Unidad 7. Ángulo inscrito y central

Competencias de la Unidad

Determinar la medida de los ángulos inscritos y semiinscritos en una circunferencia, utilizando los teoremas y relaciones sobre cuerdas y arcos en una circunferencia, para estudiar las características y propiedades de figuras planas.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen de prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ángulo central e inscrito	1	1. Elementos de la circunferencia
	1	2. Definición y medida de ángulos inscritos
	1	3. Ángulo inscrito, parte 1
	1	4. Ángulo inscrito, parte 2
	1	5. Teorema del ángulo inscrito
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Arcos congruentes
	1	8. Practica lo aprendido
2. Aplicación del ángulo central e inscrito	1	1. Construcción de tangentes a una circunferencia
	1	2. Cuerdas y arcos de la circunferencia
	1	3. Aplicación con semejanza de triángulos
	1	4. Paralelismo
	1	5. Cuatro puntos en una circunferencia
	1	6. Ángulo semiinscrito
	2	7. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 7

16 horas clase + prueba de la Unidad 7

Puntos esenciales de cada lección

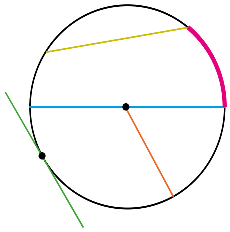
Lección 1: Ángulo central e inscrito
En la clase 1.2 se determina el teorema del ángulo central de una forma intuitiva, utilizando los instrumentos geométricos, para que en las clases posteriores a esta lección se realice la demostración formal del mismo.

Lección 2: Aplicación de ángulo central e inscrito
Habiendo demostrado el teorema de la medida del ángulo inscrito anteriormente, en esta lección se hace uso de este resultado como herramienta principal para la deducción de algunas propiedades.

Lección 1 Ángulo central e inscrito

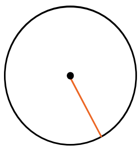
1.1 Elementos de la circunferencia

P Escribe el nombre que reciben los elementos dibujados en la siguiente circunferencia:

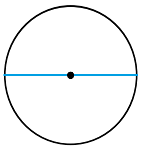


S

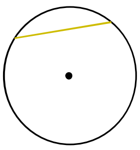
Segmentos.



El segmento que va del centro a un punto de la circunferencia se llama **radio.**

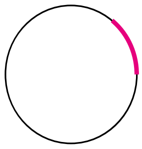


El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro se llama **diámetro.**



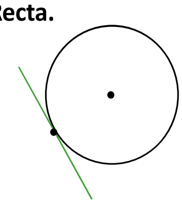
El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro se llama **cuerda.**

Arco.



La parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella se llama **arco**.

Recta.



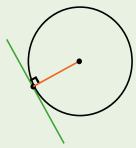
La recta que toca la circunferencia en un punto se llama **tangente.**

El punto donde la recta tangente toca la circunferencia se llama: **punto de tangencia.**

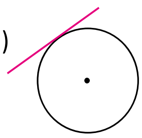
C Los elementos de la circunferencia son:

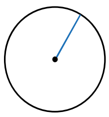
- Los segmentos: radio, diámetro y cuerda
- Las rectas: tangente
- El arco de la circunferencia

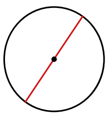
El radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.

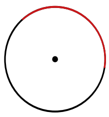


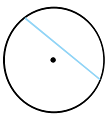
1. Escribe el nombre de los elementos señalados en cada circunferencia:

a) 
Recta tangente

b) 
Radio

c) 
Diámetro

d) 
Arco

e) 
Cuerda

2. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el nombre del elemento que es $\frac{1}{2}$ del diámetro? Radio

b) ¿Cuál es el nombre de la cuerda de mayor longitud de una circunferencia? Diámetro

c) ¿Cómo es la recta tangente y el radio al punto de tangencia de una circunferencia? Perpendiculares

d) Al colocar dos puntos sobre la circunferencia, ¿cuántos arcos se forman? Dos

Indicador de logro

1.1 Identifica los elementos de una circunferencia.

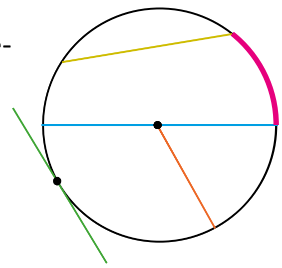
Secuencia

En primero y segundo ciclo se conocieron los elementos del círculo, luego en séptimo se retomó el círculo para trabajar con sus elementos, determinar el significado de recta tangente a la circunferencia y deducir propiedades a partir de las características de dos círculos que se intersecan. Para esta clase se hace un recordatorio de los elementos del círculo, con la diferencia de que se presentan como elementos de la circunferencia; además, se presenta a la recta tangente a la circunferencia como un elemento más. En este grado los estudiantes ya tienen claridad en cuanto a comprender la relación entre el círculo y la circunferencia, por lo que se espera que no haya confusión en ellos respecto al título de la clase.

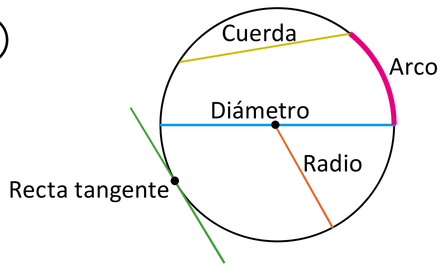
Para este caso el primer ítem se considera completo al escribir los nombres de todos los literales.

Fecha: **U7 1.1**

(P) Escribe el nombre de cada elemento en la circunferencia.



(S)



(R) 1.
a) Recta tangente
b) Radio
c) Diámetro
d) Arco
e) Cuerda

2.
a) Radio
b) Diámetro
c) Perpendiculares
d) Dos

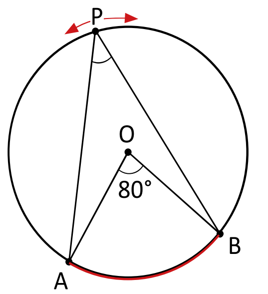
Tarea: página 148 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

P

Realiza el dibujo en una hoja de papel y mide el ∢BPA desplazando el punto P a diferentes lugares de la circunferencia. Compara la medida de ∢BPA con la medida del ∢BOA.



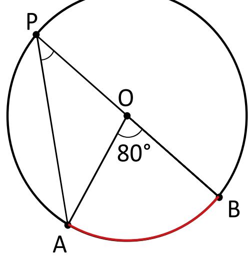
El ángulo BOA se llama **ángulo central**, porque su vértice es el centro de la circunferencia.

Observa que el ∢BPA y el ∢BOA comparten el mismo arco $\widehat{AB}$.

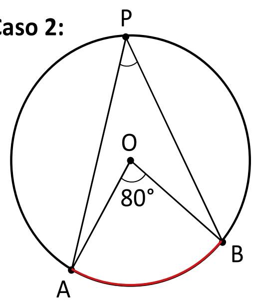
S

Utilizando regla y compás para hacer el dibujo y desplazar el punto P en la circunferencia, se tienen los siguientes casos:

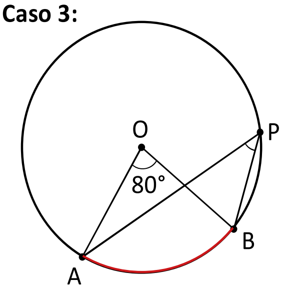
Caso 1:



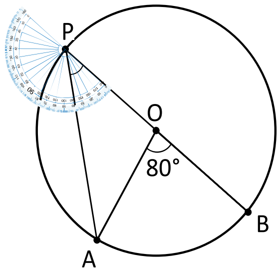
Caso 2:

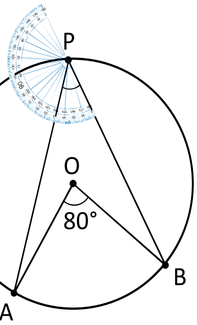


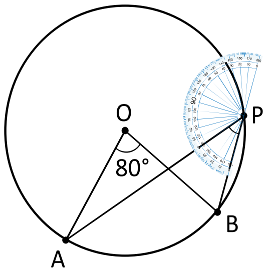
Caso 3:



Utilizando transportador se mide el∢BPA en los 3 casos.







En los tres casos la medida del ∢BPA = 40°.

Y el ∢BOA = 2∢BPA o bien el ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

C

Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman: **ángulos inscritos**.

Subtender el mismo arco significa compartir el mismo arco.

En una circunferencia se cumple que la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

Determina la medida de un ángulo inscrito a una circunferencia cuyo ángulo central correspondiente al mismo arco mide 160°. Utiliza un esquema como en el Problema inicial.

