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{(por el recíproco)}$$

Fecha: **U5 3.6**

Ⓟ En el ΔABC se satisface que $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$.
Justifica que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Ⓢ Trazando DE, se forma ΔADE.

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido)
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (por enunciado)
$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (criterio LAL)
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza anterior)
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (ángulos correspondientes iguales)
Por lo tanto, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Ⓡ 1. Aplicando el resultado anterior:

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (ya que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$)
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (son correspondientes)

Por lo tanto, $\sphericalangle EDA = 56°$.

2. $\sphericalangle HFG = 105°$.

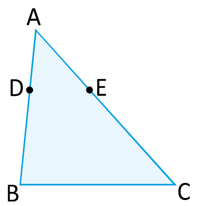
Tarea: página 117 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2

P

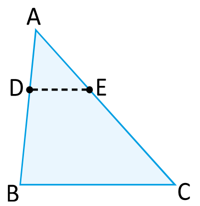
En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces también se cumple $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

De lo visto en la clase anterior, DE||BC



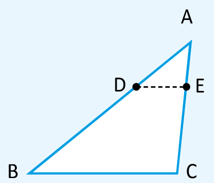
C

Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo

En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

a) Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b) Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

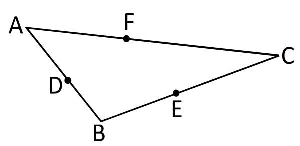


1. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

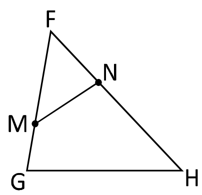
   a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AC? Justifica tu respuesta. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

   b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta. $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$

   c) ¿Es $\overline{DF}$ paralelo a $\overline{BC}$?
   No se puede asegurar el paralelismo



2. En el triángulo FGH se cumple lo siguiente: $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$. ¿Es el triángulo FNM semejante al triángulo FGH? Justifica tu respuesta.
   $\Delta FNM \sim \Delta FGH$



Unidad 5

Indicador de logro

3.7 Determina segmentos paralelos en un triángulo, dada su proporcionalidad de segmentos.

Secuencia

Para esta clase se extiende el resultado visto en la clase anterior, estableciendo el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo, el cual dice que si existen dos puntos sobre los lados del triángulo, de forma que existe proporción por todos los segmentos correspondientes delimitados por los puntos es paralelo al tercer lado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es identificar que al ser los segmentos proporcionales, únicamente se necesita el ángulo entre ellos para poder utilizar el primer criterio de semejanza y posteriormente establecer los lados paralelos, utilizando los resultados de semejanza.

Solución de algunos ítems:

1.

a) DF y EF no son paralelos a AC ya que lo cortan en un punto.
Luego, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ya que $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y se cumple el teorema sobre segmentos proporcionales.

b) FD no es paralelo a AB ya que lo corta en un punto.
Luego, $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ ya que, $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$ y se cumple el teorema sobre segmentos proporcionales.

c) No se puede asegurar el paralelismo de DF con BC ya que no se tiene información sobre la proporcionalidad de los segmentos delimitados.

2.

De la figura se observa que:

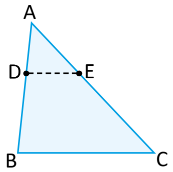
$\sphericalangle MFN = \sphericalangle HFG$ (es compartido)

Además, $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$ (del enunciado)

Por tanto, utilizando el primer criterio de semejanza LAL, $\Delta FNM \sim \Delta FGH$.

Fecha: **U5 3.7**

Ⓟ En ΔABC se satisface que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
Justifica que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Ⓢ Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ también $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.
Prueba:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$
$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC}$$

Por tanto, del resultado de la clase anterior $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Ⓡ 1.
a) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
b) $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$
c) No se puede asegurar el paralelismo

2.
$\Delta FNM \sim \Delta FGH$ (criterio LAL).

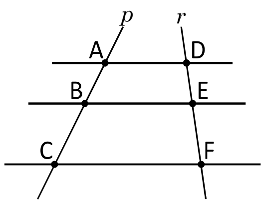
Tarea: página 118 del Cuaderno de Ejercicios.

3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

P

Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.

Demuestra que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Traza el segmento AF y utiliza el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

S

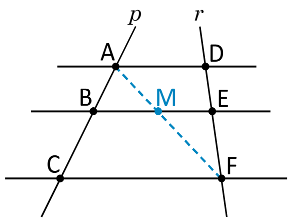
Se traza el segmento AF y se denota por M al punto de intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.

