Unidad 1

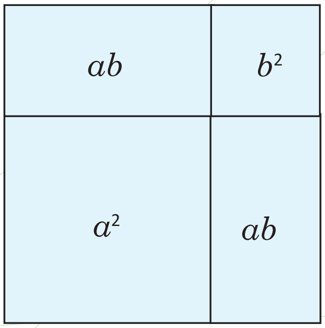
Multiplicación de polinomios

Página del libro escrito por Al-Juarismi.

La palabra "álgebra" procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi, matemático árabe nacido alrededor del 825 a.C., sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-<abr wa'l muqqabala*, que significa "ciencia de la transposición y la reducción", donde el término "la-yabr" se convirtió en "álgebra", sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.

En el libro II de *Los elementos* del griego Euclides se explora la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.



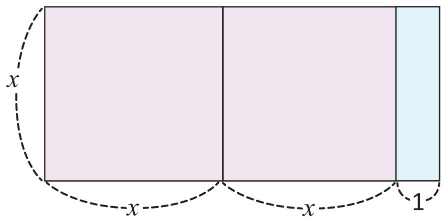
Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de Los elementos *de Euclides.*

El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.

En el abordaje de esta unidad desarrollarás productos de polinomios por polinomios, además de utilizar los productos notables y métodos geométricos para factorizar expresiones algebraicas.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



En potenciación se cumple que
$a \times a = a^2$

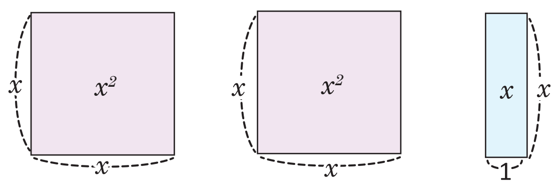
Primera forma:

La altura del rectángulo es x, mientras que su base es:
$x + x + 1 = 2x + 1$. El área del rectángulo formado por las tres piezas es: $x(2x + 1)$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un término o por la suma de dos o más términos. Un **monomio** es el polinomio formado por un solo término.

Segunda forma:

Dividiendo el rectángulo en tres piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:

$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x$.

Por tanto, el área del rectángulo también es: $2x^2 + x$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo, podemos decir, por tanto:
$x(2x + 1) = 2x^2 + x$.

Realizando el producto:
Lo anterior también pudo encontrarse algebraicamente multiplicando x por cada uno de los términos del polinomio $2x + 1$:

$$\begin{aligned} x\,(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

A este proceso se le llama: **desarrollo**.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy\,(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

   a) $x(3x + 2)$ b) $2x(x + y)$

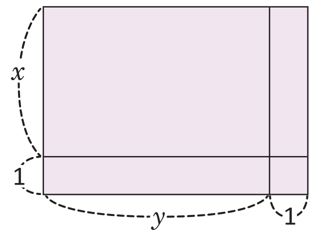
2. Desarrolla los siguientes productos:

   a) $-x(xy + x)$ b) $-3y(x - y)$ c) $(xy + x)xy$ d) $xy(xy + x + y)$

1.2 Binomio por binomio, parte 1

P

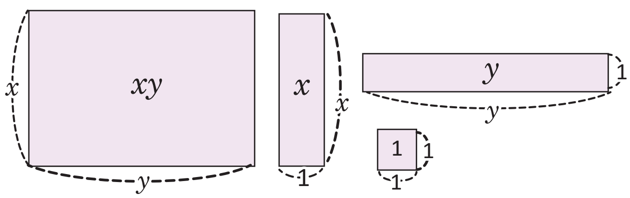
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $y + 1$ y su base es $x + 1$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(y + 1)$.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$xy + x + y + 1$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$xy + x + y + 1$.

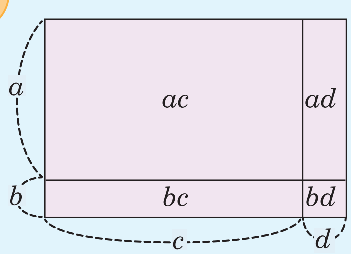
En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Al polinomio formado por dos términos se le llama: **binomio**.

Realizando el producto:
Lo anterior puede encontrarse multiplicando cada término del primer binomio por cada uno de los términos del segundo, es decir:

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

Desarrolla el producto: $(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$.

Los términos $4xy$ y $3xy$ son semejantes, pues tienen la misma parte literal xy. Para sumarlos, se suman sus coeficientes 4 y 3, conservando la parte literal.

Desarrolla:

a) $(2x + 1)(y + 1)$

b) $(2x + 3)(3y + 2)$

c) $(xy + 3x)(y + 1)$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$

e) $(x + 1)(x + y)$

f) $(2x + 3)(x + y)$

1.3 Binomio por binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(2x - 1)(y + 3)$.

La resta $a - b$ puede escribirse como una suma:

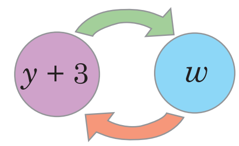
$$a - b = a + (-b)$$

S

Se debe tener en cuenta el signo (−) del primer binomio. El producto puede desarrollarse de las siguientes formas:

1. Se escribe $2x - 1$ como una suma: $2x + (-1)$. El producto se desarrolla como en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= [2x + (-1)](y + 3)\\ &= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x + (-y) + (-3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$



2. Se toma $y + 3 = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= 2x(w) - 1(w) && \text{Tomando } w = y + 3,\\ &= 2x(y + 3) - (y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente } y + 3 = w,\\ &= 2xy + 6x - y - 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2xy + 6x - y - 3$.