Indicador de logro

1.2 Distingue los tipos de ángulos inscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.

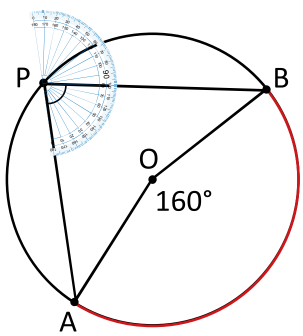
Secuencia

Para esta clase se introduce el concepto de ángulo inscrito en una circunferencia y al mismo tiempo se presenta la propiedad relacionada a su medida. Se plantea la propiedad intuitivamente a partir de la construcción, es decir, a través del uso de los instrumentos de geometría. Esta clase es importante porque en las tres siguientes se retoman algunos elementos vistos en ella, los cuales se detallarán en el apartado de propósitos.

Propósito

Ⓟ Presentar los 3 posibles casos que se pueden dar al hacer el movimiento del punto en la circunferencia. Pueden ser más formas las que los estudiantes hagan, pero cualquiera de las formas hechas por ellos se corresponderá a uno de los casos presentados. El 1 hace referencia al caso en el que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito, el 2 al caso en el que el ángulo central está al interior del ángulo inscrito y el 3 al caso en el que el ángulo central está fuera del ángulo inscrito.

Solución de algunos ítems:



La medida del ∢BPA = 80°

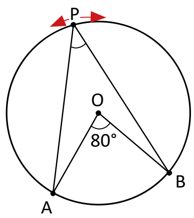
∢BOA = 2∢BPA

o bien

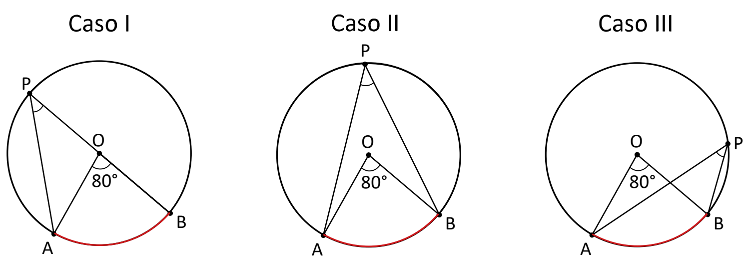
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

Fecha: **U7 1.2**

Ⓟ Mide el ∢BPA desplazando P en diferentes posiciones en la circunferencia. Compara la medida del ∢BPA con la del ∢BOA.

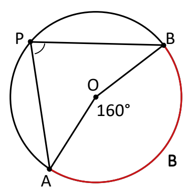


Ⓢ



En los tres casos ∢BPA = 40°, y ∢BOA = 2∢BPA o ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Ⓡ



La medida del ∢BPA = 80°

∢BOA = 2∢BPA

o bien

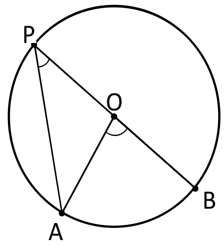
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Tarea: página 149 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro queda en algún lado del ΔBPA.



El diámetro es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

S

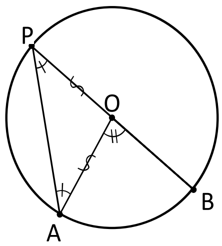
En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia).

Entonces, ∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales).

Por otra parte ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢OPA. Como ∢OPA = ∢BPA.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.



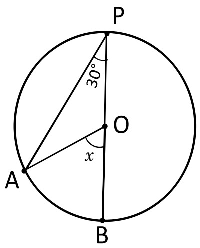
C

En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

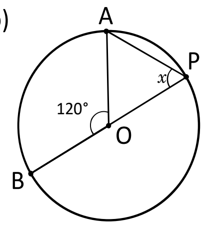
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(30°) = 60°.

b)



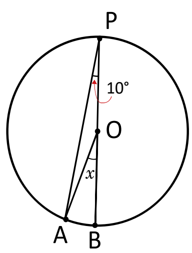
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

Por lo tanto, x = $\frac{120°}{2}$ = 60°.

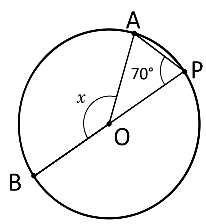
Determina el valor de x para cada caso.

a)



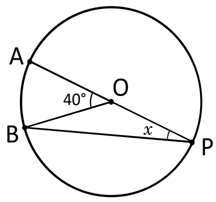
x = 20°

b)



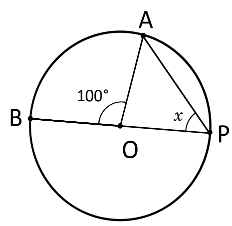
x = 140°

c)



x = 20°

d)



x = 50°

Indicador de logro

1.3 Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo lado coincide con un diámetro de la circunferencia.

Secuencia

Siendo que en la clase anterior se estableció la propiedad referente a la medida de un ángulo inscrito intuitivamente, para esta clase se hará de una manera formal, para ello se tomará una situación similar al caso 1 de la Solución de la clase anterior.

Propósito

Ⓟ Aplicar el concepto de radio de una circunferencia, las características de un triángulo isósceles, la propiedad de la medida de un ángulo externo de un triángulo para la resolución del Problema inicial. El primer paso en la estrategia de solución es determinar que el ΔAOP es isósceles, dado que sus lados coinciden con dos radios de la circunferencia. Luego se aplica que la medida del ángulo externo BOA es la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él, que en este caso son iguales por el hecho de que ΔAOP es isósceles..

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

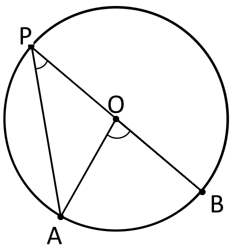
Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(10°) = 20°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto, $x = \frac{40°}{2} = 20°$.

Fecha: **U7 1.3**

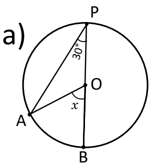
Ⓟ Demuestra que ∢BOA = 2∢BPA.



Ⓢ En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia) **(1)**
∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales)
∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP) **(2)**
∢BOA = 2∢OPA (por (1) y (2))
Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.

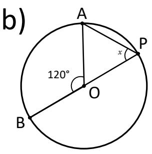
Ⓔ Determinando x en cada caso.

a)



∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto,
$x = 2(30°) = 60°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA
Entonces,
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA
Por lo tanto, $x = \frac{120}{2} = 60°$.

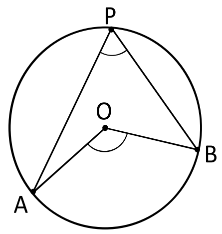
Ⓡ a) $x = 20°$ b) $x = 140°$
c) $x = 20°$ d) $x = 50°$

Tarea: página 150 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Ángulo inscrito, parte 2

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está dentro del ∢BPA.



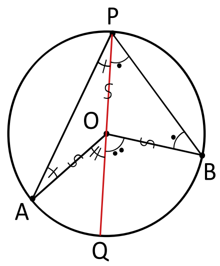
S

Se traza el diámetro QP.

∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO (por lo visto en la clase 3).

Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



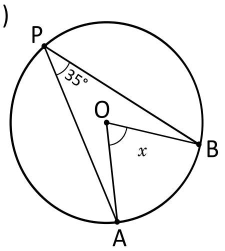
C

En los ángulos inscritos que tiene en el interior el ángulo central, que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

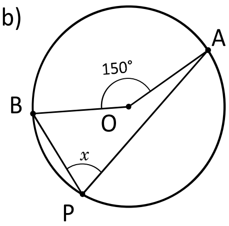
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(35°) = 70°.

b)



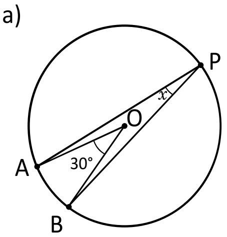
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

Por lo tanto $x = \frac{150°}{2}$ = 75°.

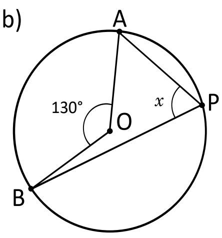
Determina el valor de x para cada caso.

a)



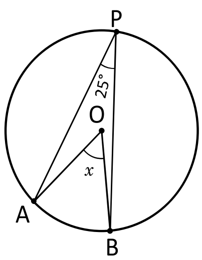
x = 15°

b)



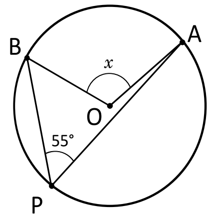
x = 65°

c)



x = 50°

d)



x = 110°

Indicador de logro

1.4 Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo ángulo central está al interior del ángulo inscrito.

Secuencia

Para esta clase se toma una situación similar al caso 2 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase anterior.

Propósito

Ⓟ El primer paso en la estrategia de solución, es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del Problema inicial de la clase anterior y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta para realizar la demostración.

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

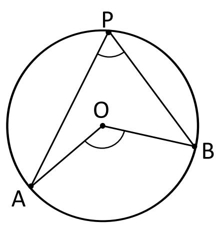
Por lo tanto, $x = \frac{30°}{2} = 15°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.

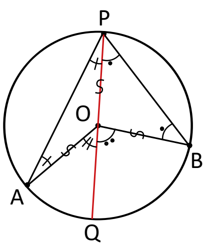
Por lo tanto, $x = 2(25°) = 50°$.