En el triángulo ACF por el teorema sobre segmentos paralelos, se tiene que
$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$

En el triángulo AFD por el teorema sobre segmentos paralelos se tiene que
$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$

Tomando el recíproco de ambos lados, $\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$.

Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$.

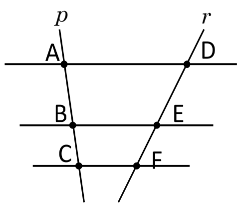


C

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Este resultado es conocido como el Teorema de Thales.

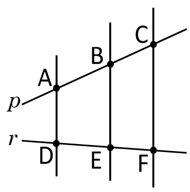
1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.
   a) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   b) Demuestra que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.



$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ y también $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$.

2. Las rectas p y r son cortadas por tres paralelas como se muestra en la figura. Si AB = 3, DE = 2 y EF = 1, ¿cuál es el valor de BC?

$BC = \frac{3}{2}$



Indicador de logro

3.8 Demuestra el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo.

Secuencia

Para esta clase se utiliza el teorema sobre segmentos paralelos visto en la clase 3.5 para demostrar el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo, que es útil para futuros contenidos, en bachillerato.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Al utilizar la pista que se da en el libro, lo esencial es observar que se forman dos triángulos donde se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos.

Comúnmente, este teorema también es conocido como **Teorema de Thales.** Es posible que al consultar otros textos, se le nombre de esta forma.

Solución de algunos ítems:

1.

a) En la figura se cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

y también $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ y $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$.

b) Del literal anterior se tiene

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Luego, AB(EF) = BC(DE).

Entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, que es lo que se quería demostrar.

2.

Como p y r son cortadas por rectas paralelas, podemos aplicar el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo. De esta forma:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{3}{BC} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{BC}{3} = \frac{1}{2} \text{ (por el recíproco)}$$

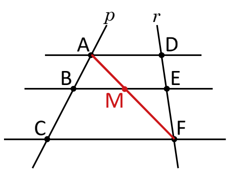
$$BC = \frac{3}{2}$$

Fecha: **U5 3.8**

Ⓟ p y r son cortadas por tres rectas paralelas.

Demuestra que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Traza AF y utiliza el teorema de la clase 3.5



Ⓢ Denotando por M la intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.

Por el teorema sobre segmentos paralelos.

En ΔACF: $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$

En ΔACF: $\frac{MF}{AM} = \frac{EF}{DE}$

$\frac{AM}{MF} = \frac{AE}{EF}$ (utilizando el recíproco)

Por tanto:

$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{DE}{EF}$ y también $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Ⓡ 1.

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y también $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$

b) Sugerencia: transformar $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ en AB(EF) = BC(DE)

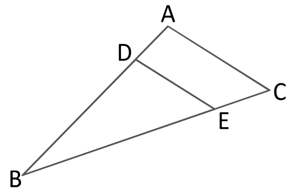
2. BC = $\frac{3}{2}$

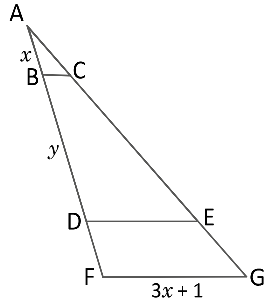
Tarea: página 119 del Cuaderno de Ejercicios.

3.9 Practica lo aprendido

1. Calcula la longitud de $\overline{DE}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, AC = 2, BD = 3 y DA = 1.

DE = $\frac{3}{2}$



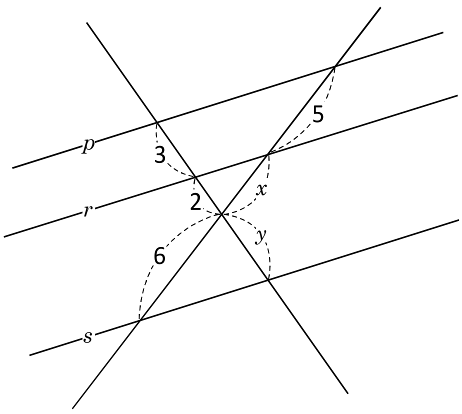


2. En el ΔAFG se cumple: $\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$. Calcula los valores de x y y si BC = 0.8 cm, DE = 3 cm y AF = 5 cm.