C

Para resolver el producto de un binomio por otro se puede hacer de 2 formas:

1. Se escribe $a - b = a + (-b)$ y luego se desarrolla el producto.

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= [a + (-b)]\,(c + d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

2. Se toma $c + d = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio.

E

Desarrolla: $(3x - 5)(2y - 4)$.

Se escribe el primer término como $3x + (-5)$ y el segundo término como $2y + (-4)$:

$$\begin{aligned}(3x - 5)(2y - 4) &= [3x + (-5)][2y + (-4)]\\ &= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)\\ &= 6xy - 12x - 10y + 20\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 5)(2y - 4) = 6xy - 12x - 10y + 20$.

Desarrolla:

a) $(x + 1)(y - 1)$

b) $(x - 1)(y - 1)$

c) $(2x + 2)(-y + 2)$

d) $(-x - 2)(2y - 3)$

e) $(xy - x)(y + 10)$

f) $(2xy - y)(5x - 3)$

1.4 Binomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x + 2)(xy + y + 1)$.

El polinomio $xy + y + 1$ se llama **trinomio**, ya que posee tres términos, $(x + 2)(xy + y + 1)$ es el producto de un binomio por un trinomio.

S

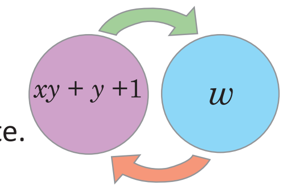
El producto puede desarrollarse de las siguientes maneras:

1. Multiplicando cada término del binomio por cada uno de los términos del trinomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ (x + 2)(xy + y + 1) &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

2. Se toma $xy + y + 1 = w$, y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w) && \text{Tomando } xy + y + 1 = w,\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2 && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$



Por lo tanto, $(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$.

C

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

E

Desarrolla $(2x - 1)(2x - y + 3)$ de las dos formas dadas en la conclusión.

1. Primero, se escribe $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

2. Se sustituye $w = 2x - y + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w && \text{Tomando } w = 2x - y + 3,\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

Desarrolla de la forma que más se te facilite:

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$ b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$ c) $(2x - 3)(x - y - 4)$

1.5 Trinomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x - y + 1)(x + y + 3)$.

¿Deben multiplicarse cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo?

S

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

C

En el producto de un trinomio por un trinomio, se multiplica cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes.

E

Desarrolla el producto: $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$.

Como en el Problema inicial, se debe multiplicar cada término del primer trinomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$

1.6 Practica lo aprendido

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

   a) $x(y + 3)$

   b) $(x + 2)(y + 1)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

   Monomio por binomio:

   a) $(-x)(y - 5)$

   b) $(4x)(xy + y)$

   c) $(-xy)(x - y)$

   d) $(-3xy + 2y)(-xy)$

   Binomio por binomio:

   a) $(y + 2)(2x + 1)$

   b) $(x + 1)(xy + y)$

   c) $(2x - 5)(y + 4)$

   d) $(xy + 3)(x - y)$

   Binomio por trinomio:

   a) $(x + 3)(3xy + 2x + 4y)$

   b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$

   c) $(xy - 1)(-10xy + 3x + 2y)$

   d) $(2x - 3y)(-xy + 4x - 5y)$

   Trinomio por trinomio:

   a) $(x + y + 1)(x - y + 2)$

   b) $(2x + 5y - 3)(-xy + 3x + 3)$

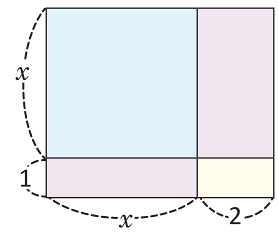
   c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$

   d) $(2xy + 3y - 6)(5xy + 2y + 10)$

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

P

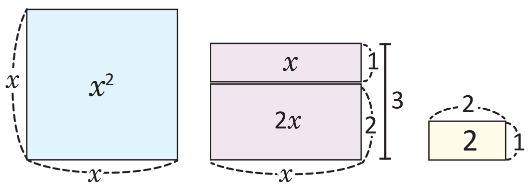
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(x + 2)$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.

Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

C

El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

E

Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

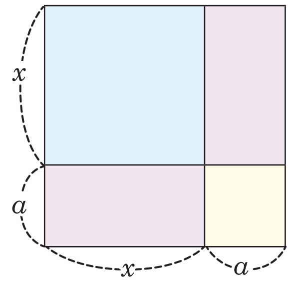
Desarrolla:

a) $(x + 3)(x + 5)$
b) $(x + 4)(x - 5)$
c) $(x - 5)(x + 2)$
d) $(y - 1)(y + 2)$
e) $(y - 2)(y - 3)$
f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:

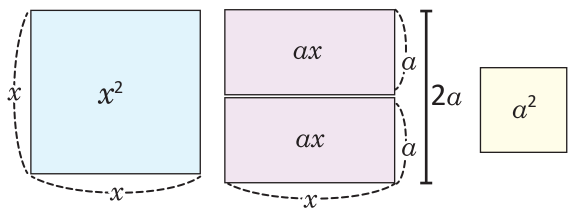


El área de un cuadrado de lado l es igual a l^2.