Fecha: **U7 1.4**

Ⓟ Demuestra que:
∢BOA = 2∢BPA
cuando el centro está dentro del ∢BPA.



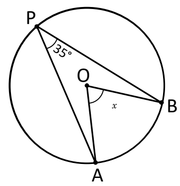
Ⓢ



Se traza el diámetro QP.
∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO
(por lo visto en la clase 3)
Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ
= 2(∢QPA + ∢BPQ)
Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.

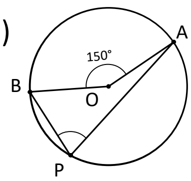
Ⓔ Determinando x en cada caso.

a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto,
$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

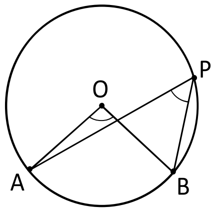
Ⓡ a) $x = 15°$ b) $x = 65°$
c) $x = 50°$ d) $x = 110°$

Tarea: página 151 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Teorema del ángulo inscrito

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está fuera del ∢BPA.



S

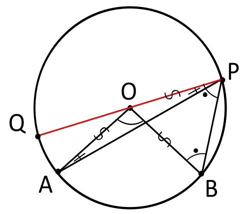
Se traza el diámetro QP.

∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ (por lo visto en la clase 3).

Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA.

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



C

En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**.

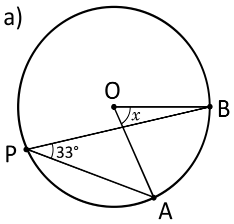
Además los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.

Este resultado se conoce como **El teorema del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

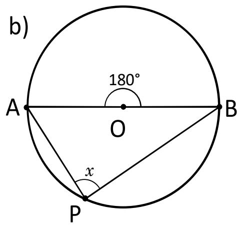
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(33°) = 66°.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

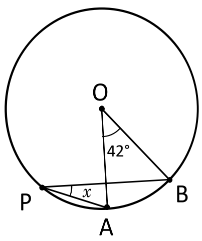
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2}$ = 90°.

El ángulo inscrito a la semi-circunferencia mide 90°.

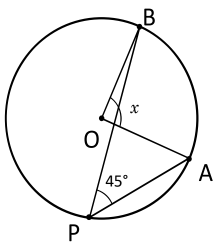
Determina el valor de x, y y z para cada caso.

a)



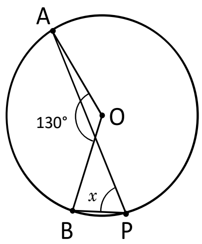
x = 21°

b)



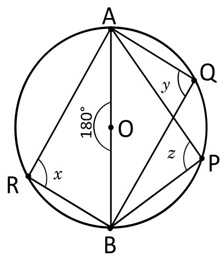
x = 90°

c)



x = 65°

d)



x = 90° y = 90°
z = 90°

Indicador de logro

1.5 Utiliza el teorema del ángulo inscrito para determinar la medida de ángulos en la circunferencia.

Secuencia

Se toma una situación similar al caso 3 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase 1.3.

Propósito

Ⓟ El primer paso en la estrategia de solución es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del caso 1 tal como la de Problema inicial de la clase 1.3 y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta más para realizar la demostración.

Ⓢ Además de que se aborda la Conclusión es importante señalar en el recuadro de información adicional que el nombre que recibe la relación existente entre las medidas del ángulo inscrito y central es **Teorema del ángulo inscrito**. Ⓒ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

a) Como $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$.

Entonces, $\measuredangle BPA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.

Por lo tanto, $x = \frac{42°}{2} = 21°$.

b) Como $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$.
Por lo tanto, $x = 2(45°) = 90°$.

d) Como $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$.

Entonces, $\measuredangle BPA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.

Por lo tanto, $z = \frac{180°}{2} = 90°$.

Como $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BQA$.

Entonces, $\measuredangle BQA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.

Por lo tanto, $y = \frac{180°}{2} = 90°$.

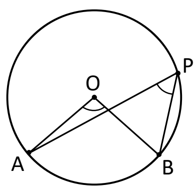
Como $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BRA$.

Entonces, $\measuredangle BRA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.

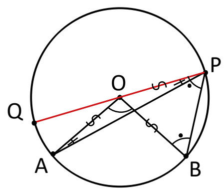
Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

Fecha: **U7 1.5**

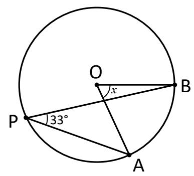
Ⓟ Demuestra que
$\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$.
Cuando el centro está fuera del $\measuredangle BPA$.



Ⓢ Se traza el diámetro QP.
$\measuredangle AOQ = 2\measuredangle APQ$ y $\measuredangle BOQ = 2\measuredangle BPQ$
(por lo visto en la clase 3)
Como $\measuredangle BOA = \measuredangle BOQ - \measuredangle AOQ$
$\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPQ - 2\measuredangle APQ$
$= 2(\measuredangle BPQ - \measuredangle APQ)$
$= 2\measuredangle BPA$.
Por lo tanto, $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$.

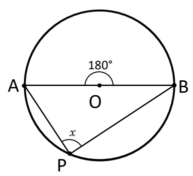


Ⓔ a)



Como:
$\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$
Por lo tanto,
$x = 2(33°) = 66°$.

b)



Como:
$\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$
$\measuredangle BPA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.
Por lo tanto,
$x = \frac{180}{2} = 90°$.

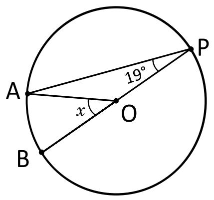
Ⓡ a) $x = 21°$
c) $x = 65°$
b) $x = 90°$
d) $x = 90°$
$y = 90°$
$z = 90°$

Tarea: página 152 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Practica lo aprendido

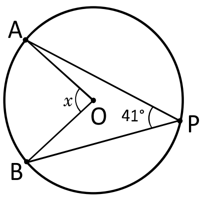
1. Determina el valor de x para cada caso.

a)



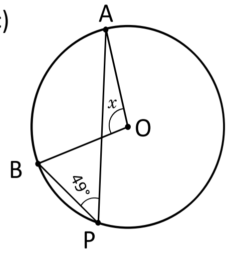
$x = 38°$

b)



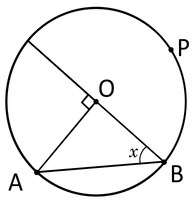
$x = 82°$

c)



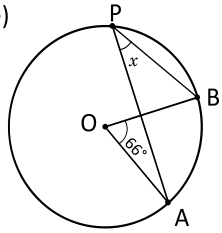
$x = 98°$

d)



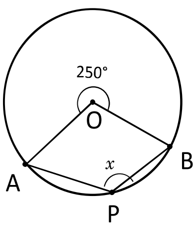
$x = 45°$

e)



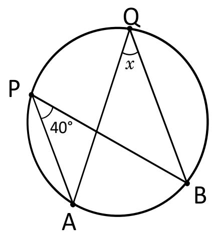
$x = 33°$

f)



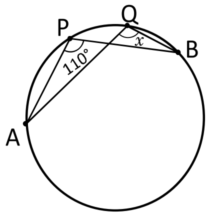
$x = 125°$

g)



$x = 40°$

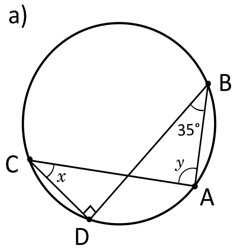
h)



$x = 110°$

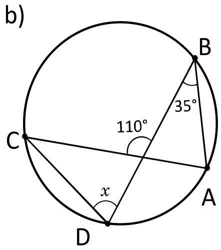
2. Determina el valor de x y de y según cada caso.

a)



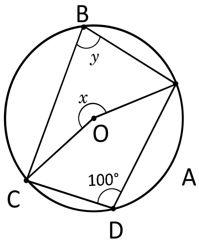
$x = 35°$
$y = 90°$

b)



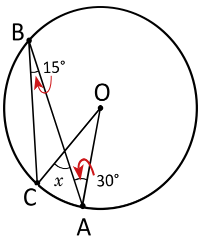
$x = 75°$

c)



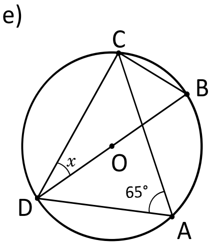
$x = 200°$
$y = 80°$

d)



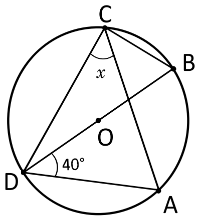
$x = 60°$

e)



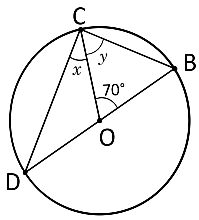
$x = 25°$

f)



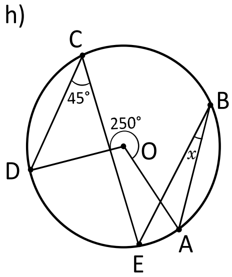
$x = 50°$

g)



$x = 35°$
$y = 55°$

h)



$x = 10°$

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Como ∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto, x = 2(19°) = 38°.

e) Como ∢BOA = 2∢BPA

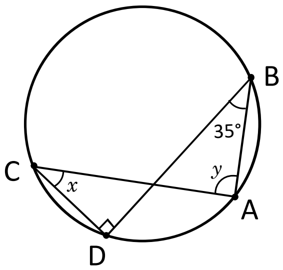
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{66°}{2}$ = 33°.

h) x = ∢BQA = ∢BPA = 110°, porque ambos ángulos inscritos subtienden al $\overset{\frown}{AB}$.

