Ecuación Cuadrática

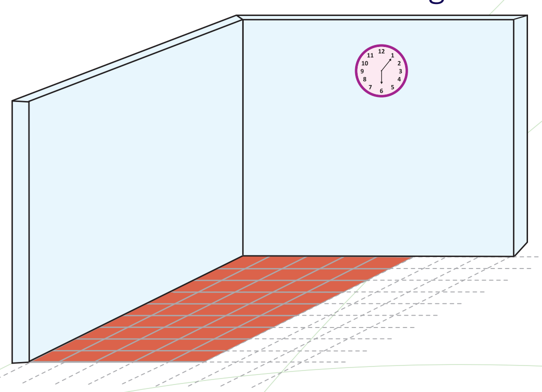
3 Unidad

Tablilla BM 13901 es uno de los textos matemáticos más antiguos se encuentra en el Museo Británico de Londres, Inglaterra, comprende 24 problemas y sus soluciones.

En matemática, el uso de símbolos no solamente se da en notaciones para números; el primer paso hacia el razonamiento simbólico se dio en el contexto de la solución de problemas. En la antigua Babilonia lo que se hacía era presentar información sobre una cantidad desconocida y luego se presentaba su valor; un ejemplo de esto se da en la Tablilla BM 13901, que data del siglo XVIII: "He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo $6\frac{1}{4}$" a esto se le denominó "el método de falsa posición" que resulta ser el proceso de solución de la siguiente ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $c < 0$.

A pesar de que las soluciones de una ecuación cuadrática fueron conocidas por algunos matemáticos hindúes y árabes de forma verbal y a través de construcciones geométricas, fue por el matemático hindú Bhaskara nacido en el 1114 d. C., que se conoció la solución de este tipo de ecuaciones utilizando el álgebra simbólica.

Desde épocas muy remotas, muchos calculadores y prácticos utilizaban métodos que se apoyaban en las técnicas para medir tierras; en la actualidad, el algoritmo es utilizado para conocer la cantidad de materiales que se necesitarían en una construcción, en las finanzas para conocer el sueldo devengado por los trabajadores, también para conocer raciones de alimentos, reparto de herencias, entre otros.



Si se tiene una cantidad definida de ladrillos cuadrados y el área que se debe cubrir, se puede formular una ecuación cuadrática para identificar el tamaño de los ladrillos.

Con estos contenidos verás la importancia de resolver ecuaciones cuadráticas utilizando factorización y la fórmula cuadrática usando recursos geométricos. Además estudiarás si hay soluciones en una ecuación cuadrática y se plantearán ecuaciones cuadráticas para resolver problemas de aplicación.

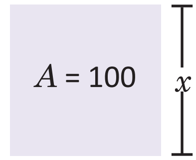
1.1 Sentido y definición de la ecuación cuadrática

P

Don Antonio tiene un terreno cuadrado para cultivar frijol, ¿cómo se puede determinar la medida de los lados del terreno si este tiene un área de 100 m^2?

S

Haciendo un esquema de la situación:



Utilizando x para simbolizar la longitud del lado.

> El área del cuadrado es:
> $A = L^2$
> Donde L es la longitud del lado al cuadrado.

El área del terreno es de 100 m^2, entonces se puede plantear la ecuación:

$$x^2 = 100$$

Para determinar la medida de los lados del terreno hay que resolver esta ecuación.

C

La ecuación planteada en el problema es $x^2 = 100$, si se transpone el 100, también se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, en la cual la incógnita está elevada al cuadrado. Este tipo de ecuaciones son llamadas **ecuaciones cuadráticas.**

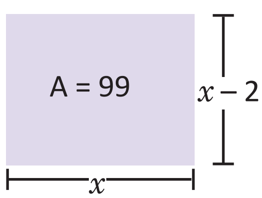
> Transponer en una ecuación significa pasar de un miembro de la ecuación al otro.

En general, se define ecuación cuadrática como las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b, c números reales y $a \neq 0$.

Por ejemplo: $2x^2 - 3 = 0$, $9x^2 - 3 = 0$, $(x + 5)^2 - 16 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x = 0$, etc.

E

Don Miguel tiene un terreno rectangular cuyo largo tiene 2 m más que el ancho y su área es de 99 m^2. Determina la ecuación que simboliza el problema representando con x la medida del largo.