$x = 1$ y $y = \frac{11}{4}$

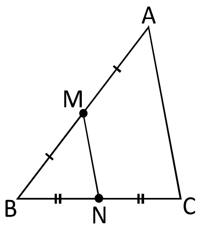
3. Las rectas p, r y s son paralelas. Calcula los valores de x y y.

$x = \frac{10}{3}$ y $y = \frac{18}{5}$



4. En el triángulo ABC de la figura, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si el perímetro del triángulo MBN es 8, ¿cuál es el perímetro de ΔABC?

El perímetro de ΔABC es 16.



Indicador de logro

3.9 Calcula la medida de segmentos utilizando los teoremas sobre segmentos paralelos.

Solución de algunos ítems:

1.
Como se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$

Pero, BA = BD + DA = 3 + 1 = 4

$\frac{3}{4} = \frac{DE}{2}$ (sustituyendo los valores)

$DE = \frac{3}{2}$

2.
Como $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$. Se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos en los triángulos AFG y ABC, entonces:

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FG}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{0.8}{3x + 1}$$
$$3x^2 + x = 4$$
$$x^2 + x - 4 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{6}$$
$$x = \frac{-1 \pm 7}{6},\ x = 1, -\frac{4}{3}$$

La solución negativa se elimina porque se está trabajando con la longitud de segmentos, por tanto $x = 1$.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$, se cumple que:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FG}$$
$$\frac{x + y}{5} = \frac{3}{3x + 1}$$
$$\frac{y + 1}{5} = \frac{3}{4}$$
$$y = \frac{15}{4} - 1$$
$$y = \frac{11}{4}$$

Por tanto, $x = 1$ y $y = \frac{11}{4}$.

Observación: Por su dificultad, indicar que este ítem se resuelva por último.

3.
Aplicando el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo, a p y r.

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{5}$$
$$x = \frac{10}{3}$$

Aplicando el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo.

$$\frac{y + 2}{3} = \frac{6 + x}{5}$$
$$y + 2 = \frac{18 + 3x}{5}$$
$$y + 2 = \frac{18 + 10}{5}\text{, sustituyendo } x$$
$$y = \frac{28}{5} - 2$$
$$y = \frac{18}{5}$$

4.

Como M y N son puntos medios se cumple que $MN = \frac{1}{2}AC$.
Y como el perímetro es la suma de los lados, se tiene que:

$$BM + BN + MN = 8$$
$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = 8$$
$$\frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 8$$
$$AB + BC + AC = 16.$$

Que es el perímetro de ΔABC.

Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 4 Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes

4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

P

Ana señala dos puntos sobre un mapa de San Salvador y mide con una regla la distancia entre ellos. Obteniendo como resultado 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala numérica de 1:50 000, ¿cuál es la distancia real entre los dos lugares señalados?

La escala numérica indica que un centímetro en el mapa equivale a 50 000 centímetros en la realidad.

S

Se denota x la distancia real entre los dos lugares. Entonces:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja x de la ecuación anterior: $6(50\,000) = x$

$$x = 300\,000$$

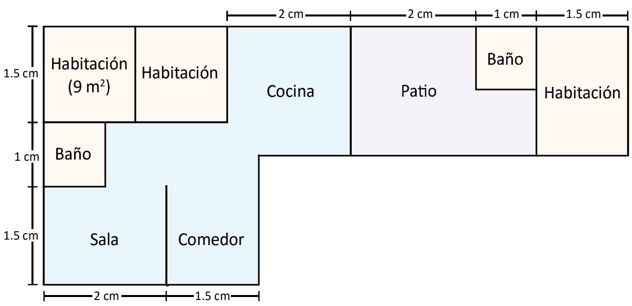
La distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.

1. ¿A qué escala se encuentra elaborado el siguiente mapa de El Salvador, si la distancia real entre Santa Ana y San Salvador es 48 km y el segmento trazado sobre el mapa mide 1.5 cm?

Ambas medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

2. En el siguiente plano:
   a) ¿Cuál es la escala?
   b) ¿Cuál es el área (en m²) del patio?
   c) ¿Cuál es el área total?

Para conocer la escala mide con una regla las longitudes del dibujo.



Indicador de logro

4.1 Encuentra la distancia entre dos puntos sobre un mapa, utilizando la proporcionalidad entre segmentos, para conocer la escala real.