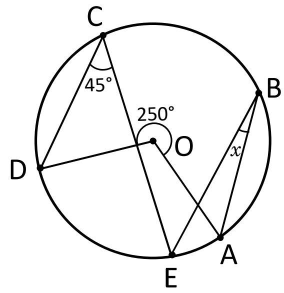
2.

a)



Como ∢CED = 90° – 35° = 55°,
entonces ∢BEA = ∢CED = 55°.
Por tanto, y = 180° – 35° – 55° = 90°.

h)



Primero se traza $\overline{OE}$.

∢AOD = 360° – 250° = 110°

∢EOD = 2(45°) = 90°

∢AOD = ∢AOE + ∢EOD

110° = ∢AOE + 90°

∢AOE = 20°

Por lo tanto,

x = ∢ABE = $\frac{1}{2}$ ∢AOE = $\frac{20°}{2}$ = 10°.

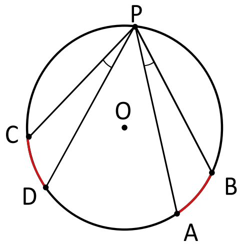
x = 10°

Tarea: página 153 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Arcos congruentes

P

Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la siguiente figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



La notación $\overset{\frown}{AB}$, significa la porción de arco comprendida entre el punto A y el punto B.

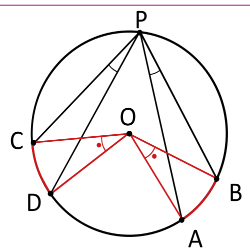
S

Se construyen los ángulos ∢BOA y ∢DOC.

∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis).

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC (por ángulo inscrito).

Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.



C

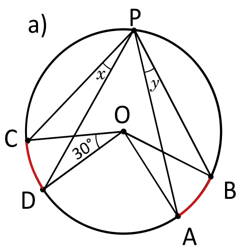
En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.

E

Determina el valor de x y y para cada caso donde $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.

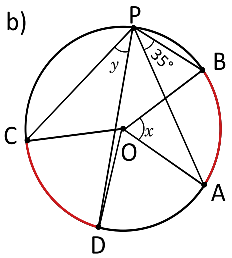
a)



Como ∢BOA = ∢DOC.

Por lo tanto,
$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(35°) = 70°.

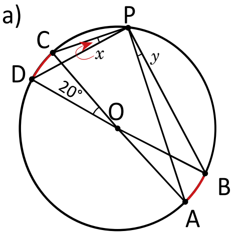
Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.

Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

I

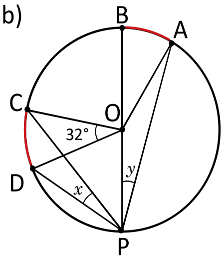
Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

a)



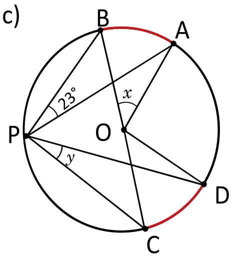
$x = y = 10°$

b)



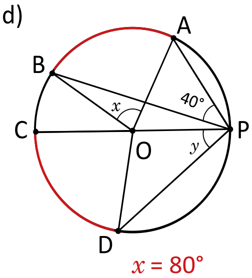
$x = y = 16°$

c)



$x = 46°$
$y = 23°$

d)



$x = 80°$
$y = 40°$

Indicador de logro

1.7 Determina la medida de ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida.

Secuencia

Para esta clase se establece la propiedad de que en ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida y recíprocamente si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida. Para la demostración de dicha propiedad se hace la construcción auxiliar de los respectivos ángulos centrales. Esta estrategia se emplea debido a que en séptimo se trabajó la longitud de arco de segmentos circulares cuyo ángulo se consideraba ángulo central en una circunferencia, por lo que ya saben que si dos arcos son iguales entonces deben ser iguales los ángulos centrales que los subtienden.

Propósito

Ⓟ Como primer paso para realizar la comparación, se trazan los ángulos centrales $\sphericalangle BOA$ y $\sphericalangle DOC$, luego se determina que estos ángulos centrales son de igual medida porque $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ (en séptimo se trabajó la longitud de arco de un sector circular).

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

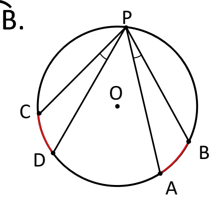
Solución de algunos ítems:

a) Como $\sphericalangle BOA = \sphericalangle COD$.
Por lo tanto, $y = x = \frac{20°}{2} = 10°$.

c) Como $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$.
Por lo tanto, $x = 2(23°) = 46°$.
Por otra parte, $\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$.
Entonces, $y = \sphericalangle DPC = \sphericalangle BPA = 23°$.

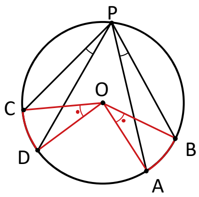
Fecha: **U7 1.7**

Ⓟ Compara la medida del $\sphericalangle BPA$ con el $\sphericalangle DPC$ en la figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



Ⓢ Se construyen los ángulos: $\sphericalangle BOA$ y $\sphericalangle DOC$.

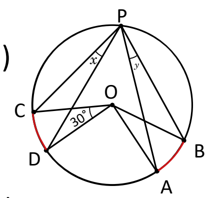
$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$
($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis)



$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$ y
$\sphericalangle DPC = \frac{1}{2}\sphericalangle DOC$
(por ángulo inscrito)

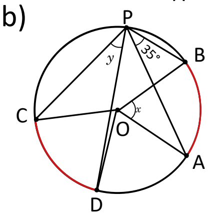
Por lo tanto, $\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC$.

Ⓔ a)



Como
$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$.
Por lo tanto,
$y = x = \frac{30}{2} = 15°$.

b)



Como
$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.
Por otra parte,
$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$.
Entonces,
$y = \sphericalangle DPC = \sphericalangle BPA = 35°$.

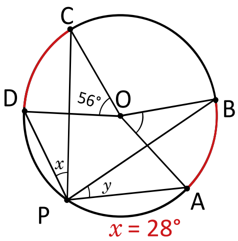
Ⓡ a) $x = y = 10°$ b) $x = y = 16°$
c) $x = 46°$, $y = 23°$ d) $x = 80°$, $y = 40°$

Tarea: página 154 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Practica lo aprendido

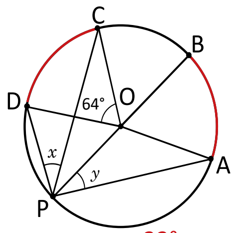
1. Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



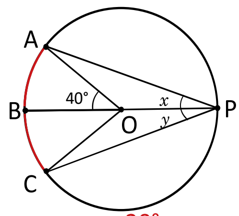
$x = 28°$
$y = 28°$

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



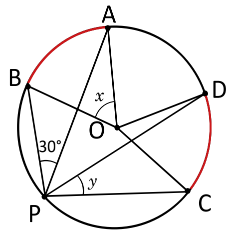
$x = 32°$
$y = 32°$

c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



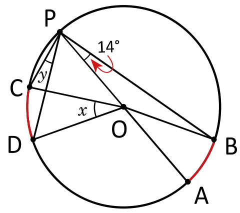
$x = 20°$
$y = 20°$

d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



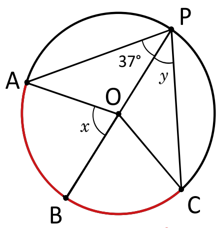
$x = 60°$
$y = 30°$

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



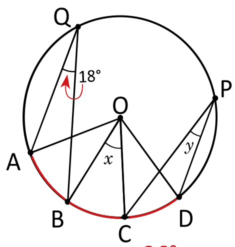
$x = 28°$
$y = 14°$

f) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



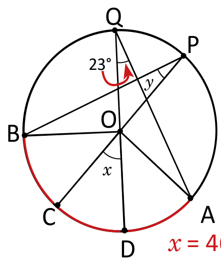
$x = 74°$
$y = 37°$

g) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$



$x = 36°$
$y = 18°$

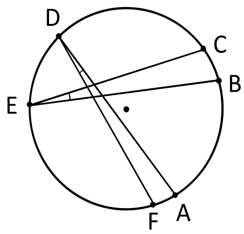
h) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$