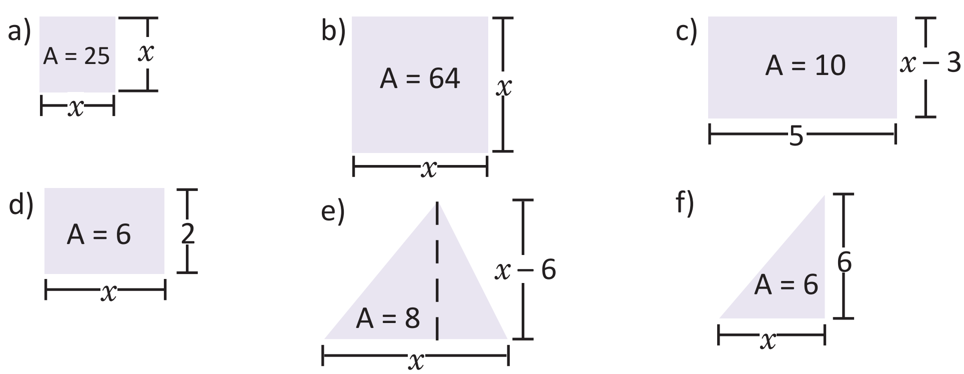


Aplicando el área del rectángulo ($A = base \times altura$). $x(x - 2) = 99$

Desarrollando el producto: $x^2 - 2x = 99$

Transponiendo el 99: $x^2 - 2x - 99 = 0$

1. Encuentra la ecuación que determina la longitud desconocida en cada figura.



> También se puede plantear el mismo problema con un triángulo, se debe tener presente que el área del triángulo es:
> A = $\frac{base \times altura}{2}$

2. Determina cuáles de las ecuaciones planteadas en el ejercicio anterior son cuadráticas.
3. Determina la ecuación para encontrar dos números enteros consecutivos que al multiplicarlos resulten 42.

1.2 Soluciones de la ecuación cuadrática

P

Determina cuáles de los números, –4, –3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.

a) $3x = 12$ b) $x^2 - x - 12 = 0$

S

Utilizando –4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$

–4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando –3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$

–3 no es solución de la ecuación a), pero si es solución de la ecuación b).

Utilizando 3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$

3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando 4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

4 es solución de ambas ecuaciones.

Por lo tanto, la ecuación a) tiene una solución (4), y la ecuación b) tiene dos soluciones (4 y –3).

C

Los valores de la incógnita que cumplen una ecuación cuadrática se llaman **soluciones.**

El proceso de **resolver una ecuación cuadrática** consiste en encontrar todas las soluciones de ella. En la ecuación cuadrática pueden haber hasta dos soluciones.

Las ecuaciones lineales tienen solamente una solución.

1. Determina cuáles de los números en los paréntesis son soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2 - 9 = 0$ (–3, –1, 1, 3) b) $2x - 6 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4) d) $2x + 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4)

e) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (–3, –1, 1, 3) f) $4x + 12 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

g) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (–4, –2, 2, 4) h) $x - 4 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

2. Determina cuáles de las ecuaciones del numeral anterior son cuadráticas y cuáles lineales. Justifica la respuesta.

1.3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$

Resuelve la ecuación cuadrática planteada en el problema de don Antonio de la primera clase.

$$x^2 = 100$$

Para resolver esta ecuación se puede utilizar la idea de las raíces cuadradas de un número.
Como $x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces: $x = \pm\sqrt{100}$.

Expresando sin el símbolo de radical, $x = \pm 10$.

Al elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado:

$$3^2 = (-3)^2 = 9$$

El problema de don Antonio era sobre la longitud de los lados del terreno, por lo que la solución negativa no se puede tomar en cuenta y por lo tanto, la solución del problema es: **10 m.**

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = c$ se siguen los pasos:

1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de c.
$$x = \pm\sqrt{c}$$
2. Se expresa el número sin el símbolo de radical, si es posible.

Por ejemplo: $x^2 = \frac{1}{4}$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
2. $x = \pm\frac{1}{2}$

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 20 = 0$.

Se transpone el número 20 en la ecuación $x^2 = 20$.

Se resuelve la ecuación $x^2 = 81$. 1. $x = \pm\sqrt{20}$ 2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = \frac{1}{9}$ c) $x^2 = \frac{4}{9}$ d) $x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 - 9 = 0$ f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$ h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$

2. El hermano de Julia es 4 años mayor que ella y la hermana es 4 años menor, ¿qué edad tiene Julia si al multiplicar las edades de sus hermanos resulta 20?

