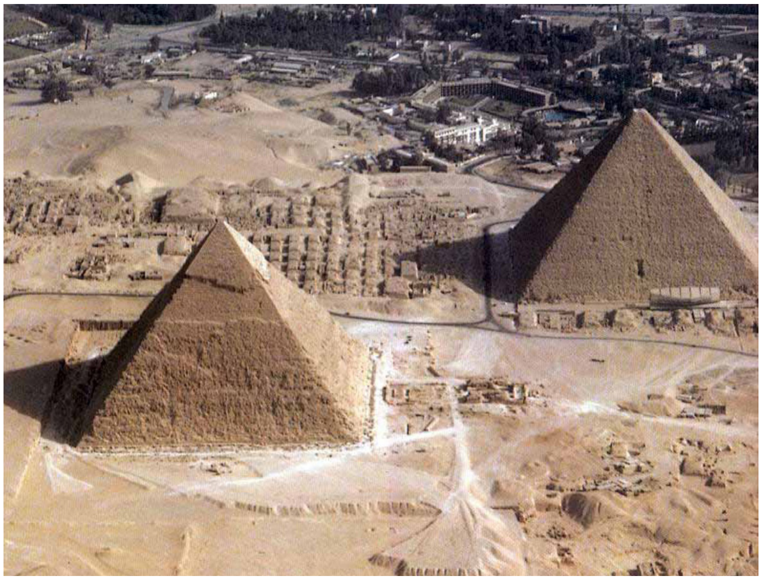
Figuras semejantes

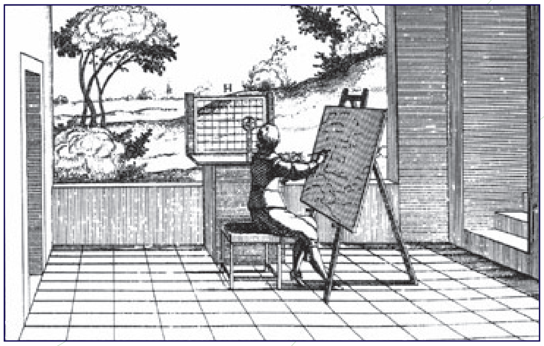
Unidad 5



Pirámides de Kefrén y Keops, Egipto.

El matemático griego Tales de Mileto (siglo IV a.C.) calculó la altura de la gran pirámide de Keops, en Egipto, observando las longitudes de un bastón clavado en la arena, la sombra proyectada por el bastón y la sombra de la pirámide. Tales aplicó la semejanza de triángulos para obtener la altura, asumiendo que los rayos del sol son paralelos.

Dentro de las aplicaciones de las figuras semejantes se utiliza una técnica de dibujo que permite ampliar o reducir una imagen o fotografía, así como dibujar paisajes. La técnica consiste en cuadricular la figura de referencia y el lienzo o papel en el que se dibujará o pintará, de tal manera que los rectángulos de la figura y el lienzo sean semejantes.



Un artista dibuja un paisaje con la técnica de la cuadrícula.

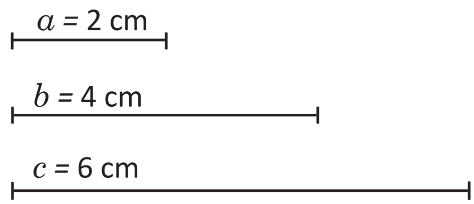
Los temas que estudiarás son los segmentos proporcionales, las figuras semejantes, sus características y cómo construirlas. Abordarás los criterios de semejanza de triángulos, propiedades como la base media, la relación entre rectas paralelas y segmentos proporcionales. Además, aplicarás la semejanza para utilizar la escala en los mapas, la relación entre las áreas de dos triángulos semejantes y el volumen de sólidos semejantes, entre otros.

1.1 Razón entre segmentos

P

a) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento b?

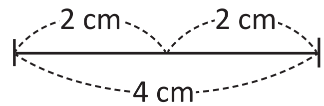
b) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento c? ¿Y la de b con respecto a c?



S

a) Al comparar las longitudes del segmento a con respecto a la del segmento b se tiene que a es $\frac{1}{2}$ de b.

b) Se calcula el cociente $\frac{a}{c}$ y se tiene que la longitud de a es $\frac{1}{3}$ de la longitud de c. De igual forma, la longitud de b es $\frac{2}{3}$ de la longitud de c.

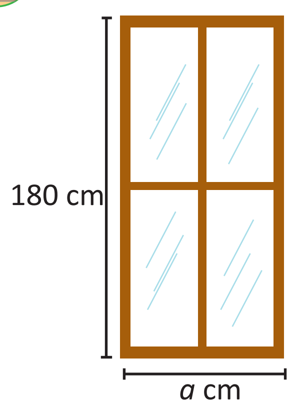


C

Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

En el Problema inicial, la razón entre los segmentos a y b es $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Hay que prestar atención al orden de a y b. Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.

E



¿Cuál es la medida del ancho de una ventana de alto 180 cm cuyas dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$? (ver figura)

Iguala el ancho y alto de la ventana con la razón entre ambas. Debes cuidar el orden, es decir, colocar la longitud menor entre la mayor o viceversa, según sea el caso.

Se denota por a la medida del ancho de la ventana en centímetros. Si las dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$, entonces:

$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$

Se sustituyen los valores en la ecuación anterior y se despeja a:

$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$

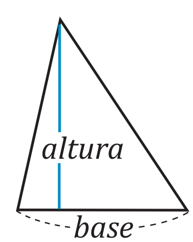
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$a = 80$$

Por lo tanto, la medida del ancho de la ventana es 80 cm.

1. Calcula la razón entre el segmento a = 4 cm y el segmento b = 20 cm.

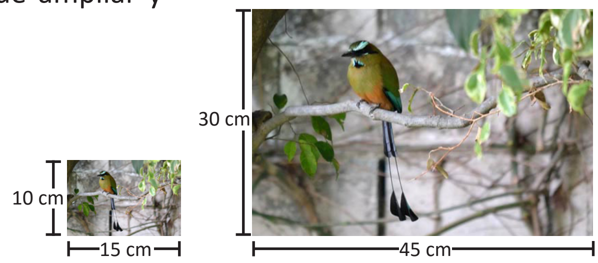
2. La base y la altura de un triángulo están a razón $\frac{5}{7}$. Si la base mide 10 cm, ¿cuánto mide la altura del triángulo? (ver figura)



1.2 Segmentos proporcionales

Carlos tomó una fotografía a un torogoz, la cual decide ampliar y colocar en un cuadro.

a) ¿Cuál es la razón entre las alturas de la fotografía pequeña y la ampliada? ¿Y entre las bases?
b) ¿Qué relación hay entre ambas razones?



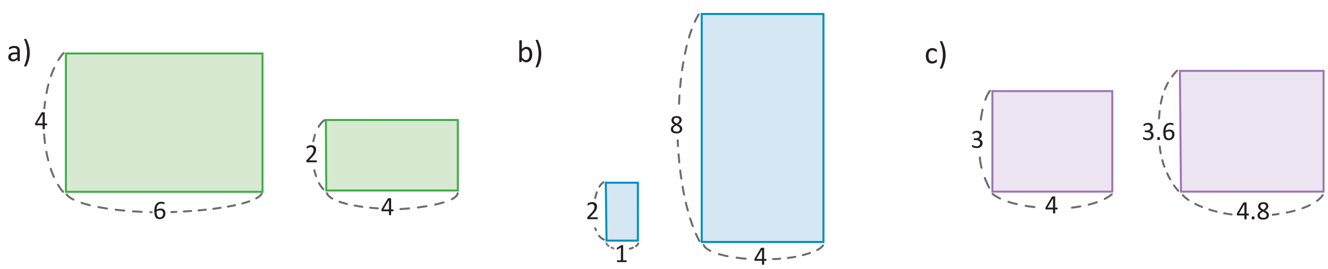
a) La altura de la fotografía pequeña es 10 cm y la de la fotografía ampliada es 30 cm. Entonces, la razón de ambas alturas (de la pequeña entre la ampliada) es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, que también puede escribirse como 1:3. De igual forma se procede para las bases, la razón entre ambas es $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1:3

b) Al simplificar ambas razones, el resultado es $\frac{1}{3}$, es decir, son equivalentes. Cuando esto ocurre, se dice que las alturas y las bases de la fotografía son “proporcionales”.

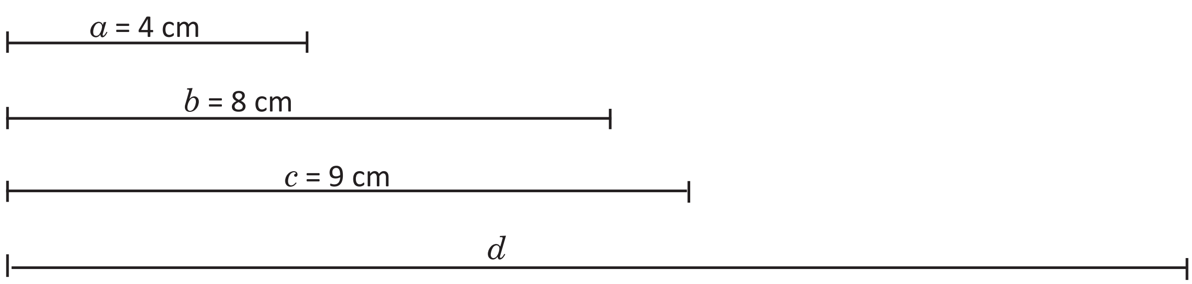
También se puede haber calculado la razón entre la altura de la grande y la de la pequeña como $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, que se escribe 3:1. De igual manera para las bases, solo se debe asegurar de tomar el mismo orden.

La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**. Por ejemplo, $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$, y al simplificar ambas pueden expresarse como $\frac{1}{3}$ o 1:3.

1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, ¿son proporcionales las bases y las alturas de cada pareja? Justifica tu respuesta.