$x = 46°$
$y = 23°$

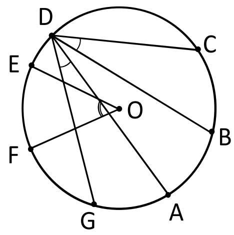
2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que sean de igual medida.

a) ∢ADF = ∢CEB



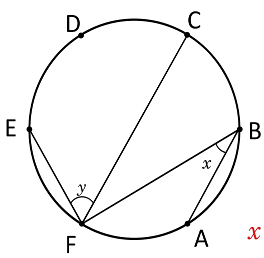
$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CB}$

b) ∢FOE = 2∢CDB y ∢BDC = ∢ADG



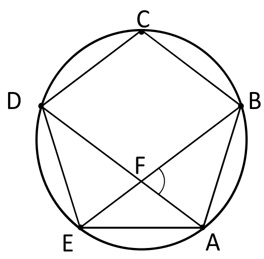
$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AG}$

3. Determina el valor de x y y si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.



$x = 30°$
$y = 60°$

4. En la siguiente figura ABCDE es un pentágono regular, se trazan las diagonales AD y BE. Determina la medida de ∢BFA.



∢BFA = 72°

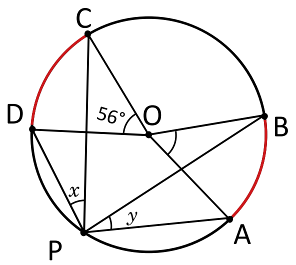
Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

1.

a)



$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$ porque $\widehat{BA} = \widehat{CD}$,

$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC = 56°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Por tanto,

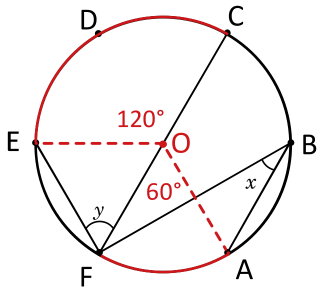
$x = y = \frac{56}{2} = 28°.$

3.

Como son seis arcos iguales entonces los 360° de la circunferencia deben dividirse también en seis ángulos iguales.

$360 \div 6 = 60°$.

Es decir, por cada arco corresponde un ángulo central de 60°.



Como $\sphericalangle COE = 2\sphericalangle CFE$.

Entonces, $\sphericalangle CFE = \frac{1}{2}\sphericalangle COE$.

Por lo tanto, $y = \frac{120°}{2} = 60°$.

Como $\sphericalangle AOF = 2\sphericalangle ABF$.

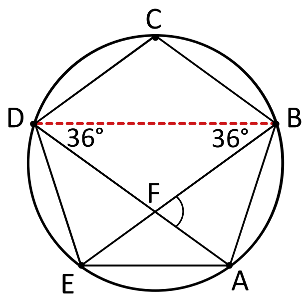
Entonces, $\sphericalangle ABF = \frac{1}{2}\sphericalangle AOF$.

Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2} = 30°$.

4.

Como se tiene un pentágono regular cada uno de los arcos delimitados por sus vértices tienen igual medida. Por tanto, cada arco corresponde a un ángulo central de $\frac{360°}{5} = 72°$. Entonces, $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FDB = \frac{72°}{2} = 36°$.

En el ΔBFD, $\sphericalangle BFA = \sphericalangle FBD + \sphericalangle FDB = 72°$.

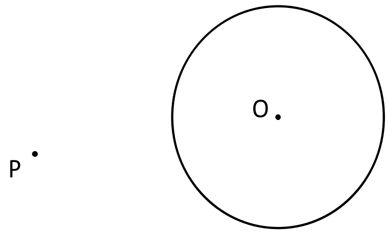


Tarea: página 155 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

P

Dada la siguiente circunferencia y el punto P, construye con regla y compás las rectas que pasan por el punto P y son tangentes a la circunferencia.



S

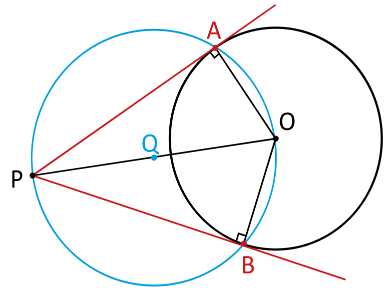
Tomando el punto medio del segmento PO, denotado por Q.

Se traza la circunferencia con centro Q y radio QO.

Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

Entonces, $\sphericalangle OAP = \sphericalangle PBO = 90°$ (ambos subtienden un arco de 180°).

Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.



La recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la tangente a la circunferencia.

C

Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada siguiendo los pasos de la solución.

1. Dibuja otra circunferencia y otro punto P fuera de dicha circunferencia, diferentes a los del inicio de la clase y construye las tangentes a la circunferencia que pasen por el punto P.

2. Con base al ejercicio de la clase responde:

   a) ¿Son iguales los segmento PA y PB?

   b) ¿Por qué?

Puedes aplicar congruencia de triángulos para justificar tu respuesta.

Indicador de logro

2.1 Construye las tangentes a una circunferencia desde un punto fuera de dicha circunferencia.

Secuencia

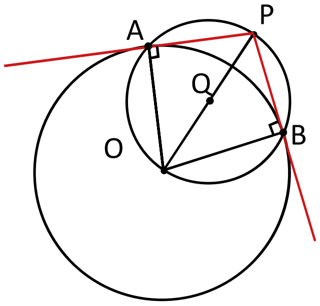
En séptimo grado se presentó por primera vez el concepto de recta tangente a una circunferencia, por lo que los estudiantes ya conocen este tipo de rectas. Para esta clase se construyen dos rectas tangentes de manera que estas pasen por un punto externo a la circunferencia. Además, haciendo uso de la propiedad de ángulos inscritos se concluye que una recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la recta tangente en ese punto.

Propósito

Ⓟ Después de realizar la construcción de las rectas tangentes, se debe señalar la información contenida en el recuadro de recordatorio, en la que se establece que una recta perpendicular a un radio sobre un punto de la circunferencia es una recta tangente.

Solución de algunos ítems:

1.



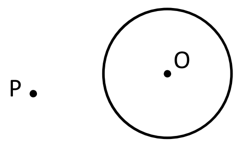
2.

a) Sí

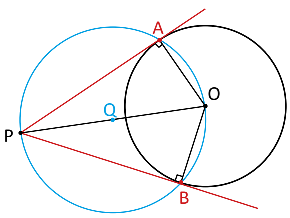
b) Porque los ΔOAP y ΔOBP son triángulos rectángulos y sus hipotenusas y uno de sus catetos que les corresponden a los radios son de igual medida (criterio de congruencia de triángulos rectángulos). Por tanto, PA = PB.

Fecha: **U7 2.1**

Ⓟ Construye las rectas que pasan por P y son tangentes a la circunferencia.



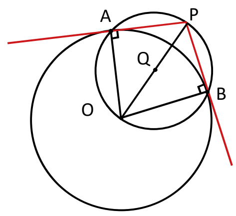
Ⓢ



1. Tomando el punto medio de $\overline{PO}$, denotado por Q, se traza la circunferencia con centro Q y radio $\overline{QO}$.
3. Se marcan los puntos A y B donde se intersecan las circunferencias.
4. Entonces, ∢OAP = ∢PBO = 90° (ambos subtienden un arco de 180°).

Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.

Ⓡ 1.



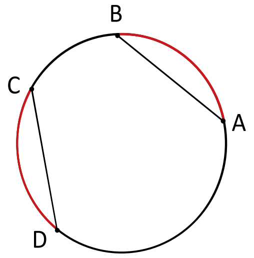
Tarea: página 156 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.



S

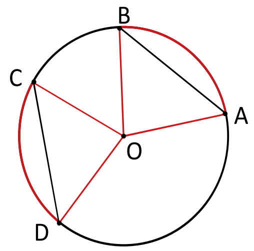
Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

∢BOA = ∢DOC (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LAL).

Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).



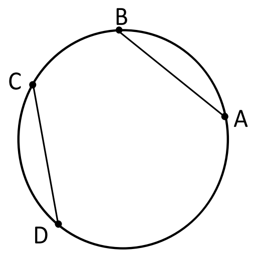
Para aplicar el criterio de congruencia LAL es necesario que dos lados y el ángulo entre ellos sean congruentes.

C

En una circunferencia si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.

E

En la siguiente figura AB = CD. Compara la longitud de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

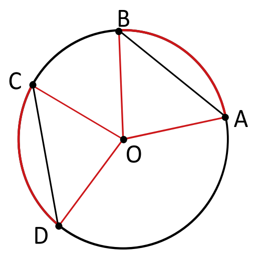


Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

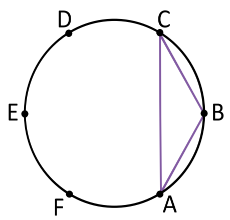
Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LLL).