1.4 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$

P

Marta y Mario juegan a "las adivinanzas", Marta le dice a Mario que ella está pensando un número que multiplicado con su triple da como resultado 12, ¿cómo puede determinar Mario el número que podría estar pensando Marta?

S

Representando por x el número que está pensando Marta.
Entonces el triple del número que está pensando Marta es representado por "$3x$".
Luego para representar que el número multiplicado con su triple es 12 , se plantea la siguiente ecuación: $x(3x) = 12$.

Multiplicando los términos: $3x^2 = 12$.

Despejando "x^2", $x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$.

Resolviendo la ecuación, $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, el número que está pensando Marta podría ser: **+2 o –2**.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, $c \neq 0$ se siguen los pasos:

1. Se despeja el término x^2.

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de $\frac{c}{a}$.

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

3. Se expresa sin el símbolo de radical o se simplifica a la mínima expresión, cuando se pueda.

Observa que si el signo de a es diferente al signo de c entonces $\frac{a}{c}$ tiene signo negativo, entonces la ecuación no tendría solución en los números reales porque no están definidas las raíces cuadradas de un número negativo.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $3x^2 - 2 = 0$

Se transpone el –2 en la ecuación: $3x^2 = 2$

Se resuelve la ecuación $3x^2 = 2$. 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Cuando hay un radical en el denominador debe racionalizarse.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 18$ b) $-4x^2 = -1$ c) $x^2 = 7$

d) $-4x^2 + 4 = 0$ e) $10 - 2x^2 = 0$ f) $-x^2 + 2 = 0$

Observa que las ecuaciones de la forma $x^2 = c$; son un caso especial de las de la forma $ax^2 = c$, cuando $a = 1$.

2. Encuentra las longitudes de una cancha de baloncesto, si el largo de la cancha es el doble de su ancho y tiene un área de 450 m^2.

Unidad 3

1.5 Solución de ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $(x + 1)^2 = 25$.

S

Para resolver esta ecuación se representará la parte dentro del paréntesis $x + 1$ por $w = x + 1$ luego se usa la idea de raíz cuadrada.

$w^2 = 25$ Sustituyendo $w = x + 1$,

$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ sustituyendo nuevamente $x + 1 = w$.

La estrategia de representar una parte de la ecuación por una letra diferente se conoce como **cambio de variable.**

Es decir, $x + 1 = 5$ y $x + 1 = -5$.

$x = 5 - 1 = 4$ y $x = -5 - 1 = -6$ despejando x.

Finalmente las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = 25$ son: $\boldsymbol{x = 4}$ y $\boldsymbol{x = -6}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + m)^2 = n$ se siguen los pasos:

1. Se cambia la variable $x + m$ por w:
   $w^2 = n$
2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = n$:
   $w = \pm\sqrt{n}$
3. Se sustituye a la variable inicial:
   $x + m = \pm\sqrt{n}$
4. Se resuelve para la variable inicial:
   $x = -m \pm\sqrt{n}$

Por ejemplo:

$(x - 3)^2 = 7$ Haciendo $w = x - 3$

1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

Observa que
Si $n = 0$; la ecuación solo tiene una solución, $x = -m$.

Si n es negativo; la ecuación no tiene solución.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 5)^2 - 12 = 0$.

Se transpone -12 en la ecuación: $(x - 5)^2 = 12$.

Se resuelve la ecuación $(x - 5)^2 = 12$.

1. $w^2 = 12$ 2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 4)^2 = 4$ b) $(x - 2)^2 = 2$ c) $(-x - 3)^2 = 8$ d) $(x + 2)^2 = 0$

e) $(x - 4)^2 - 16 = 0$ f) $(x + 3)^2 - 3 = 0$ g) $(-x + 6)^2 - 12 = 0$ h) $(1 - x)^2 = 0$

2. ¿Cuánto debe aumentar cada lado del terreno cuadrado de don Antonio si quiere cultivar 144 m^2 de frijol?

Recuerda que los lados del terreno de don Antonio medían 10 m cada uno, y se determinó en la clase 3 de esta lección.

1.6 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$.

S

La siguiente propiedad se cumple para cualesquiera números reales A, B.

Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$

Además, la expresión $x^2 + 5x$ se puede factorizar sacando factor común x: $x^2 + 5x = 0$.

Y se tiene la ecuación: $x\,(x + 5) = 0$.

