Unidad 1

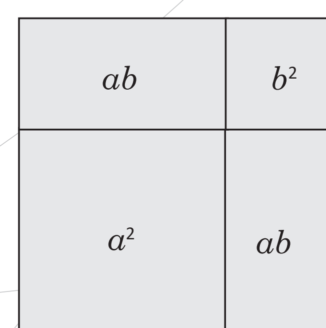
Multiplicación de polinomios

Página del libro escrito por Al-Juarismi.

La palabra "álgebra" procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi, matemático árabe nacido alrededor del 825 a.C., sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-<abr wa'l muqqabala*, que significa "ciencia de la transposición y la reducción", donde el término "la-yabr" se convirtió en "álgebra", sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.

En el libro II de *Los elementos* del griego Euclides se explora la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.



Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de Los elementos *de Euclides.*

El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.

En el abordaje de esta unidad desarrollarás productos de polinomios por polinomios, además de utilizar los productos notables y métodos geométricos para factorizar expresiones algebraicas.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $x(5x)$

b) $-2y(3y)$

c) $3x(-\frac{1}{4}xy)$

d) $(-9y)(-2xy)$

e) $(5yz)(-6xyz)$

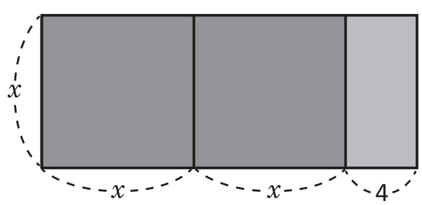
f) $(5xy)(3xyz)$

C En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} -2x(xy - y) &= -2x(xy) - (-2x)(y) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-2x(xy - y) = -2x^2y + 2xy$.

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $5x(3x - 4)$

b) $-5xy(-x - 2y)$

c) $(xy - y)(3xy)$

d) $(2xy - 3x + 4y)(-2xy)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Binomio por binomio, parte 1

R Desarrolla los siguientes productos:

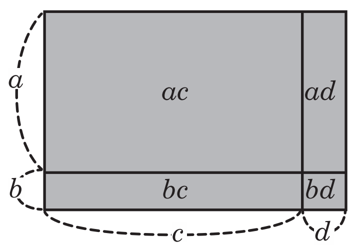
a) $(2xy)(-9yz)$

b) $(2xyz)(5yz)$

c) $2xy(-7x + 10y)$

d) $(-4x - 7y)(-3xy)$

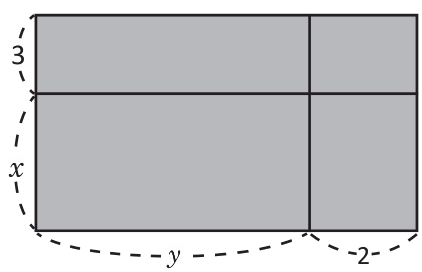
C



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 4)(5x + 11)$

b) $(5xy + 9)(6y + 5)$

c) $(4x + 6y)(3xy + 3x)$

d) $(2xy + 3)(10x + 9y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Binomio por binomio, parte 2

R 1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(-10xy)(-7xy - 5)$

b) $(4xy + 9x - 3y)(-7xy)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 5y)(8x + 10)$

b) $(xy + 8)(4x + 5y)$

C

Para multiplicar $(a - b)(c + d)$:
Se escribe $a - b = a + (-b)$ y

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= [a + (-b)]\,(c + d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

Por ejemplo, $(2x - 1)(y + 3)$ se desarrolla:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= [2x + (-1)]\,(y + 3)\\ &= 2x\,(y) + 2x(3) + (-1)\,(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2x\,y + 6x - y - 3$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x - 6)(3y + 8)$

b) $(7x + 9)(8y - 1)$

c) $(x - y)(xy + y)$

d) $(2xy - x)(3x - 2)$

e) $(5y - 9)(4xy - 7)$

f) $(-10xy + 3)(2x - 5y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Binomio por trinomio

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(9x + 10y)(8y + 7)$

b) $(x + 11y)(5xy + 8)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(-6x + 1)(2y - 7)$

b) $(2xy - x)(3x - 2)$

C

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

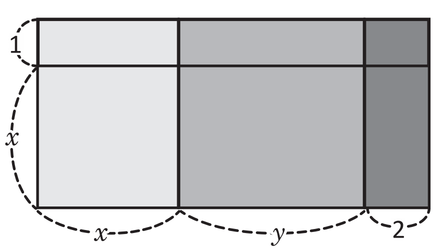
1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 5)(-2x - 7y + 11)$

b) $(y - 10)(2x + 3y + 9)$

c) $(5x + 3y)(4x - 6y - 3)$

d) $(-x + 10)(xy + 2x + 3y)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Trinomio por trinomio