Luego, ∢BOA = ∢DOC (por la congruencia).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (el ángulo central es igual).



Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal. Observa el ejemplo:



a) ABC BA = BC (porque $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$).
R. ABC es un triángulo isósceles.

b) ABDE c) ACE d) ACD

e) ABCDEF f) DEF g) ABCD

Unidad 7

Indicador de logro

2.2 Utiliza las cuerdas y los arcos congruentes para clasificar figuras con lados iguales.

Secuencia

Anteriormente se han trabajado los criterios de congruencia de triángulos; también se ha mostrado que si 2 arcos tienen igual medida entonces los ángulos centrales que los subtienden tienen igual medida. Lo anterior se usa como herramienta para establecer que en una circunferencia si la medida de 2 arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden es igual.

Propósito

Ⓟ Primero se construyen los ΔBOA y ΔDOC que son isósceles porque cada lado de ellos tiene la misma medida ya que son radios de la circunferencia. Luego por el criterio LAL se determina que los triángulos son congruentes (los lados en color rojo son de igual medida así como el ángulo comprendido entre ellos ya que AB = CD).

Determinar que AB = CD, con una construcción similar a la de los ΔBOA y ΔDOC, con la diferencia que se aplica el criterio LLL para determinar que los triángulos son congruentes ya que como hipótesis se establece que AB = CD. Luego a partir de la congruencia establecida se concluye que los arcos son iguales ya que son subtendidos por ángulos de igual medida.

Solución de algunos ítems:

b) ∢ABD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro).
De la misma manera: ∢BDE = ∢DEA = ∢EAB = 90°.
R. ABDE es un rectángulo.

c) AC = CE = EA (porque AC = CE = EA) ACE es un triángulo equilátero.

d) ∢ACD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro)
R. ACD es un triángulo rectángulo.

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$
∢ABC = ∢BCD = ∢CDE = ∢DEF = ∢EFA
(porque AB = BC = CD = DE = EF = FA)
R. ABCDEF es un hexágono regular.

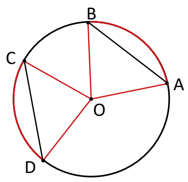
f) DE = EF (porque DE = EF)
R. DEF es un triángulo isósceles.

g) AB = CD (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (porque ∢ACB = ∢DBC como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
R. ABCD es un trapecio isósceles.

Fecha: **U7 2.2**

Ⓟ En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.

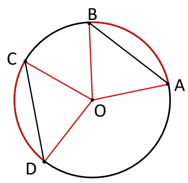
Ⓢ



Trazando los radios OA, $\overset{\frown}{OB}$, $\overset{\frown}{OC}$ y OD.
∢BOA = ∢DOC (porque AB = CD)
OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≌ ΔDOC (por criterio LAL).
Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).

Ⓔ Si AB = CD entonces:



Al trazar OA, OB, OC y OD.
ΔBOA ≅ ΔDOC. (Por LLL)
∢BOA = ∢DOC (por congruencia)
Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
(El ángulo central es igual)

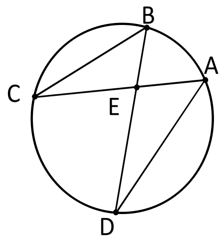
Ⓡ b) AB = DE y AE = BD
(porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$)
R. ABDE es un rectángulo.

Tarea: página 157 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

P

En la siguiente figura determina si se cumple que el ΔAED ~ ΔBEC.



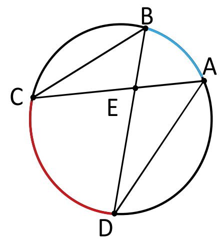
S

En la figura ∢AED = ∢BEC (son opuestos por el vértice).

∢DBC = ∢DAC (subtienden el mismo arco).

Pero ∢EBC = ∢DBC y ∢DAE = ∢DAC.

Por lo tanto, ΔAED ~ ΔBEC (por criterio AA).



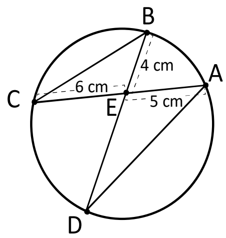
Para aplicar el criterio AA solo es necesario que dos ángulos sean congruentes.

C

Para determinar semejanza entre triángulos es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

E

En la siguiente figura determina la medida del segmento ED.



Como ΔAED ~ ΔBEC .

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

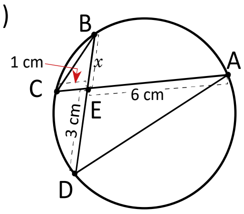
Por lo tanto, ED = EC × $\frac{AE}{BE}$ = 6 × $\frac{5}{4}$ = 7.5.

ED = 7.5 cm

Cuando dos triángulos son semejantes, la razón entre sus lados homólogos se mantiene constante.

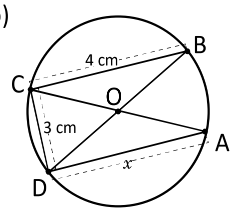
1. Determina x en las siguientes figuras:

a)



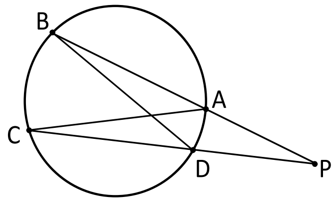
x = 2 cm

b)



x = 4 cm

2. En la siguiente figura determina qué condiciones son necesarias para que ΔACP ~ ΔDPB.



¿Es necesario algo más?

Indicador de logro

2.3 Resuelve problemas con triángulos semejantes utilizando el teorema del ángulo inscrito.

Secuencia

Anteriormente se ha trabajado el teorema de los ángulos opuestos, y se determinó si dos triángulos son semejantes. De igual manera en la clase 1.7 de esta unidad los estudiantes aprendieron que dos ángulos inscritos tienen la misma medida si subtienden arcos de igual medida. Por lo que en esta clase se usan esos hechos para demostrar que para determinar la semejanza entre triángulos como los del Problema inicial es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Propósito

Ⓟ Después de realizar la semejanza de los triángulos, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

Ⓢ Después de realizar la semejanza de los triángulos, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (por criterio de semejanza AA).

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por lo tanto,

$BE = x = AE \times \frac{EC}{ED} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$x = 2$ cm

b) En los triángulos ΔADC y ΔBCD, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 90°$, $CA = DB$ y $\overline{CD}$ es común.

Por lo tanto, $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

Luego $x = BC = 4$

$x = 4$ cm

2. En los ΔACP y ΔDBP, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP$ (por ser ángulos inscritos subtendidos por $\overset{\frown}{AD}$), $\sphericalangle P$ es común.

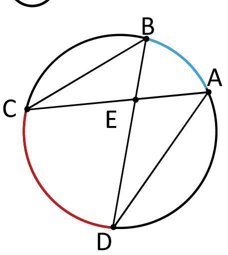
Por lo tanto, $\Delta ACP \sim \Delta DBP$ (Por el criterio de semejanza AA).

No se hacen necesarias otras condiciones.

Fecha: **U7 2.3**

Ⓟ En la figura determina si se cumple que el $\Delta AED \backsim \Delta BEC$.

Ⓢ

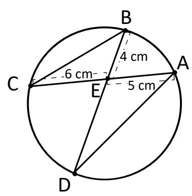


En la figura $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$.
(Son opuestos por el vértice)
$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$.
(Subtienden el mismo arco)

Pero $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ y $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$

Por lo tanto, $\Delta AED \sim \Delta BEC$.
(Por criterio AA).

Ⓔ En la figura $\Delta AED \backsim \Delta BEC$



Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por tanto, $ED = EC \times \frac{AE}{BE}$
$= 6 \times \frac{5}{4}$
$= 7.5$

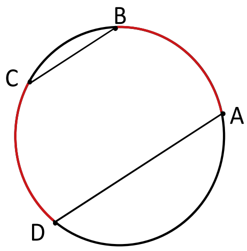
Ⓡ 1.
a) $x = 2$ cm
b) $x = 4$ cm

Tarea: página 158 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Paralelismo

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.

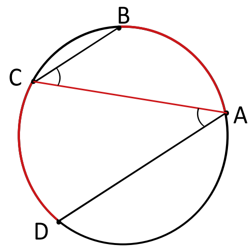


S

Trazando la cuerda AC.

Entonces, $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

Por lo tanto, BC ∥ AD (los ángulos alternos internos son iguales).

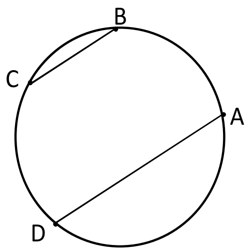


C

En una circunferencia, si se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.

E

Compara los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ de la circunferencia, si BC ∥ AD.

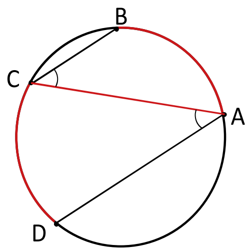


Trazando la cuerda AC.

$\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (teorema del ángulo inscrito).