S

Primera forma: El lado del cuadrado formado por las cuatro piezas es $x + a$, por tanto su área será igual a $(x + a)^2$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:

$$x^2 + 2ax + a^2.$$

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Realizando el producto:
El producto $(x + a)^2$ también puede desarrollarse algebraicamente, utilizando lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

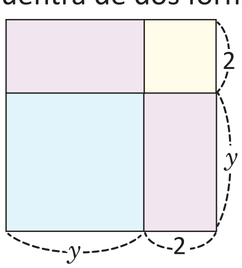
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Por ejemplo:

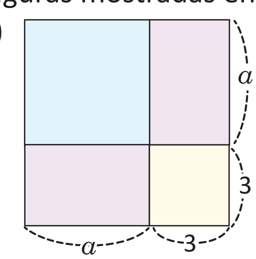
$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las figuras mostradas en cada literal:

a)



b)



2. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$

d) $(x + \frac{1}{4})^2$

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(x - a)^2$.

$(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

S

Se escribe $(x - a)^2$ como $[x + (-a)]^2$ y se utiliza lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2\\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a)\\ &= a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ ....(1)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ ....(2)}$$

E

Desarrolla:

$(x - 2)^2$

Utilizando el caso (2) del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Desarrolla:

a) $(x - 1)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(x - 4)^2$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$

e) $(x - \frac{1}{4})^2$

f) $(x - \frac{1}{3})^2$

2.4 Suma por la diferencia de binomios

P

Desarrolla el producto: $(x + a)(x - a)$.

S

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$ y luego se desarrolla:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)] \\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a) \\ &= x^2 + (0)x - a^2 \\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

En la solución:
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
Es decir, este producto se desarrolla de forma diferente al cuadrado de un binomio.

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

C

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma: $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

E

Desarrolla:

$$(x - 2)(x + 2)$$

Utilizando suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2 \\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

1. Desarrolla:
   a) $(x + 1)(x - 1)$
   b) $(x + 3)(x - 3)$
   c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$
   d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$

2. Desarrolla los siguientes productos:
   a) $(y - 8)(y - 10)$
   b) $(x + 11)^2$
   c) $(y - 9)^2$
   d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

P

Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$.

¿Puede realizarse el producto de forma similar a $(x + a)^2$?

S

Se toman $3x = w$, $4y = z$ y se desarrolla el producto como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 4y = z,\\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w \text{ por } 3x \text{ y } z \text{ por } 4y.\end{aligned}$$

Por tanto, $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

C

Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

E

Desarrolla, aplicando productos notables:

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

Ambos binomios tienen el término $2x$. Se toma $2x = w$ y se desarrolla el producto de la misma forma que lo visto en la clase 1:

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) && \text{Tomando } 2x = w,\\ &= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\ &= w^2 + 4w + 3 \\ &= (2x)^2 + 4(2x) + 3 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x.\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$.

Desarrolla:

a) $(5x - 3y)^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$

2.6 Combinación de productos notables

P

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

¿Qué productos notables están involucrados en ambos literales? Por ejemplo, los trinomios del primer literal tienen en común la suma $x + y$.

S

a) Ambos trinomios tienen en común la suma $x + y$, y el número 1 es positivo en el primero y negativo en el segundo. Se toma $x + y = w$ y el producto se desarrolla como una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && \text{Tomando } x + y = w,\\ &= w^2 - 1^2 \\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

b) Los productos involucrados son cuadrados de un binomio y productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Después de desarrollar ambos, se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$.

C

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identificar cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarrollar los productos teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reducir los términos semejantes, si los hay.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$

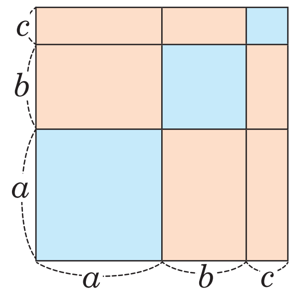
d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$

e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

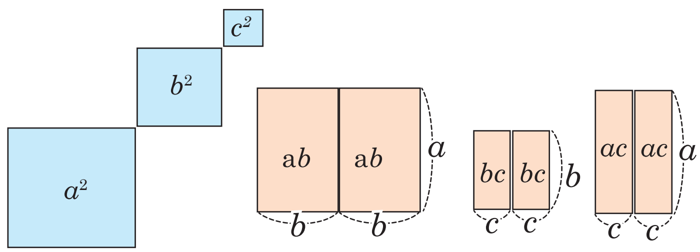
f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

2.7 Cuadrado de un trinomio

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



Primera forma: Como se trata de un cuadrado de lado $a + b + c$ su área se expresa como $(a + b + c)^2$.
Segunda forma: Se divide el cuadrado en piezas iguales y se tienen sus áreas respectivas:



Como se muestra en la imagen, la suma de las áreas de cada pieza es:

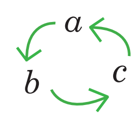
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Realizando el producto: Se toma $b + c = w$ y se desarrolla como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + w)^2 && \text{Tomando } b + c = w,\\ &= a^2 + 2aw + w^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w = b + c.\\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2\\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc)\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Por tanto: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Al desarrollar este producto es común colocar su desarrollo en este orden:



El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Desarrolla: $(5x - 3y + 4)^2$.