Secuencia

En las lecciones anteriores se estudiaron todos los conceptos relativos a la semejanza de figuras, más específicamente a la semejanza de triángulos, los criterios para establecer semejanza entre dos triángulos y algunos teoremas importantes que se pueden obtener utilizando semejanza. En esta lección se trabajan problemas de aplicación que involucren la semejanza, ya sean problemas del contexto o aplicados en la misma matemática.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Al escribir 1 : 50 000 se refiere a la forma lineal de escribir una razón y se debe leer, "por cada centímetro del mapa hay 50 000 centímetros en la realidad". Lo importante es identificar el dato desconocido, la distancia real entre ambos puntos, posteriormente resolver la proporción para encontrarlo. Puede hacerse una conversión a km dividiendo por 100 000.

Solución de algunos ítems:

2.

a) Al medir con una regla, los lados de la habitación son de 1.5 cm cada lado.
La medida real de la habitación es de 3 m en cada lado.
Entonces la escala sería:

$$\frac{1.5}{300} = \frac{15}{3\,000} = \frac{1}{200}$$

b) El área del patio se puede encontrar restando el área del baño al área del rectángulo morado.

Todos los lados del baño miden 1 cm.
Sea x la medida real del lado del baño: $\frac{1}{x} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 200$ cm = 2 m.
Por lo tanto, el área es:

$$2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2.$$

Los lados del rectángulo de color morado miden, 2 cm de alto y 3 cm de largo.
Sea x y y la medida real de los lados.
$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 400$ cm = 4 m.
$\frac{3}{y} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 600$ cm = 6 m.

El área es $4 \times 6 = 24$ m^2 y el área del patio es $24 - 4 = 20$ m^2.

Fecha: **U5 4.1**

Ⓟ La distancia entre dos puntos marcados en un mapa es 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala 1 : 50 000.

¿Cuál es la distancia real entre los puntos?

Ⓢ La distancia entre los dos puntos es:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$
$$x = 6(50\,000) \quad \text{Despejando } x$$
$$x = 300\,000 \text{ cm}$$

La distancia entre los puntos es 3 km o 300 000 cm.

Ⓡ 1.
48 km equivale a 4 800 000 cm.
La escala sería:

$$\frac{1.5}{4\,800\,000} = \frac{15}{4\,800\,000} = \frac{1}{3\,200\,000}$$

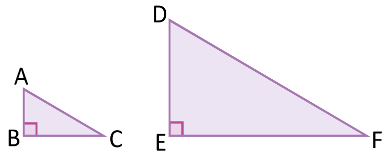
La escala del mapa es 1 : 3 200 000.

Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

4.2 Áreas de polígonos semejantes

P

Los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3. ¿Cuál es la razón entre las áreas del ΔABC y ΔDEF?



El área de un triángulo es:

$$\frac{(base)(altura)}{2}$$

S

El área del triángulo ABC es $\frac{(BC)(AB)}{2}$, y la del triángulo DEF es $\frac{(EF)(DE)}{2}$. Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}}$$
$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$
$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

(ABC) Indica el área del triángulo ABC. Entonces, $\frac{(ABC)}{(DEF)}$ es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DEF.

Por hipótesis, $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$. Se sustituyen en la razón entre áreas:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas de ΔABC y ΔDEF es igual a $\frac{1}{9}$ (el cuadrado de la razón de semejanza).

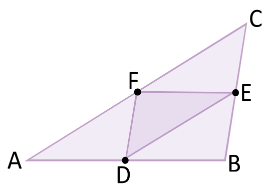
C

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

1. La razón entre dos triángulos semejantes es 2:3, ¿cuál es la razón entre sus áreas? $\frac{4}{9}$

2. En el triángulo ABC, D, E y F son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, ¿cuál es la razón entre las áreas del triángulo ABC y el triángulo DEF?

   $\frac{(ABC)}{(DEF)} = 4$



Indicador de logro

4.2 Utiliza la razón entre dos triángulos semejantes para encontrar la razón entre sus áreas.

Secuencia

En la clase anterior se estudió una aplicación de la semejanza de triángulos al uso de mapas y planos. Para esta clase se estudia una aplicación matemática al área de figuras semejantes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Es importante entender que cuando se escribe que los triángulos son semejantes a razón 1 : 3, significa que sus lados correspondientes están a razón 1 : 3. Es importante recordar que la notación (ABC), se utiliza para expresar el área del triángulo ABC.