Se cumple que $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

Resolviendo la ecuación lineal $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Y las soluciones para la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$ son: $\boldsymbol{x = 0}$ o $\boldsymbol{x = -5}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando factor común:

$$x\,(x + b) = 0$$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0$$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo la ecuación lineal $x + b = 0$.

$$x = 0 \qquad \text{o} \quad x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

E

¿Cómo se resuelve la ecuación $ax^2 + bx = 0$? Por ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$.

Se factoriza $x\,(a + bx) = 0$ y luego se encuentran las soluciones.

1. $x\,(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ o $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $3x^2 + 5x = 0$

d) $4x^2 - x = 0$

e) $-x^2 + x = 0$

f) $-x^2 - 2x = 0$

g) $2x^2 + 8x = 0$

h) $-3x^2 + 6x = 0$

1.7 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

P

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 4x + 4 = 0$.

S

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$.

El trinomio cuadrado perfecto se factoriza:
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

Entonces:

$$x + 2 = 0$$
$$\boldsymbol{x = -2}$$

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando el trinomio cuadrado perfecto:
   $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio de la clase 6 y se determina la ecuación lineal a resolver $x + a = 0$.

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática:
   $\boldsymbol{x = -a}$

E

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 2x$,

2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$ sustituyendo nuevamente $2x = w$,

3. $2x + 1 = 0$.

   $x = -\frac{1}{2}$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$

e) $y^2 - 10y + 25 = 0$

f) $y^2 + 14y + 49 = 0$

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x-2)(x-3) = 0$.

S

Se tiene $\underbrace{(x-2)}_{A}\times\underbrace{(x-3)}_{B} = 0$ se debe cumplir que

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones lineales:

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Para cualesquiera números reales A, B se cumple que Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x-a)(x-b) = 0$ se siguen los pasos:

1. Se aplica la propiedad y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
   $$x - a = 0 \quad \text{o} \quad x - b = 0$$
2. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo las ecuaciones lineales:
   $$x = a \quad \text{o} \quad x = b$$

Por ejemplo: $(x + 1)(x - 4) = 0$

1. $x + 1 = 0$ o $x - 4 = 0$
2. $x = -1$ o $x = 4$

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

En este caso primero se factoriza la expresión buscando el producto notable correspondiente, 2 números que multiplicados dan 6 y sumados 5, son 3 y 2.

Resolviendo: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

1. $x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
2. $x = -3$ o $x = -2$

Las expresiones de la forma:
$$x^2 + (a + b)x + ab = 0$$
se factorizan de la siguiente manera:
$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)(x + b).$$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x - 2)(x - 1) = 0$ b) $(x + 5)(x - 3) = 0$ c) $(x - 7)(x + 2) = 0$ d) $(x + 4)(x + 3) = 0$

e) $x^2 - 7x + 6 = 0$ f) $x^2 - 2x - 8 = 0$ g) $x^2 + x - 6 = 0$ h) $x^2 - 4x + 3 = 0$

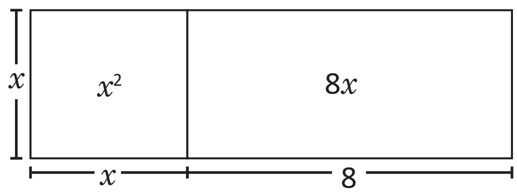
2. Encuentra dos números consecutivos que al elevarlos al cuadrado y luego sumarlos, dé como resultado 25.

Unidad 3

1.9 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas

P

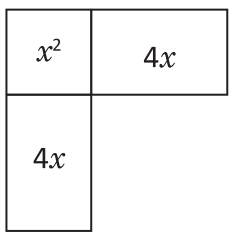
El área de la figura es 33 cm^2. Encuentra la medida del lado x utilizando una justificación geométrica.



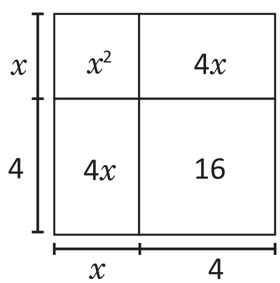
Puedes pensar en recortar y adecuar las piezas de modo conveniente.

S

1. Dividiendo el rectángulo en dos partes iguales y girando 90° una de esas partes.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura inicial es 33 cm^2, si se agrega un cuadrado de lado 4, el área de la figura anterior es 49 cm^2.