El trinomio $5x - 3y + 4$ puede escribirse como $5x + (-3y) + 4$. Luego, el cuadrado se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2\\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)^2$

b) $(2x + y + 3)^2$

c) $(3x - 2y + 5)^2$

d) $(x - 5y - 1)^2$

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

P

¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

¿En cuál producto notable están involucradas las expresiones $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, ab?

S

En el problema NO se pretende encontrar los valores de a y b, sino de $(a + b)^2$. Observa que $a^2 + b^2$ y ab corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En una suma, el orden de los sumandos no altera el total: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Se sustituyen los valores en lo anterior:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

E

Calcula 98 × 102 usando productos notables.

Los números 98 y 102 pueden escribirse como 100 − 2 y 100 + 2, respectivamente:

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$

Lo anterior es una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10\,000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9\,996\end{aligned}$$

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto: $(100 - 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 - 2)$.

1. Resuelve lo siguiente:

   a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 34$ y $ab = 15$?

   b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a - b = 2$ y $a^2 - b^2 = 16$?

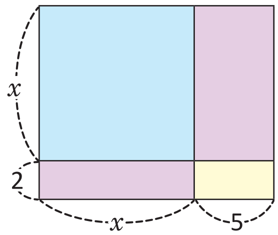
2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

   a) 97 × 103 b) 95 × 105 c) 102^2 d) 105^2

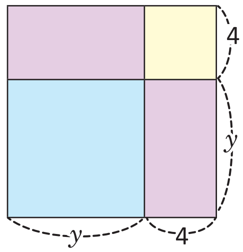
2.9 Practica lo aprendido

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las siguientes figuras:

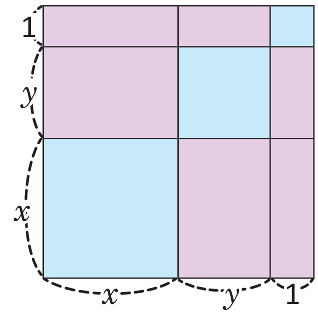
a)



b)



c)



2. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $(x + 1)(x + 9)$

b) $(x + 3)(x - 6)$

c) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{3}{6})$

d) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{3}{2})$

e) $(y - 1)(y + 2)$

f) $(x - 4)(x - 2)$

3. Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios:

a) $(x + 6)^2$

b) $(y - 6)^2$

c) $(x + \frac{1}{5})^2$

d) $(y - \frac{1}{4})^2$

e) $(x + 5)^2$

f) $(y - 2)^2$

g) $(x + 2)^2$

h) $(y - \frac{1}{3})^2$

4. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(x + 10)(x - 10)$

c) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$

d) $(y - \frac{2}{3})(y + \frac{2}{3})$

e) $(x + 4)(x - 4)$

f) $(x + 9)(y - 9)$

2.10 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(6x - 10)(6x - 2)$

b) $(\frac{x}{2} + 2)(\frac{x}{2} + 4)$

c) $(5x - 6y)^2$

d) $(6x + 10y)^2$

e) $(2x - 3)(2x - 1)$

f) $(5x - 3y)^2$

g) $(\frac{y}{3} - 3)^2$

h) $(2x + \frac{1}{2})(2x - \frac{1}{2})$

2. Desarrolla:

a) $(2x + y + 2)(2x + y - 2)$

b) $(x + y)(x - y) + (x + y)^2$

c) $(2x - 3)^2 - (5y - 1)(5y + 2)$

d) $(y^2 + 1)(y^2 - 1) - (y^2 + 1)^2$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

f) $(4x - 2y - 6)^2$

3. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$, si $a^2 + b^2 = 104$ y $ab = 20$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a - b$, si $a + b = 8$ y $a^2 - b^2 = 32$?

c) ¿Cuál es el valor numérico de xy, si $x + y = 6$ y $x^2 + y^2 = 1$?

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando productos notables:

a) 101^2

b) 102×101

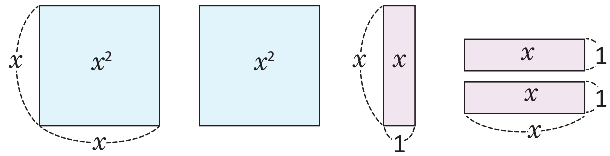
c) 49×51

d) 99^2

3.1 Factorización de polinomios

P

Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:

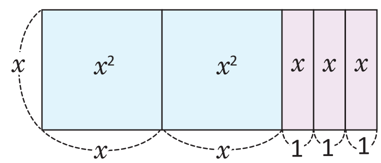


Las piezas azules son cuadrados de lado x; mientras que las piezas moradas son rectángulos de altura x y base 1.

a) ¿Cómo quedará el rectángulo?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido por Antonio?

S

a) El lado de los cuadrados azules es igual a la altura de los rectángulos morados (ambos miden x). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b) El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea, $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$.
c) Las medidas de la altura y la base son:

Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

El área del rectángulo formado por las piezas se calcula como Altura × Base.

