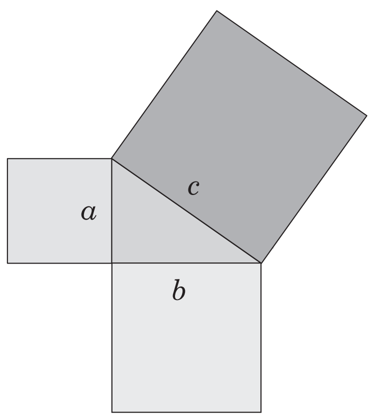
Unidad 6

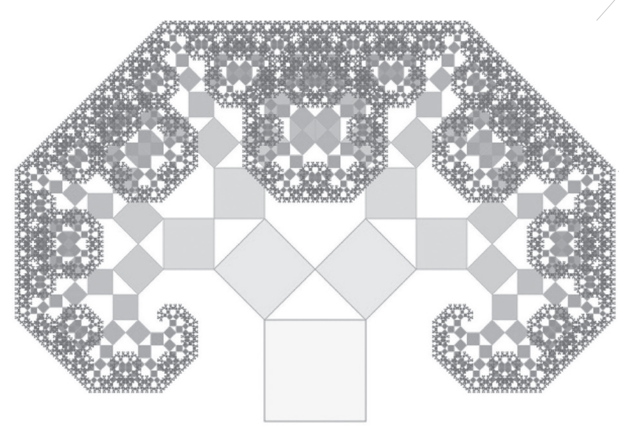
Teorema de Pitágoras



Representación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es uno de los teoremas que más ha maravillado a todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Algunos historiadores sugieren que en Babilonia por el año 1600 a.C., se calculaban las diagonales de ciertas figuras utilizando este teorema, sin embargo, la primera demostración formal conocida se le otorga usualmente al filósofo matemático griego Pitágoras de Samos, considerado el primer matemático puro. Este teorema cuenta con una gran cantidad de demostraciones realizadas por personajes importantes de la ciencia y la matemática a lo largo de toda la historia.

En la antigüedad se utilizaba el teorema de Pitágoras para medir terrenos en agricultura, la altura de ciertos objetos, obtener el volumen de sólidos como pirámides y conos. En la actualidad, el teorema sigue siendo indispensable en toda área donde es necesario el cálculo de longitudes, como en ingeniería, agricultura, física, astronomía y hasta en las artes. En la matemática, el teorema permitió el fortalecimiento de algunas áreas como la geometría y el cálculo, además del descubrimiento de los números irracionales.



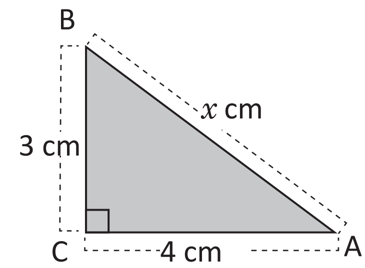
Árbol pitagórico. Construido con una sucesión de triángulos rectángulos y cuadrados sobre los lados.

En esta unidad estudiarás el teorema de Pitágoras, algunas de sus demostraciones, la resolución de problemas matemáticos por medio de este teorema y su aplicación a situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1

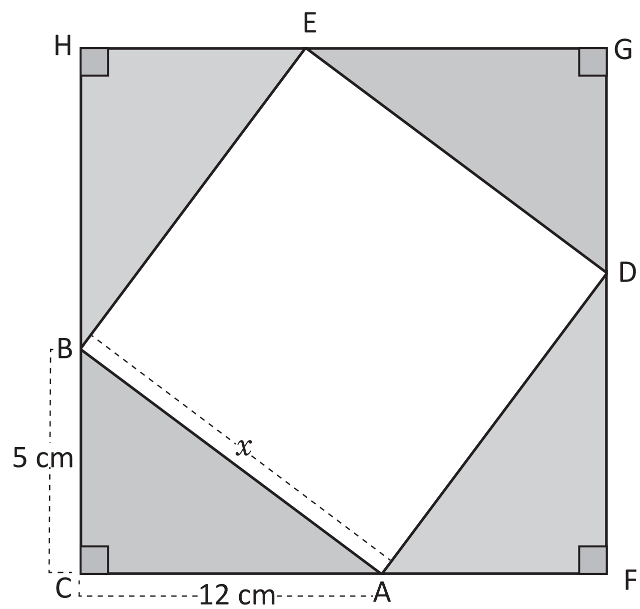
Formando cuadrados con 4 triángulos rectángulos congruentes y calculando el área, se puede calcular la medida del la hipotenusa sabiendo los catetos.