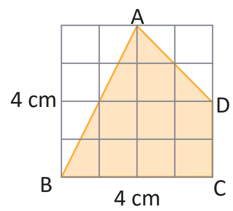
2. En la siguiente figura, ¿qué longitud debe tener el segmento d para que a y b sean proporcionales a c y d?



1.3 Figuras semejantes

P

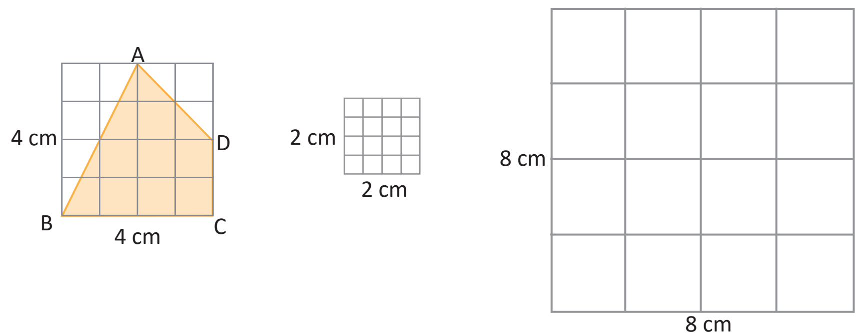
Reduce a la mitad y amplía al doble el cuadrilátero ABCD sin cambiar su forma.



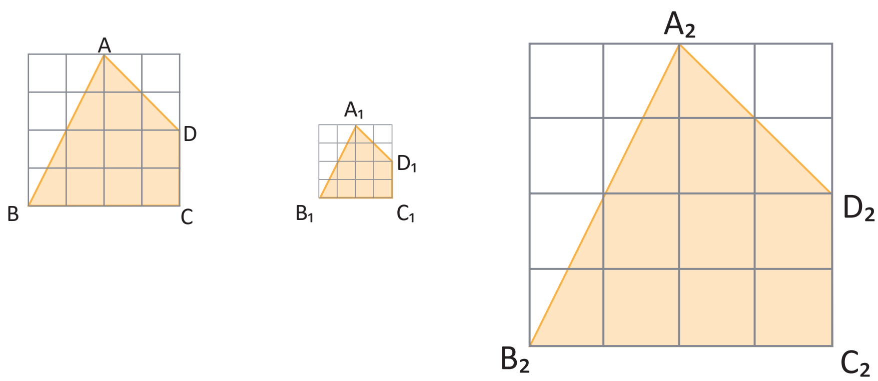
Reduce a la mitad y amplía al doble las longitudes de los lados de la cuadrícula.

S

Se dibujan dos cuadrados, uno de lado 2 cm y otro de lado 8 cm. La cuadrícula original tiene 16 cuadrados; de la misma forma se cuadriculan los cuadrados de 2 y 8 cm de tal manera que cada uno tenga en su interior 16 cuadrados:



Luego, se traza el cuadrilátero en ambas cuadrículas, respetando la forma del mismo.



Los cuadrados de la cuadrícula pequeña tienen 5 mm de lado, y los de la cuadrícula grande 2 cm de lado.

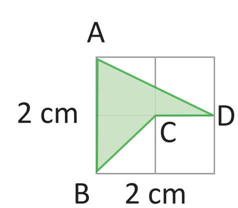
C

Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente, el mismo tamaño (como las del ejemplo anterior). Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo $\sim$: el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$" (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes) y el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

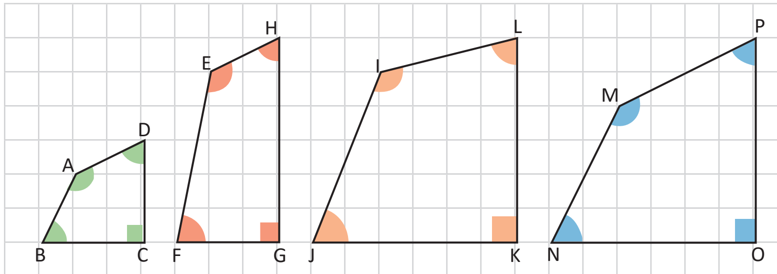
1. Amplía al doble el cuadrilátero ABCD de la derecha, dibujando la figura resultante.

2. ¿Cuáles serán las dimensiones de la cuadrícula si el cuadrilátero ABCD se amplía al triple? Dibuja la figura resultante.

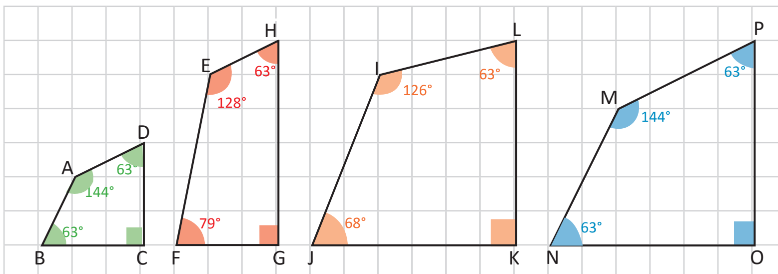


1.4 Características de figuras semejantes, parte 1

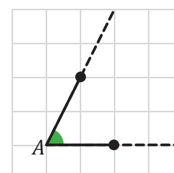
¿Cuál cuadrilátero es semejante al cuadrilátero ABCD?



Al ampliar el cuadrilátero ABCD, el resultado es otro semejante al primero y solamente cambiarán las longitudes de sus lados pero no la medida de sus ángulos. Con un transportador, se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan:



Cuando se alargan los lados de un ángulo, la medida del ángulo se mantiene.



Para denotar la medida del ángulo cuyo vértice es A se escribe ∢A.

En los cuadriláteros ABCD y EFGH: ∢B no es congruente a ∢F y por lo tanto EFGH no es semejante a ABCD, por no tener la misma forma.

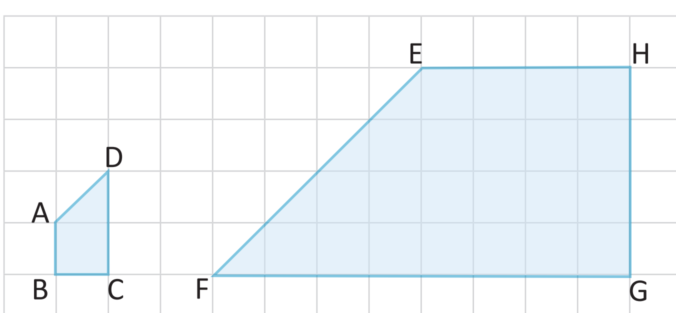
Algo similar ocurre si se comparan los ángulos de ABCD con los de IJKL: ∢J no es congruente al ∢B.

Finalmente, en los cuadriláteros ABCD y MNOP: los ángulos del primero son congruentes a los ángulos del segundo y se amplía ABCD al doble, el resultado es igual a MNOP. Por lo tanto, MNOP es semejante a ABCD.

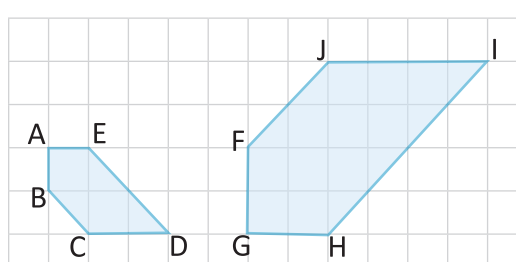
En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

En cada pareja de polígonos semejantes identifica los ángulos correspondientes.

a)



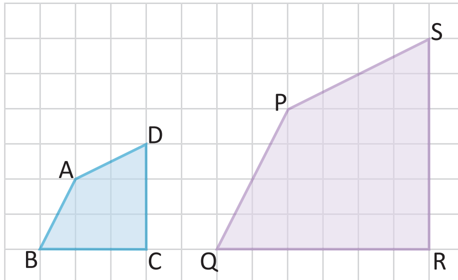
b)



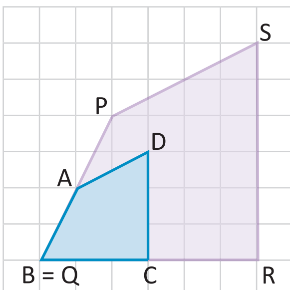
Unidad 5

1.5 Características de figuras semejantes, parte 2

Los cuadriláteros ABCD y PQRS son semejantes. ¿Cuál es la relación entre las razones de los lados correspondientes a ambos cuadriláteros?



Lados correspondientes son los que se encuentran en la misma posición. Puedes sobreponer ambos cuadriláteros y comparar sus lados o utilizar regla para medir las longitudes y calcular las razones.



Se sobreponen los cuadriláteros, haciendo coincidir los vértices B y Q. De la figura se deduce lo siguiente:

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

Las razones son iguales, por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales.