Se debe observar del problema anterior que la razón entre las áreas resulta en el cuadrado de la razón entre los lados. Es importante mencionar que este enunciado es cierto para todo triángulo o cualquier figura plana.

Solución de algunos ítems:

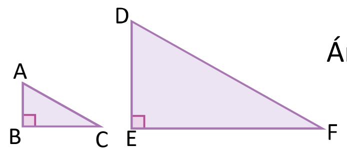
1.
Por el enunciado descrito en la Conclusión.

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2.
Por el teorema de la base media, se tiene que DE = $\frac{1}{2}$CA, FD = $\frac{1}{2}$BC y que EF = $\frac{1}{2}$AB. Luego, $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ (por el criterio LLL) y la razón de semejanza es 2 : 1. Por lo tanto, $\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$.

Fecha: **U5 4.2**

Ⓟ Los triángulos ABC y DEF están a razón 1 : 3. ¿Cuál es la razón entre las áreas?



Área del triángulo: $\frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$

Ⓢ Área de ABC: $\frac{(BC)(AB)}{2}$

Área de DEF: $\frac{(EF)(DE)}{2}$

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{(AB)(BC)}{2} \div \frac{(EF)(DE)}{2}$$
$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$
$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

Por hipótesis $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$.

Sustituyendo:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Por tanto la razón entre las áreas es $\frac{1}{9}$.

Ⓡ 1.
Por el enunciado descrito en la conclusión:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2. 4

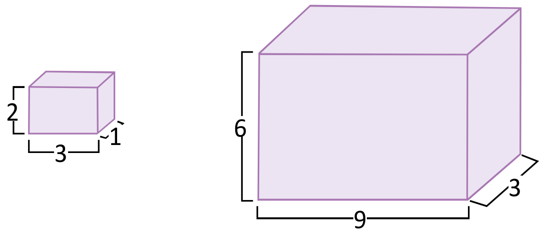
Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 4

4.3 Volumen de sólidos semejantes

P

Los prismas rectangulares de la figura son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



El volumen de un prisma rectangular se calcula: (altura)(largo)(ancho).

S

Se denota por V_1 el volumen del prisma pequeño y por V_2 el volumen del prisma grande. Entonces:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Al simplificar lo anterior se obtiene:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

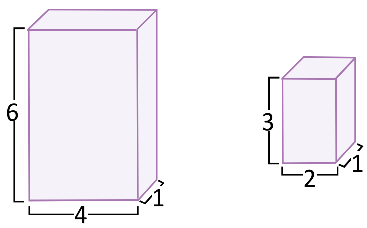
Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es $\frac{1}{27}$.

C

La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

1. ¿Son semejantes los siguientes prismas rectangulares? Justifica tu respuesta.

La razones entre sus lados correspondientes son diferentes, por lo tanto no son semejantes



2. Dos cilindros circulares rectos son semejantes a razón 1:4, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

La razón entre volúmenes es $\frac{1}{64}$

Indicador de logro

4.3 Utiliza la semejanza de sólidos para encontrar la razón de semejanza entre sus volúmenes.

Secuencia

Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Ⓒ Lo importante es indicar que este resultado se cumple para todos los prismas o sólidos semejantes.

Solución de algunos ítems:

Aplicando el enunciado de la conclusión, se tiene que la razón de volúmenes es $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

Para comprobar la conclusión en el caso de los cilindros, se calcula como sigue:

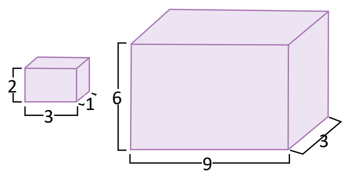
El volumen de un cilindro circular recto es:
π × (radio)² × (altura).

La razón entre los radios es 1 : 4 y la altura también están a razón 1 : 4.
Sean los volúmenes:

$$V_1 = \pi r_1 h_1$$
$$V_2 = \pi r_2 h_2$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{64}$$

Fecha: **U5 4.3**

Ⓟ Los siguientes prismas son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



Ⓢ V_1: Volumen del prisma pequeño.
V_2: Volumen del prisma grande.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Por lo tanto, la razón entre los volúmenes es $\frac{1}{27}$.