En la imagen, x = 5 cm.



LLena los espacios en blanco con la información que hace falta en el procedimiento que se realiza para obtener la medida de la hipotenusa.

a) Se construye un cuadrado cuyo lado sea la _______________ del triángulo ABC, es decir, de lado x.



b) Los triángulos Δ _____ , Δ _____ , Δ _____ , Δ _____ son congruentes al ΔABC.

c) El área del cuadrado CFGH es: ____

d) El área del triángulo ABC es: ____

e) Entonces el área del cuadrado ADEB es: ____

f) Por lo tanto la hipotenusa mide: ____

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

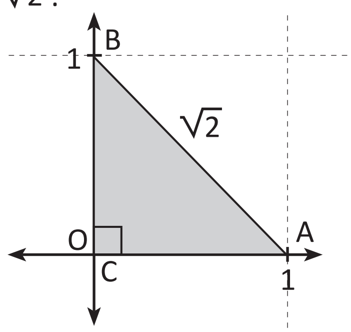
1.2 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2

R Escribe la estrategia utilizada para determinar la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.

____
____
____
____
____
____

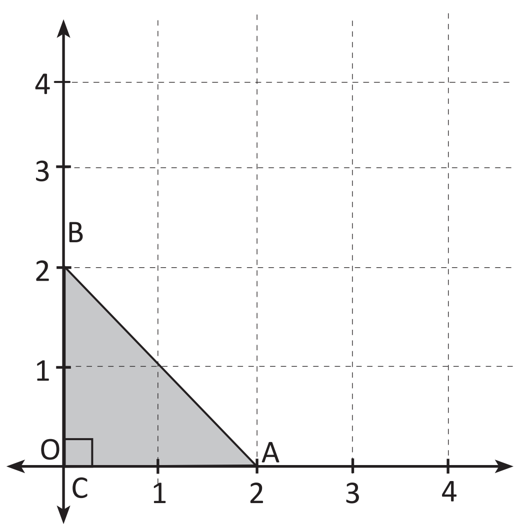
C El método de la clase anterior también se puede aplicar teniendo puntos en el plano cartesiano.

Por ejemplo, en el triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0), la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

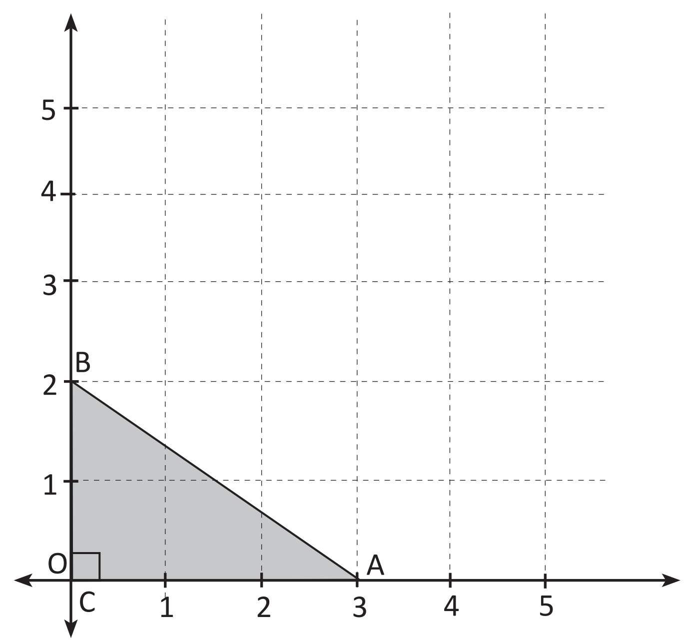


Encuentra la hipotenusa para cada uno de los triángulos formados por los vértice de cada literal.