En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. En el Problema inicial:

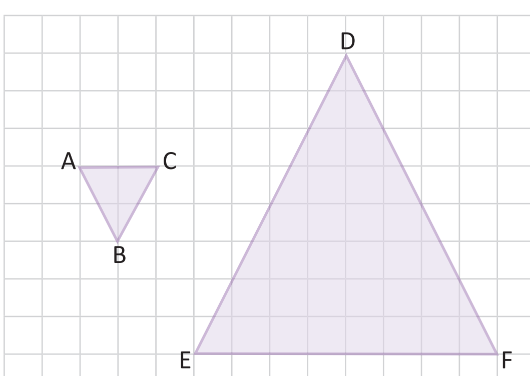
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

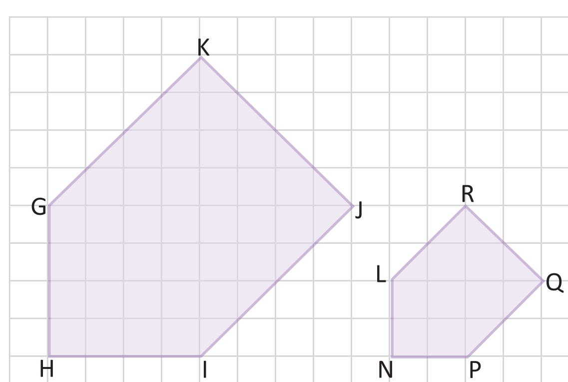
En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

En las figuras, el triángulo ABC es semejante al triángulo FDE, y el pentágono GHIJK es semejante a LNPQR. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza en cada pareja.

a)



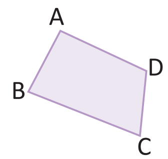
b)



1.6 Construcción de figuras semejantes

P

Dibuja sobre una página de papel bond el siguiente cuadrilátero:

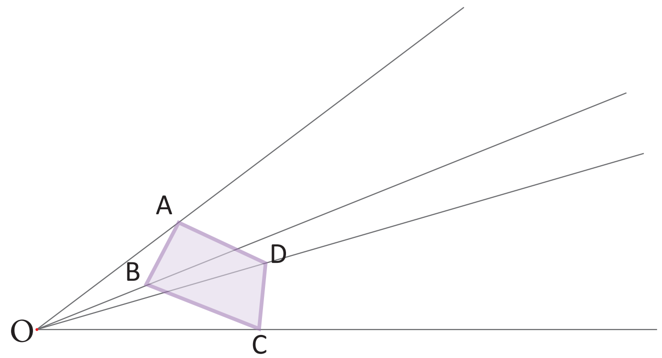


¿Cómo puedes dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3?

S

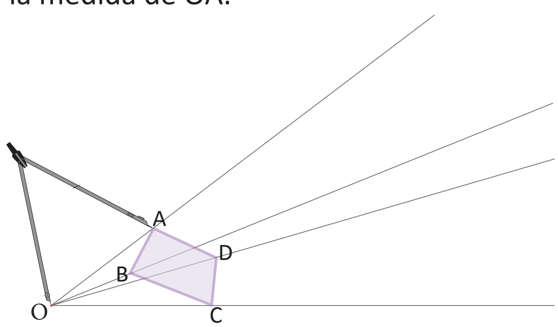
Para poder dibujar un cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3 se hace lo siguiente:

1. Coloca un punto que se denotará por O. Traza semirrectas que pasen por el punto O y cada uno de los vértices del cuadrilátero.

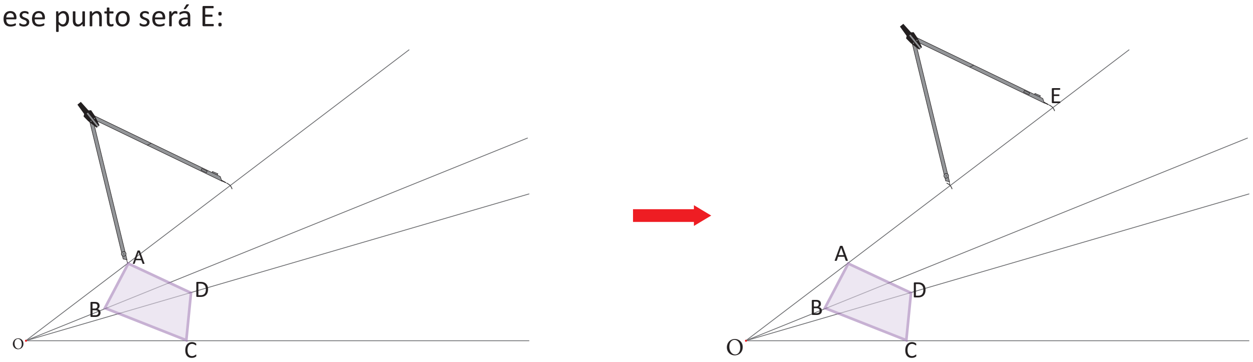


Una **semirrecta** está formada por todos los puntos sobre una línea recta que se encuentran a uno de los lados de un determinado punto fijo. También se le conoce como **rayo**.

2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.

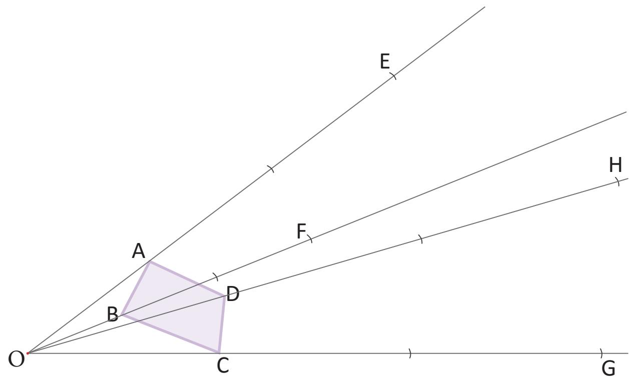


3. A partir del vértice A y sobre la semirrecta, marca un punto E que satisfaga OE = 3 OA. Esto se hace colocando la punta del compás en A y trazando un arco que corte a la semirrecta; luego se coloca la punta del compás en ese punto de intersección y se traza un segundo arco que corte a la semirrecta, ese punto será E:

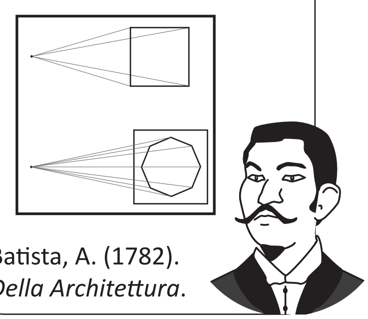


Unidad 5

4. Haz lo mismo con los otros tres vértices del cuadrilátero, tomando las medidas OB, OC, OD, encontrando los puntos F, G, y H que satisfagan OF = 3OB, OG = 3OC y OH = 3OD:

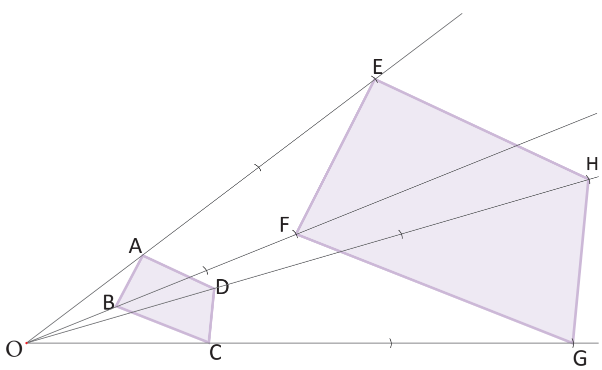


El italiano **Leon Battista Alberti** fue además de arquitecto, el primer teórico del arte del Renacimiento, desarrolló esta técnica en su obra *Della pintura*, en la que describe las leyes de la perspectiva. Un objeto disminuye su tamaño cuando se mira desde una larga distancia hasta que casi queda reducido a un punto.



Batista, A. (1782). *Della Architettura*.

5. Une los puntos para formar el cuadrilátero EFGH:



El método anterior para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. Al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos** y la razón:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

se llama **razón de semejanza**.

1. Verifica que los cuadriláteros dibujados anteriormente son semejantes a razón 1:3.

2. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 1:2.

1.7 Practica lo aprendido

1. Las dimensiones ancho y largo del piso de un salón que tiene forma rectangular están a razón 3:4.

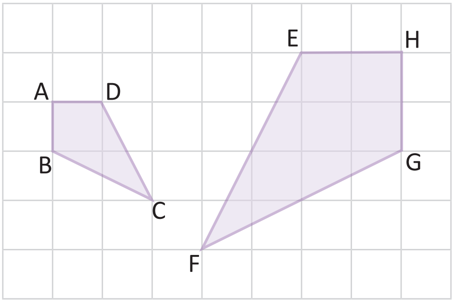
   a) Si el salón mide 8 m de largo, ¿cuánto mide el ancho?

   b) Se colocará piso de cerámica en el salón. Si cada baldosa de cerámica tiene un área de 0.25 m^2 y un costo de $2.00, ¿cuánto costará colocar cerámica en todo el piso?

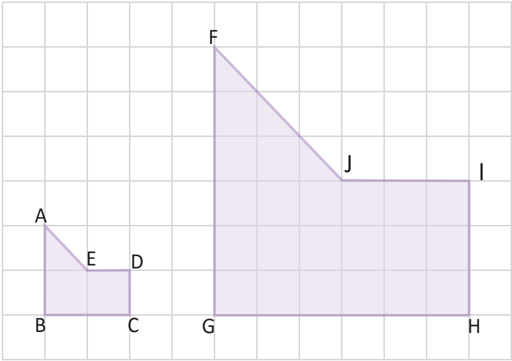
2. La Asamblea Legislativa de El Salvador decretó en la Ley de Símbolos Patrios, que las dimensiones de la bandera magna nacional son 3.35 m de largo por 1.89 m de ancho. Julia elabora versiones reducidas de la bandera, con un ancho de 20 cm. ¿Cuál es la medida del largo de la bandera elaborada por Julia, si tanto su versión como la original son semejantes? Encuentra la respuesta en cm hasta las décimas.

Las dimensiones de las banderas deben estar ambas en cm o en m.

3. Verifica que los cuadriláteros ABCD y HGFE son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



4. Verifica que los polígonos ABCDE y FGHIJ son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



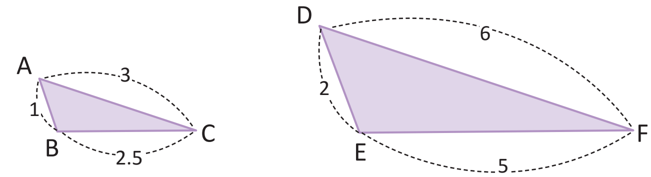
5. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 2:3.

Unidad 5

2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF de la figura tienen sus lados proporcionales, a razón 1:2. ¿Son semejantes?



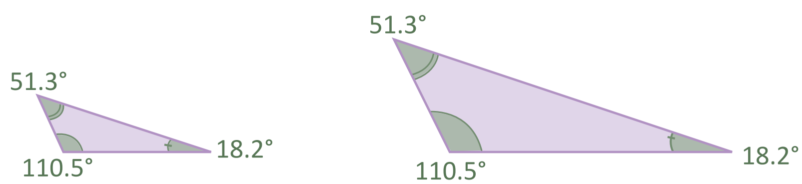
Para medir los ángulos del triángulo utiliza la figura que se encuentra en las páginas adicionales del libro.