Ⓡ 1.
La razón entre sus lados son diferentes, por lo tanto no son semejantes.

2. $\frac{1}{64}$

Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

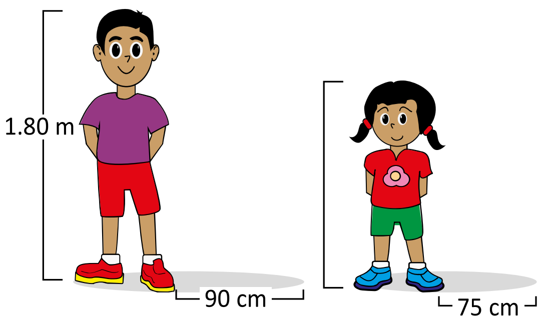
Lección 4

4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos

P

A cierta hora del día, José y Marta se colocan de pie en el patio de su escuela. José proyecta una sombra de 90 cm de longitud, mientras que la sombra de Marta mide 75 cm de longitud. Si la estatura de José es 1.80 m, ¿cuál es la estatura de Marta?

> En una misma hora, las alturas de dos objetos son proporcionales a sus sombras.



S

Con las estaturas de ambos y las longitudes de las sombras pueden formarse dos triángulos rectángulos semejantes (por el criterio AA). Primero, se convierte a centímetros la estatura de José:

$$1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$

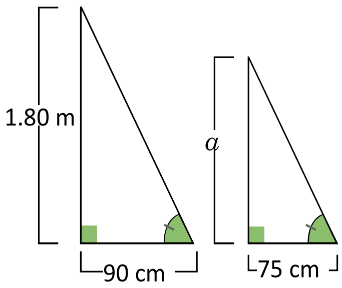
Se denota por a la estatura en cm de Marta. Por ser triángulos semejantes:

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$

Se despeja a de la ecuación anterior:

$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

$$a = 150$$



Por lo tanto, la estatura de Marta es 150 cm o 1.50 m.

1. ¿Cuál es la altura de la torre del Ministerio de Gobernación, si a determinada hora del día proyecta una sombra de 40 m mientras que un hombre de 1.82 m de estatura proyecta una sombra de 1.40 m a esa misma hora? 52 m

2. Antonio (A) se encuentra en la playa a 24 m de un salvavidas (S). Si la distancia entre el Malecón y el salvavidas es 60 m y la longitud del muelle es 200 m, ¿cuál es la distancia entre Antonio y el inicio del muelle (I)? 80 m

> En la figura, el segmento que une el Malecón con el punto S es paralelo al muelle.

Indicador de logro

4.4 Resuelve problemas aplicados utilizando los conocimientos sobre figuras semejantes.

Secuencia

Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Propósito

P, S, Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

C Lo importante es indicar que este resultado se cumple para todos los prismas o sólidos semejantes.

Solución de algunos ítems:

1.
Como las alturas son proporcionales a las sombras y nombrando por a la altura de la torre.

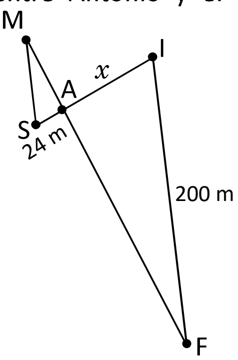
$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

2.
Según la información adicional los lados son paralelos. Sea M el punto donde se encuentra el malecón, I el punto de inicio del muelle y F el punto final del muelle.
∢SMA = ∢AFI (por ser alternos internos). ∢MAS = ∢FAI (son opuestos por el vértice).

Por el criterio AA, los triángulos son semejantes y se tiene que:

$$\frac{x}{24} = \frac{200}{60}$$
$$x = \frac{200}{60}(24)$$
$$x = 80 \text{ m}$$

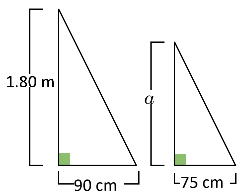
Por tanto, la distancia entre Antonio y el inicio del muelle es 80 metros



Fecha: **U5 4.4**

P ¿Cuál es la altura “a” de Marta?

Las alturas son proporcionales a las sombras.



S Dado que las alturas son proporcionales a las sombras.

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}; \qquad 1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$
$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$
$$a = 150$$

Por tanto, Marta mide 1.50 m.

R 1.
Asumiendo que las alturas son proporcionales a las sombras y nombrando por a la altura de la torre.