C

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$; a cada uno de los polinomios x y $2x + 3$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

Factorizar

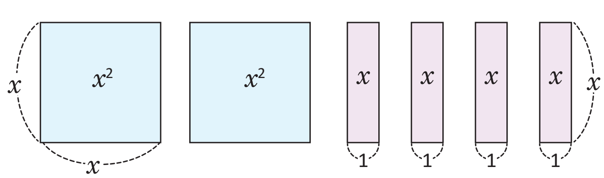
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Desarrollar

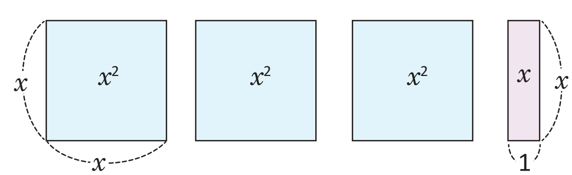
En la lección anterior, se daban las dimensiones del rectángulo para encontrar su área; ahora se da el área total para encontrar las dimensiones.

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

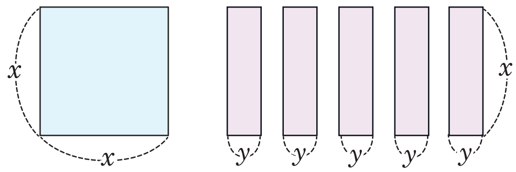
a) $2x(5x - 3)$ b) $-x(3x + 2)$ c) $(x + 4)(2x - 3)$ d) $3x(x - 5)(2x - 1)$

3.2 Factor común

Realiza lo siguiente:

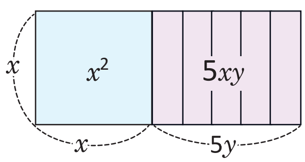
a) Escribe en tu cuaderno el área descrita por las piezas.

b) Forma un rectángulo y escribe su área en términos de su altura y su base.



a) El área de las piezas es: $x^2 + 5xy$.

b) El área del rectángulo es:



Altura $\longrightarrow$ x

Base $\longrightarrow$ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

Su área es: $x(x + 5y)$.

Para factorizar la expresión, se debe escribir $x^2 + 5xy$ como producto de polinomios más simples. Observa lo siguiente:

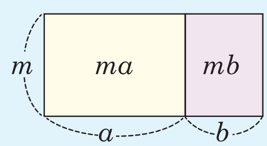
$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

Ambos términos tienen en común el monomio x. Entonces:

$$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y) \longrightarrow \text{Identificar términos comunes.}$$
$$= x(x + 5y) \longrightarrow \text{Propiedad distributiva.}$$

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio, utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



Factoriza el polinomio:

$$5y^2 - 10xy$$

¿Qué tienen en común los términos $5y^2$ y $5xy$?

Se debe identificar el factor común en ambos polinomios:

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 5 y 10 es 5.

Luego, se extrae dicho factor y se utiliza la propiedad distributiva:

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + xy$

b) $10x^2 - 5xy$

c) $x^2y + xy$

d) $2x^2y - 4xy$

e) $2x^2y - 3xy + y$

f) $3x^2 + 6y + 12xy$

g) $x^2y + x^2 - x$

h) $4xy - 6y$

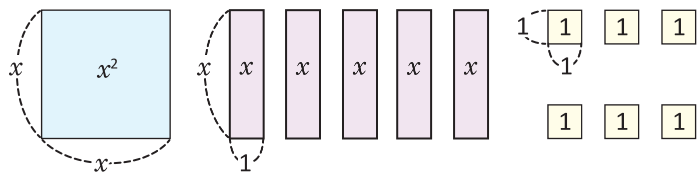
i) $xy + 16x^2y^2$

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

P

Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

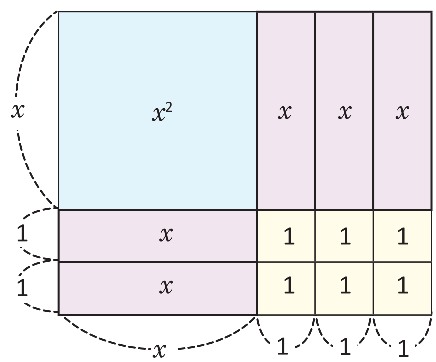
$x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes piezas. Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ se debe encontrar la altura y la base del rectángulo.



¿Cómo queda factorizado $x^2 + 5x + 6$?

S

El rectángulo formado con las piezas se muestra en la figura. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (\overbrace{a + b}^{\text{Suma de } a \text{ y } b})x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5
−2 y −3	+6	−5

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Esto por la ley de los signos para la multiplicación:
(+)(+) = +
(−)(−) = +

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

C

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).

2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

E

Factoriza $y^2 + 13y + 30$:
Se deben buscar dos números cuyo producto sea +30 y cuya suma sea +13. Como la suma es positiva, entonces ambos números deben ser positivos:

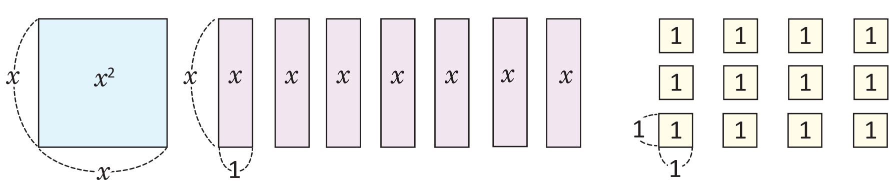
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

Por lo tanto, $a = 3$, $b = 10$ y
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$.