S

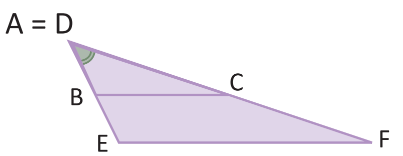
Los lados de ambos triángulos son proporcionales. Debe verificarse si sus ángulos correspondientes son congruentes; esto puede hacerse de las siguientes maneras:

1. Con un transportador, mide los ángulos de cada triángulo:

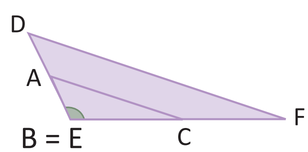
∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F



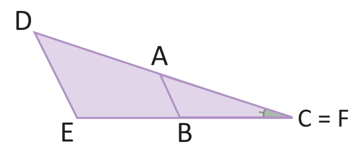
2. Sobrepone los triángulos y compara cada vértice:



∢A = ∢D



∢B = ∢E



∢C = ∢F

En los dos casos se verifica que los ángulos correspondientes de ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto, ΔABC ~ ΔDEF.

C

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

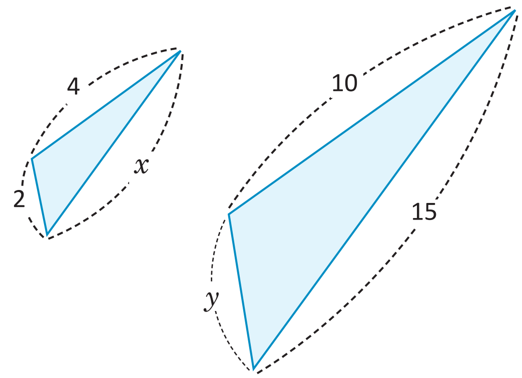
Criterio LLL:
Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces también son semejantes. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF del Problema inicial tienen sus lados correspondientes proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, ΔABC y ΔDEF son semejantes.

E

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos sean semejantes?



Según el resultado descrito en la conclusión, para que los triángulos sean semejantes bastaría con que sus lados sean proporcionales, es decir: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$.

Se calcula el valor de x:

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

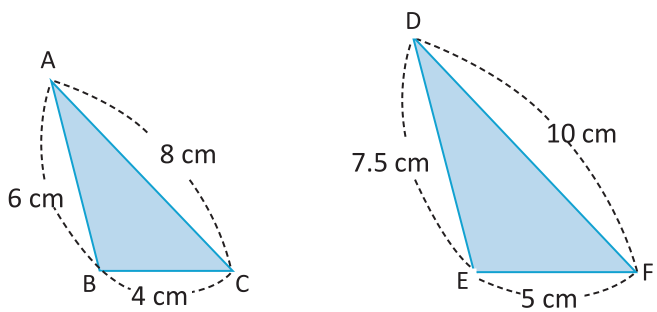
Se calcula el valor de y:

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

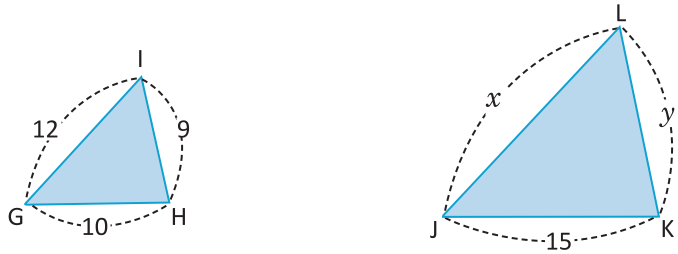
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Por lo tanto, los valores de x y y deben ser 6 y 5 respectivamente.

1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes. En caso de que lo sean calcula la razón de semejanza.



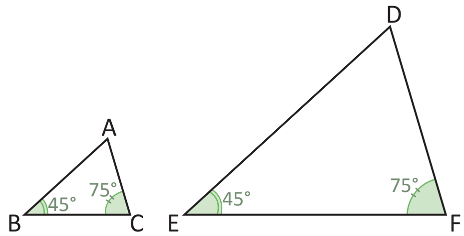
2. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes?



Unidad 5

2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos

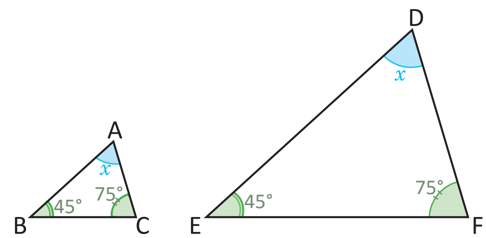
En los triángulos ABC y DEF: $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle F$. ¿Cuál es la medida de $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle D$? ¿Son ambos triángulos semejantes?



Los ángulos internos de todo triángulo suman 180°, y para que dos triángulos sean semejantes deben tener sus lados correspondientes proporcionales, y sus ángulos correspondientes congruentes.

Se denota por x la medida del tercer ángulo, que es igual en ambos triángulos. Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$



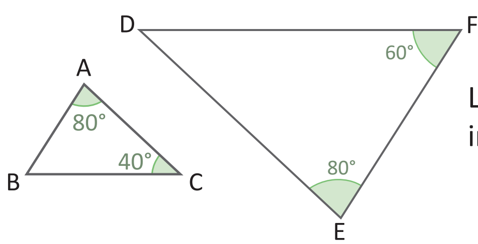
Por lo tanto, la medida del tercer ángulo en ambos triángulos es 60°.

Ahora mide con una regla las longitudes de los lados de cada triángulo que dibujaste en tu cuaderno y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales.

Criterio AA:
Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

¿Son semejantes los triángulos mostrados en la figura? Justifica tu respuesta.

Calcula el valor del tercer ángulo en alguno de ellos.



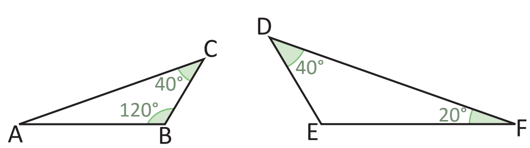
Los ángulos $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle E$ son congruentes. Por propiedad de los ángulos internos de un triángulo:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle B = 180° - 120°$$
$$\sphericalangle B = 60°$$

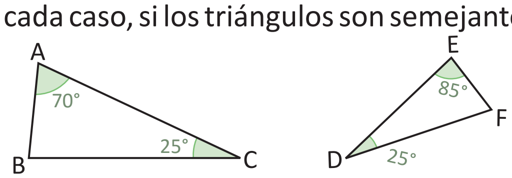
Entonces, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle F$ son congruentes. Por el segundo criterio de semejanza de triángulos, $\Delta ABC \sim \Delta EFD$.

1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina, en cada caso, si los triángulos son semejantes.

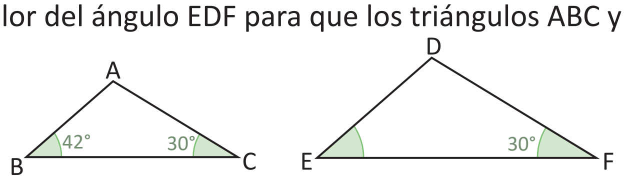
a)



b)



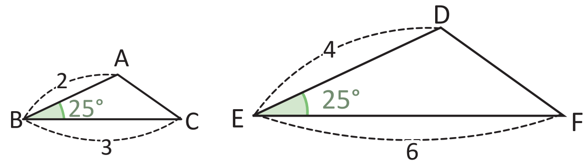
2. ¿Cuál debe ser el valor del ángulo EDF para que los triángulos ABC y DEF sean semejantes?



2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este ángulo son proporcionales a razón 1:2. ¿Son semejantes?



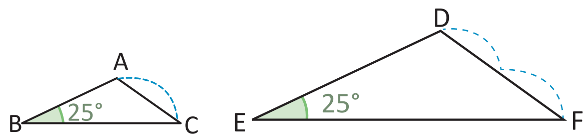
Utiliza regla (o compás) para calcular la razón entre $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$.

S

Con un compás se toma la medida del lado CA y se verifica (comparando con FD) que $\overline{CA}$ es la mitad de $\overline{FD}$.

Luego:

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$



Es decir, los triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales. Por el primer criterio de semejanza, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

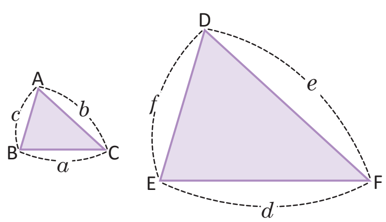
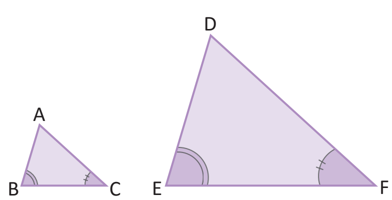
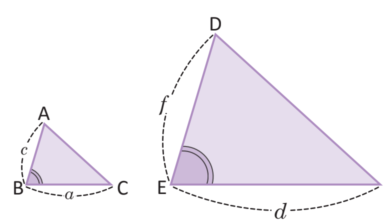
C

Criterio LAL:

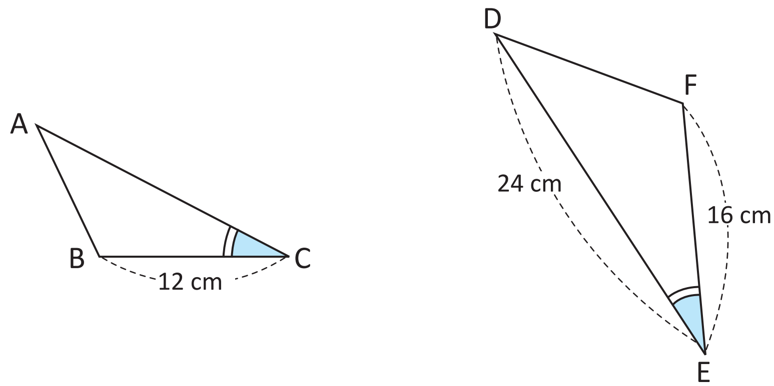
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

A continuación, se resumen los tres criterios de semejanza de triángulos:

Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si cumplen al menos una de las siguientes condiciones:

1. Sus lados correspondientes son proporcionales (criterio LLL).	2. Dos pares de ángulos correspondientes son congruentes (criterio AA).	3. Un par de ángulos correspondientes es congruente y los lados adyacentes son proporcionales (criterio LAL).
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 $\measuredangle B = \measuredangle E$ $\measuredangle C = \measuredangle F$	 $\measuredangle B = \measuredangle E$ $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

En los siguientes triángulos, los ángulos C y E son congruentes, ¿cuál debe ser la longitud del lado CA para que el ΔABC sea semejante al ΔDFE?