$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

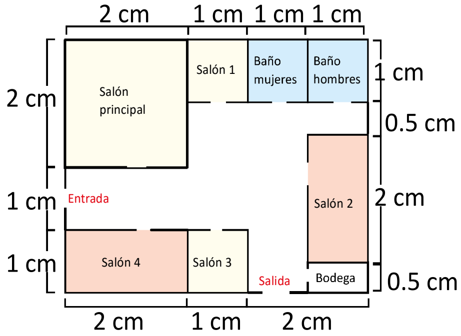
2.
80 m

Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

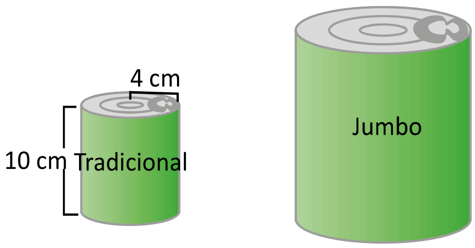
4.5 Practica lo aprendido

1. El siguiente plano de un museo se encuentra a una escala numérica de 1:200; los baños y los salones 1 y 3 tienen las mismas dimensiones, mientras que las dimensiones del salón 2 son iguales a las del salón 4.

   a) ¿Cuál es el área real del salón principal? 16 m^2
   b) ¿Cuál es el área del salón 1? 4 m^2
   c) Si se planea enladrillar todo el suelo del museo con baldosas de 25 cm × 25 cm, ¿cuántas de estas se necesitarán? 1 280 baldosas



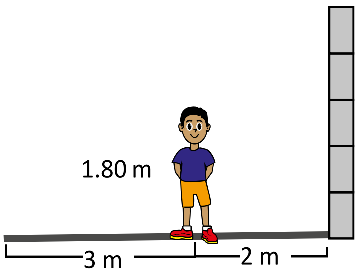
2. Doña Carmen vende frutas y jugos enlatados. Para ello utiliza dos tipos de latas: la tradicional con 4 cm de radio por 10 cm de alto y la jumbo cuyo volumen es de 540π cm^3. Si ambas latas son semejantes, ¿cuáles son las dimensiones del radio y la altura de la lata jumbo?



Radio = 6 cm

Altura = 15 cm

3. José se coloca a dos metros de un muro de tal forma que el extremo de su sombra coincide con el extremo de la sombra del muro. Si la estatura de José es 1.80 m y la longitud de su sombra es 3 m, ¿cuál es la altura del muro?



Asumiendo que José se encuentra ubicado de forma paralela con el muro, se forman dos triángulos semejantes y utilizando la proporción entre los lados $\frac{a}{5} = \frac{1.8}{3}$ (donde a es la altura del muro), entonces $a = 3$ m.

Indicador de logro

4.5 Resuelve problemas aplicados utilizando los conocimientos sobre figuras semejantes.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Encontrando primero los lados reales y calculando posteriormente el área.

Sea x el lado del salón principal.

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$$

Por tanto, el área del salón principal es
$4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 16\text{m}^2$.

b) Sea y el lado del salón 1.

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 200$$

Por tanto, el área del salón 1 es:
$2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$.

c) Las medidas de los lados del museo en el plano, son de 4 cm y 5 cm.
Encontrando la medida real de sus lados.

Sea x la medida real de la altura.

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 800 \text{ cm}$$

Sea y la medida real de la base.

$$\frac{5}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 1\,000 \text{ cm}$$

Además,
$800 \div 25 = 32$ y $1\,000 \div 25 = 40$.
Por lo tanto, a lo largo de la altura caben 32 baldosas y a lo largo de la base caben 40 baldosas.
Luego se necesita $40 \times 32 = 1\,280$ baldosas.

2.

Por el resultado de la clase 4.3, la razón entre los volúmenes es igual al cubo de razón de semejanza.

El volumen de la lata pequeña es de $16\pi(10) \text{ cm}^3 = 160\pi \text{ cm}^3$.

La razón entre los volúmenes es:

$$\frac{160\pi}{540\pi} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$$

La razón de semejanza es entonces 2:3.
Encontrando las dimensiones del radio.

$$\frac{4}{R} = \frac{2}{3}$$
$$R = 6 \text{ cm}$$

Encontrando la altura h.

$$\frac{10}{h} = \frac{2}{3}$$
$$h = 15 \text{ cm}$$

Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.