Este resultado es el recíproco del ejercicio inicial.



Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ b) $\measuredangle DBC = \measuredangle BDA$ c) CB = DA d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$

e) AB = BC f) $\measuredangle ACD = \measuredangle ADB$ g) AC = BD h) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

Unidad 7

155

Indicador de logro

2.4 Utiliza arcos congruentes para determinar el paralelismo entre cuerdas.

Secuencia

Ahora se establece que si en una circunferencia se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el final de un arco y el inicio del otro son paralelas.

En octavo grado, se trabajaron las condiciones de paralelismo entre dos rectas. En el problema se hace la construcción de $\overline{AC}$ y como ∢ACB = ∢CAD (por subtender arcos iguales) se determina que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos (∢ACB y ∢CAD son alternos internos). Además en la clase 1.7 se determinó que si 2 arcos tiene la misma medida entonces los ángulos inscritos que los subtienden tienen la misma medida.

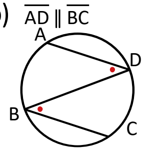
Propósito

Ⓟ En el Ejemplo se trabaja el recíproco de la propiedad en la Conclusión, es decir, a partir de que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ determinar que AB = CD.

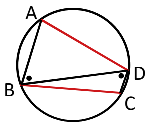
Solución de algunos ítems:

Condiciones suficientes (b, c, d, g y h):

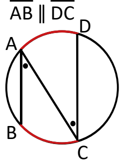
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



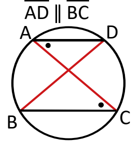
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

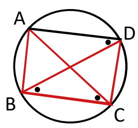


g) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



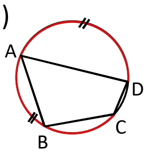
Si AC = BD entonces, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

h) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



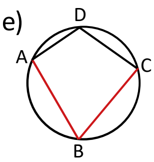
Condiciones no suficientes (a, e y f):

a)



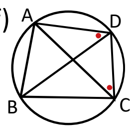
El punto B podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

e)



El punto D podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

f)

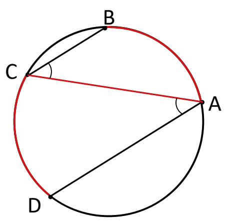


El punto C podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{BD}$.

Fecha: **U7 2.4**

Ⓟ En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.

Ⓢ

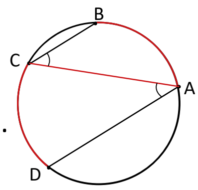


Trazar la cuerda AC.

Entonces, ∢BCA = ∢DAC. (Dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)

Por lo tanto, BC ∥ AD.
(Los ángulos alternos internos son iguales).

Ⓔ Si BC ∥ AD:



Trazando la cuerda AC.

∢BCA = ∢DAC
(ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
(teorema del ángulo inscrito).

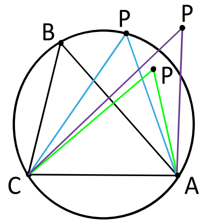
Ⓡ b), c), d), g) y h)

Tarea: página 159 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

P

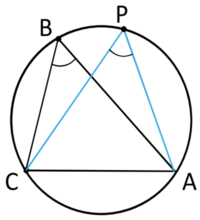
Considerando ∢ABC = ∢APC y que ambos ángulos comparten el segmento AC. Demuestra que los puntos A, B, C y P están en una misma circunferencia.



S

El punto P tiene 3 opciones, sobre, dentro o fuera la circunferencia.

Opción 1

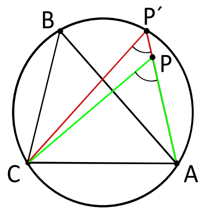


En este caso:

∢**ABC = **∢**APC**.

Por lo tanto, A, B, C y P deben estar en una misma circunferencia.

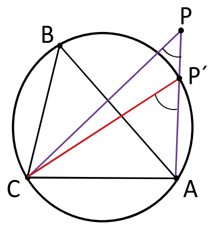
Opción 2



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C < ∢APC
Dado que ∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP

Por lo tanto, ∢**ABC <** ∢**APC**.

Opción 3



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.
Dado que ∢AP´C = ∢APC + ∢PCP'.

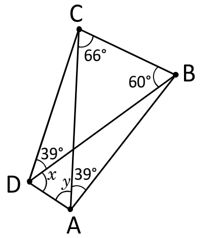
Por lo tanto, ∢**ABC >** ∢**APC**.

C

Si dos ángulos iguales, además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

E

Determina el valor de x y y.

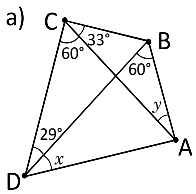


Como ∢CAB = ∢CDB y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

Se debe cumplir que ∢**BCA =** ∢**BDA**, entonces x = 66°.
Y además se debe cumplir que ∢**CBD =** ∢**CAD**, entonces y = 60°.

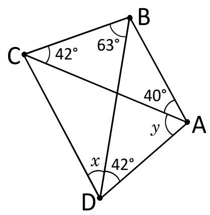
Determina el valor de x y y.

a)



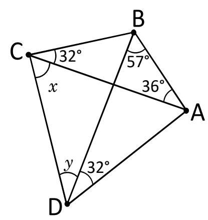
x = 33° y y = 29°

b)



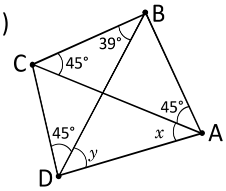
x = 40° y y = 63°

c)



x = 57° y y = 36°

d)



x = 39° y y = 45°

Indicador de logro

2.5 Determina las condiciones para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia.

Secuencia

Para esta clase se determina que si dos ángulos son iguales y comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia. Para esto se analizan los resultados obtenidos a partir de la posición que ocupa un punto P en la circunferencia (dentro, sobre y fuera de ella).

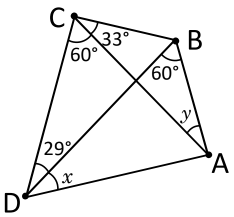
Propósito

Ⓟ La redacción del Problema inicial debe ser: Sean A, B y C puntos fijos sobre la circunferencia y P otro punto que puede estar dentro, sobre o fuera de la circunferencia. Si ∢ABC = ∢APC se cumple y ambos ángulos comparten el segmento AC, demostrar que el punto P está sobre la misma circunferencia.

Ⓢ En la solución se abordan los tres casos que se pueden dar, para determinar que cuando el punto no está sobre la circunferencia los ángulos tienen diferente medida.

Solución de algunos ítems:

a)



Como ∢ACD = ∢ABD y ambos comparten el segmento DA, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

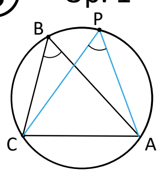
Como ∢ADB y ∢ACB subtienden el mismo arco entonces:
x = ∢ADB = ∢ACB = 33

Luego, como ∢BAC y ∢BDC subtienden el mismo arco entonces:
y = ∢BAC = ∢BDC = 29
x = 33° y y = 29°

Fecha: **U7 2.5**

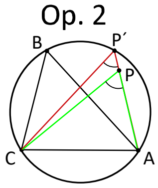
Ⓟ Si A, B y C están fijos sobre la circunferencia y P puede estar dentro, sobre o fuera de ella. Si ∢ABC = ∢APC y comparten $\overline{AC}$. Demostrar que P está sobre la circunferencia.

Ⓢ Op. 1



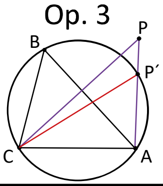
En este caso:
∢ABC = ∢APC.

Op. 2



∢ABC = ∢AP'C.
∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP > ∢AP'C.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C < ∢APC.

Op. 3



∢ABC = ∢AP'C.
∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' > ∢APC.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.

Ⓔ Determinando x y y.
∢CAB = ∢CDB y
comparten $\overline{CB}$.
A, B, C y D están sobre una misma circunferencia.
∢BCA = ∢BDA, x = 66°
∢CBD = ∢CAD, y = 60°

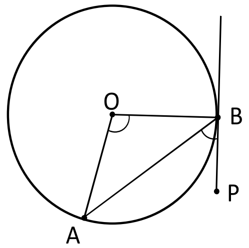
Ⓡ a) x = 33° y y = 29°
b) x = 40° y y = 63°
c) x = 57° y y = 36°
d) x = 39° y y = 45°

Tarea: página 160 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Ángulo semiinscrito

P

Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la siguiente figura.



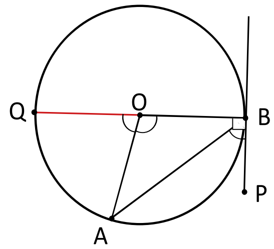
S

Se traza el diámetro QB.

Entonces, ∢AOQ = 2∢ABO (teorema del ángulo inscrito).

También, ∢AOQ = 180° – ∢BOA (ángulo suplementario).

Luego 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$.