Como ya tienen un par de ángulos correspondientes congruentes (∢C y ∢E) entonces, para que sean semejantes, los lados adyacentes a estos ángulos deben ser proporcionales, es decir:

Se sustituyen los valores para encontrar CA:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$

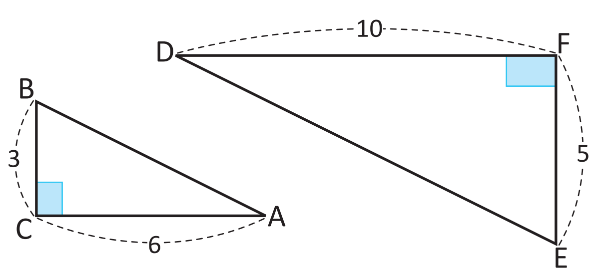
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$

$$CA = 18$$

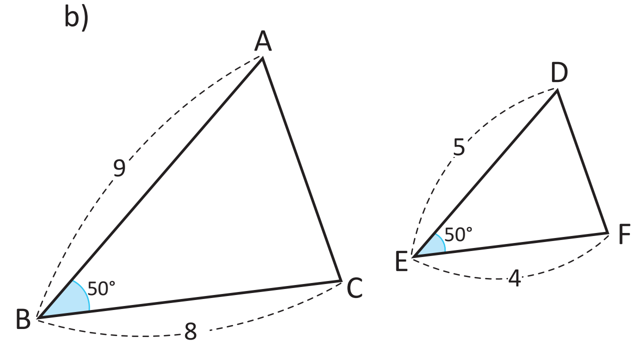
Por lo tanto, la longitud del lado CA debe ser 18 cm para que los triángulos ABC y DFE sean semejantes.

1. Usando el criterio LAL, determina si los siguientes triángulos son semejantes:

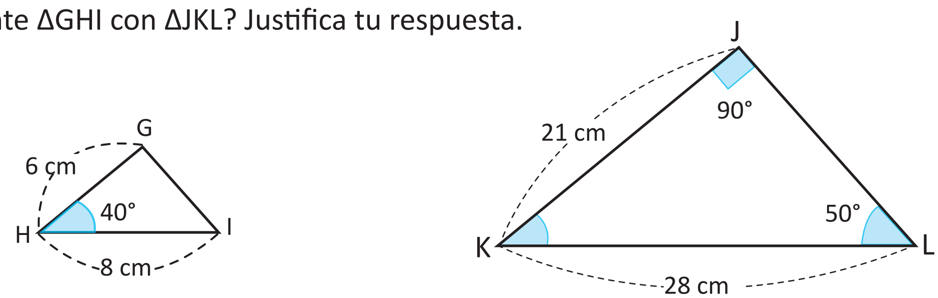
a)



b)

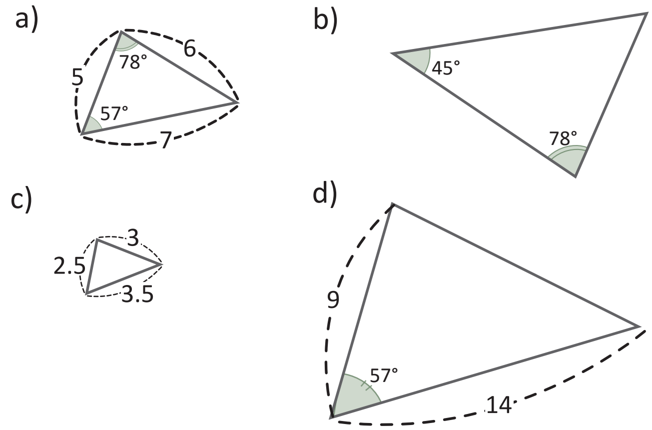


2. ¿Es semejante ΔGHI con ΔJKL? Justifica tu respuesta.

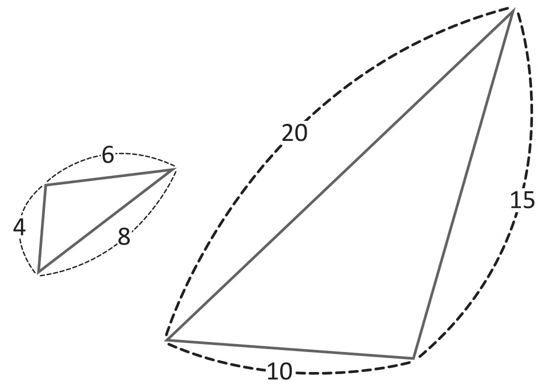


2.4 Practica lo aprendido

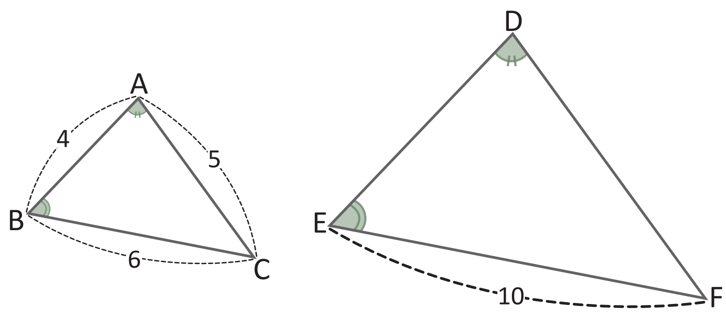
1. Determina cuáles de los siguientes triángulos son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste.



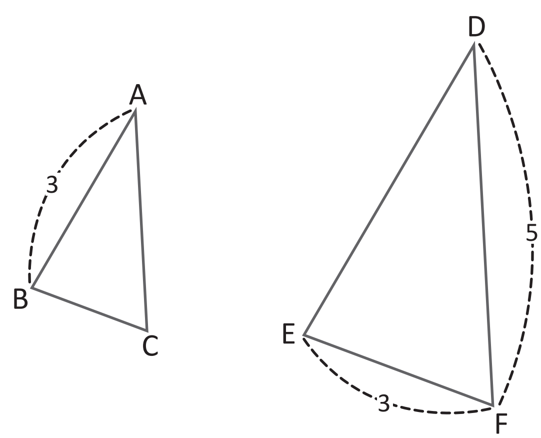
2. Verifica que los triángulos de la figura son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste y la razón de semejanza.



3. En la figura ∢A = ∢D y ∢B = ∢E
   a) ¿Cuál criterio puedes utilizar para justificar que los triángulos son semejantes?
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?

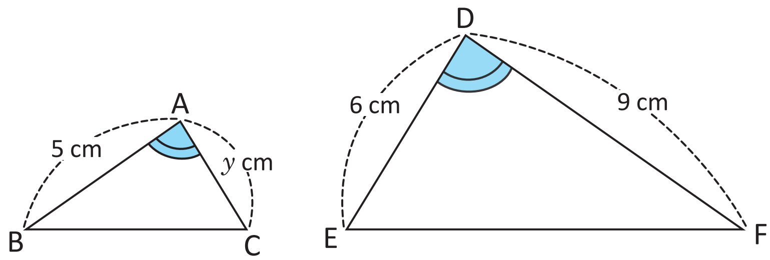


4. Los triángulos ABC y DEF son semejantes, a razón 2:3 ¿Cuáles son las medidas de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DE}$?

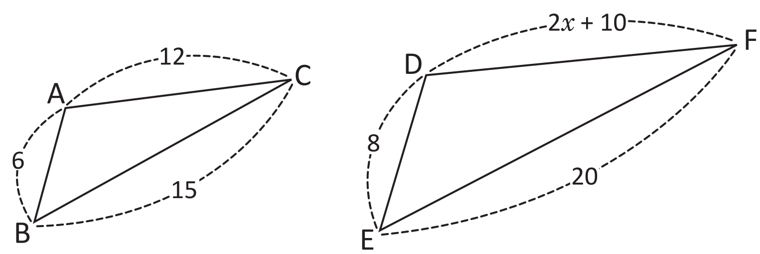


2.5 Practica lo aprendido

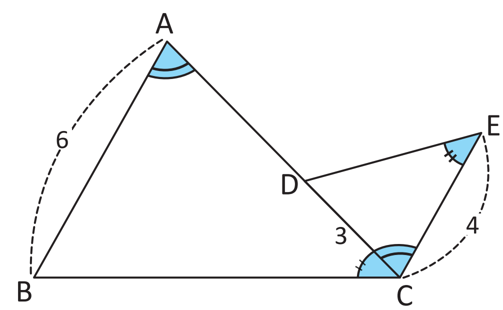
1. Los triángulos ABC y DFE cumplen $\measuredangle A = \measuredangle D$. Determina el valor de y de modo que los dos triángulos sean semejantes.