Por tanto, el lado x debe tomar el valor de 3 cm, ya que **(7 cm)^2 = 49 cm^2**.

Solución algebraica:

$x^2 + 8x = 33$

1. $x^2 + 4x + 4x = 33$

2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$

3. $(x + 4)^2 = 49$

Solución: $x = 3$

C

Se pueden utilizar argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática.

Las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones, pero dado que se trata del lado de una figura solo se considera la positiva.

Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x = 8$

b) $x^2 + 10x = 56$

c) $x^2 + 6x = 27$

1.10 Solución de ecuaciones completando cuadrados

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 8x - 20 = 0$.

S

Para resolver se puede transformar a la forma $(x + m)^2 = n$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Se transpone el -20: $x^2 + 8x = 20$.

Sumando un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

Simplificando las fracciones y haciendo algunos cálculos se tendrá la ecuación: $x^2 + 8x + 16 = 36$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio la expresión es la siguiente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Y el término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Dado que la expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede ser expresada como $(x + 4)^2 = 36$.

Resolviendo esta ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$: $x + 4 = \pm 6 \Rightarrow x + 4 = 6$ o $x + 4 = -6$.

Por lo tanto, las soluciones son: $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = -10}$.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se siguen los pasos:

Por ejemplo: $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. Se pasa el término c al miembro derecho.
   1. $x^2 + 2x = 1$
2. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.
   2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos.
   3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.
   4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Soluciones. $x = -1 + \sqrt{2}$ o $x = -1 - \sqrt{2}$

A la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando este procedimiento se le conoce como solución por **complemento de cuadrados**.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$ f) $x^2 - 4x + 2 = 0$ g) $x^2 + 5x + 5 = 0$ h) $x^2 + x - 1 = 0$

Unidad 3

1.11 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

P

Para resolver la siguiente ecuación sigue los pasos a), b), c).

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) Divide la ecuación por el coeficiente de x^2 y pasa el termino constante al lado derecho de la ecuación.
b) Suma por un numero conveniente y completa cuadrados.
c) Despeja la variable x.

S

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando por un número conveniente.

$(x + \frac{5}{6})^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{25 - 12}{36}$ Sumando las fracciones de la derecha.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se divide la ecuación por el coeficiente a de x^2.
2. Se pasa el término constante al miembro derecho.
3. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo, sea un trinomio cuadrado perfecto.
4. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos necesarios.
5. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$

1.12 Fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Encuentra la fórmula para resolver la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

S

Para resolver se puede dividir por "a" para transformar a la forma $x^2 + bx + c = 0$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Ahora se procederá resolviendo la ecuación cuadrática:

Primero se divide entre el coeficiente de x^2 ambos lados de la ecuación, para que el coeficiente sea 1.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego se transpone $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completan cuadrados perfectos.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se hacen los cálculos.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Se hacen los cálculos al lado derecho de la ecuación.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se resuelve la ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la fórmula a la que se llegó al final de la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general de la ecuación cuadrática.** Y para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática se sustituyen los valores de a, b, c en la fórmula.

Por ejemplo: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Si se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$ b) $-4x^2 - x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x - 9 = 0$ d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$

1.13 Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

S

Sustituyendo en la fórmula general:

a) $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

Es necesario simplificar

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ o } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

b) $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

Es necesario calcular las raíces cuadradas de 49

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{6} \qquad x = \frac{-5 - 7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ o } x = -2$$

Se calculan las dos soluciones

C

Para aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática solamente se identifican los valores de a, b, c en la ecuación cuadrática; al calcular las soluciones es posible que sea necesario simplificar o expresar las raíces como números racionales (cuando sea posible, determinar las raíces cuadradas del radicando).

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$

h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$

1.14 Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ usando factorización, fórmula general y completando cuadrados, ¿coinciden las soluciones? Escribe en el cuaderno tu opinión sobre cada método.

S

Factorización

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Fórmula general

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -4$$

Completando cuadrados

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x^2 + 7x = -12$$

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48 + 49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \qquad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -4$$

Observa que en este caso resultó más sencillo y práctico aplicar el método de factorización; además, el método de la fórmula cuadrática conlleva un poco más de cálculo, pero es aplicable a todos los casos; finalmente, el método completando cuadrados, para este caso resultó complejo, pero hay casos en que puede resultar más sencillo.

