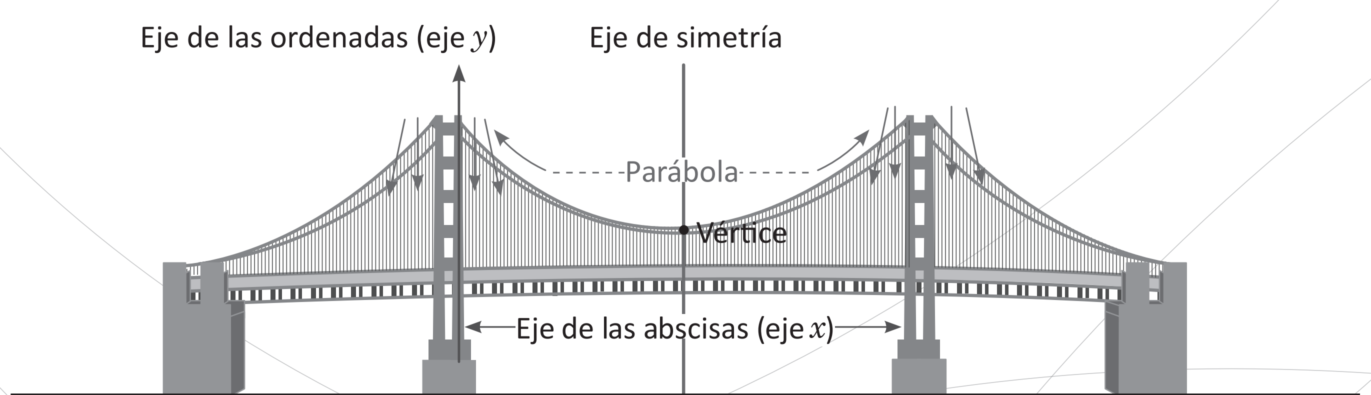
Unidad 4

Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$

En el siglo XVI, comenzaron a introducirse los símbolos que hoy se utilizan en el planteamiento de ecuaciones. Uno de los matemáticos que mayor influencia tuvo en este cambio favorable para el desarrollo del Álgebra, fue el francés François Viète (1540-1603), con el uso de símbolos para expresar la incógnita y los coeficientes de una ecuación, facilitando el estudio de ecuaciones de grado 2, 3 y 4, que a partir de la edad moderna se les comenzó a llamar "funciones".

Dados los hallazgos de los matemáticos, se conoce en la actualidad la utilización de las funciones cuadráticas en las diferentes ramas de las ciencias naturales (Biología, Física y Química), así como en la economía y construcciones en la arquitectura, realizando aportes significativos para la humanidad.



En esta unidad relacionarás magnitudes utilizando la proporcionalidad al cuadrado, ubicar pares ordenados en el plano cartesiano para graficar la función $y = x^2$ así como describir la variación de los valores de la función $y = ax^2$.

1.1 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 1

Para cada caso, determina si y es directamente proporcional a x y escribe el valor de la constante de proporcionalidad:

a)

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

b)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

Una magnitud y **es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud** x si $y = ax^2$. El número a es una **constante**, es decir, un número fijo.

Por ejemplo: al dejar caer una pelota desde un edificio, la distancia que recorre hasta llegar al suelo varía como lo muestra la siguiente tabla:

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

Donde x es el tiempo transcurrido (desde que se deja caer la pelota) y y es la distancia recorrida por la pelota después de x segundos. ¿Qué relación hay entre x^2 y y? ¿Cómo puede escribirse y en términos de x?

La relación entre x^2 y y puede verse en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
x^2	0 ×5	1 ×5	4 ×5	9 ×5	16 ×5
y	0	5	20	45	80

Al multiplicar por 5 cada una de las cantidades en x^2 el resultado son sus respectivas cantidades en y. Por lo tanto, $y = 5x^2$.

1. En ambos literales, la variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Completa los valores en las tablas y en cada caso expresa y en términos de x:

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	4	16	36					

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25			
y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$				

2. Utilizando los valores de x y y de las tablas, ¿es y directamente proporcional al cuadrado de x?

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	1	3	12	27	48	75

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 2

R

1. La variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Completa los valores de la tabla y expresa y en términos de x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25					
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5					

2. Con base en los siguientes datos, ¿es y directamente proporcional al cuadrado de x?

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	–2	–8	–18	–32	–50

C

Si y es directamente proporcional al cuadrado de x, entonces se dice que ***y* es función de *x***, pues cada valor de x determina un único valor de y. El valor de la constante a en $y = ax^2$, puede encontrarse sustituyendo un par de valores particulares de x y y y resolviendo la ecuación.

Por ejemplo, si y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x y cuando $x = 3$, $y = 18$, entonces para encontrar el valor de la constante a se sustituyen $x = 3$ y $y = 18$ en $y = ax^2$ y se resuelve la ecuación:

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

Por lo tanto, $y = 2x^2$.

En general, la relación $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales ($a \neq 0$) se llama **función cuadrática**.

Las funciones $\boldsymbol{y = ax^2}$ y $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$ son casos especiales que se estudiarán en esta unidad, la forma completa de la función cuadrática se estudiará hasta bachillerato.

En cada literal, y es directamente proporcional al cuadrado de x. Calcula el valor de la constante a para cada caso:

a) Si $x = 3$ entonces $y = 90$

b) Si $x = 8$ entonces $y = 6$

c) Si $x = 9$ entonces $y = 15$

d) Si $x = 2$ entonces $y = –20$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

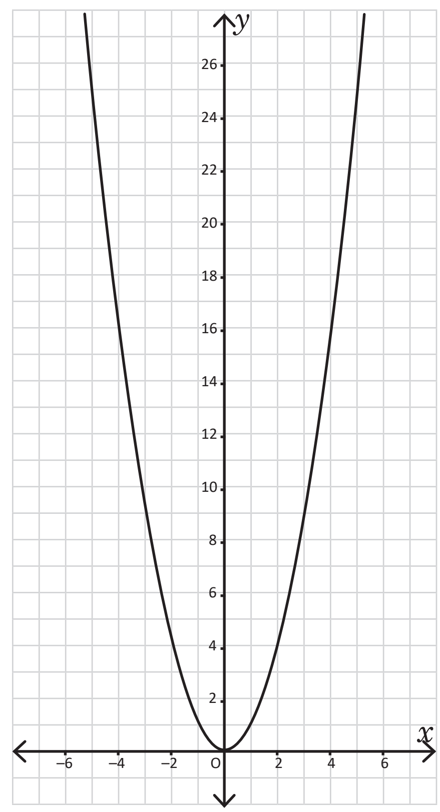
1.3 La función $y = x^2$

1. Completa la tabla y escribe y en términos de x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	8	32	72					

2. La variable y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:
   a) Si $x = 4$ entonces $y = 112$
   b) Si $x = 12$ entonces $y = -24$

La gráfica de la función $y = x^2$ se llama **parábola** y pasa por el origen (0, 0). Todas las funciones cuadráticas tienen una parábola como gráfica, y su forma es similar a la de $y = x^2$.



1. Sea $y = x^2$. ¿Qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -3$ y $x = 3$? ¿Y cuando $x = -\frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{3}$?

2. Si $y = x^2$:

   a) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = 4$?

   b) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = -\frac{1}{2}$?

   c) ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que para $x = \sqrt{2}$?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 La función $y = ax^2$; $a > 1$

R

1. Calcula el valor de la constante en $y = ax^2$, si cuando $x = 6$ entonces $y = -15$.

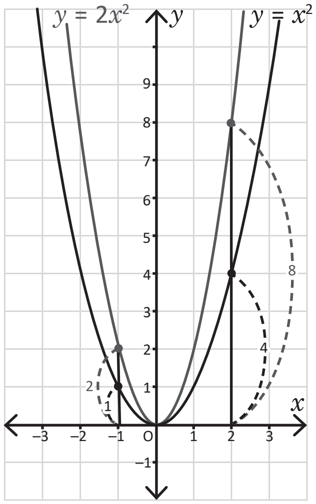
2. Sea $y = x^2$. ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que $x = \sqrt{3}$? ¿Y que $x = -\sqrt{5}$?

C

Si a es un número mayor que 1 ($a > 1$) entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$. El **eje de simetría**, de una parábola es la recta vertical que divide a la parábola en dos partes congruentes, en el caso de $y = ax^2$ el eje de simetría es el eje y.

Por ejemplo, la gráfica de $y = 2x^2$ resulta de multiplicar por 2 los valores de $y = x^2$:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



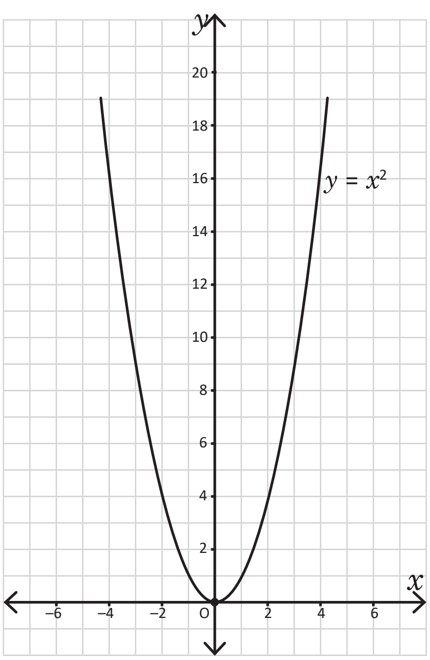
Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = 2x^2$) pasan por el origen (0, 0), son parábolas y al doblar por el eje y, la parte de la gráfica que queda del lado derecho coincide con la del lado izquierdo.

A parte del origen, los demás puntos de ambas gráficas NO coinciden; además, $y = 2x^2$ "está arriba" de $y = x^2$.

En el mismo plano y a partir de la gráfica de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2$

b) $y = \frac{5}{2}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 4

1.5 Función $y = ax^2$; $0 < a < 1$

1. Sea $y = x^2$. ¿Cuál es el otro número cuyo valor de y es el mismo que $x = -\sqrt{7}$? ¿Y que $x = \frac{1}{3}$?

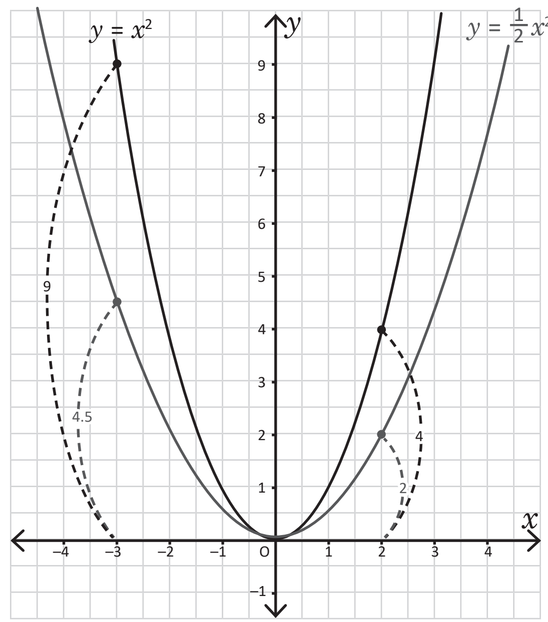
2. Grafica $y = \frac{7}{2}x^2$. Puedes utilizar la gráfica que aparece después de la conclusión y realizar tus cálculos en este espacio.

Si a es un número mayor que cero y menor que 1 ($0 < a < 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$.

Por ejemplo, la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ resulta de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los valores de $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

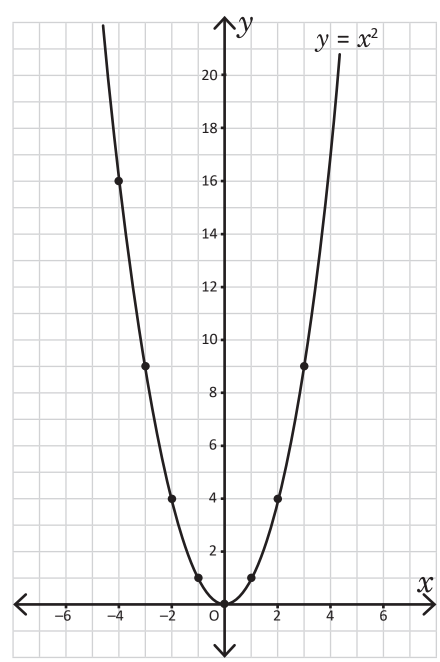
Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$) pasan por el origen (0,0), son parábolas y el eje y es eje de simetría. Los demás puntos diferentes del origen NO coinciden; además, $y = \frac{1}{2}x^2$ "está debajo" de $y = x^2$.



En el mismo plano y a partir de la gráfica de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{5}x^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Función $y = -ax^2$; $a > 0$

R A partir de $y = x^2$, grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2}{3}x^2$

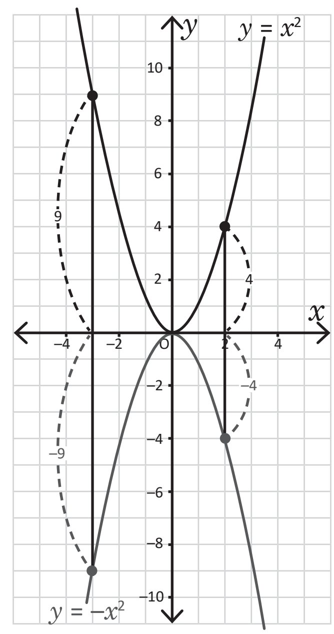
b) $y = 3x^2$

C

Si a es un número mayor que cero ($a > 0$), entonces para elaborar la gráfica de $y = -ax^2$ se multiplica por –1 todos los valores de $y = ax^2$. La función $y = -ax^2$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la función $y = ax^2$; en este caso, se dice que la parábola de $y = -ax^2$ se abre hacia abajo.

Por ejemplo, la gráfica de $y = -x^2$ resulta de multiplicar por –1 los valores de $y = x^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

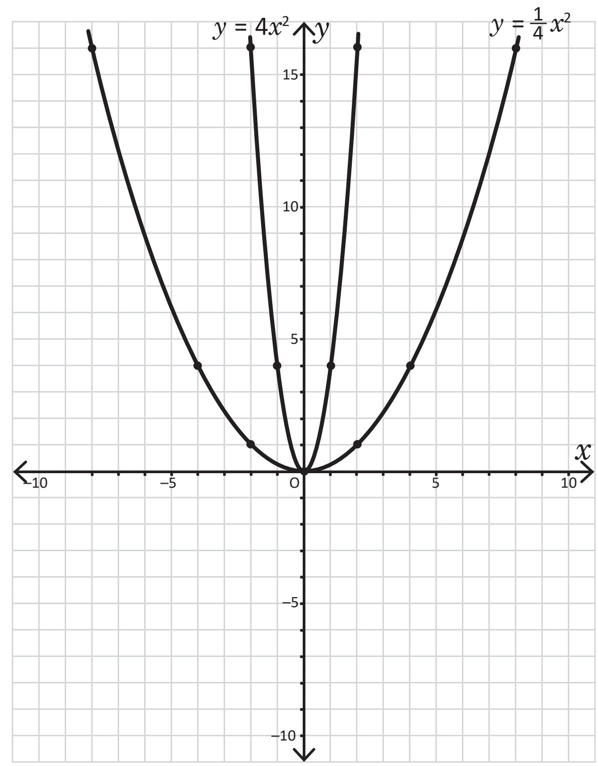


Ambas gráficas ($y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$) pasan por el origen (0,0), son parábolas y el eje y es eje de simetría. Los demás puntos diferentes del origen NO coinciden; además, $y = -x^2$ está debajo del eje x, es decir, la parábola continúa hacia abajo y no hacia arriba como $y = x^2$.

En el mismo plano y a partir de las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = \frac{1}{4}x^2$ grafica las siguientes funciones:

a) $y = -4x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

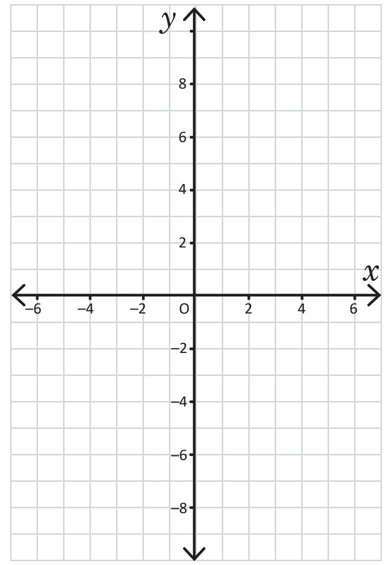
Unidad 4

1.7 Características de $y = ax^2$

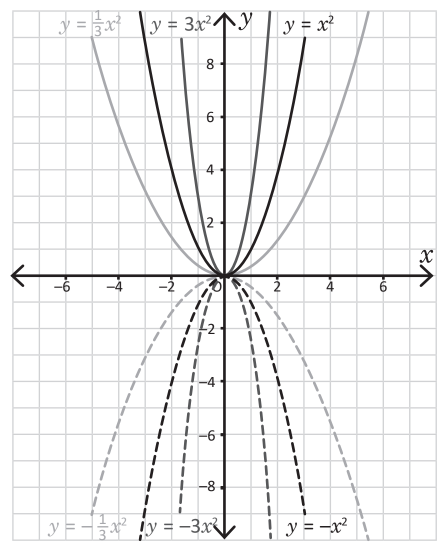
R Grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -4x^2$



C A la gráfica de la función $y = ax^2$ se le llama parábola, y tiene al eje y como eje de simetría. El punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se llama **vértice**; en el caso de $y = ax^2$ el vértice coincide con el origen (0,0). Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.



Por ejemplo, para las funciones $y = 3x^2$, $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$:

a) El vértice es (0,0) y tiene como eje de simetría el eje y.
b) Para las funciones $y = 3x^2$ y $y = -3x^2$, la gráfica se acerca al eje y; mientras que para $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ la gráfica se aleja del eje y.
c) Las parábolas de $y = 3x^2$ y $y = \frac{1}{3}x^2$ se abren hacia arriba.
d) Las parábolas de $y = -3x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ se abren hacia abajo.

A cada función asígnale su respectiva grafica:

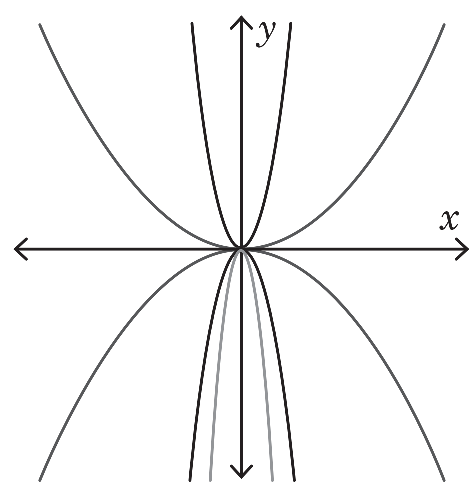
a) $y = -2x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = -5x^2$

d) $y = -\frac{1}{5}x^2$

e) $y = \frac{1}{5}x^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Variación de $y = ax^2$, parte 1

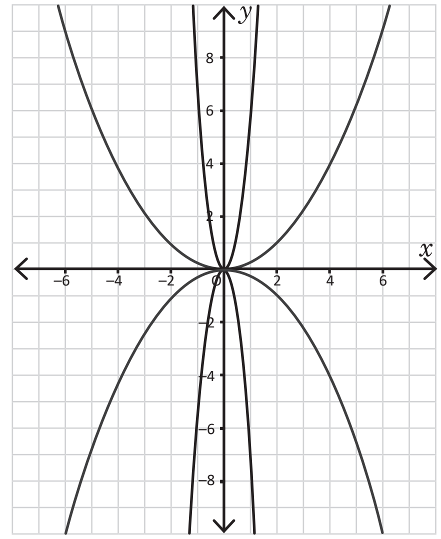
1. Grafica $y = -2x^2$.

2. A cada función asígnale su respectiva grafica:
   a) $y = 6x^2$

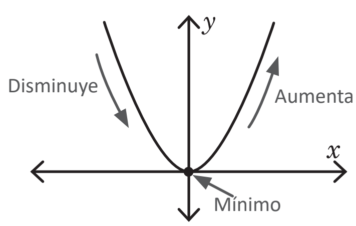
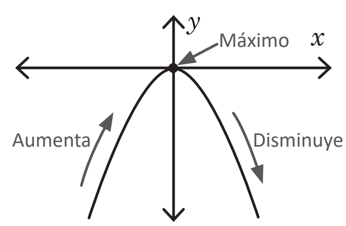
   b) $y = -6x^2$

   c) $y = -\frac{1}{4}x^2$

   d) $y = \frac{1}{4}x^2$



Dada la función $y = ax^2$ y a un número real (positivo o negativo). Al ir aumentando el valor de x, ocurre lo siguiente:

$a > 0$	$a < 0$
a) Si $x < 0$ entonces el valor de y disminuye. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y aumenta. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **mínimo** de la función $\boldsymbol{y = ax^2}$.	a) Si $x < 0$ entonces el valor de y aumenta. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y disminuye. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **máximo** de la función $\boldsymbol{y = ax^2}$.
	

1. Dadas las funciones $y = 4x^2$ y $y = -4x^2$.
   a) Si el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de –4 a –2?

2. Dadas las funciones $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$.
   a) Si el valor de x aumenta de –3 a –1, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de 5 a 6?

1.9 Variación de $y = ax^2$, parte 2

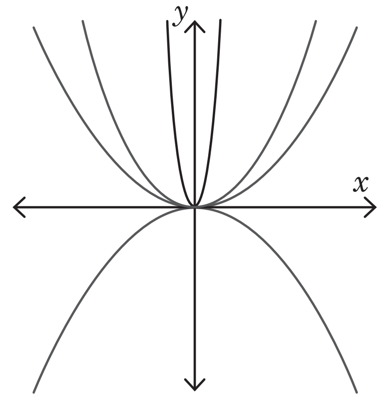
R

1. A cada función asígnale su respectiva grafica:
   a) $y = 5x^2$

   b) $y = \frac{1}{3}x^2$

   c) $y = \frac{1}{6}x^2$

   d) $y = -\frac{1}{6}x^2$



2. Sean $y = \frac{1}{5}x^2$ y $y = -\frac{1}{5}x^2$.

   a) Si el valor de x aumenta de 2 a 5, ¿cómo cambia el valor de y en ambas funciones?
   b) ¿Y si x aumenta de –10 a –5?

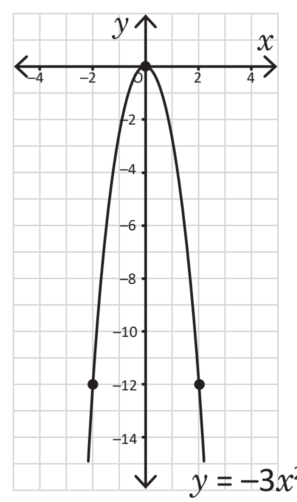
C

En la función $y = -3x^2$, si el valor de x se encuentra entre −2 y 1 entonces:

- El valor mínimo de y es −12 (cuando $x = -2$).
- El valor máximo de y es 0 (cuando $x = 0$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre −12 y 0.

A los valores que toma la variable y se les llama **dominio** y a los valores que toma la variable x se les llama **rango**.



1. Si $y = \frac{1}{4}x^2$ y x se encuentra entre −2 y 4, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

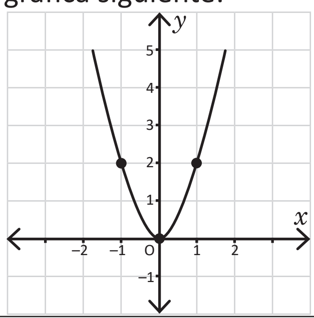
2. Si $y = -5x^2$ y x se encuentra entre −3 y 1, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

3. Encuentra el valor máximo de la función $y = \frac{1}{2}x^2$, si x está entre –4 y 3.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

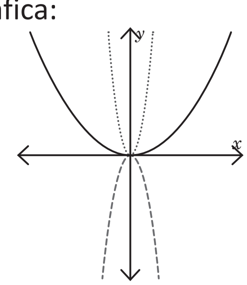
1.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro el valor de a en $y = ax^2$, dados dos valores particulares de x y y. Por ejemplo, cuando $x = 9$ y $y = 27$.				
2. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $a > 1$. Por ejemplo: $y = \frac{7}{2}x^2$.				
3. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $0 < a < 1$. Por ejemplo: $y = \frac{2}{7}x^2$.				
4. Grafico funciones de la forma $y = ax^2$ cuando $a < 0$. Por ejemplo: $y = -3x^2$ y $y = -\frac{1}{5}x^2$.				
5. Identifico el valor de a en $y = ax^2$ a partir de la gráfica de la función. Por ejemplo, en la gráfica siguiente: 				

1.11 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

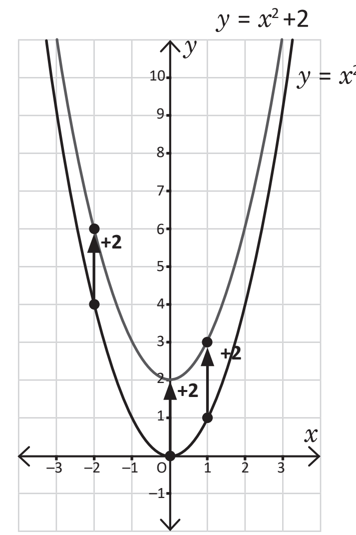
Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Relaciono funciones de la forma $y = ax^2$ con su respectiva gráfica. Por ejemplo, relaciono las funciones $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{5}{2}x^2$ y $y = 4x^2$ con su respectiva gráfica: 				
2. Determino el cambio en los valores de y en $y = ax^2$ cuando x aumenta. Por ejemplo, si $y = -9x^2$ y x aumenta de −5 a −3.				
3. Encuentro los valores entre los cuales está comprendida la variable y si $y = ax^2$. Por ejemplo, si $y = \frac{8}{5}x^2$ y el valor de x está entre −1 y 1.				

2.1 Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número positivo ($c > 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia arriba) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Ejemplo: Grafica de $y = x^2 + 2$

x	–2	–1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

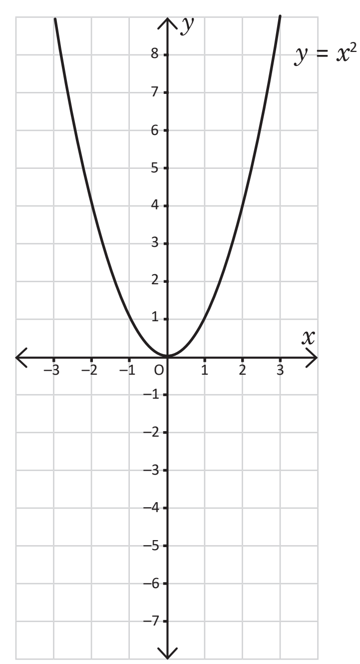


El vértice en $y = x^2$ es (0, 0); mientras que en $y = x^2 + 2$ es (0, 2), se encuentra dos unidades arriba.

La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 + 1$



b) $y = -x^2 + 1$

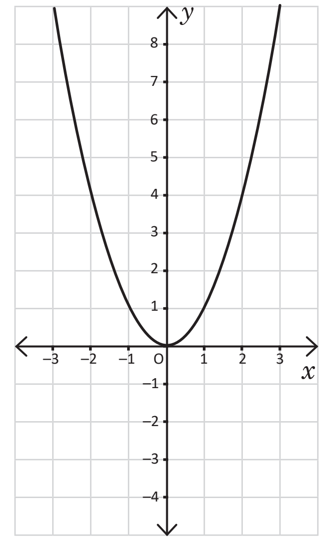
c) $y = x^2 + 5$

d) $y = -2x^2 + 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Función $y = ax^2 + c$; $c < 0$

R Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:



a) $y = -x^2 + 2$

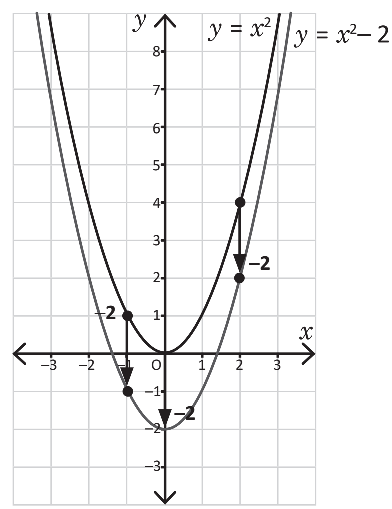
b) $y = 2x^2 + 2$

C

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número negativo ($c < 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia abajo) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es (0, c).

Ejemplo. Gráfica de $y = x^2 - 2$

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	−1	−2	−1	2

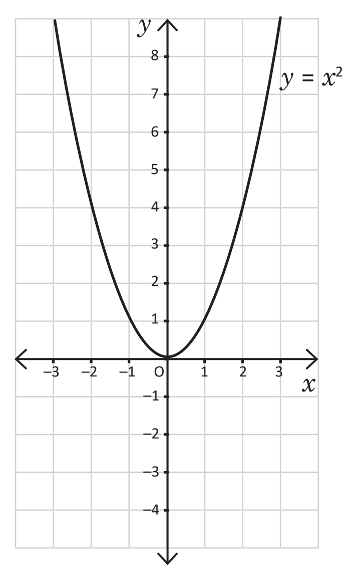


El vértice en $y = x^2$ es (0, 0); mientras que en $y = x^2 - 2$ es (0, −2), se encuentra dos unidades abajo.

La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 - 2$



b) $y = -x^2 - 2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función

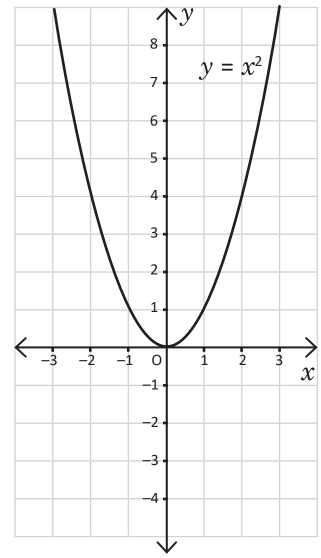
R Grafica las siguientes funciones y en cada caso escribe cuál es su vértice:

a) $y = x^2 + 4$

b) $y = -x^2 - 1$

c) $y = 2x^2 + 3$

d) $y = -2x^2 + 1$

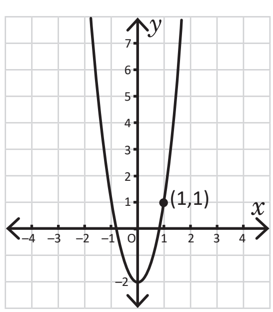


C Dada la gráfica de una función $y = ax^2 + c$ y un punto (m, n) sobre esta, entonces para encontrar los valores de a y c (que pueden ser positivos o negativos) se hace lo siguiente:

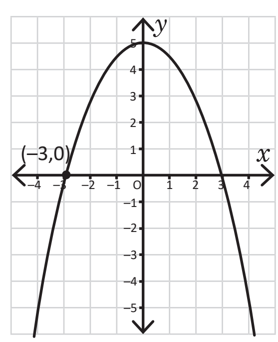
1. En la gráfica, ubicar el vértice de la parábola $(0, c)$: si está arriba de $(0, 0)$ entonces c es positivo, y si está debajo de $(0, 0)$ entonces c es negativo.
2. Encontrar el valor de a sustituyendo n, m y c, quedando así: $n = am^2 + c$.

1. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas:

a)



b)



2. La gráfica de la función $y = ax^2 + c$ pasa por los puntos (1, 2) y (2, 17). Encuentra los valores de a y c.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo la gráfica de funciones de la forma, $y = ax^2 + c$; $c > 0$. Por ejemplo: $y = 2x^2 + 3$.				
2. Realizo la gráfica de funciones de la forma, $y = ax^2 + c$; $c < 0$. Por ejemplo: $y = 2x^2 - 3$.				
3. Escribo el vértice de una función cuadrática. Por ejemplo, de $y = 2x^2 + 3$ y $y = 2x^2 - 3$.				
4. Utilizo las condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función. Por ejemplo: La gráfica de la función $y = ax^2 + c$ pasa por los puntos (0, 6) y (1, 7). Encuentra los valores de a y c.				

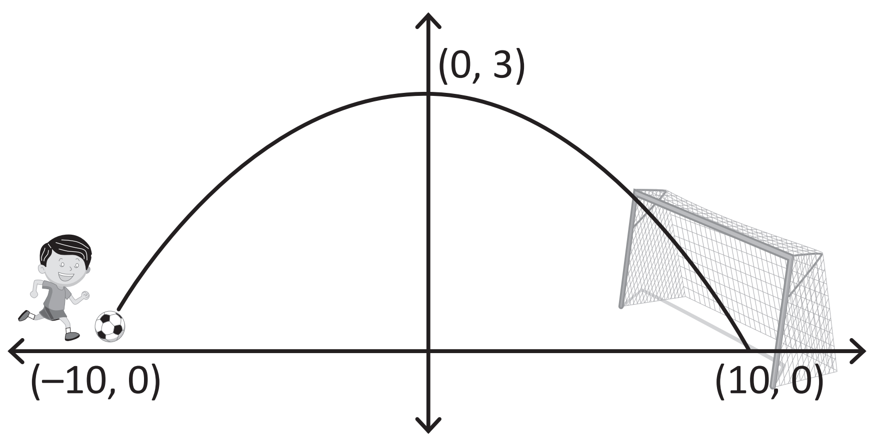
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **Movimiento parabólico.** En física, al movimiento realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola se le conoce como movimiento parabólico. Para que un objeto pueda describir este tipo de movimiento, el medio en el que se mueve no debe ofrecer resistencia al avance y debe estar sujeto a un campo gravitatorio uniforme.

   La trayectoria de una pelota de golf, el disparo de un proyectil militar, el movimiento que describe un balón al realizar un tiro de dos puntos en el básquetbol y el rebote de una piedra sobre la superficie del agua, son algunos ejemplos de movimiento parabólico, en la mayoría de casos, la parábola es abierta hacia abajo.

   Carlos realizó un tiro libre desde una distancia de 20 metros de la portería y el balón alcanzó una altura máxima de 3 metros. Si se coloca el centro del plano cartesiano (0, 0), justo debajo de donde el balón alcanzó su altura máxima, encuentra la ecuación que describe el movimiento del balón, con las condiciones dadas.

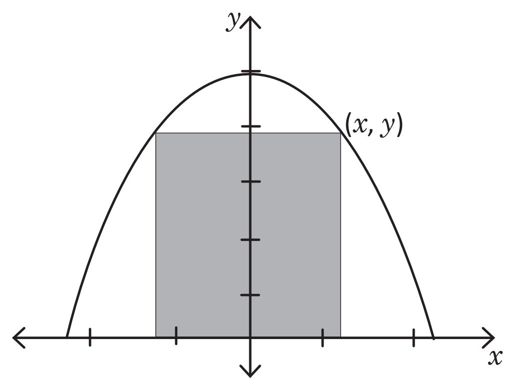


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2. **Plaza El Trovador.** En el mundo se pueden encontrar algunas estructuras que tienen forma de la función cuadrática. En nuestro país, un ejemplo de estas estructuras se encuentra en la "Plaza Matías Delgado", también conocida como "Plaza El Trovador", ubicada en San Jacinto, San Salvador. Visto frontalmente, esta estructura se asemeja a una parábola abierta hacia abajo y su arco es símbolo de bienvenida para las personas que vienen del sur de San Salvador hacia su centro histórico.

   Una estructura tiene la forma de una parábola descrita por la ecuación $y = -x^2 + 5$. Si se ajusta otra estructura con forma rectangular de modo que toque un punto (x, y) de la parábola.

   a) Expresa el área del rectángulo en términos de x.
   b) Si $x = 2$, ¿cuál es el área del rectángulo?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?