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(7x + 5y)(2xy - 7)$

b) $(5y - 6)(-5xy - 4)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 7y)(2x + 10y - 7)$

b) $(x - 9y)(2x + 10y - 7)$

C

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + x + y + 3\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 2y + 4)(2x - 4y - 4)$

b) $(3x + 5y - 2)(-x + 3y - 4)$

c) $(xy + 5x - 3)(-5x + 3y + 6)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Desarrollo productos de monomio por polinomio o viceversa. Por ejemplo: a) $7x(2xy - 7)$ b) $(5y - 6)(-5xy)$				
2. Desarrollo productos de binomio por binomio. Por ejemplo: a) $(12x + 1)(5xy + 11)$ b) $(6xy - 1)(-9x - 4)$				
3. Desarrollo productos de binomio por trinomio. Por ejemplo: $(5x + 6y)(-9x + 7y - 5)$				
4. Desarrollo productos de trinomio por trinomio. Por ejemplo: $(10x + 4y - 5)(-5x + 3y + 6)$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $(2x + 9)(-6xy + 7x - 2)$

b) $(4xy - 5y + 1)(10xy + 8y - 3)$

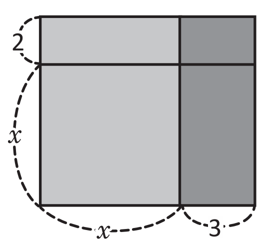
C El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + \overbrace{(5 - 2)}^{\text{Suma}}x - \overbrace{5(2)}^{\text{Producto}}$$
$$= x^2 + 3x + 10$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 7)(y + 6)$

b) $(x - 2)(x - 3)$

c) $(y + 2)(y - 3)$

d) $(x - 9)(x + 2)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 10)(x + 4)$

b) $(y - \frac{1}{3})(y - \frac{2}{3})$

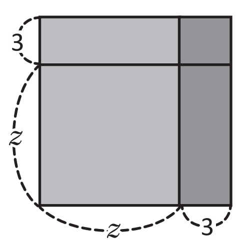
C El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Por ejemplo:

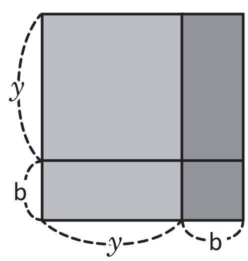
$$(x + 3)^2 = x^2 + 2(3)x + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de los siguientes cuadrados:



Primera forma:

Segunda forma:



Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 4)^2$

b) $(x + 9)^2$

c) $(y + 2)^2$

d) $(x + \frac{1}{9})^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 8)(y - 3)$

b) $(y - \frac{1}{5})(y - \frac{1}{10})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 10)^2$

b) $(x + \frac{5}{2})^2$

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio, y:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ .... } (1)$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ .... } (2)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 &= x^2 - 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

Por tanto, $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 2)^2$

b) $(y - 5)^2$

c) $(y - \frac{1}{10})^2$

d) $(y - \frac{5}{2})^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Suma por la diferencia de binomios

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 11)^2$

b) $(x + 5)^2$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 10)^2$

b) $(y - \frac{1}{7})^2$

C

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 5)(x - 5)$

b) $(y - 6)(y + 6)$

c) $(y + \frac{5}{6})(y - \frac{5}{6})$

d) $(x - \frac{7}{2})(x + \frac{7}{2})$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 3)^2$

b) $(x + 5)^2$

c) $(x - 8)(x + 8)$

d) $(y + 2)(y - 5)$

C Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

Por ejemplo, desarrollar: $(5x + 2)(5x - 2)$

$$\begin{aligned}(5x + 2)(5x - 2) &= (w + 2)(w - 2) && \text{... Tomando } 5x = w\\ &= w^2 - 4 \\ &= (5x)^2 - 4 && \text{... Sustituyendo nuevamente } w = 5x\\ &= 25x^2 - 4\end{aligned}$$

Por tanto, $(5x + 2)(5x - 2) = 25x^2 - 4$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x - 3)(4x + 5)$

b) $(2xy - 5)(2xy + 5)$

c) $(3yz + 8)^2$

d) $(5yz - 6)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Combinación de productos notables

R

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 7)(x + 7)$

b) $(9 - x)(9 + x)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x - 7y)(3x + 7y)$

b) $(5xy - 10)^2$

C

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identifica cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarróllalos, teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reduce los términos semejantes, si los hay.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x - 3)^2 + (x + 2)(x - 2) &= (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 + x^2 - 4\\ &= 4x^2 - 12x + 9 + x^2 - 4\\ &= 5x^2 - 3x + 5\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x - 3)^2 + (x + 2)(x - 2) = 5x^2 - 3x + 5$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 5)(x + y - 5)$

b) $(2y + 3)(2y - 3) - (y + 1)^2$

c) $(2x + 1)(2x - 1) + (y + 7)(y - 7)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Cuadrado de un trinomio

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(5yz - 6)(5yz + 6)$

b) $(\frac{x}{3} - \frac{2}{5})(\frac{x}{3} + \frac{2}{5})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 2)(x + y - 2)$

b) $(4x + 10y)^2 - (3x - 9y)$

El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x)^2 + (-3y)^2 + 4^2 + 2(5x)(-3y) + 2(5x)(4) + 2(-3y)(4)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x - 3y + 4)^2 = 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y$.

Desarrolla:

a) $(x + 5y + 4)^2$

b) $(8x - 3y + 2)^2$

c) $(-x + 6y + 4)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

R

1. Desarrolla el siguiente producto:

$(10x - 2y)(10x + 2y) + (7x - 3y)^2$

2. Desarrolla el siguiente producto:

$(3x - y - 7)^2$

1. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor númerico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 125$ y $ab = 50$?

b) ¿Cuál es el valor númerico de ab si $(a + b)^2 = 100$ y $a^2 + b^2 = 58$?

c) ¿Cuál es el valor númerico de $(a + b + c)^2$ si $a^2 + b^2 + c^2 = 35$ y $ab + bc + ca = 23$?

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

a) $99 \times 101 =$

b) $111^2 =$

c) $45 \times 55 =$

d) $103 \times 101 =$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Desarrollo productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Por ejemplo: a) $(x + 8)(x - 11)$ b) $(y - \frac{5}{2})(y - \frac{3}{2})$				
2. Desarrollo productos de la forma $(x + a)^2$. Por ejemplo: $(x + 4)^2$				
3. Desarrollo productos de la forma $(x - a)^2$. Por ejemplo: $(y - 12)^2$				
4. Desarrollo productos de la forma $(x - a)^2$. Por ejemplo: $(x + 3)(x - 3)$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo sustitución para desarrollar productos notables. Por ejemplo: $(7x + \frac{y}{2})^2$				
2. Desarrollo operaciones en polinomios que involucren combinaciones de productos notables. Por ejemplo: $(3x + 6y + 5)(3x + 6y - 5)$				
3. Desarrollo productos de la forma $(a + b + c)^2$. Por ejemplo: $(2x - 3y + z)^2$				
4. Calculo el valor númerico de expresiones algebraicas utilizando productos notables. Por ejemplo: $a^2 + b^2$ si $a - b = 3$ y $ab = 70$				
5. Calculo el resultado de operaciones aritméticas utilizando productos notables. Por ejemplo: 105×103				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Factorización de polinomios

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $xy(2x + 3y - 5)$

b) $(2x + 9y)^2$

c) $(5x - 7y)^2$

d) $(4x + 3y)(4x - 3y)$

C Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $5x^2 + 7x$ se factoriza como el producto $x(5x + 7)$; a cada uno de los polinomios x y $5x + 7$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

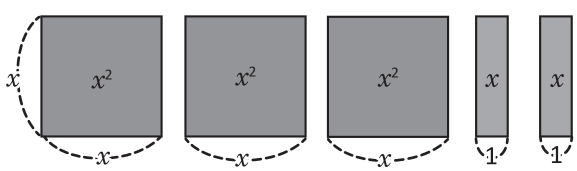
Factorizar

$$5x^2 + 7x = x(5x + 7)$$

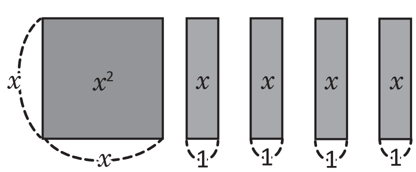
Desarrollar

1. Dibuja el rectángulo que se forma con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $-2x(3x + 9)(4y + 6)$

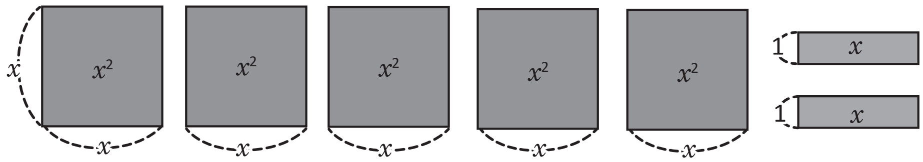
b) $-xy(x - 1)(2x + 7)(y - 7)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

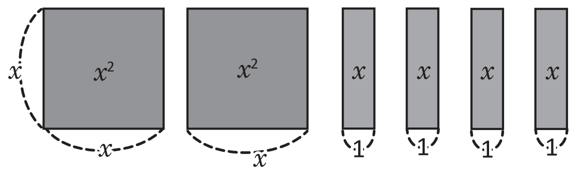
3.2 Factor común

Forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.

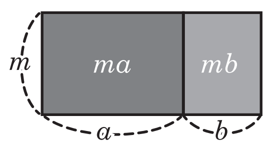
a)



b)



Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 5xy$

b) $-2xy + 3y^2$

c) $-3x^2 - 15xy$

d) $6xy + 12x^2 + 15x$

e) $-4xy - 6y^2 - 14y$

f) $-6x^2y + 8xy^2 + 14xy$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

Factoriza los siguientes polinomios extrayendo el factor común en cada uno de ellos:

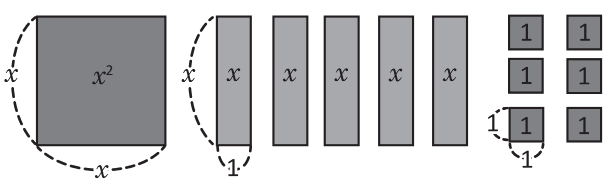
a) $-15xy + 35y^2$

b) $24x^2y - 20xy^2 - 4xyz$

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).
2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

1. Dibuja el rectángulo que se forma con las piezas dadas y escribe su área como producto de su altura y su base.



2. Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 + 7x + 10$

b) $y^2 + 10y + 16$

c) $y^2 + 9y + 18$

d) $x^2 + 14x + 40$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

R

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6xy^2 + 9x^2yz - 15x^2y$

b) $30xyz - 50xy^2z - 40x^2yz$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $x^2 + 10x + 21$

C

Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan **2 números positivos** cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan **2 números negativos** cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan **2 números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$ según sea el caso.

Por ejemplo, para factorizar el trinomio $x^2 - 13x + 36$ se buscan dos números negativos cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Entonces: $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$.

Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 - 2x - 24$

c) $y^2 - 8y + 15$

d) $y^2 - 2y - 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 7x + 12$

b) $x^2 + 12x + 35$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^2 - y - 12$

b) $y^2 - 7y + 10$

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto, el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo, $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de 3 ($3^2 = 9$); además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

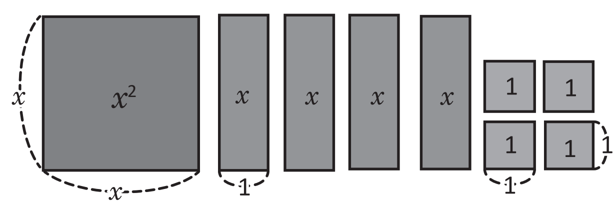
$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

1. En la figura:

a) escribe el área descrita por las piezas;

b) dibuja el rectángulo que se forma con las piezas;

c) encuentra el área del rectángulo formado.



2. Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $y^2 - 20y + 100$

d) $y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

R Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^2 - y - 30$

b) $x^2 - 16x + 64$

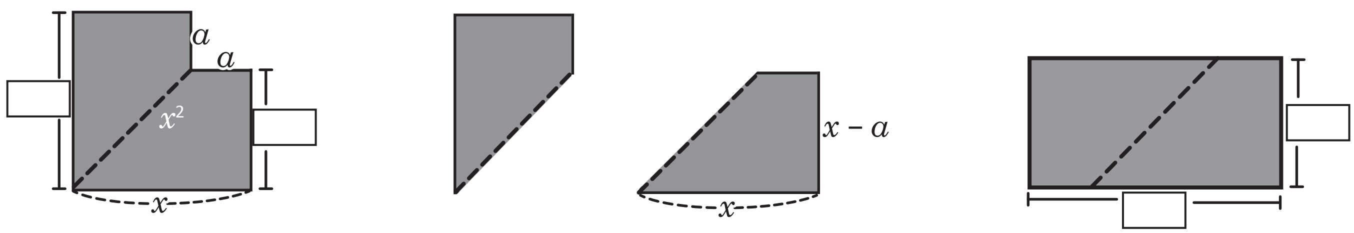
C Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se le llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

1. La siguiente secuencia de pasos es una demostración visual. Utiliza una hoja de papel y calca la figura en el paso 1 o haz una figura más grande pero semejante a esta.

   a) recorta la figura y sigue la secuencia descrita en los pasos;
   b) completa las medidas faltantes en las imágenes de abajo;

Paso 1 Paso 2 Paso 3



   c) de los pasos descritos. Escribe la propiedad de factorización que se ha demostrado.

$$\underline{x^2 - a^2} = \underline{\qquad\qquad}$$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 - 36$

c) $y^2 - 49$

d) $y^2 - \frac{1}{25}$

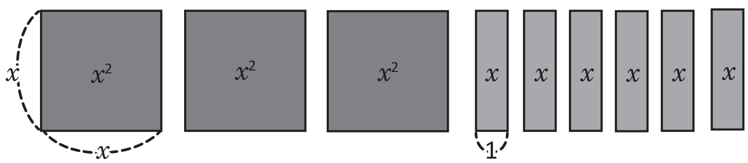
e) $x^2 - \frac{4}{9}$

f) $x^2 - \frac{16}{25}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Utilizo áreas de cuadrados y rectángulos para factorizar polinomios. Por ejemplo, formar un rectángulo con las siguientes piezas y escribir el área total como producto de altura por base:  				
2. Identifico factores en productos de polinomios. Por ejemplo en los siguientes productos: a) $-10x(x + 9)(2y + z)$ b) $(5x - 7)(x + 3y)(2x + 9y - 11)$				
3. Extraigo factor común en polinomios. Por ejemplo: a) $10x^2y^2 - 20xy^2 - 15xy$ b) $-21xy^2z^2 - 18y^2z^2 + 15yz$				
4. Factorizo trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$. Por ejemplo: $x^2 + 3x - 28$				
5. Factorizo trinomios cuadrados perfectos. Por ejemplo: $y^2 + 8y + 16$				
6. Factorizo binomios que son diferencia de cuadrados. Por ejemplo: a) $x^2 - 81$ b) $x^2 - \frac{9}{64}$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

R Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^2 - 14y + 49$

b) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

c) $x^2 - 100$

d) $y^2 - 64$

C Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformalo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

b) $25x^2 - 36y^2$

c) $64x^2 - y^2$

d) $4x^2 + 20x + 25$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

R Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $y^2 - 81x^2$

c) $25x^2 - 30x + 9$

d) $49x^2 - 81y^2$

C Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformalo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza los siguientes trinomios:

a) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2$

b) $(x + 5)^2 + 2(x + 5)(y - 1) + (y - 1)^2$

c) $9x^2 - 6x(y - 3) + (y - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16y^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.10 Factorizaciones sucesivas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $25y^2 + 30y + 9$

b) $16x^2 - 81y^2$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $(x - 2)^2 - (y + 2)^2$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1) + (y - 1)^2$

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $7x^2 - 28x + 35$

b) $-3x^2 + 15x - 18$

c) $6xy^2 - 48xy + 96x$

d) $3x^2y - 24xy + 48y$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.11 Combinación de factorizaciones

R

1. Factoriza el siguiente polinomio:

   $(x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 2) + (y - 2)^2$

2. Factoriza el siguiente polinomio:

   $3xy^2 - 18xy + 27x$

C

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera:

1. Se verifica si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae ese monomio y se factoriza el segundo factor.

2. Si no hay monomio común:
   Se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos. Se repite el proceso para los factores resultantes hasta que el polinomio original quede totalmente factorizado.

Factoriza los siguientes polinomios:

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

a) $5x^2z - 45y^2z$

b) $45x^2z - 20y^2z$

c) $27mn^2 - 18mn + 3m$

d) $28xy^2 - 84xy + 63x$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

R

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + 8x - 10$

b) $4x^2y - 24xy + 36y$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $18x^2z - 200y^2z$

b) $50x^2z + 60xyz + 18y^2z$

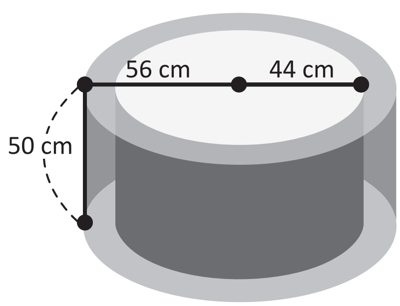
1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $55^2 - 15^2$

b) $999^2 - 1$

c) $97^2 - 9$

2. Calcula el volumen del sólido que se forma entre dos cilindros uno de radio 44 cm y otro de 56 cm, y altura 50 cm (deja expresado el resultado en términos de π).



El volumen de un cilindro es:

V = $\pi h r^2$

Donde h es la altura del cilindro y r es el radio.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

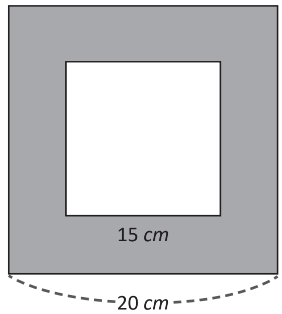
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Factorizo polinomios en productos notables. Por ejemplo: a) $16x^2 - 56xy + 49y^2$ b) $100x^2 - 9y^2$				
2. Factorizo polinomios usando cambio de variable para escribirlos como trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados. Por ejemplo: a) $(2x + 3)^2 - (5y - 2)^2$ b) $(x - 10)^2 + 2(x - 10)(2y + 7) + (2y + 7)^2$				
3. Factorizo polinomios: Identifico y extraigo factor común, luego utilizo productos notables. Por ejemplo: a) $-2x^2 + 6x + 36$ b) $3y^2 - 300$				
4. Factorizo polinomios que impliquen combinación de factorizaciones. Por ejemplo: a) $98x^2z - 18y^2z$ b) $18xy^2 - 12xy + 2x$				
5. Calculo el resultado de operaciones aritméticas utilizando factorización. Por ejemplo: a) $88^2 - 12^2$ b) $190^2 - 90^2$				

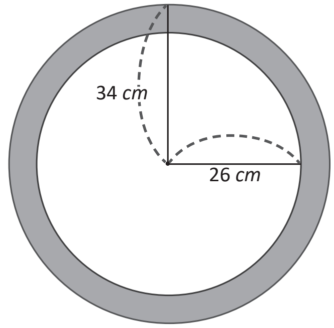
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Área de un marco**

Un carpintero construye marcos de madera para fotos, unos con forma cuadrada y otros con forma circular.



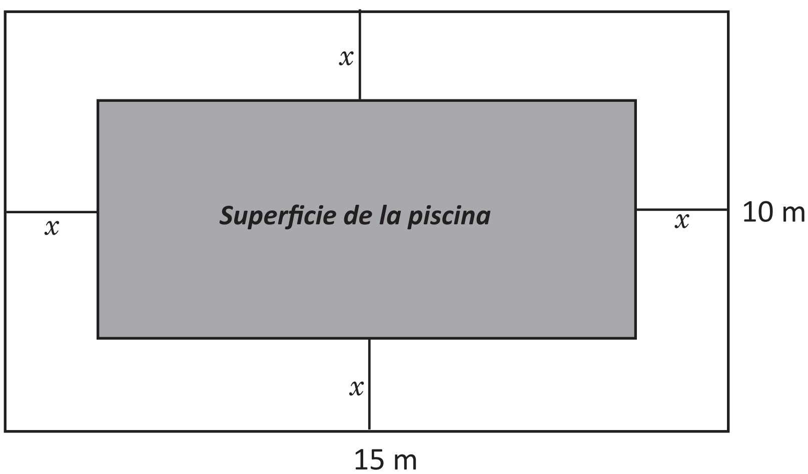


a) Encuentra el área de cada tipo de marco (el área de la región sombreada).

b) Si el carpintero fabrica 4 marcos con forma cuadrada, ¿cuántos metros de madera necesitará para poder realizarlos?

2. **Área de una piscina**

Se construye una piscina rectangular como la que se muestra en la figura:



a) expresa en función de x el área de la superficie de la piscina;

b) desarrolla la expresión obtenida;

c) si x = 2 m, ¿cuánto mide la superficie de la piscina?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?