Por lo tanto, ∢PBA = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA (por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

C

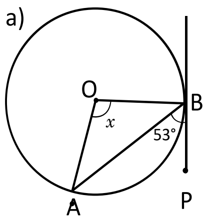
El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**.

En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito, es igual a la mitad de la medida del ángulo central, que subtiende el mismo arco que la cuerda.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

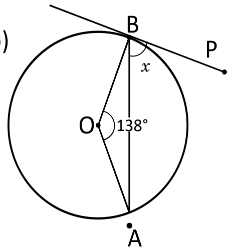
a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.

Por lo tanto, x = 2(53°) = 106°.

b)

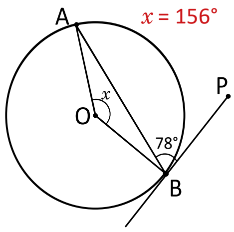


Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

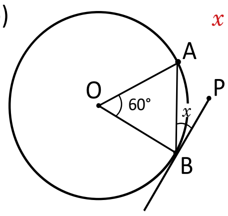
Por lo tanto, x = $\frac{138°}{2}$ = 69°.

Determina el valor de x para cada caso:

a) x = 156°



b) x = 30°



Unidad 7

Indicador de logro

2.6 Determina las medidas de ángulos semiinscritos utilizando la medida del ángulo central.

Secuencia

Se introduce el término de ángulo semiinscrito así como la propiedad referente a su medida. Para tal caso, se construye una situación similar a la presentada en el Problema inicial de la clase 1.3 (es decir, que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito) como un primer paso en la estrategia para hacer la deducción formal de la propiedad.

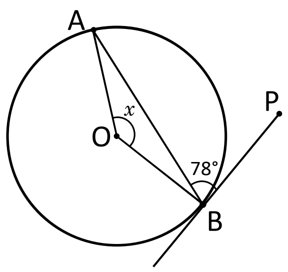
Propósito

Ⓟ Haciendo uso del teorema del ángulo inscrito y la condición de ángulos suplementarios, realizar la comparación de los ángulos. En un primer momento se hace la construcción auxiliar del diámetro QB para construir un ángulo inscrito similar al del caso 1 de la Solución de la clase 1.2.

Ⓢ Señalar la importancia de las construcciones auxiliares (que en este caso fue la del diámetro) para poder realizar algunas demostraciones en geometría.

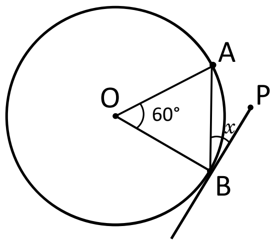
Solución de algunos ítems:

a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.
Por lo tanto, x = 2(78°) = 156°
x = 156°.

b)

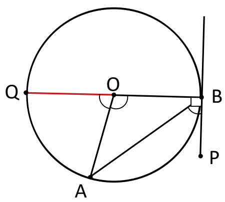


Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2} = 30°$
x = 30°.

Fecha: **U7 2.6**

Ⓟ Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la figura.

Ⓢ



Se traza el diámetro QB.

∢AOQ = 2∢ABO.
(Teorema del ángulo inscrito)

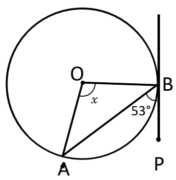
∢AOQ = 180° – ∢BOA.
(Ángulo suplementario)

2∢ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$

Por lo tanto, ∢PBA = 90° – ∢ABO = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA. (Por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

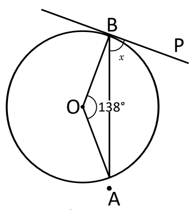
Ⓔ Determinando x para cada caso.

a)



∢BOA = 2∢PBA
Por tanto,
x = 2(53°) = 106°.

b)



∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA
Por lo tanto,
$x = \frac{138°}{2} = 69°$.

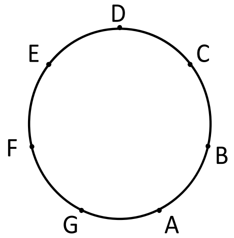
Ⓡ
a) x = 156°
b) x = 30°

Tarea: página 161 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Practica lo aprendido

1. Dibuja una circunferencia y un punto P fuera de ella, construye con regla y compás las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto P.

2. Los puntos A, B, C, D, E, F, G dividen la circunferencia en 7 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal.



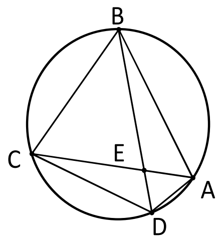
a) ABC
Triángulo isósceles
AB = BC

b) ACDF
Trapecio isósceles
CD ∥ AF y AC = FD

c) ADG
Triángulo isósceles
AD = DG

d) ABCDEFG
Heptágono regular
Los lados y los ángulos son congruentes respectivamente.

3. En la siguiente figura A, B, C, D están en una circunferencia. Responde:



a) ¿Cómo son los ángulos ∢EAB y ∢EDC?

b) ¿Cómo son los ángulos ∢ABE y ∢ACD? ¿Por qué?

c) ¿Cómo son los triángulos ΔABE y ΔDCE? ¿Por qué?

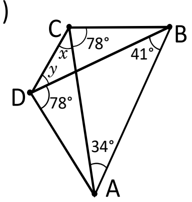
4. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos haya al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ b) ∢CAB = ∢CDB c) AC = AD d) ΔABC ~ ΔCDA

2.8 Practica lo aprendido

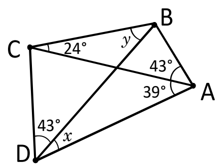
Determina el valor de x o y, según corresponda.

a)



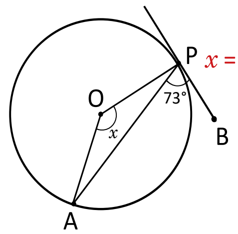
$x = 41°$
$y = 34°$

b)



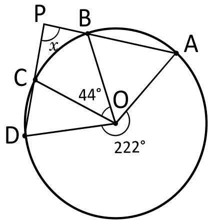
$x = 24°$
$y = 39°$

c)



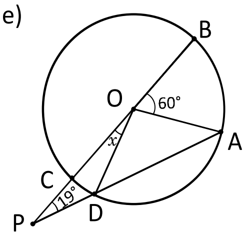
$x = 146°$

d)



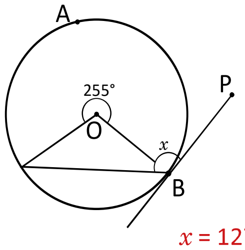
$x = 89°$

e)



$x = 22°$

f)



$x = 127.5°$

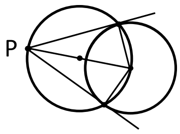
Indicador de logro

2.7 y 2.8 Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

Clase 2.7

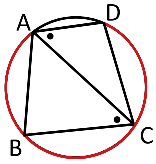
1. Un ejemplo de solución puede ser:



3.
a) ∢EAB = ∢EDC porque ambos subtienden a $\overset{\frown}{BC}$.
b) ∢ABE = ∢ACD porque ambos coinciden con ángulos inscritos que subtienden a $\overset{\frown}{AD}$.
c) ΔABE es semejante al ΔDCE porque 2 de sus ángulos son iguales (AA).

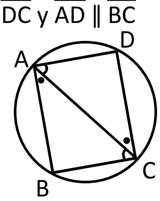
4.
Condiciones suficientes:

a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ entonces $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
Por tanto, ∢ACB = ∢CAD.

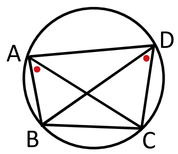
d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Como ΔABC ~ ΔCDA
entonces,
∢CAB = ∢ACD, ∢BCA = ∢DAC.

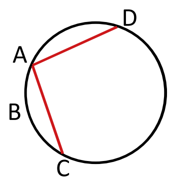
Condiciones no suficientes:

b)



El punto D podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

c)



El punto B podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

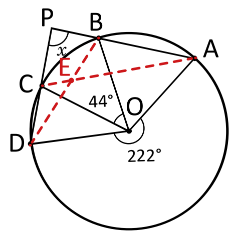
Clase 2.8

a) Como ∢ADB = ∢ACB y ambos comparten el segmento AB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.
Como ∢ACD y ∢ABD subtienden el mismo arco entonces:
x = ∢ACD = ∢ABD = 41°
Luego, como ∢BAC y ∢BDC subtienden el mismo arco entonces:
y = ∢BDC = ∢BAC = 34°

x = 41° y y = 34°

Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

d)



Primero se trazan $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.
Como ∢AOD = 222° es central entonces los ángulos inscritos: ∢ABD = ∢ACD = 111° porque los dos subtienden al $\overset{\frown}{AD}$. Luego ∢BOC = 44° es central entonces el ángulo inscrito ∢CAB = 22° porque ambos subtienden al $\overset{\frown}{BC}$.
También:
∢ACP = 180° – ∢ACD
= 180° – 111°
= 69°
porque los ángulos están sobre $\overline{DP}$.
Por último:
22 + 69 + x = 180
x = 89°