1. En la siguiente figura:

   a) Reubica las siguientes piezas de modo que se forme un rectángulo.

   b) Encuentra el área del rectángulo formado en términos de su base y altura.



2. Factoriza los siguientes trinomios:

   a) $x^2 + 3x + 2$

   b) $x^2 + 9x + 20$

   c) $y^2 + 8y + 12$

   d) $y^2 + 11y + 30$

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

P

Factoriza los polinomios:

a) $x^2 - 13x + 36$

b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) El trinomio cumple las condiciones para factorizarlo en el producto notable $(x + a)(x + b)$. Se buscan dos números cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13. Como la suma es negativa y el producto positivo, ambos números deben ser negativos:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Puedes desarrollar $(x - 4)(x - 9)$ para comprobar si la factorización es correcta.

Entonces:

$$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$$
$$= (x - 4)(x - 9)$$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) De nuevo, se buscan dos números cuyo producto sea −40 y cuya suma sea −6. Como el producto es negativo (−40), entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

En la tabla faltan las parejas 5, −8 y −5, 8, pero ya se han encontrado los números que satisfacen.

Entonces:

$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$$
$$= (y + 4)(y - 10)$$

Por lo tanto, $y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

C

Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan 2 números positivos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan 2 números negativos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan 2 números, uno positivo y el otro negativo cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$, según sea el caso.

Factoriza:

a) $x^2 + x - 2$

b) $x^2 - 10x + 21$

c) $x^2 - 7x - 30$

d) $y^2 - 4y - 32$

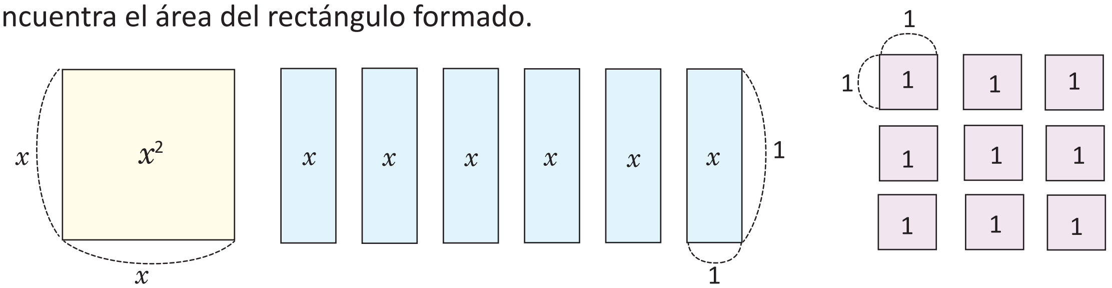
e) $y^2 - 14y + 33$

f) $x^2 + 13x + 42$

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

P Realiza lo siguiente:

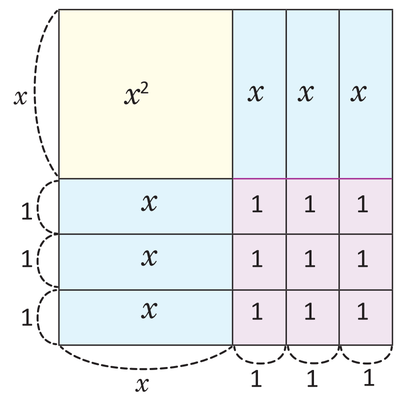
a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Coloca las piezas de modo que se forme un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo formado.



S

a) El área descrita por las piezas es:
$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9.$

b) El rectángulo formado por las piezas es:



Altura $\longrightarrow$ $x + 3$
Base $\longrightarrow$ $x + 3$

c) Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Puede utilizarse lo visto en las clases anteriores, buscar dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2$.

La factorización resulta en el cuadrado de un binomio. Este producto notable se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 6x + 9$ en el cuadrado de un binomio debe buscarse un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, justamente es 3. Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9.$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de $3 (3^2 = 9)$; además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2. \end{aligned}$$

Factoriza:

$$x^2 - 10x + 25$$

Es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a) El término independiente es el cuadrado de un número:

25 es el cuadrado de 5 ($5^2 = 25$, y se tiene $a = 5$).

b) El coeficiente de x es el doble de 5:

$$2a = 2(5) = 10.$$

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 8x + 16$

c) $y^2 - 18y + 81$

d) $y^2 + 14y + 49$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

P

En la figura 1, al cuadrado de lado x se le ha quitado un cuadrado de lado a (figura 2); dando como resultado la figura 3, cuya área es: $x^2 - a^2$.