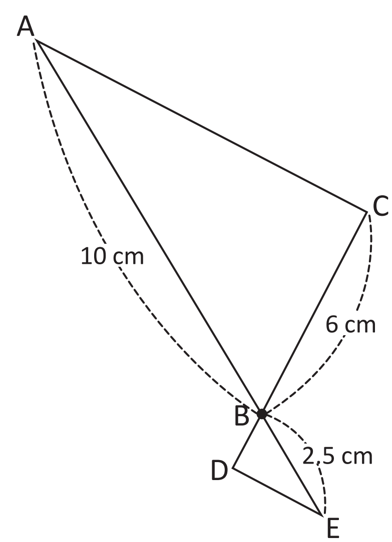
2. ¿Cuál debe ser el valor de x para que se cumpla $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?



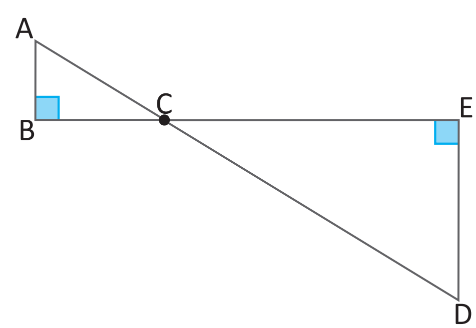
3. Calcula la longitud de $\overline{AD}$ si $\measuredangle BAC = \measuredangle ECD$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle DEC$.



4. En la figura, los segmentos AC y DE son paralelos.
   a) Utiliza criterios de semejanza para comprobar que los triángulos ABC y EBD son semejantes.
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$?

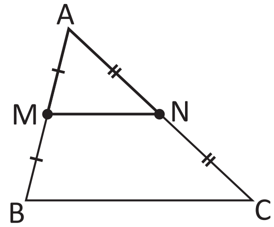


5. ¿Son semejantes los triángulos ABC y DEC? Justifica tu respuesta.



3.1 Teorema de la base media, parte 1

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CA respectivamente. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces AM = $\frac{1}{2}$ AB y NA = $\frac{1}{2}$ CA.

En los triángulos AMN y ABC:

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente).

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (criterio LAL).

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

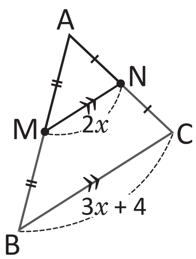
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos NMA y CBA son ángulos correspondientes entre paralelas).

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

Por lo tanto, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$BC.

Teorema de la base media: El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

¿Cuál es el valor de la incógnita x, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente?



Cuando dos segmentos son paralelos se coloca el símbolo ›› sobre los segmentos.

Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Se sustituyen los valores de los segmentos y se despeja la incógnita x:

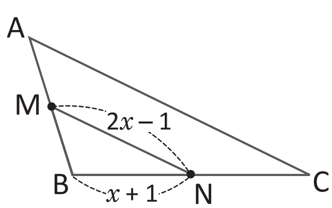
$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

Por lo tanto, el valor de x es 4.

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

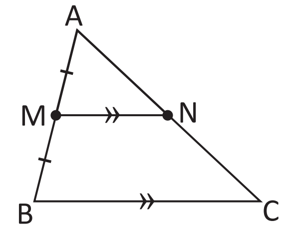
a) Calcula el valor de x si BC = 8 cm.

b) ¿Cuál es la longitud del lado CA?



3.2 Teorema de la base media, parte 2

En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. A partir de M se traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$ que corta al lado $\overline{CA}$ en el punto N. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



En los triángulos AMN y ABC:

$\measuredangle$MAN = $\measuredangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\measuredangle$NMA = $\measuredangle$CBA (ángulos correspondientes entre paralelas).

ΔAMN ~ΔABC (Criterio AA)

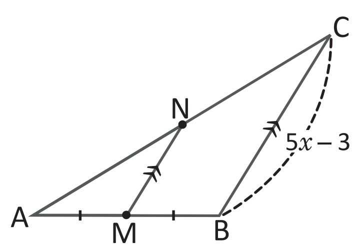
$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (M es el punto medio de $\overline{AB}$)

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

Por lo tanto, N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a un segundo lado, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralela.

Calcula el valor de x, si M es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = 3.5.



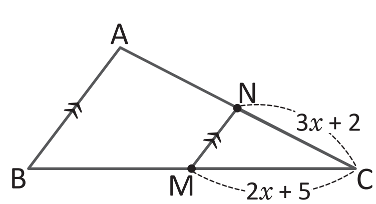
Si M es punto medio $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores correspondientes en lo anterior y despejando x:

$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

Por lo tanto, el valor de x es 2.

En el triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$.

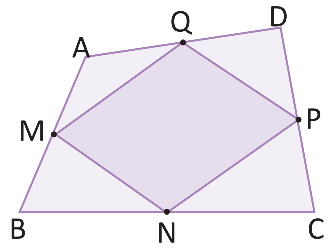
a) Calcula el valor de x si CA = 10 cm.
b) ¿Cuál es la longitud del lado BC?



3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero

P

ABCD es un cuadrilátero y M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Utilizando el teorema de la base media justifica que MNPQ es paralelogramo.



Traza las diagonales del cuadrilátero.

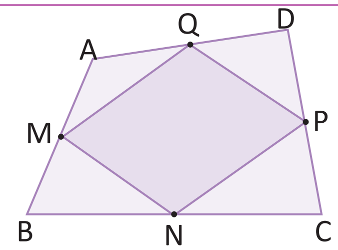
S

Se traza la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero:

$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media).

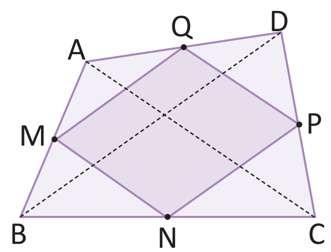
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media).

Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.



De forma similar se llega a $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, al trazar la diagonal $\overline{AC}$ del trapecio.

Por lo tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNPQ es paralelogramo.

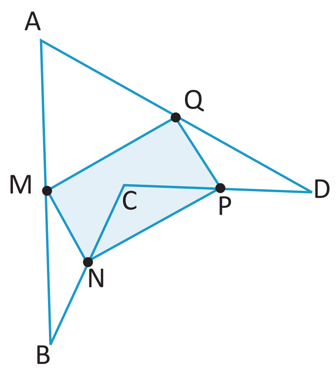


C

Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Demuestra que MNPQ es un paralelogramo.



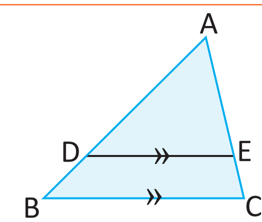
El cuadrilátero ABCD del ejercicio se llama **cuadrilátero cóncavo**, ya que posee un ángulo mayor a 180° ($\sphericalangle$DCB).

3.4 Semejanza utilizando segmentos paralalelos, parte 1

P

En el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$).
¿Son semejantes los triángulos ADE y ABC? Justifica tu respuesta.

¿Cuál criterio de semejanza de triángulos puedes utilizar?



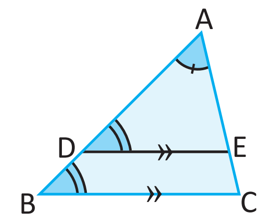
S

En los triángulos ADE y ABC:

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (ángulos correspondientes entre paralelas).

Por lo tanto, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (criterio AA).

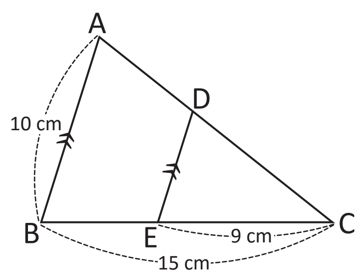


C

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original y se tiene que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

E

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB, ¿cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



Si el segmento DE es paralelo al lado AB, entonces, por el resultado anterior los triángulos DEC y ABC son semejantes. Luego:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

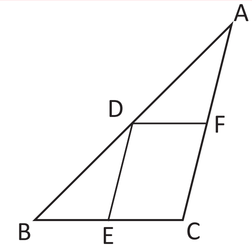
Se sustituyen los valores de AB, EC y BC en lo anterior: $\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

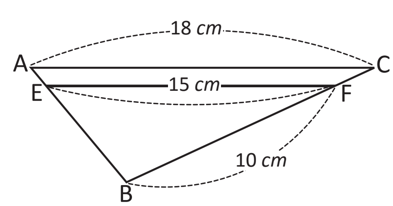
$$DE = 6$$

Por lo tanto, la longitud de $\overline{DE}$ es 6 cm.

1. En el triángulo ABC: $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.
   a) ¿Qué triángulos de los que se forman son semejantes entre sí?
   b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?



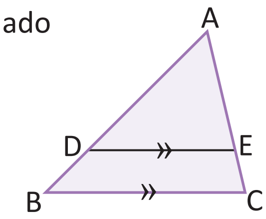
2. En el triángulo ABC, FE es paralelo al lado CA, ¿cuál es la longitud del lado BC?



3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2

P

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado BC. Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



Sustituye AB por AD + DB y AC por AE + EC.

S

Por el resultado de la clase anterior se tiene que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ Sustituir AB por AD + DB y AC por AE + EC,

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ restando 1 de ambos lados,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ tomando el recíproco de ambos lados.

Las siguientes proposiciones son equivalentes (una implica las otras):

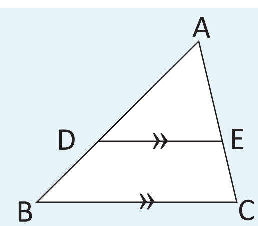
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

C

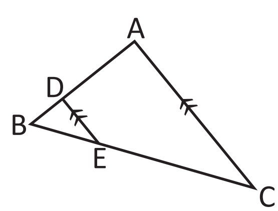
Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

En el ΔABC, si DE∥BC entonces se tiene que

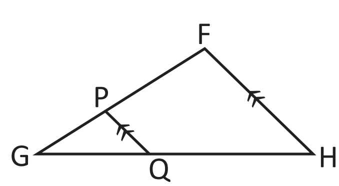
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}\ ,\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ en el triángulo ABC, si BD = 4 cm, DA = 10 cm y BE = 6 cm.