C

Para escoger el método más eficiente de resolver ecuaciones cuadráticas se puede:

1. Resolver usando factorización.
2. Si no es posible encontrar una factorización se puede aplicar alguno de los otros dos métodos.

La fórmula general es aplicable en todos los casos pero en ocasiones puede conllevar un cálculo más complejo que si se utiliza otro método.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ b) $4x^2 - 16 = 0$ c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$ d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$ f) $5x^2 + 10x = 0$ g) $x^2 - 10x + 25 = 0$ h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$

Unidad 3

1.15 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos vistos en clase:

Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$ b) $-9x^2 = -1$ c) $3x^2 - 27 = 0$ d) $21 - 3x^2 = 0$ e) $-x^2 - 3 = 0$

Forma $(x + m)^2 = n$.

a) $(x + 1)^2 = 9$ b) $(-x + 2)^2 = 3$ c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$ d) $(-3 - x)^2 = 0$ e) $(5 - x)^2 + 3 = 0$

Forma $x^2 + bx + c = 0$ (Completa cuadrados perfectos).

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 4x - 12 = 0$ c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ e) $x^2 - 8x + 12 = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$ g) $x^2 + 2x + 4 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ j) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$ d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$ g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$ h) $x^2 - 4x - 1 = 0$

1.16 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

Forma $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$ b) $2x^2 - x = 0$ c) $x^2 + 3x = 0$ d) $4x^2 + 12x = 0$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$ b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ c) $(x + 5)(x - 7) = 0$ d) $(x + 2)(x + 4) = 0$

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ b) $x^2 - 2x - 24 = 0$ c) $x^2 + 7x - 18 = 0$ d) $x^2 - 11x + 28 = 0$

2. Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 6x = 7$ b) $x^2 + 10x = 11$ c) $x^2 + 8x = 9$

2.1 Discriminante de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general. Observa el valor del radicando.

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $2x^2 + x + 1 = 0$

S

a)
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\mathbf{x = -\frac{1}{2}} \text{ y } \mathbf{x = -1}$$

El radicando es mayor que cero y hay dos soluciones.

b)
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{\overset{-1}{\cancel{-4}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = -\frac{1}{2}$$

El radicando es cero y la solución es única.

c)
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

Observa que no se han definido las raíces cuadradas de números negativos, entonces $\pm\sqrt{-7}$ no son números reales.

El radicando es menor que cero y no hay solución en los números reales.

C

El radicando de la fórmula general que viene dado por la expresión $b^2 - 4ac$ es llamado **el discriminante** de la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Discriminante}$$

Observa que el discriminante puede cumplir cualquiera de los siguientes tres casos:

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones**.

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene solo **una solución**.

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática **no tiene solución en los números reales.**

El discriminante es cero porque la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto.

1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones, comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $x^2 - 2x = 0$

e) $x^2 + 1 = 0$ f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$ g) $4x^2 - 9 = 0$ h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

2. Determina cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Unidad 3

2.2 Uso del discriminante en resolución de problemas

P

Muestra que no existen dos números reales tales que su suma sea 4 y su producto sea 5.

S

Sean x y y los dos números. Debe cumplirse que $x + y = 4$ y además $xy = 5$.

Tomando la primera ecuación:

$x + y = 4$

$x^2 + xy = 4x$ Multiplicando por x en ambos lados,

$x^2 + 5 = 4x$ dado que $xy = 5$,

$x^2 - 4x + 5 = 0$ trasladando y ordenando los terminos en el lado izquierdo.

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:

$(-4)^2 - 4(1)(5) < 0$

Discriminante de una ecuación cuadrática: $b^2 - 4ac < 0$.

Entonces, no existen soluciones en los números reales para esta ecuación cuadrática. Por tanto, no existen números reales tales que la suma sea 4 y multiplicados den 5.

C

Se puede utilizar el discriminante de una ecuación cuadrática para resolver diversos problemas. Se plantea la ecuación cuadrática y se analizan sus soluciones. En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) $b^2 - 4ac > 0$ Existen dos soluciones reales.

b) $b^2 - 4ac = 0$ Existe una solución real.

c) $b^2 - 4ac < 0$ No existen soluciones reales.

1. La suma de dos números es 4 y al multiplicarlos el resultado es c. Qué valores debe tomar c de forma que

   a) La ecuación tenga dos soluciones reales.

   b) La ecuación tenga una solución real.

   c) La ecuación no tenga soluciones reales.