Realizando un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

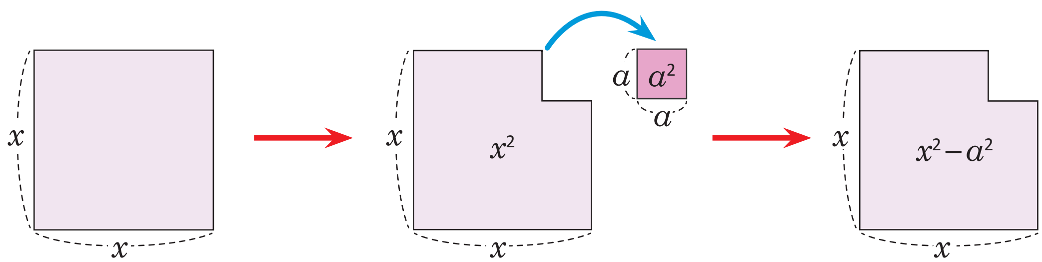


Figura 1 Figura 2 Figura 3

S

Se puede hacer un corte y reubicar las piezas como se muestra a continuación:

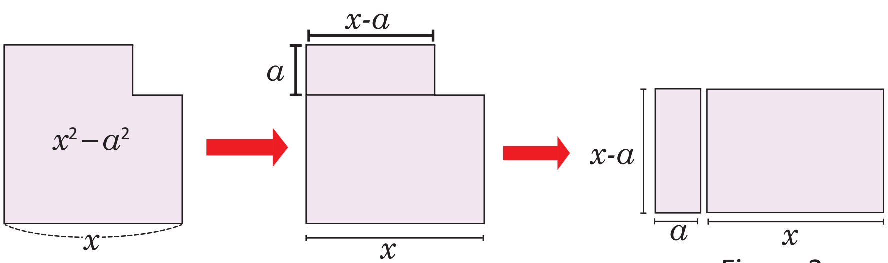


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para la solución se dividió el rectángulo en estas piezas, sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Observa que el área de la figura 1 es $x^2 - a^2$ y que el área de la figura 3 es $(x + a)(x - a)$.
Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

Factoriza: $x^2 - 9$.

Para factorizar $x^2 - 9$, el término independiente 9 es igual al cuadrado de 3, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Factoriza:

a) $x^2 - 1$

b) $x^2 - 16$

c) $y^2 - 25$

d) $x^2 - y^2$

e) $y^2 - \frac{1}{4}$

f) $x^2 - \frac{1}{9}$

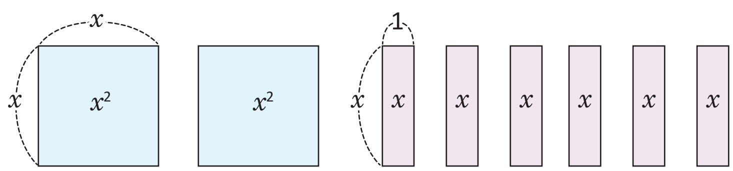
3.7 Practica lo aprendido

A continuación se presenta un resumen de las factorizaciones vistas hasta esta clase:

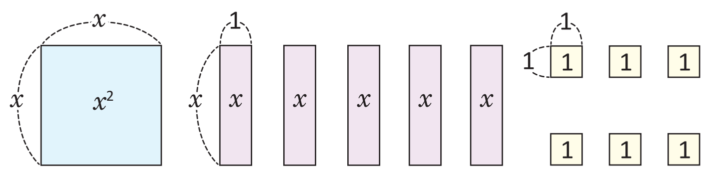
	Se factoriza:	Por ejemplo:
Factor común $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $5x(x - 1)$

b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$

d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$

f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. Para el trinomio $x^2 - 11x + 18$:

a) Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es −11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta.

b) Factoriza el trinomio.

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2 + 6xy$

b) $7xy - 21y^2$

c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2$

d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$

e) $x^2 - 6x - 55$

f) $y^2 + 5y - 50$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$

h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$

i) $x^2 - 81$

j) $y^2 - \frac{25}{36}$

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

P

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 25y^2$

¿Es posible utilizar factor común en cada caso? ¿Cuáles de los métodos vistos en clases anteriores puedes utilizar?

S

a) Los términos del trinomio no tienen un monomio común, pero puede utilizarse directamente uno de los métodos vistos en clases anteriores. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el tercero es el cuadrado de $3y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

Además, $2(2x)(3y) = 12xy$, por lo que $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Se toman $2x = w$ y $3y = z$ y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 3y = z, \\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (w + z)^2 && \text{factorizando,} \\ &= (2x + 3y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x \text{ y } z = 3y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) Igual que en el caso anterior, los términos del binomio, no tienen un monomio común. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el segundo es el cuadrado de $5y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

Se toman $2x = w$, $5y = z$ y se factoriza como diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 5y = z, \\ &= w^2 - z^2 && \text{factorizando,} \\ &= (w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,} \\ &= (2x + 5y)(2x - 5y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza:

a) $9x^2 - 30x + 25$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$

c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$

d) $36x^2 - 25$

e) $x^2 - 100y^2$

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

P

Factoriza:

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

No desarrolles los productos que se encuentran dentro de cada polinomio. Utiliza un procedimiento similar al de la clase anterior para poder factorizar.