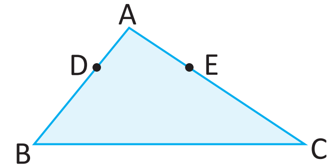


2. En el triángulo FGH $\overline{PQ} \parallel \overline{FH}$. Calcula la longitud del lado FG, si PG = 6 cm, GQ = 8 cm y QH = 12 cm.

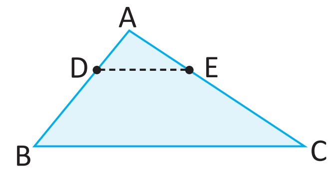


3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1

En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



Se traza $\overline{DE}$ para formar el triángulo ADE.



En los triángulos ADE y ABC:

∢DAE = ∢BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (lo indica el enunciado del problema).

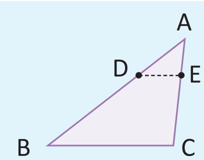
ΔADE ~ ΔABC (criterio LAL).

∢EDA = ∢CBA (por la semejanza de los triángulos ADE y ABC).

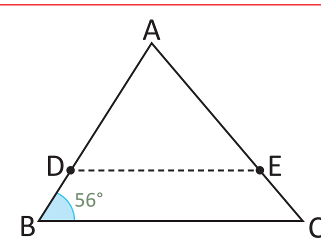
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos EDA y CBA son ángulos correspondientes).

Por lo tanto, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

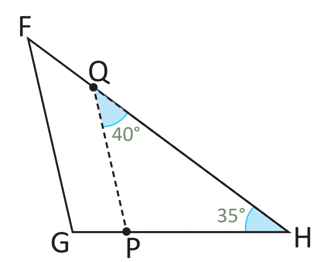
Dado un triángulo ABC, si D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



1. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre los lados AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. ¿Cuál es la medida del ∢EDA? Justifica tu respuesta.

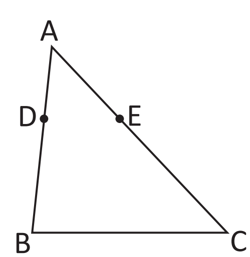


2. En el triángulo FGH, los puntos P y Q están sobre los lados HG y HF respectivamente, y satisfacen $\frac{HP}{HG} = \frac{HQ}{HF}$, ¿cuál es la medida del ∢HGF? Justifica tu respuesta.



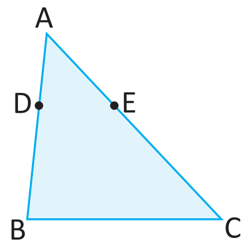
3. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Comprueba que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Sustituye DB por AB – AD y EC por AC – AE



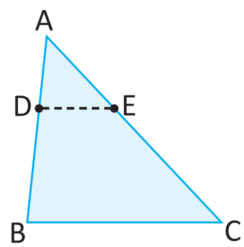
3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2

En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces también se cumple $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

De lo visto en la clase anterior, DE∥BC

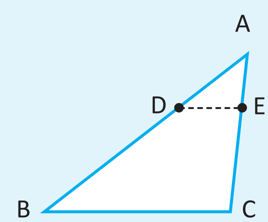


Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo

En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

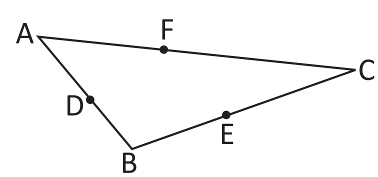
a) Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b) Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

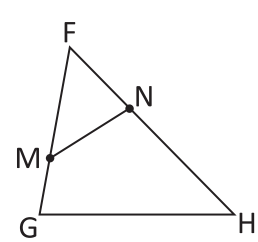


1. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

   a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AC? Justifica tu respuesta.
   b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta.
   c) ¿Es $\overline{DF}$ paralelo a $\overline{BC}$?



2. En el triángulo FGH se cumple lo siguiente: $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$. ¿Es el triángulo FNM semejante al triángulo FGH? Justifica tu respuesta.



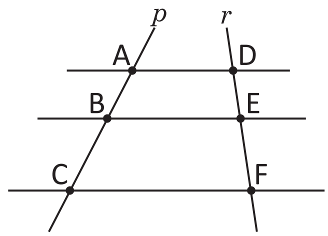
Unidad 5

3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

P

Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.

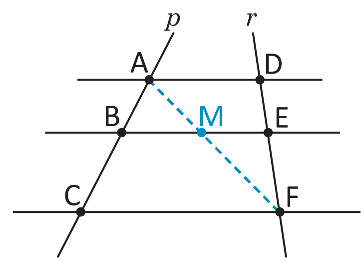
Demuestra que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Traza el segmento AF y utiliza el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

S

Se traza el segmento AF y se denota por M al punto de intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.



En el triángulo ACF por el teorema sobre segmentos paralelos, se tiene que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$$

En el triángulo AFD por el teorema sobre segmentos paralelos se tiene que

$$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$$

Tomando el recíproco de ambos lados, $\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$.

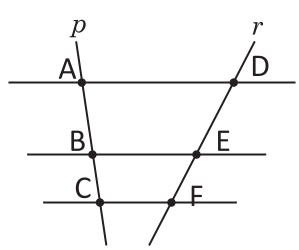
Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$.

C

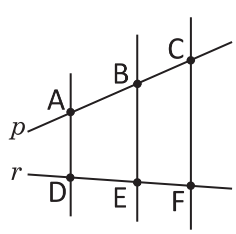
Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Este resultado es conocido como el Teorema de Thales.

1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.
   a) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   b) Demuestra que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

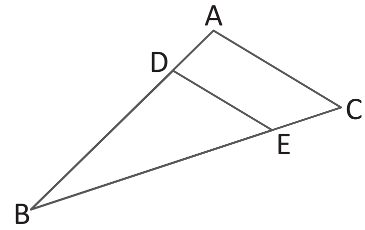


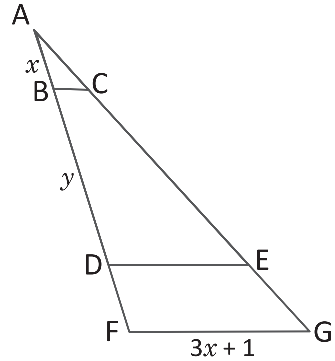
2. Las rectas p y r son cortadas por tres paralelas como se muestra en la figura. Si AB = 3, DE = 2 y EF = 1, ¿cuál es el valor de BC?



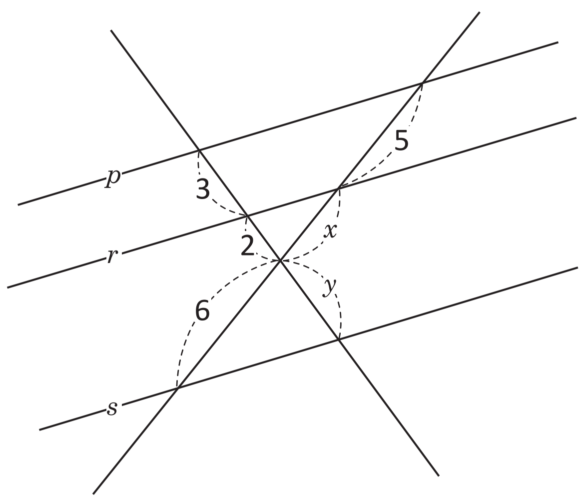
3.9 Practica lo aprendido

1. Calcula la longitud de $\overline{DE}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, AC = 2, BD = 3 y DA = 1.

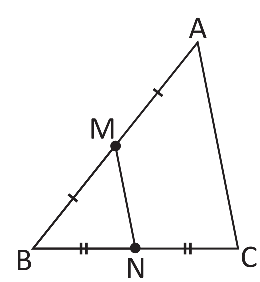




2. En el ΔAFG se cumple: $\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$. Calcula los valores de x y y si BC = 0.8 cm, DE = 3 cm y AF = 5 cm.



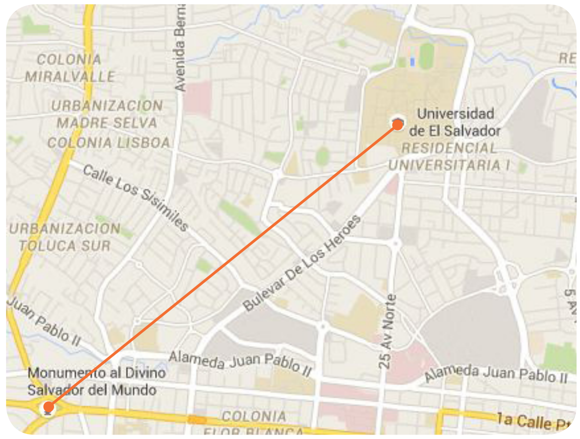
3. Las rectas p, r y s son paralelas. Calcula los valores de x y y.



4. En el triángulo ABC de la figura, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si el perímetro del triángulo MBN es 8, ¿cuál es el perímetro de ΔABC?

4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

Ana señala dos puntos sobre un mapa de San Salvador y mide con una regla la distancia entre ellos. Obteniendo como resultado 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala numérica de 1:50 000, ¿cuál es la distancia real entre los dos lugares señalados?



La escala numérica indica que un centímetro en el mapa equivale a 50 000 centímetros en la realidad.

Se denota por x la distancia real entre los dos lugares. Entonces:

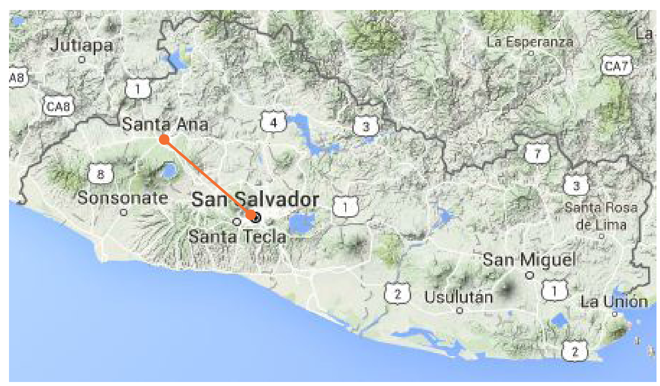
$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja x de la ecuación anterior: $6(50\,000) = x$

$$x = 300\,000$$

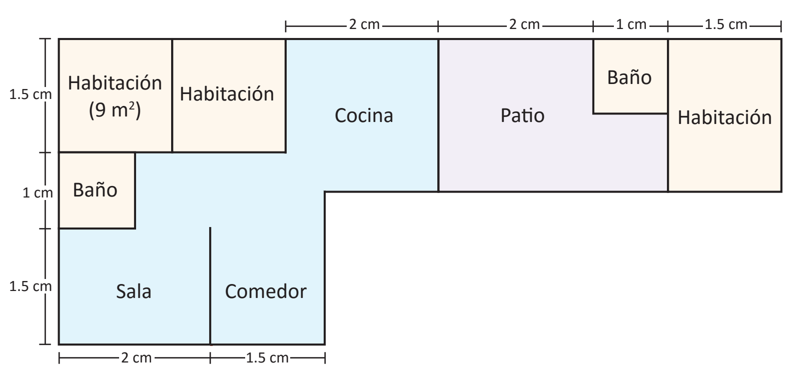
La distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.

1. ¿A qué escala se encuentra elaborado el siguiente mapa de El Salvador, si la distancia real entre Santa Ana y San Salvador es 48 km y el segmento trazado sobre el mapa mide 1.5 cm?



Ambas medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

2. En el siguiente plano:
   a) ¿Cuál es la escala?
   b) ¿Cuál es el área (en m²) del patio?
   c) ¿Cuál es el área total?

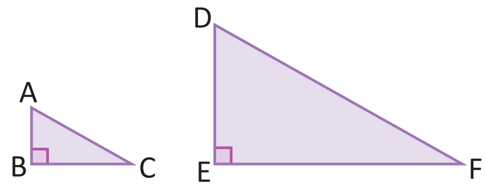


Para conocer la escala mide con una regla las longitudes del dibujo.

4.2 Áreas de polígonos semejantes

P

Los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3. ¿Cuál es la razón entre las áreas del ΔABC y ΔDEF?



El área de un triángulo es:

$$\frac{(base)(altura)}{2}$$

S

El área del triángulo ABC es $\frac{(BC)(AB)}{2}$, y la del triángulo DEF es $\frac{(EF)(DE)}{2}$. Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}}$$

$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

(ABC) Indica el área del triángulo ABC. Entonces, $\frac{(ABC)}{(DEF)}$ es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DEF.

Por hipótesis, $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$. Se sustituyen en la razón entre áreas:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

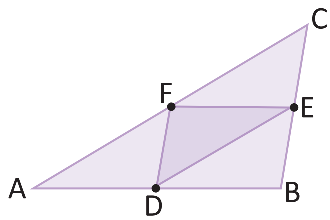
Por lo tanto, la razón entre las áreas de ΔABC y ΔDEF es igual a $\frac{1}{9}$ (el cuadrado de la razón de semejanza).

C

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

1. La razón entre dos triángulos semejantes es 2:3, ¿cuál es la razón entre sus áreas?

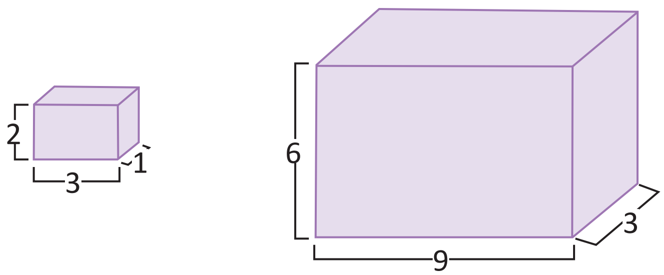
2. En el triángulo ABC, D, E y F son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, ¿cuál es la razón entre las áreas del triángulo ABC y el triángulo DEF?



Unidad 5

4.3 Volumen de sólidos semejantes

P Los prismas rectangulares de la figura son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



El volumen de un prisma rectangular se calcula: (altura)(largo)(ancho).

S Se denota por V_1 el volumen del prisma pequeño y por V_2 el volumen del prisma grande. Entonces:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Al simplificar lo anterior se obtiene:

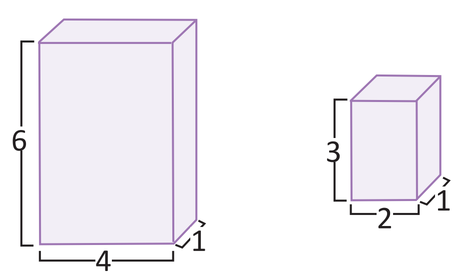
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es $\frac{1}{27}$.

C La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

1. ¿Son semejantes los siguientes prismas rectangulares? Justifica tu respuesta.



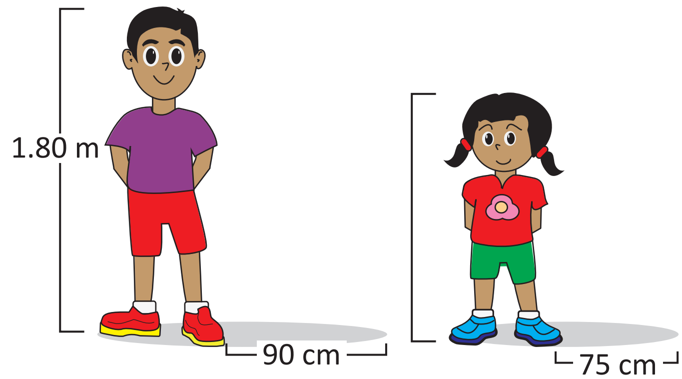
2. Dos cilindros circulares rectos son semejantes a razón 1:4, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos

P

A cierta hora del día, José y Marta se colocan de pie en el patio de su escuela. José proyecta una sombra de 90 cm de longitud, mientras que la sombra de Marta mide 75 cm de longitud. Si la estatura de José es 1.80 m, ¿cuál es la estatura de Marta?

En una misma hora, las alturas de dos objetos son proporcionales a sus sombras.



S

Con las estaturas de ambos y las longitudes de las sombras pueden formarse dos triángulos rectángulos semejantes (por el criterio AA). Primero, se convierte a centímetros la estatura de José:

$$1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$

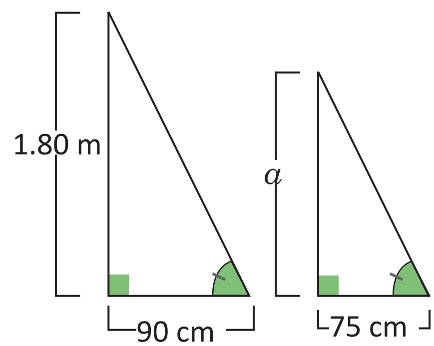
Se denota por a la estatura en cm de Marta. Por ser triángulos semejantes:

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$

Se despeja a de la ecuación anterior:

$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

$$a = 150$$



Por lo tanto, la estatura de Marta es 150 cm o 1.50 m.

1. ¿Cuál es la altura de la torre del Ministerio de Gobernación, si a determinada hora del día proyecta una sombra de 40 m mientras que un hombre de 1.82 m de estatura proyecta una sombra de 1.40 m a esa misma hora?

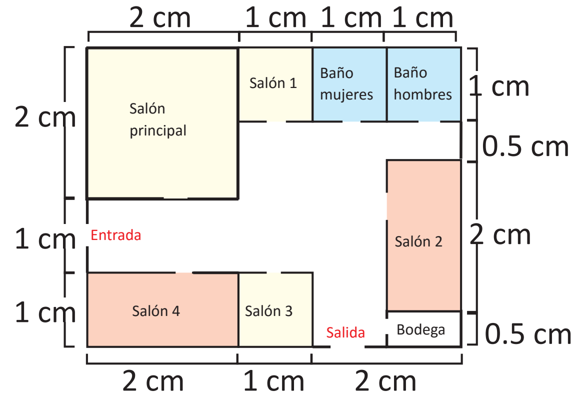
2. Antonio (A) se encuentra en la playa a 24 m de un salvavidas (S). Si la distancia entre el Malecón y el salvavidas es 60 m y la longitud del muelle es 200 m, ¿cuál es la distancia entre Antonio y el inicio del muelle (I)?

En la figura, el segmento que une el Malecón con el punto S es paralelo al muelle.

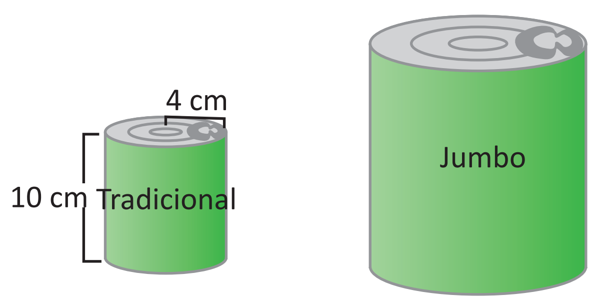
4.5 Practica lo aprendido

1. El siguiente plano de un museo se encuentra a una escala numérica de 1:200; los baños y los salones 1 y 3 tienen las mismas dimensiones, mientras que las dimensiones del salón 2 son iguales a las del salón 4.

   a) ¿Cuál es el área real del salón principal?
   b) ¿Cuál es el área del salón 1?
   c) Si se planea enladrillar todo el suelo del museo con baldosas de 25 cm × 25 cm, ¿cuántas de estas se necesitarán?



2. Doña Carmen vende frutas y jugos enlatados. Para ello utiliza dos tipos de latas: la tradicional con 4 cm de radio por 10 cm de alto y la jumbo cuyo volumen es de 540π cm^3. Si ambas latas son semejantes, ¿cuáles son las dimensiones del radio y la altura de la lata jumbo?



3. José se coloca a dos metros de un muro de tal forma que el extremo de su sombra coincide con el extremo de la sombra del muro. Si la estatura de José es 1.80 m y la longitud de su sombra es 3 m, ¿cuál es la altura del muro?