2. Una persona asegura que su casa tiene forma rectangular y que el perímetro de la misma es de 18 m y que además, su área es de 21 m². Demuestra que la persona estaba mintiendo.

3. Don José tiene un terreno rectangular de 700 m² de área, ¿puede cercar el terreno utilizando 100 m de alambre?

2.3 Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas

Don Juan construirá su casa en un terreno rectangular de 72 m^2 de área y 36 m de perímetro. Para solicitar los permisos de construcción le piden las dimensiones del terreno, ¿cómo se podría determinar las dimensiones del terreno con esta información?

Si se representa el largo del terreno por x, ¿cómo se representa el ancho usando x?

Como la suma del largo y el ancho es igual a la mitad del perímetro $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$, entonces el ancho es "$18 - x$".

Planteando la ecuación y utilizando el valor de área $x\,(18 - x) = 72$.

Desarrollando: $-x^2 + 18x = 72 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 18x + 72$.

Utilizando factorización: $x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 12)(x - 6) = 0$.

Entonces: $x - 12 = 0$ o $x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$ o $x = 6$.

Como x representa el lado más largo: $x = 12$.

Entonces, el ancho del terreno de don Juan es 6.

Por lo tanto, las dimensiones del terreno de don Juan son: **12 m de largo** y **6 m de ancho.**

Para resolver una situación problemática, en general, se pueden seguir los pasos:

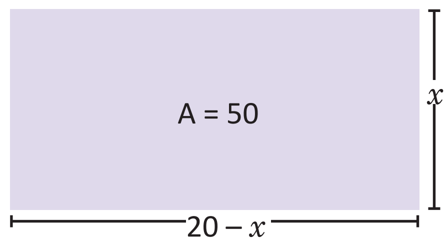
1. Si es posible, realizar un esquema de la situación del problema.
2. Se identifica la información que brinda el problema y se define qué cantidad representa la incógnita.
3. Se representan todas las cantidades con la misma incógnita.
4. Se plantea la ecuación cuadrática que hay que resolver (establecer la igualdad).
5. Se resuelve la ecuación cuadrática.
6. Se analizan si las soluciones son adecuadas al problema.

1. Se construirá una casa en un terreno de 28 m de perímetro y 48 m^2 de área, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

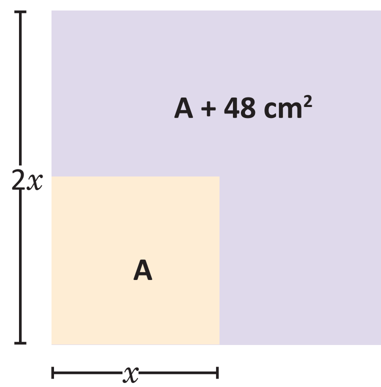
2. La distancia en km recorrida por un avión está dada por la ecuación $x = 140t + 3t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en horas después del despegue. Determina cuánto dura un viaje en este avión desde El Salvador hasta Costa Rica si la distancia entre estos países es aproximadamente de 775 km.

2.4 Practica lo aprendido

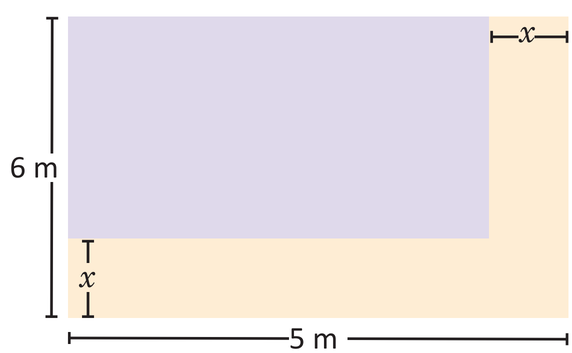
1. Encuentra las dimensiones del siguiente rectángulo.



2. Si se duplica el lado de un cuadrado su área aumenta en 48 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



3. En la figura, el área del rectángulo sombreado de morado es de 12 cm², encuentra el valor de x.

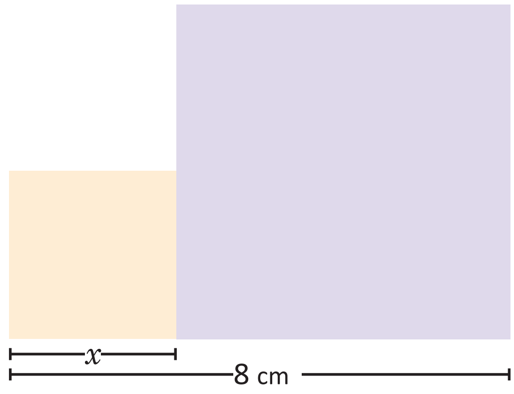


4. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 25.

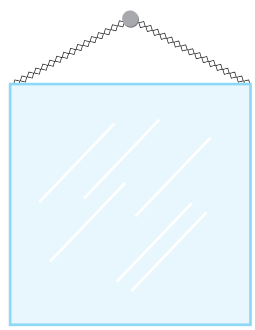
5. Se construirá una casa en un terreno de 30 m de perímetro y 54 m² de área. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

2.5 Practica lo aprendido

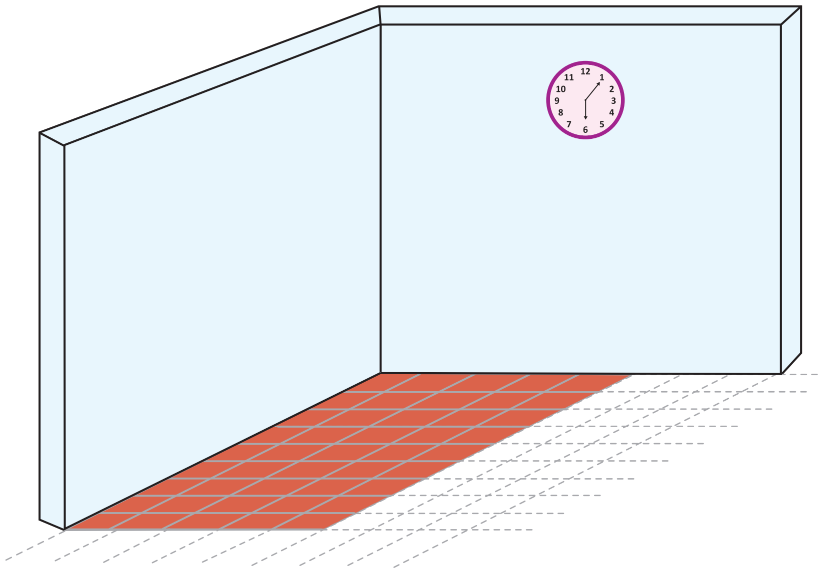
1. La siguiente figura está compuesta por dos cuadrados. ¿Cuánto valen los lados de ambos cuadrados si las dos áreas suman 34 cm^2?



2. Ana hará un marco de madera para un espejo cuadrado de 400 cm^2 de área. ¿Qué dimensiones tienen los lados del espejo?

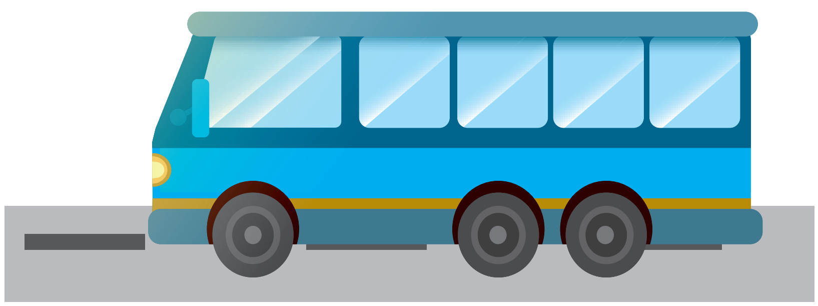


3. Se utilizaron 240 ladrillos cuadrados para poner el piso de una casa de 60 m^2 de área. Determina el tamaño de los ladrillos que se usaron.



4. Ana compra 5 bolsitas con 5 chibolas cada una, y la señora de la tienda donde las compra le dijo que por cada bolsita extra que le comprara le aumentaría una chibola a cada bolsita, ¿cuántas bolsitas tiene que comprar Ana para obtener 64 chibolas?

5. Mario es conductor de un bus y sabe que si cobra \$0.40 de pasaje se sube un promedio de 90 personas por viaje, si por cada centavo de pasaje que aumente se subirá una persona menos, ¿cuánto debe aumentar Mario al pasaje para obtener \$42 al finalizar el viaje?



6. La altura sobre el nivel del mar que lleva un delfín al salir del agua está dada por la ecuación $h = 7t - 5t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en segundos después que sale del agua. ¿Cuánto tiempo estará fuera del agua el delfín?