S

a) Observa que $(x-1)^2$ es el cuadrado de $x-1$, $(y+1)^2$ es el cuadrado de $y+1$ y ambos se están restando. Puede factorizarse como diferencia de cuadrados, se toman $x-1=w$ y $y+1=z$ y se factoriza la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(y+1)^2 &= w^2-z^2 && \text{Tomando } x-1=w \text{ y } y+1=z,\\ &= (w+z)(w-z) && \text{factorizando,}\\ &= (x-1+y+1)[x-1-(y+1)] && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= (x+y)(x-y-2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$.

b) Observa que $(x+1)^2$ es el cuadrado de $x+1$, y^2 es el cuadrado de y, además el segundo término es el producto de 2 por $x+1$ por y. Luego, el polinomio puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto: se toma $x+1=w$ y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)y+y^2 &= w^2+2wy+y^2 && \text{Tomando } x+1=w,\\ &= (w+y)^2 && \text{factorizando,}\\ &= (x+1+y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } x+1=w,\\ &= (x+y+1)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Recuerda que cuando utilices un cambio de variable: después de factorizar debes realizar el cambio nuevamente, reducir los términos semejantes (si los hay) y ordenar los términos de los factores.

Factoriza:

a) $4x^2-(y+2)^2$

b) $(x+3)^2-9y^2$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$

3.10 Factorizaciones sucesivas

P

Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

¿Es posible utilizar directamente alguno de los métodos vistos en las clases anteriores? ¿Qué deberías hacer primero?

S

Lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

El trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$: los dos números (uno positivo y otro negativo) cuyo producto es −6 y cuya suma es +1 son 3 y −2. Luego:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

E

Factoriza el siguiente polinomio: $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$.

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \qquad \text{Factorizando } x^2 - 4x + 4 \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 10x - 8$

b) $2x^2 + 32x + 30$

c) $3x^2 + 12x + 12$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$

e) $2x^2 - 18$

f) $-3y^2 + 300$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$

h) $2x^2y - 12xy + 18y$

i) $3x^2z - 12y^2z$

3.11 Combinación de factorizaciones

P

Factoriza: $18x^2 - 200y^2$.

Debes extraer primero el factor común en cada caso.

S

Los coeficientes de x^2 y y^2 tienen factor común 2:

$$\begin{aligned} 18x^2 - 200y^2 &= 2(9x^2) - 2(100y^2) \\ &= 2(9x^2 - 100y^2) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $9x^2 = (3x)^2$, $100y^2 = (10y)^2$

$$\begin{aligned} &= 2[(3x)^2 - (10y)^2] && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 10y = z, \\ &= 2(w^2 - z^2) && \text{factorizando,} \\ &= 2(w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,} \\ &= 2(3x + 10y)(3x - 10y). \end{aligned}$$

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un monomio común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de sus factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-18x^2y^2 + 32$

b) $3x^2z - 12y^2z$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$

d) $27m^2 - 75n^2$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

P

Utilizando factorización, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

S

a) La operación es una diferencia de cuadrados:

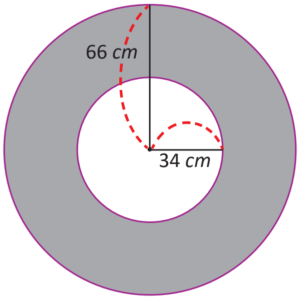
$$\begin{aligned} 99^2 - 1 &= (99 + 1)(99 - 1) \\ &= (100)(98) \\ 99^2 - 1 &= 9\,800 \end{aligned}$$

b) La operación también es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 35^2 - 15^2 &= (35 + 15)(35 - 15) \\ &= (50)(20) \\ 35^2 - 15^2 &= 1\,000 \end{aligned}$$

E

Calcula el área de la región sombreada (deja expresado el resultado en términos de π).



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. La región delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**.

Para calcular el área de la región sombreada debe restarse del área del círculo mayor, el área del círculo menor. El círculo mayor tiene radio 66 *cm*, y área:

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

El círculo menor tiene radio 34 *cm* y área:

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

Entonces, el área de la región sombreada es:

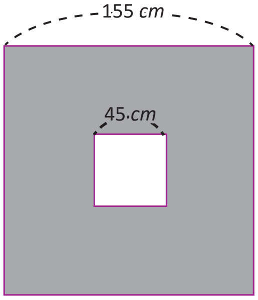
$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$	Se extrae factor común π,
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$	se factoriza como diferencia de cuadrados,
$= (100)(32)\pi$	se calculan las operaciones en los paréntesis,
$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$	se deja expresado en términos de π.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $3\,200\pi$ cm^2.

1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $35^2 - 25^2$ b) $45^2 - 35^2$ c) $98^2 - 4$

2. Calcula el área de la región sombreada (ambos cuadriláteros son cuadrados):



3.13 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 24x - 60$

b) $-4y^2 - 16y - 12$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$

f) $64x^2 - 49y^2$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$

2. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

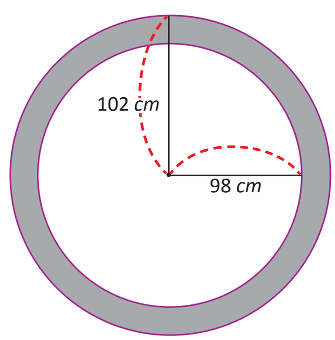
a) $75^2 - 25^2$

b) $95^2 - 25$

c) 101^2

d) 47×53

3. Calcula el área de la región sombreada:



4. Calcula el área de la región sombreada: