

# Figuras semejantes

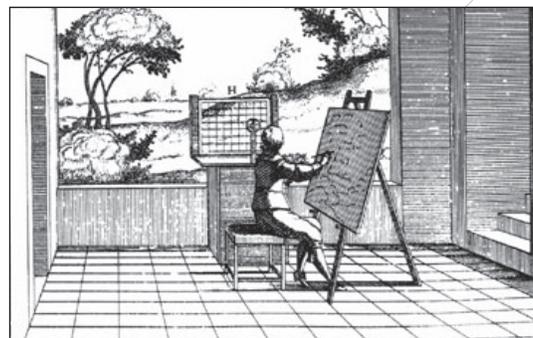
# 5 Unidad



*Pirámides de Kefrén y Keops, Egipto.*

El matemático griego Tales de Mileto (siglo IV a.C.) calculó la altura de la gran pirámide de Keops, en Egipto, observando las longitudes de un bastón clavado en la arena, la sombra proyectada por el bastón y la sombra de la pirámide. Tales aplicó la semejanza de triángulos para obtener la altura, asumiendo que los rayos del sol son paralelos.

Dentro de las aplicaciones de las figuras semejantes se utiliza una técnica de dibujo que permite ampliar o reducir una imagen o fotografía, así como dibujar paisajes. La técnica consiste en cuadricular la figura de referencia y el lienzo o papel en el que se dibujará o pintará, de tal manera que los rectángulos de la figura y el lienzo sean semejantes.



*Un artista dibuja un paisaje con la técnica de la cuadrícula.*

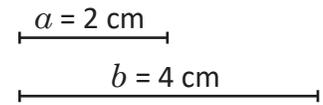
Los temas que estudiarás son los segmentos proporcionales, las figuras semejantes, sus características y cómo construirlas. Abordarás los criterios de semejanza de triángulos, propiedades como la base media, la relación entre rectas paralelas y segmentos proporcionales. Además, aplicarás la semejanza para utilizar la escala en los mapas, la relación entre las áreas de dos triángulos semejantes y el volumen de sólidos semejantes, entre otros.

## 1.1 Razón entre segmentos



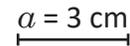
Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

Por ejemplo, la razón entre los segmentos  $a$  y  $b$  de la izquierda es  $\frac{1}{2}$ , ya que  $\frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.

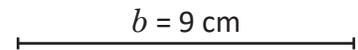


1. Con los segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  responde:

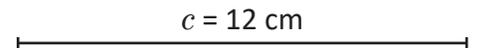
a) ¿Cuántas veces es la longitud de  $a$  con respecto a la de  $b$ ?



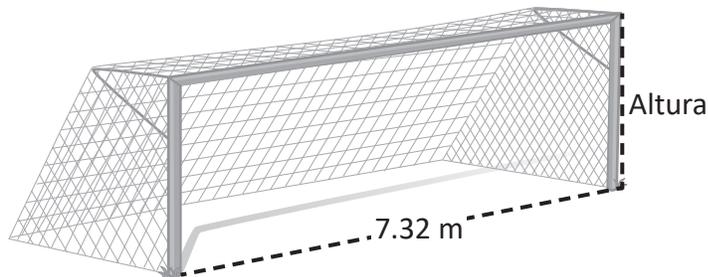
b) ¿Cuántas veces es la longitud de  $a$  con respecto a la de  $c$ ?



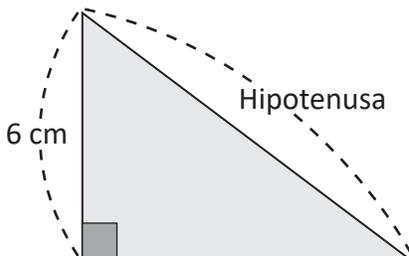
c) Calcula la razón entre los segmentos  $b$  y  $c$ .



2. Según la Federación Internacional de Fútbol Asociado (FIFA), la altura y el ancho de las porterías deben estar a una razón 1:3; si el ancho mide 7.32 m, ¿cuánto mide la altura?



3. La altura y la hipotenusa de un triángulo rectángulo están a razón 3:5; si la altura mide 6 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?



4. ¿Qué longitudes (en centímetros) pueden tener dos segmentos si deben estar a razón 2:3? Escribe tres posibles medidas.

## 1.2 Segmentos proporcionales



1. Con los segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  responde:

a) ¿Cuántas veces es la longitud de  $a$  con respecto a la de  $b$ ?

$a = 4 \text{ cm}$

b) ¿Cuántas veces es la longitud de  $b$  con respecto a la de  $c$ ?

$b = 6 \text{ cm}$

c) ¿Cuál es la razón entre los segmentos  $a$  y  $c$ ?

$c = 10 \text{ cm}$

2. Dos segmentos  $d$  y  $e$  están a razón 2:5; si la longitud de  $e$  es 10 cm, ¿cuál es la longitud de  $d$ ?

3. ¿Cuál debe ser la longitud del segmento  $g$  para que  $f$  y  $g$  estén a razón 3:4?

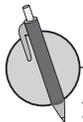
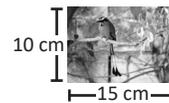
$f = 6 \text{ cm}$

$g = \text{¿?}$



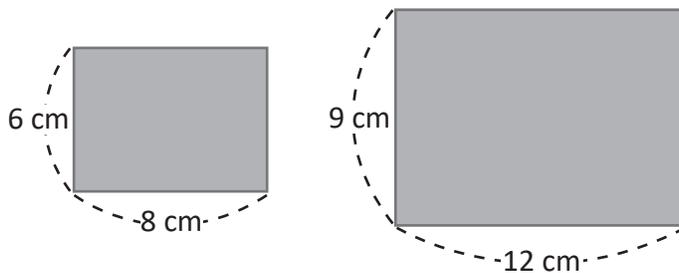
La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**.

Por ejemplo, en las fotografías de la derecha, las alturas son proporcionales a las bases, ya que  $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$  y ambas pueden expresarse como  $\frac{1}{3}$  o 1:3.

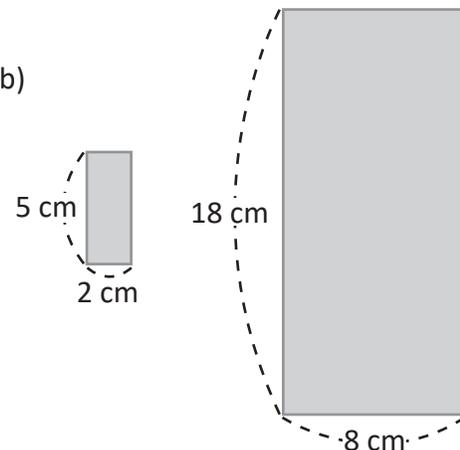


1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, determina si son proporcionales las bases y las alturas de cada una:

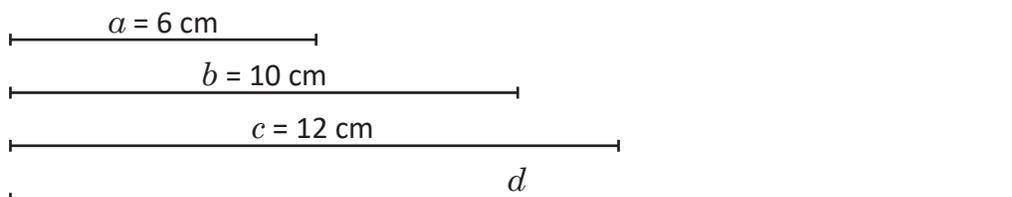
a)



b)



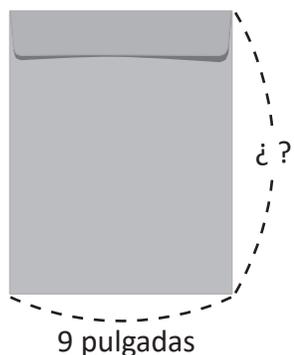
2. ¿Cuál debe ser la longitud del segmento  $d$  para que  $a$  y  $b$  sean proporcionales a  $c$  y  $d$ ?



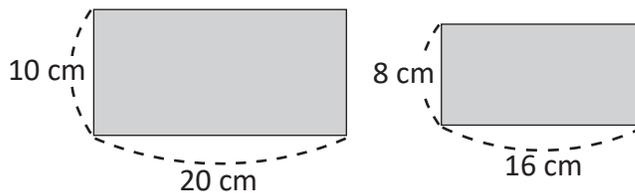
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

### 1.3 Figuras semejantes

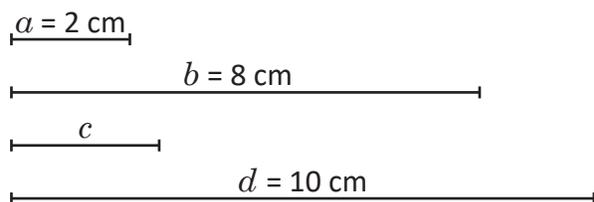
- R** 1. La base y altura de un sobre manila tamaño carta están a razón 3:4; si la base mide 9 pulgadas, ¿cuánto mide la altura del sobre?



2. ¿Son las bases de los rectángulos proporcionales a las alturas? justifica tu respuesta.

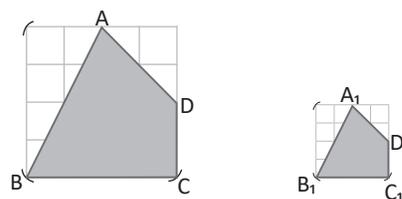


3. ¿Qué longitud debe tener el segmento  $c$  para que  $a$  y  $b$  sean proporcionales a  $c$  y  $d$ ?

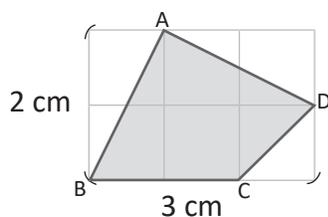


Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo  $\sim$ :  $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$  se lee "ABCD es semejante a  $A_1B_1C_1D_1$ " (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes).



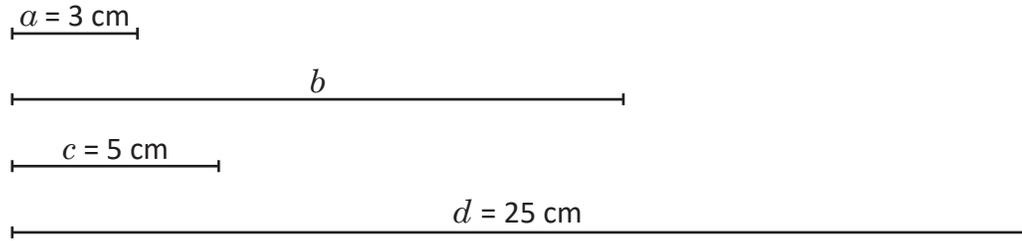
Amplía al doble el cuadrilátero ABCD, dibujando la figura resultante (nómbrala como EFGH):



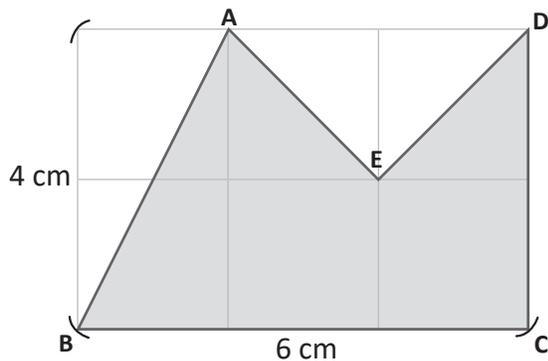
## 1.4 Características de figuras semejantes, parte 1



1. ¿Qué longitud debe tener el segmento  $b$  para que  $a$  y  $b$  sean proporcionales a  $c$  y  $d$ ?



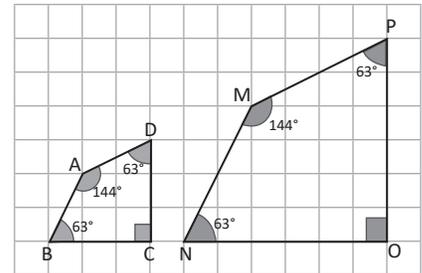
2. Reduce a la mitad el polígono ABCDE, dibujando la figura resultante (nómbrela FGHIJ):



En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

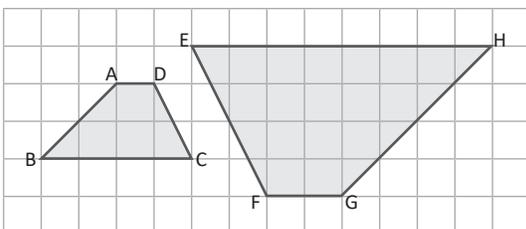
Por ejemplo, los cuadriláteros ABCD y MNOP son semejantes ya que satisfacen:

$$\begin{aligned} \sphericalangle A &= \sphericalangle M & \sphericalangle B &= \sphericalangle N \\ \sphericalangle C &= \sphericalangle O & \sphericalangle D &= \sphericalangle P \end{aligned}$$

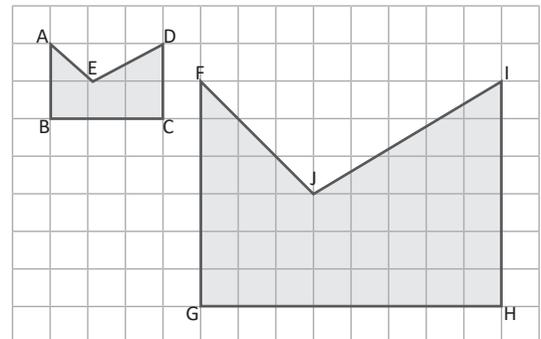


En cada pareja de polígonos semejantes, identifica los ángulos correspondientes.

1.



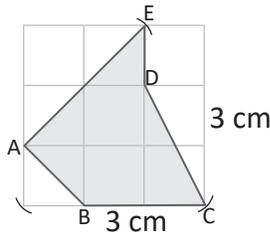
2.



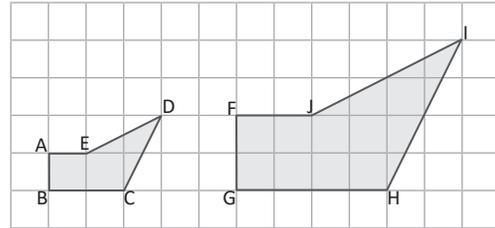
## 1.5 Características de figuras semejantes, parte 2



- Amplía al doble el polígono ABCDE (dibuja la figura resultante en tu cuaderno utilizando la cuadrícula).



- Identifica los ángulos correspondientes en los siguientes polígonos semejantes.

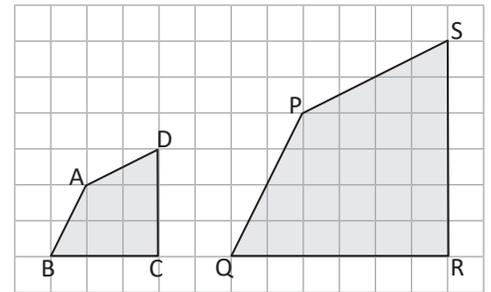


En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo, los cuadriláteros ABCD y PQRS de la derecha son semejantes y cumplen:

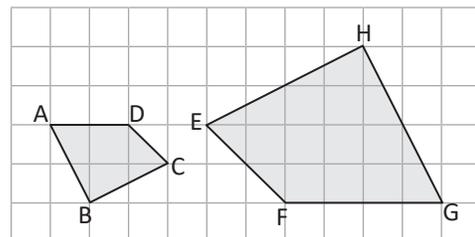
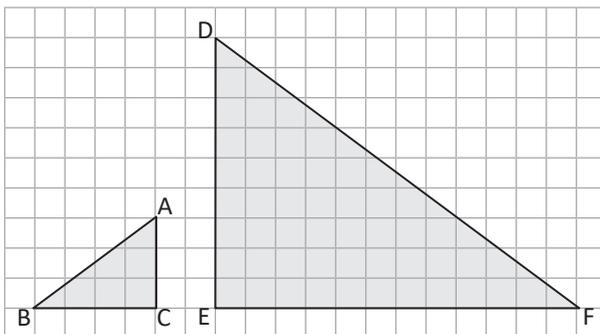
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.



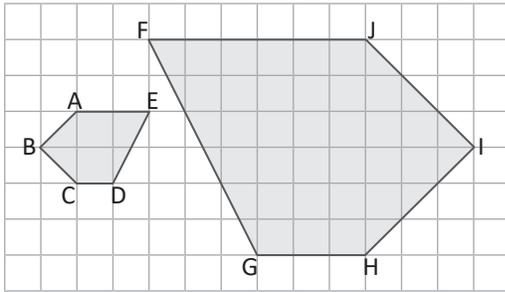
- Los triángulos ABC y DFE son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.
- Los cuadriláteros ABCD y GHEF son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.



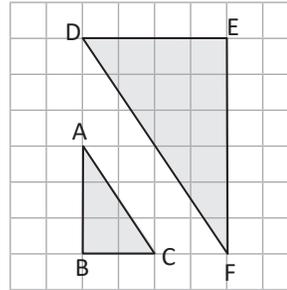
## 1.6 Construcción de figuras semejantes



1. En la siguiente pareja de polígonos semejantes, identifica los ángulos correspondientes.

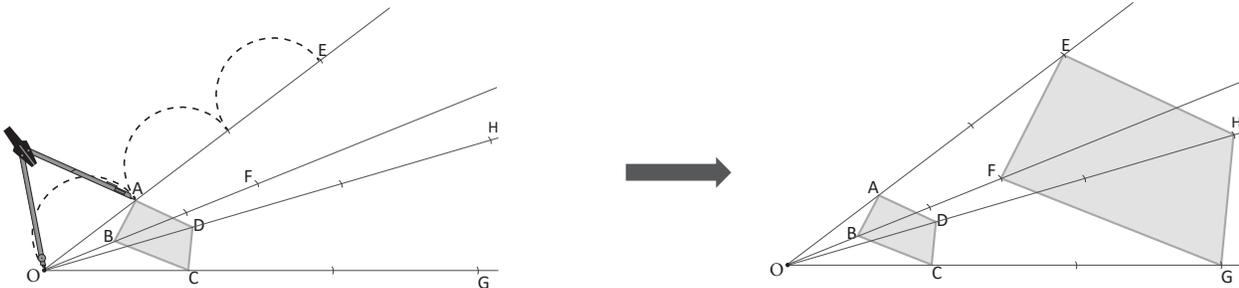


2. Los triángulos ABC y EFD son semejantes. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza.

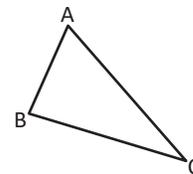


El método visto en clase para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. En las siguientes imágenes, al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos**, y la razón:

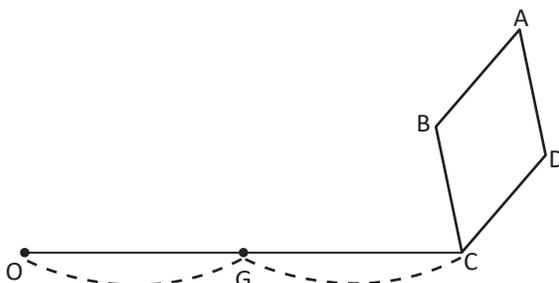
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3} \text{ se llama razón de semejanza.}$$



1. Calca el triángulo ABC en tu cuaderno y dibuja otro triángulo DEF semejante al primero, cuya razón de semejanza sea 1:4.



2. Utilizando el rombo ABCD, dibuja otro rombo EFGH semejante al primero, con centro de homotecia O y razón de semejanza 2:1.

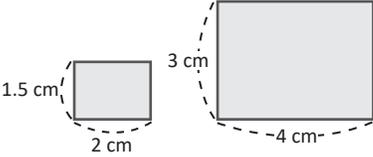
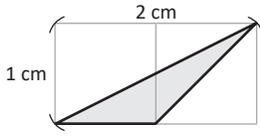
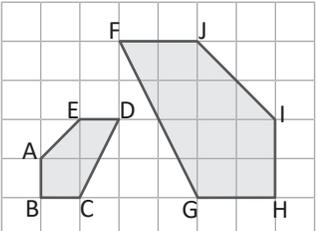
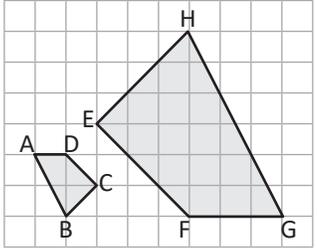


La razón 2:1 indica que debes reducir el rombo ABCD a la mitad. Observa que en la figura ya se ha colocado uno de los vértices de EFGH; para encontrarlo se traza  $\overline{OC}$  y con regla o compás se encuentra su punto medio  $\overline{G}$ . Haz lo mismo con los demás vértices: traza  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  y  $\overline{OD}$ , y encuentra los puntos medios de cada segmento; luego únelos para formar EFGH.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Autoevaluación de lo aprendido

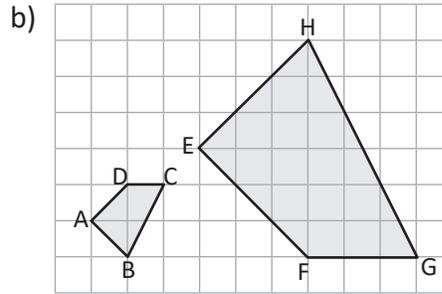
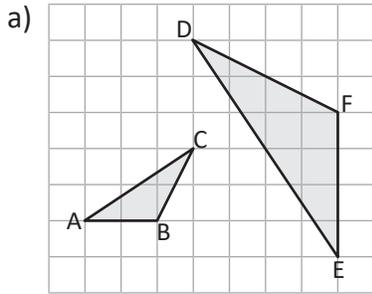
Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Calculo razones entre segmentos. Por ejemplo, calculo la razón entre los segmentos <math>a = 4</math> cm y <math>b = 6</math> cm.</p>				
<p>2. Determino proporcionalidad entre segmentos. Por ejemplo, si las bases de los rectángulos son proporcionales a las alturas:</p> 				
<p>3. Reduzco y amplío polígonos para dibujar figuras semejantes. Por ejemplo, ampliar al doble el siguiente triángulo:</p> 				
<p>4. Identifico ángulos correspondientes iguales en polígonos semejantes. Por ejemplo, en la siguiente pareja de cuadriláteros:</p> 				
<p>5. Identifico lados correspondientes en polígonos semejantes y calculo la razón de semejanza:</p> 				
<p>6. Dibujo figuras semejantes. Por ejemplo, dibujar dos triángulos semejantes cuya razón de semejanza sea 2:3.</p>				

## 2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos



1. En cada pareja de figuras identifica: ángulos iguales y lados proporcionales; luego, determina si son semejantes (en caso que lo sean, calcula la razón de semejanza):



2. En tu cuaderno, dibuja dos triángulos cuya razón de semejanza sea 3:4.

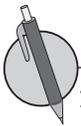
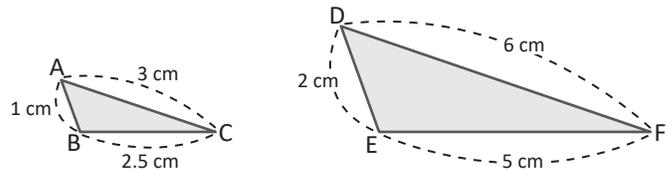


Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

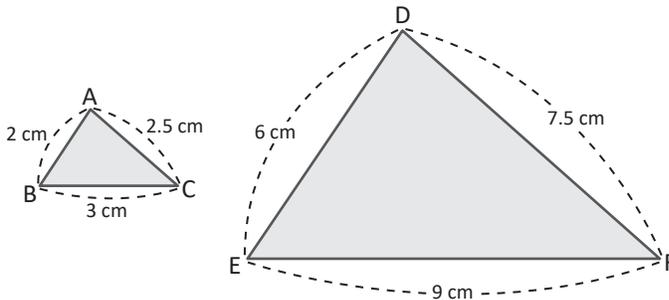
### Criterio LLL:

Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, entonces también son semejantes. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes, ya que sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

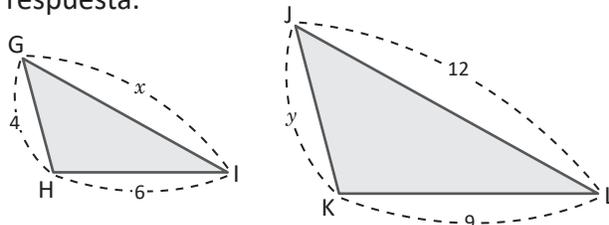
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$



1. Determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes (justifica tu respuesta):



2. ¿Cuáles deben ser los valores de  $x$  y  $y$  para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes? Justifica tu respuesta.

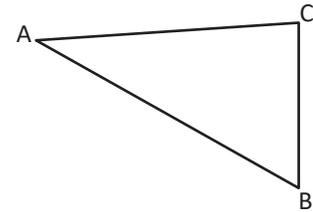


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

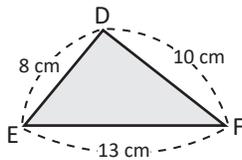
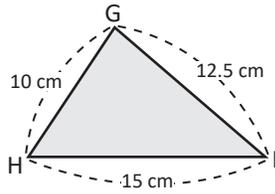
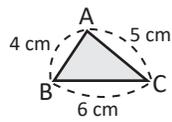
## 2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos



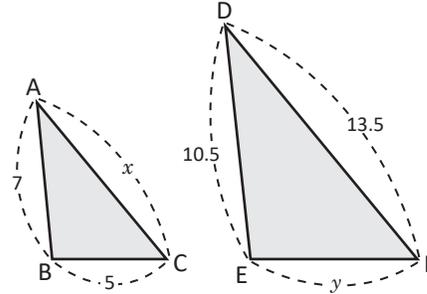
1. Calca en tu cuaderno el triángulo ABC y dibuja otro triángulo DEF semejante al primero, cuya razón de semejanza sea 3:1.



2. ¿Cuál de los triángulos es semejante al triángulo ABC? Justifica tu respuesta.



3. ¿Cuáles deben ser los valores de  $x$  y  $y$  para que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ?



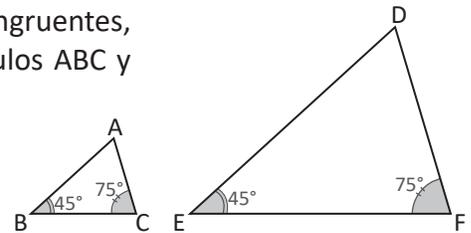
### Criterio AA:

Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes:

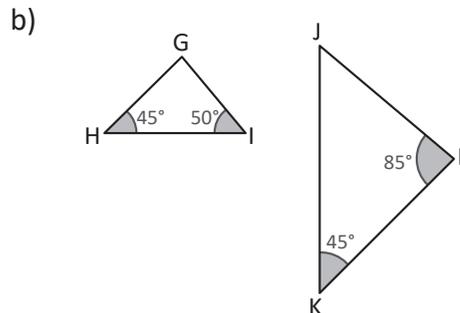
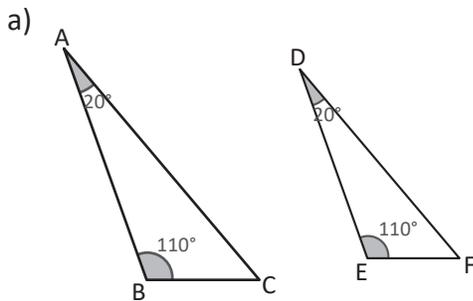
$$\sphericalangle B = \sphericalangle E$$

$$\sphericalangle C = \sphericalangle F$$

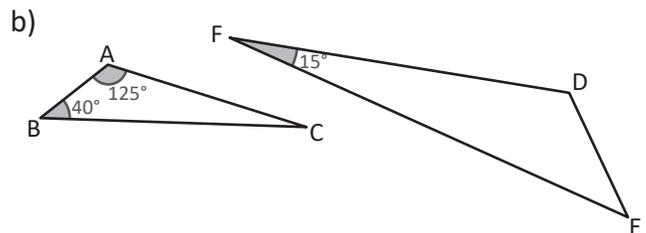
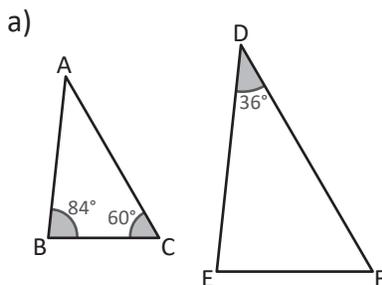
Por lo tanto, los triángulos son semejantes.



1. Determina si los siguientes triángulos son semejantes (justifica tu respuesta):



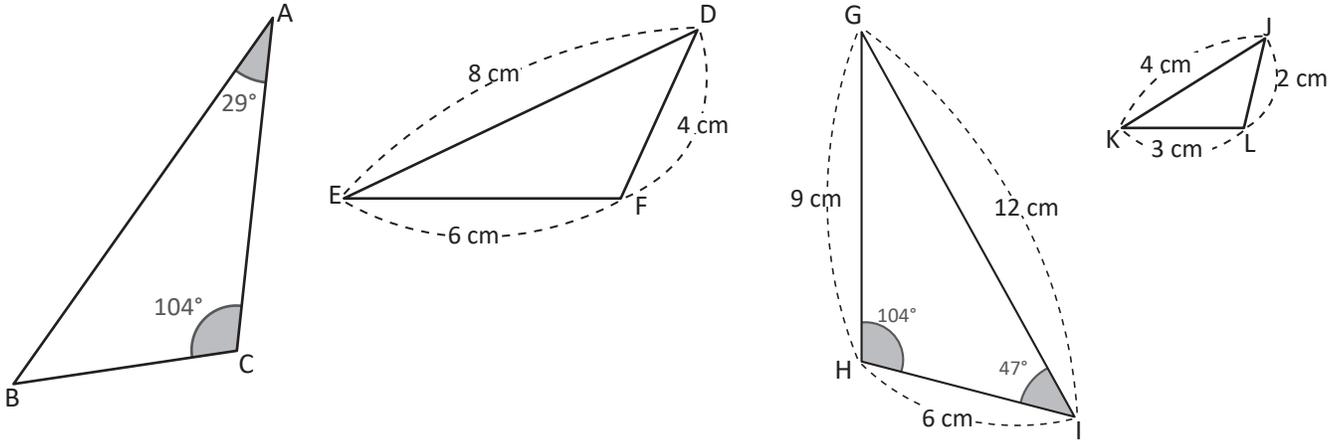
2. En cada literal, ¿cuál debe ser el valor de  $\sphericalangle DEF$  para que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ? Justifica tu respuesta.



## 2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos



Utiliza los criterios LLL y AA para determinar cuáles triángulos son semejantes:

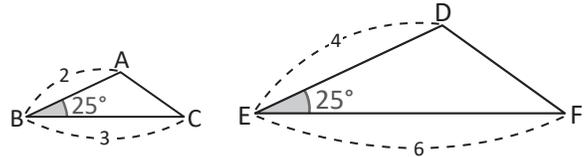


### Criterio LAL:

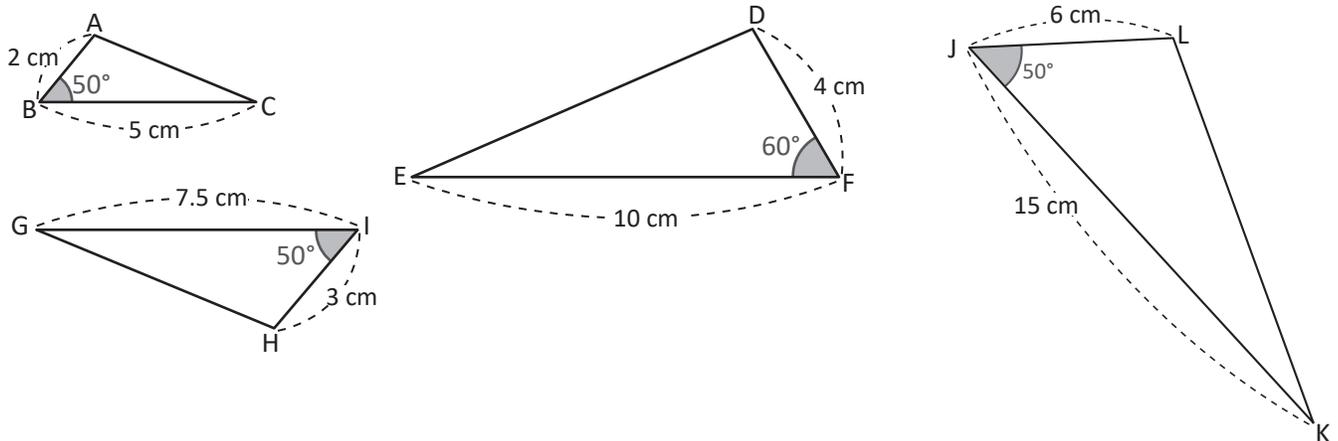
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes, ya que tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, es decir:

$$\begin{aligned} \sphericalangle B &= \sphericalangle E \\ \frac{AB}{DE} &= \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

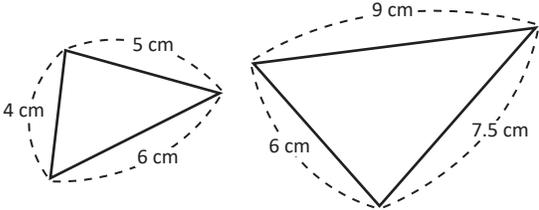
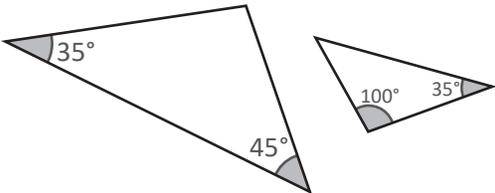
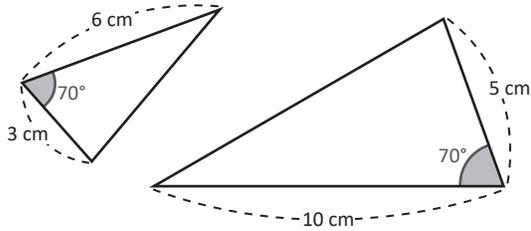
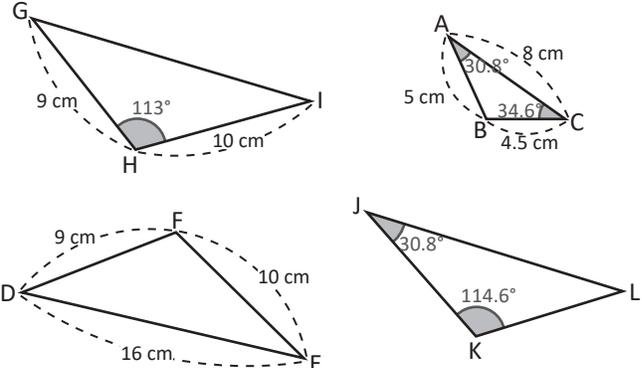


Usando el criterio LAL, determina cuáles triángulos son semejantes al triángulo ABC. Calcula la razón de semejanza en caso que sí lo sean:



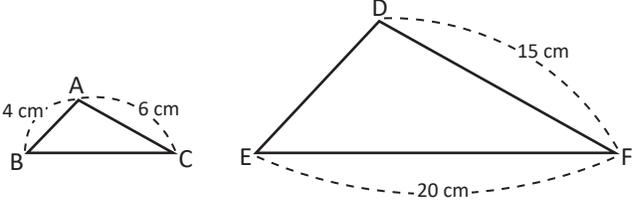
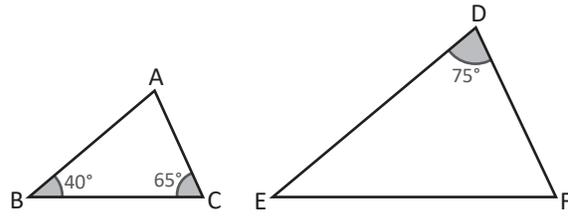
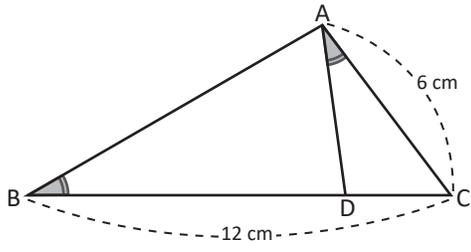
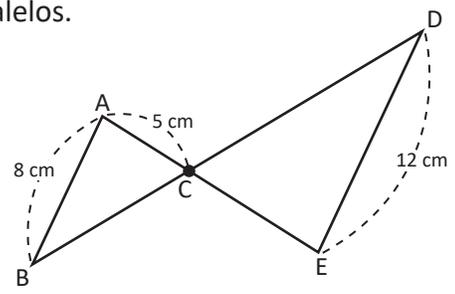
## 2.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Identifico triángulos semejantes usando el criterio LLL. Por ejemplo, en los siguientes triángulos.</p> 				
<p>2. Identifico triángulos semejantes usando el criterio AA. Por ejemplo, en los siguientes triángulos:</p> 				
<p>3. Identifico triángulos semejantes utilizando el criterio LAL. Por ejemplo, en los siguientes triángulos.</p> 				
<p>4. Identifico triángulos semejantes utilizando cualquiera de los tres criterios (LLL, AA, LAL). Por ejemplo, los triángulos semejantes a <math>\triangle ABC</math> son:</p> 				

## 2.5 Autoevaluación de lo aprendido

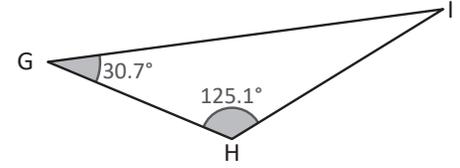
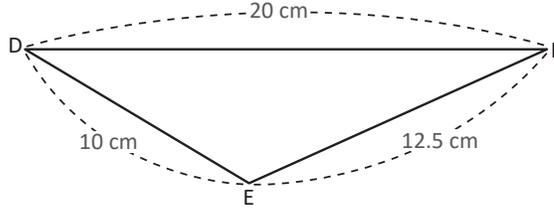
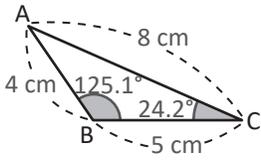
Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Determino longitudes de lados para asegurar semejanza de triángulos. Por ejemplo, determinar las longitudes de <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{DE}</math> para que <math>\triangle ABC \sim \triangle DEF</math>:</p> 				
<p>2. Determino el valor de un ángulo para asegurar semejanza de triángulos. Por ejemplo, determinar el valor del <math>\sphericalangle DEF</math> para que <math>\triangle ABC \sim \triangle DEF</math>:</p> 				
<p>3. Identifico triángulos semejantes para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo:</p> <p>a) Calcular la longitud de <math>\overline{DC}</math> si <math>\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAD</math>:</p>  <p>b) Calcular la longitud de <math>\overline{CE}</math> si los segmentos <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{DE}</math> son paralelos.</p> 				

### 3.1 Teorema de la base media, parte 1



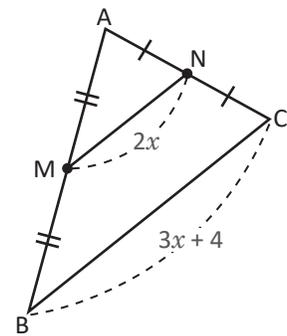
Justifica por qué los triángulos DEF y GHI son semejantes al triángulo ABC:



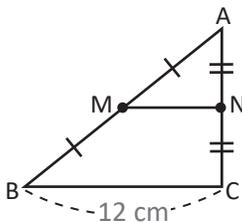
**Teorema de la base media.** El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

Por ejemplo, en el triángulo ABC los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y CA, respectivamente. Entonces, el segmento MN es paralelo al lado BC y su longitud es igual a la mitad de la longitud del lado BC. Así:

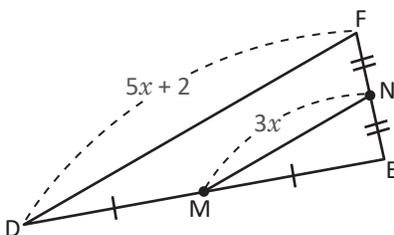
$$\begin{aligned} \frac{MN}{BC} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2x}{3x+4} &= \frac{1}{2} \\ 4x &= 3x+4 \\ 4x-3x &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$



- En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CA}$ , respectivamente. Calcula la longitud de  $\overline{MN}$ :



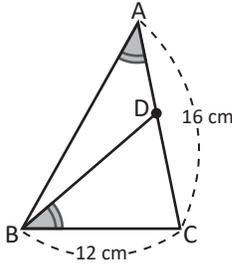
- En el triángulo DEF, M y N son los puntos medios de  $\overline{DE}$  y  $\overline{EF}$ , respectivamente. Calcula el valor de  $x$ :



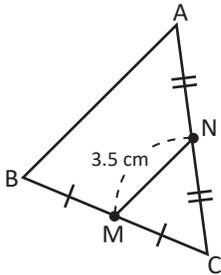
### 3.2 Teorema de la base media, parte 2



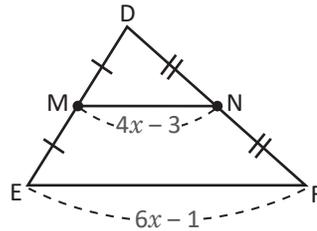
1. En el triángulo ABC, calcula la longitud de  $\overline{CD}$  si  $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC$ .



2. En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$ . Calcula la longitud de  $\overline{AB}$ .



3. En el triángulo DEF, M y N son los puntos medios de  $\overline{DE}$  y  $\overline{FD}$ , respectivamente. Calcula el valor de  $x$ :

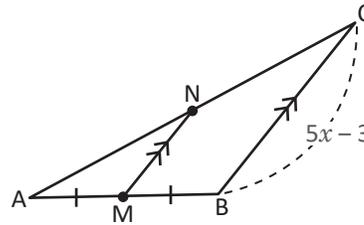


Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a uno de los lados, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

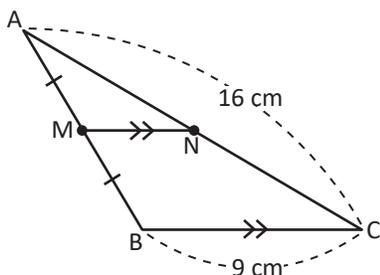
Por ejemplo, en el triángulo ABC, el punto M es punto medio de  $\overline{AB}$  y a partir de este se traza un segmento paralelo a  $\overline{BC}$ . Entonces N es punto medio de  $\overline{CA}$  y se cumple  $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ .

Luego:

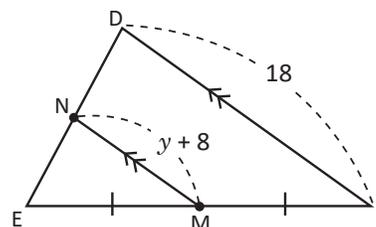
$$\begin{aligned} \frac{3.5}{5x - 3} &= \frac{1}{2} \\ 2(3.5) &= 5x - 3 \\ 7 + 3 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$



1. En el triángulo ABC, M es punto medio de  $\overline{AB}$  y  $\overline{MN}$  es paralelo a  $\overline{BC}$ . Calcula las longitudes de  $\overline{MN}$  y  $\overline{NA}$ .



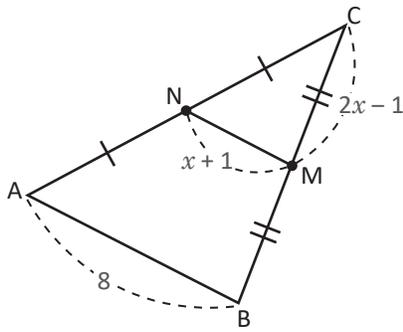
2. En el triángulo DEF, M es punto medio de  $\overline{EF}$  y  $\overline{MN}$  es paralelo a  $\overline{FD}$ . Calcula el valor de  $y$ :



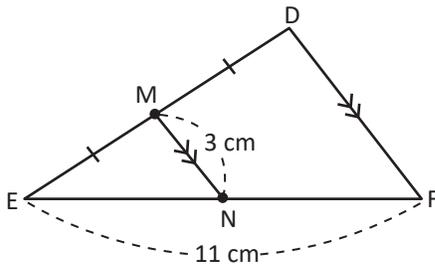
### 3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero



1. En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$  respectivamente. Calcula el valor de  $x$  y la longitud de  $\overline{BC}$ :



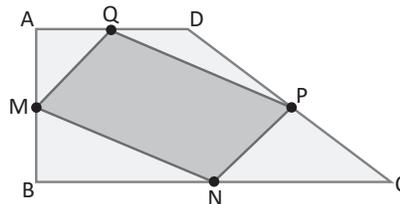
2. En el triángulo DEF, M es punto medio de  $\overline{DE}$  y  $\overline{MN}$  es paralelo a  $\overline{DF}$ . Calcula la longitud de  $\overline{DF}$  y  $\overline{EN}$ :



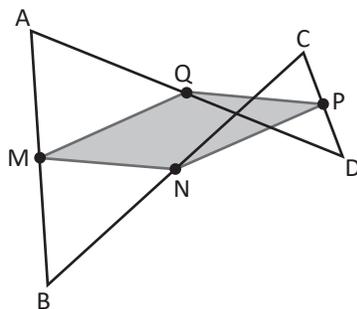
Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

Por ejemplo, en el trapecio rectangular ABCD se colocan los puntos medios de cada uno de sus lados y se denotan por M, N, P y Q. Al unir los cuatro puntos se forma el paralelogramo MNPQ:



En el polígono ABCD, los puntos M, N, P y Q son los puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$ , respectivamente. Demuestra que MNPQ es paralelogramo:

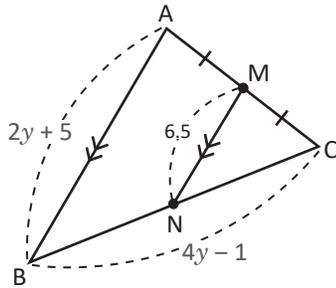


El polígono ABCD del ejercicio se llama **polígono cruzado**, ya que tiene un par de lados opuestos que se cortan: los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{DA}$ .

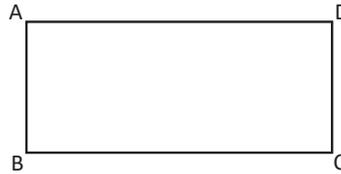
### 3.4 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 1



1. En  $\triangle ABC$ , M es punto medio de  $\overline{CA}$  y  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ .  
Calcula el valor de  $y$  y la longitud de  $\overline{BN}$ :



2. ¿Qué paralelogramo se formará al unir los puntos medios del rectángulo ABCD? Justifica tu respuesta.



#### Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original.

Por ejemplo, en el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB.

Entonces, el triángulo  $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ . Para calcular la longitud de  $\overline{DE}$  se utiliza la proporcionalidad entre los lados correspondientes:

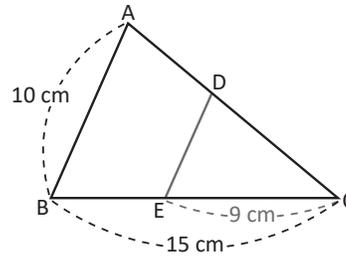
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

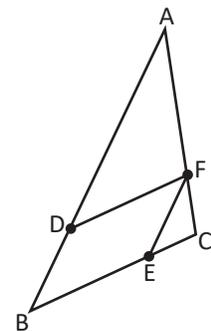
$$DE = 6$$

Por lo tanto, la longitud de  $\overline{DE}$  es 6 cm.

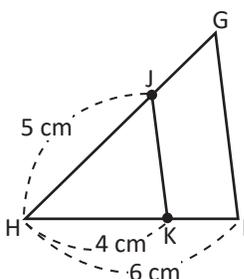


1. En el triángulo ABC que se muestra, el segmento DF es paralelo al lado BC, y el segmento FE es paralelo a AB.

- a) ¿Qué triángulos, de los que se forman, son semejantes al triángulo ABC?
- b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?



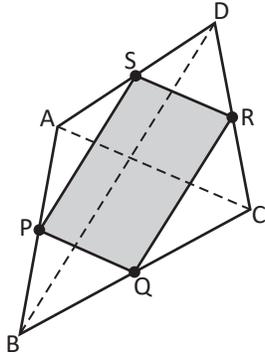
2. En el triángulo GHI, el segmento JK es paralelo al lado GI. ¿Cuál es la longitud del lado GH?



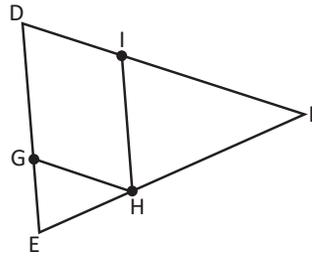
### 3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2



1. En el cuadrilátero ABCD, los puntos P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Calcula las longitudes de los lados del paralelogramo PQRS si  $BD = 7 \text{ cm}$  y  $CA = 4 \text{ cm}$ .

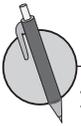
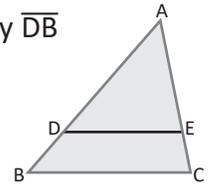


2. En el  $\triangle DEF$  se cumple lo siguiente:  $\overline{GH} \parallel \overline{DF}$  e  $\overline{IH} \parallel \overline{DE}$ . Identifica los triángulos semejantes al  $\triangle DEF$  y los segmentos proporcionales:

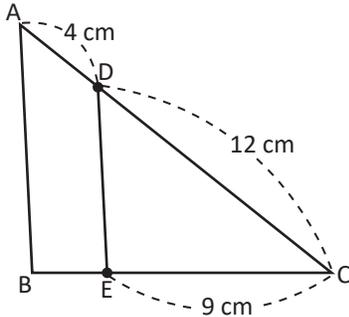


En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: DE es paralelo al lado BC. Entonces,  $\overline{AD}$  y  $\overline{DB}$  son proporcionales a  $\overline{AE}$  y  $\overline{EC}$ , respectivamente, es decir:

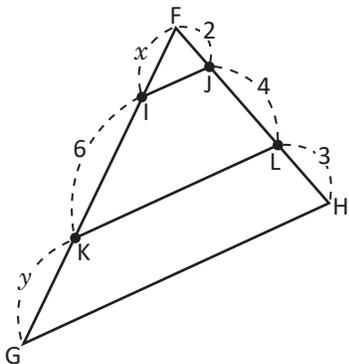
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. En el triángulo ABC, el lado AB es paralelo al segmento DE. Calcula la longitud del segmento EB:



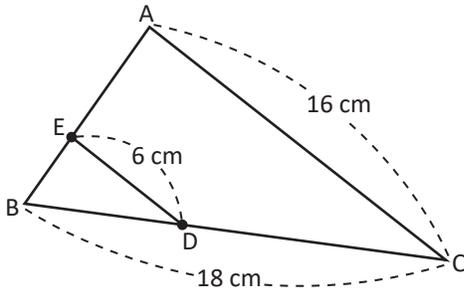
2. En el triángulo FGH se trazan los segmentos IJ y KL paralelos al lado GH. Calcula los valores de  $x$  y  $y$ :



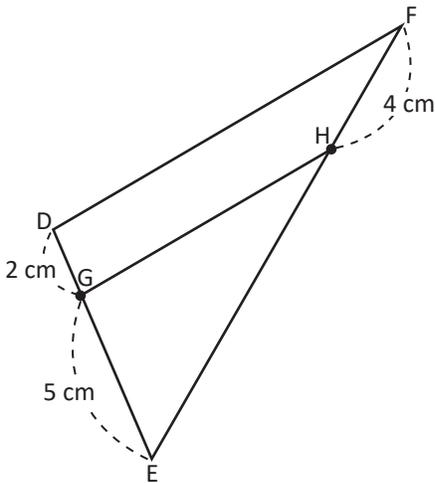
### 3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1



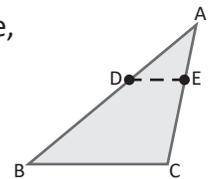
1. En el  $\triangle ABC$  se traza  $\overline{DE}$  paralelo a  $\overline{CA}$ , ¿cuál es la longitud de  $\overline{BD}$ ?



2. En el  $\triangle DEF$  se traza  $\overline{GH}$  paralelo a  $\overline{DF}$ . Calcula la longitud de  $\overline{EH}$ .



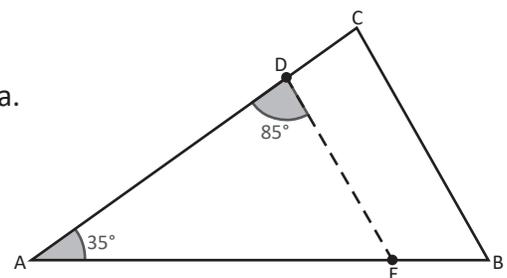
Dado un triángulo  $ABC$ , si  $D$  y  $E$  son puntos sobre los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, tales que satisfacen  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , entonces  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .



En el triángulo  $ABC$  se colocan dos puntos  $D$  y  $E$  sobre los lados  $AC$  y  $AB$ , los cuales satisfacen  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

a) ¿Cuál es la medida del ángulo  $ACB$ ? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la medida del ángulo  $CBA$ ? Justifica tu respuesta.

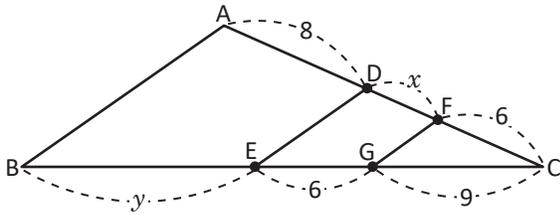


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

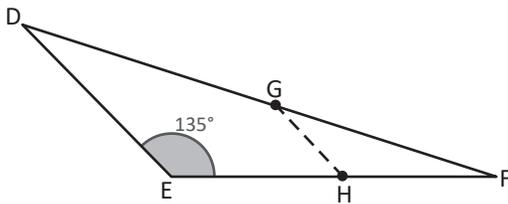
### 3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2



1. En el triángulo ABC se trazan los segmentos DE y FG paralelos al lado AB. Calcula los valores de  $x$  y  $y$ :



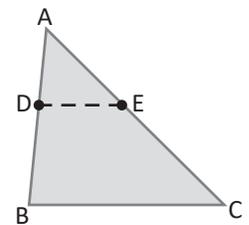
2. En el  $\triangle DEF$ , los puntos G y H están sobre  $\overline{FD}$  y  $\overline{FE}$  respectivamente y satisfacen  $\frac{FG}{FD} = \frac{FH}{FE}$ . ¿Cuál es la medida del  $\sphericalangle FHG$ ? Justifica tu respuesta.



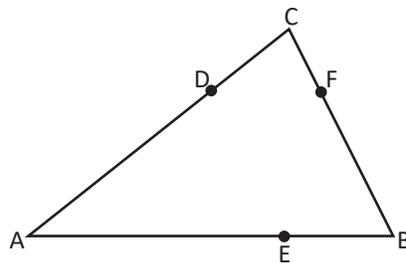
#### Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo

En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente.

- a) Si  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , entonces  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .
- b) Si  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ , entonces  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .



En el triángulo ABC se colocan tres puntos D, E y F (como se muestra en la figura) de tal forma que se cumple:  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$  y  $\frac{CD}{DA} = \frac{CF}{FB}$ .

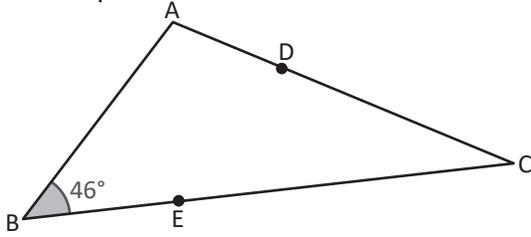


- a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado BC? Justifica tu respuesta.
- b) ¿Cuál de los segmentos que se forma con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta.
- c) ¿Es  $\overline{EF}$  paralelo a  $\overline{AC}$ ? Justifica tu respuesta.

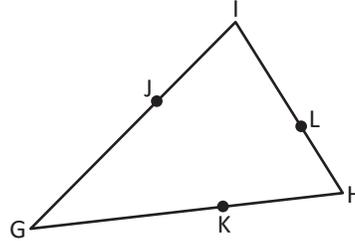
### 3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3



1. En  $\triangle ABC$ , los puntos D y E están sobre los lados CA y CB, respectivamente y satisfacen  $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ . ¿Cuál es la medida de  $\angle CED$ ? Justifica tu respuesta.



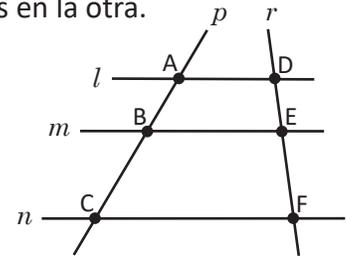
2. En  $\triangle GHI$  se colocan tres puntos J, K y L que satisfacen:  $\frac{GJ}{GI} = \frac{GK}{GH}$  y  $\frac{HK}{KG} = \frac{HL}{LI}$ . ¿Cuáles de los segmentos que se forman con los puntos J, K y L son paralelos a los lados GI y HI respectivamente? Justifica tu respuesta.



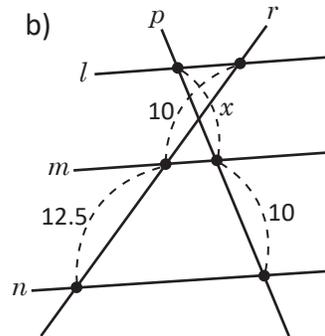
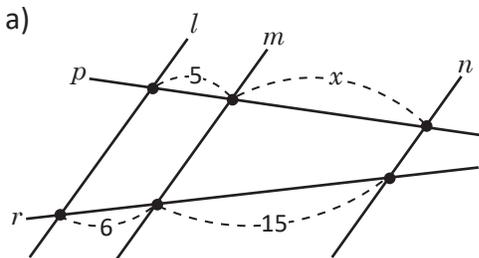
#### Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo (Teorema de Tales):

Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

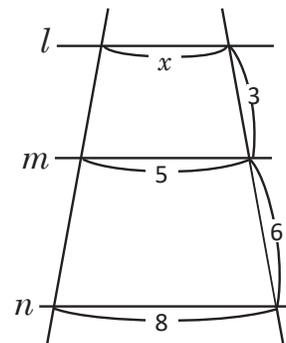
Por ejemplo, en la figura que se muestra hay dos rectas  $p$  y  $r$  que son cortadas por tres rectas paralelas  $l$ ,  $m$  y  $n$ . Entonces los segmentos AB y BC son proporcionales a los segmentos DE y EF, es decir:  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .



1. Las rectas  $p$  y  $r$  son cortadas por tres rectas paralelas  $l$ ,  $m$  y  $n$ , como se muestra en las figuras. Calcula el valor de  $x$  en cada literal:

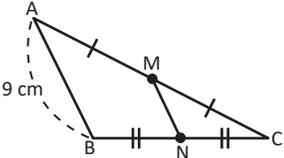
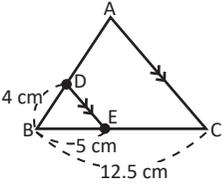
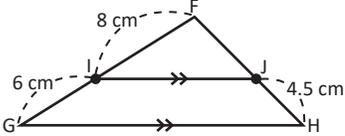
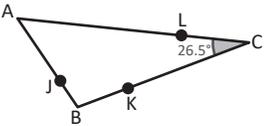
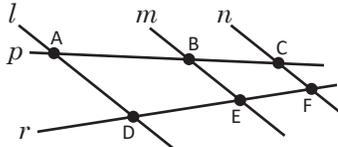


2. Encuentra el valor de  $x$ . Considerando que  $l \parallel m$ ,  $m \parallel n$ .  
Sugerencia: Traza una recta, de modo que se formen paralelogramos con un lado con medida  $x$  cm.



### 3.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Utilizo el teorema de la base media para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo, en el triángulo ABC calculo la longitud de <math>\overline{MN}</math> si M y N son puntos medios de <math>\overline{CA}</math> y <math>\overline{BC}</math>.</p> 				
<p>2. Utilizo el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo para calcular longitudes de segmentos. Por ejemplo en los siguientes casos:</p> <p>a) Calculo la longitud de <math>\overline{AB}</math> si <math>\overline{DE} \parallel \overline{AC}</math>:</p>  <p>b) Calculo la longitud de <math>\overline{FJ}</math> si <math>\overline{IJ} \parallel \overline{GH}</math>:</p> 				
<p>3. Utilizo el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo para identificar segmentos paralelos y medidas de ángulos. Por ejemplo, los segmentos paralelos a los lados BC y CA del triángulo y la medida de <math>\angle ALJ</math>, si se cumple <math>\frac{AJ}{AB} = \frac{AL}{AC}</math> y <math>\frac{BJ}{JA} = \frac{BK}{KC}</math>.</p> 				
<p>4. Utilizo el teorema de Tales para calcular las longitudes de segmentos. Por ejemplo, calcular la longitud de BC si las rectas <math>p</math> y <math>r</math> son cortadas por tres rectas paralelas <math>l</math>, <math>m</math> y <math>n</math>, y <math>AB = 15</math> cm, <math>DE = 12</math> cm, <math>EF = 8</math> cm:</p> 				

## 4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

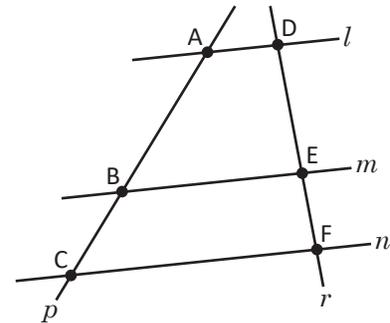
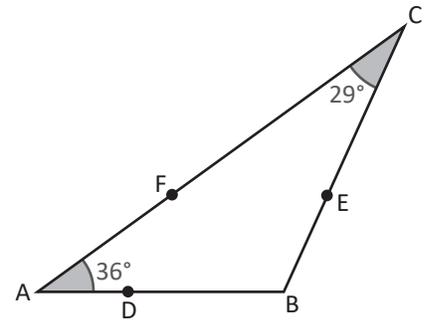


1. En el triángulo ABC se colocan tres puntos: D, E y F (como se muestra en la figura), de tal forma que satisfacen:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \text{ y } \frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$$

- a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo a  $\overline{AB}$ ? Justifica tu respuesta.
- b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo a  $\overline{BC}$ ? Justifica tu respuesta.
- c) ¿Cuál es la medida del  $\sphericalangle CEF$ ?
2. Las rectas  $p$  y  $r$  son cortadas por tres rectas paralelas  $l$ ,  $m$  y  $n$  como se muestra en la figura.

Si  $AB = 7.5$  cm,  $BC = 4.5$  cm y  $DE = 6$  cm, ¿cuál es la longitud de  $\overline{EF}$ ?



Los mapas y los planos se utilizan para representar en papel objetos de tamaño muy pequeño o muy grande. Un mapa o un plano son semejantes al territorio u objeto al cual representan. La razón entre la distancia de dos puntos cualesquiera en el mapa y su correspondiente sobre el objeto real se llama **escala numérica**.

Por ejemplo, el mapa que se muestra está a una escala numérica de 1:50 000 y se señala con dos círculos el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador. Si al medir con una regla el segmento que une los puntos, el resultado es 6 cm; y  $x$  es la distancia real entre los dos lugares, entonces:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja  $x$  de la ecuación anterior:

$$6(50\,000) = x$$

$$x = 300\,000$$

Por tanto, la distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.



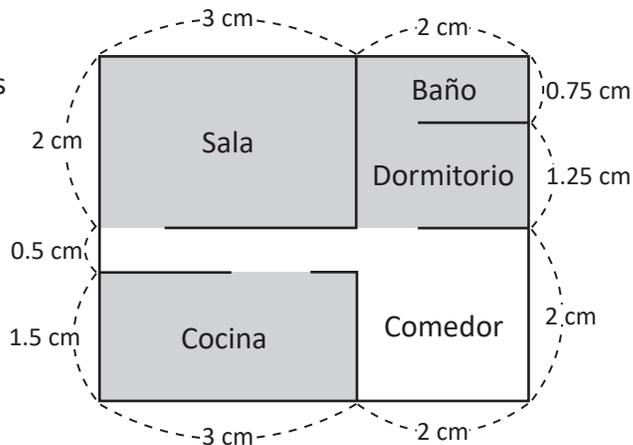


1. El mapa que se muestra se encuentra a una escala numérica de 1:2 250 000, si el segmento que une los puntos desde el volcán de Santa Ana hasta el volcán de San Vicente mide 4 cm, ¿cuál es la distancia real entre ambos volcanes?



2. Con el plano que se muestra realiza lo siguiente:

a) Calcula la escala numérica si las dimensiones reales de la sala son  $4.8 \text{ m} \times 7.2 \text{ m}$ .



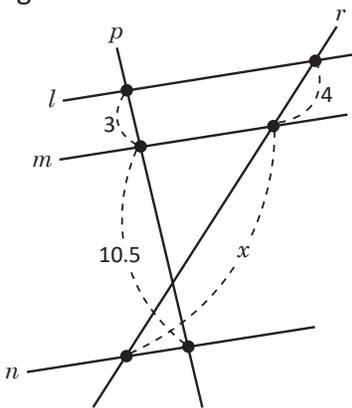
b) Calcula las dimensiones reales del baño, el comedor y la cocina.

Todas las medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

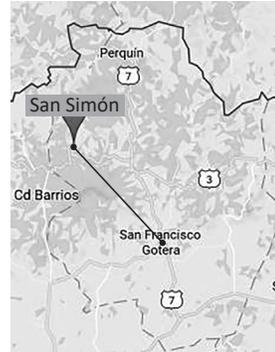
## 4.2 Áreas de polígonos semejantes

**R**

1. Las rectas  $p$  y  $r$  son cortadas por tres rectas paralelas  $l$ ,  $m$  y  $n$  como se muestra en la figura. Calcula el valor de  $x$ :



2. La distancia entre los municipios de San Simón y San Francisco Gotera del departamento de Morazán es 20 km. ¿A qué escala numérica se encuentra elaborado el mapa que se muestra si el segmento mide 2.5 cm?



**C**

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3; el área del triángulo ABC es  $\frac{(BC)(AB)}{2}$ , y la del triángulo DEF es  $\frac{(EF)(DE)}{2}$ .

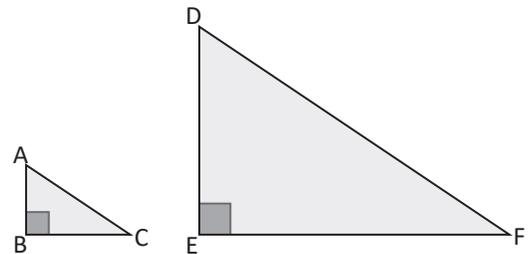
Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

$$\begin{aligned} \frac{(ABC)}{(DEF)} &= \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}} \\ &= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right) \end{aligned}$$

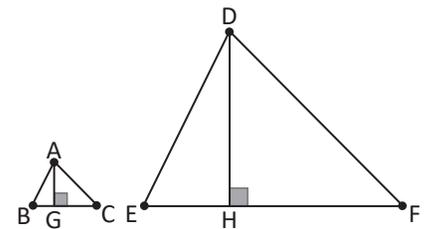
Como  $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$  y  $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$  (es la razón de semejanza), entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(ABC)}{(DEF)} &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas del  $\Delta ABC$  y  $\Delta DEF$  es igual a  $\frac{1}{9}$  (el cuadrado de la razón de semejanza).



1. Los triángulos ABC y DEF que se muestran son semejantes a razón 1:4,  $BC = 3$  cm,  $AG = 2$  cm,  $EF = 12$  cm y  $DH = 8$  cm.
- a) ¿Cuál es la razón entre las áreas de los triángulos? Utiliza lo visto en clase.
- b) Comprueba la respuesta del literal anterior encontrando primero las áreas de ambos triángulos y luego la razón entre ellos.

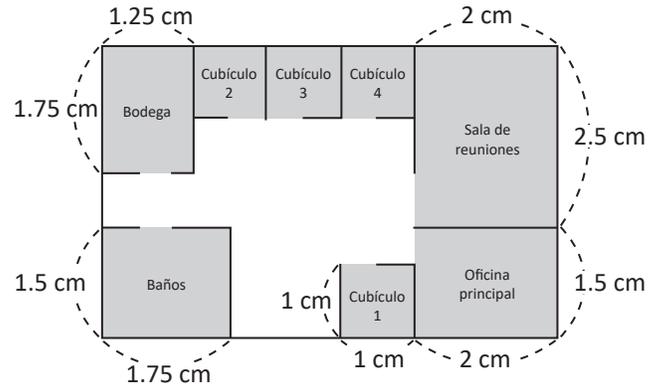


2. Si la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es  $\frac{1}{25}$ , ¿cuál es la razón de semejanza? Justifica tu respuesta.

### 4.3 Volumen de sólidos semejantes



1. El plano que se muestra se encuentra elaborado a una escala numérica de 1:200. Calcula el área real de la bodega, los baños y la sala de reuniones.



2. Dos triángulos semejantes se encuentran a razón 2:5. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?



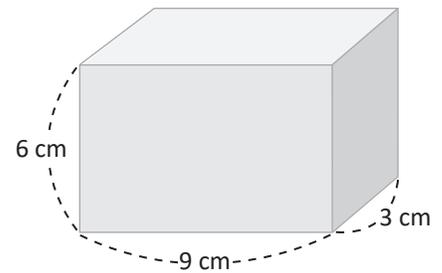
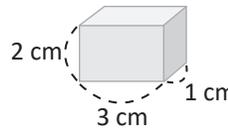
Dos o más sólidos son semejantes si son del mismo tipo y sus longitudes correspondientes (alturas, largos, anchuras o radios) son proporcionales. La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

Sólidos del mismo tipo se refiere, por ejemplo, a que no es posible comparar una pirámide con un prisma rectangular.

Por ejemplo, los prismas rectangulares son semejantes, ya que sus longitudes correspondientes son proporcionales, es decir:  $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ .

Si  $V_1$  es el volumen del prisma pequeño y  $V_2$  el del prisma grande, entonces la razón entre ambos es:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)} \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{aligned}$$



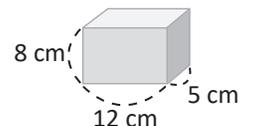
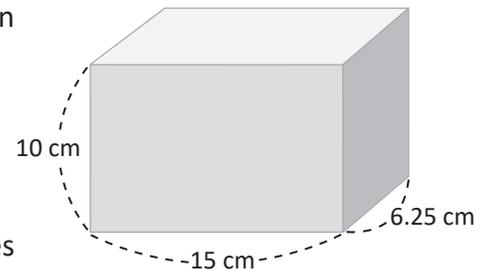
Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es  $\frac{1}{27}$ .



Determina si los siguientes prismas rectangulares son semejantes. En caso que lo sean, calcula la razón entre sus volúmenes:

a) Utilizando lo visto en clase:

b) Comprueba el resultado de a) encontrando primero los volúmenes y luego la razón entre ellos:



## 4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos



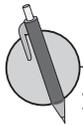
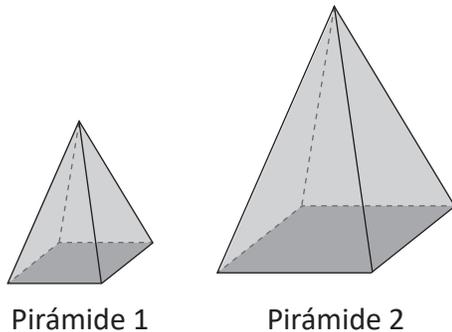
1. La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es  $\frac{9}{16}$ ; ¿cuál es la razón de semejanza? Justifica tu respuesta.

2. Las pirámides que se muestran son semejantes y tienen cuadrados por base; para la pirámide 1, la altura mide 9 cm; para la pirámide 2, la altura mide 15 cm, calcula la razón entre sus volúmenes.

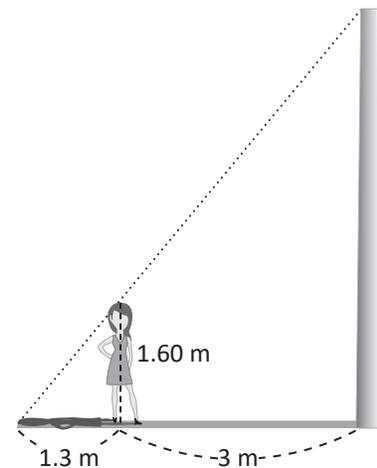
El volumen de una pirámide se calcula:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

Donde  $A_B$  es el área de la base y  $h$  la altura de la pirámide.



1. Julia quiere saber la altura de un poste que se encuentra cerca de su casa. Para ello, se coloca a 3 m del poste de manera que su sombra coincide con el extremo de la sombra del poste. Si la estatura de Julia es 1.60 m y la longitud de su sombra es 1.3 m, ¿cuál es la altura del poste? Aproxima hasta las centésimas.



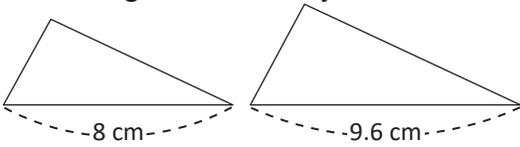
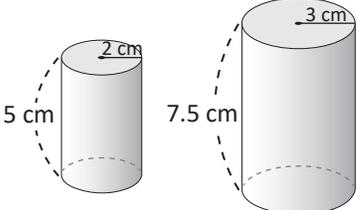
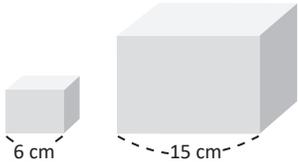
2. En el siguiente mapa, calcula la distancia entre la parada de bus y la panadería, si los segmentos  $a$ ,  $f$  y  $g$  son paralelos.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

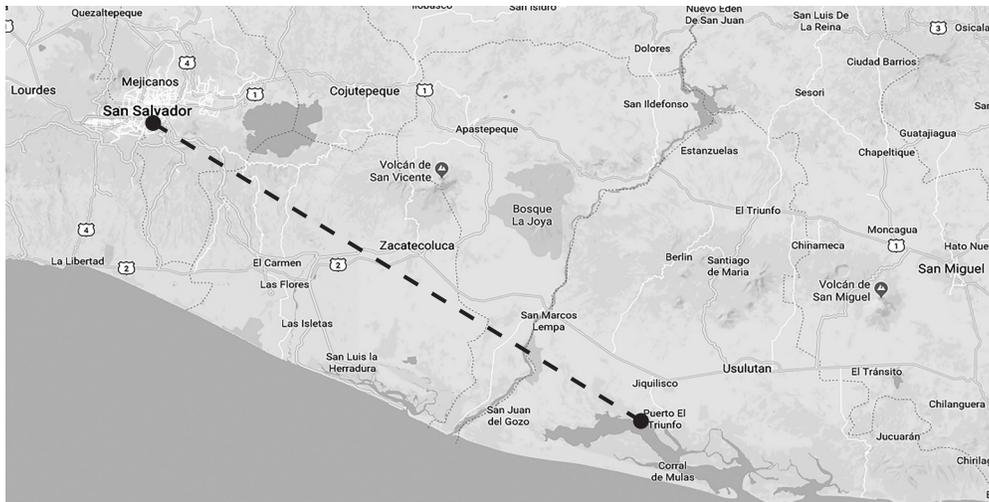
## 4.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
<p>1. Determino la escala numérica de un mapa. Por ejemplo, la escala numérica a la que se encuentra elaborado el siguiente mapa, si el segmento mide 2 cm y la distancia real entre San Salvador y San Marcos es 6.3 km:</p> 				
<p>2. Determino la razón entre las áreas de figuras semejantes. Por ejemplo, la razón entre las áreas de los siguientes triángulos son semejantes:</p> 				
<p>3. Identifico sólidos semejantes y calculo la razón de semejanza. Por ejemplo, determino si los siguientes cilindros son semejantes:</p> 				
<p>4. Determino la razón entre volúmenes de sólidos semejantes. Por ejemplo, la razón entre los volúmenes de los siguientes prismas rectangulares semejantes:</p> 				
<p>5. Utilizo criterios de semejanza de triángulos para resolver situaciones problema. Por ejemplo, calcular la altura del monumento al Divino Salvador del Mundo, si a cierta hora del día proyecta una sombra de longitud 9 m, mientras que una mujer de 1.68 m de estatura proyecta una sombra de 84 cm a esa misma hora.</p>				

**1. Cartografía.** Esta ciencia se encarga del trazado y estudio de mapas geográficos. Para realizar estos trazados se utiliza la **escala** que es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo donde se representa la realidad, que puede ser un mapa o un plano.

Existen dos tipos de escalas, la escala por reducción, esta se utiliza cuando la realidad tiene mayor tamaño físico que el plano y la escala por ampliación la cual se utiliza cuando la realidad es en tamaño físico menor que el plano. Por ejemplo, si se tiene la escala 1:250, significa que por cada 1 cm en el plano hay 250 cm en la medida real. El siguiente mapa se encuentra a una escala numérica de 1:500 000, y el segmento que une dos puntos entre Puerto El triunfo y San Salvador mide 17 cm. ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos?



En diciembre de 2008 la cartografía salvadoreña cumplió 150 años de existencia, si se toma como punto de partida el primer mapa oficial del país, elaborado por el ingeniero alemán Maximilian Von Sonnenstern.

En la imagen puede apreciarse un mapa de El Salvador que data de 1900, impreso en Londres, con una escala aproximada de 1:200,000, cuyos primeros ejemplares llegaron a San Salvador a inicios de 1906.

Entre los aportes del trabajo cartográfico se destacaban los detalles astronómicos y geográficos, al igual que la ubicación de las carreteras, vías férreas, salidas hacia Honduras y Guatemala, alturas, divisiones departamentales y otros elementos visuales.



Centro Nacional de Registros (2012). Atlas Histórico Cartográfico de El Salvador.

## Problemas de aplicación

**2. Puerto de Acajutla.** Ubicado en Acajutla, Sonsonate. El puerto de Acajutla tiene una vasta historia que viene desde la época de la conquista, aunque ha sido reubicado y remodelado en varias ocasiones, es uno de los puertos más importantes para el comercio de El Salvador y de Centroamérica, cuenta con dos muelles para recibir las embarcaciones que vienen del Océano Pacífico.

Un automóvil está estacionado en el punto A, su conductor se encuentra observando la playa 500 m más lejos, en el punto C. En el primer muelle, un barco está anclado a una distancia de 370 m de la carretera (EB = 370 m). Suponiendo que  $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$ , ¿a qué distancia del segundo muelle (segmento DC) se encuentra el conductor?