a) A(2, 0); B(0, 2) y C(0, 0)



b) A(3, 0); B(0, 2) y C(0, 0)

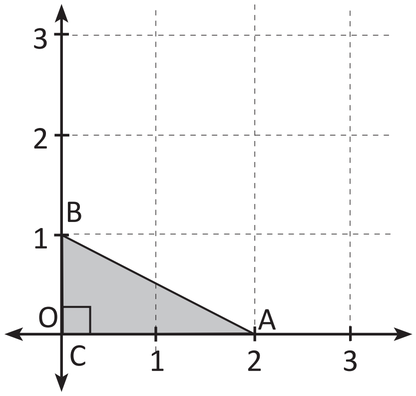


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

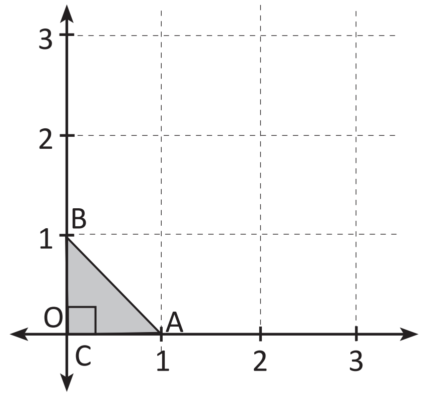
1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

R Encuentra la hipotenusa para cada uno de los triángulos formados por los vértices de cada literal.

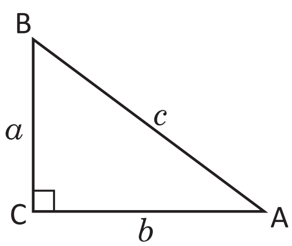
a) A(2, 0); B(0, 1) y C(0, 0)



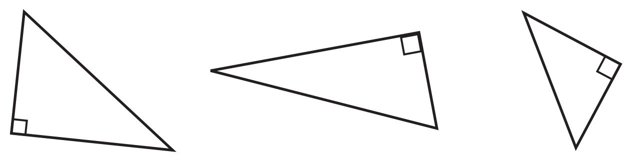
b) A(1, 0); B(0, 1) y C(0, 0)



C En todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa, es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

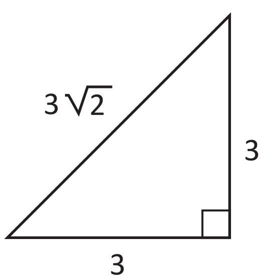


Además, el teorema de Pitágoras se cumple sin importar la posición del triángulo rectángulo.

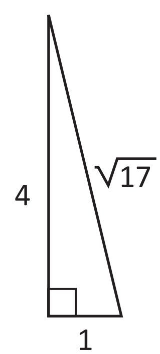


Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos:

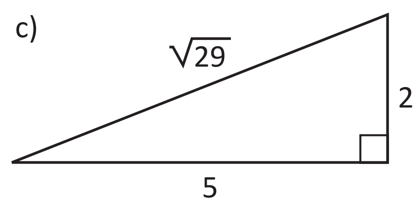
a)



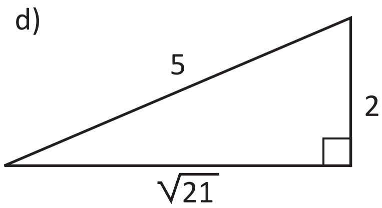
b)



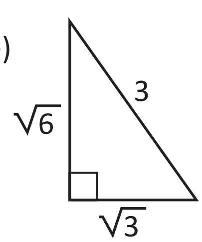
c)



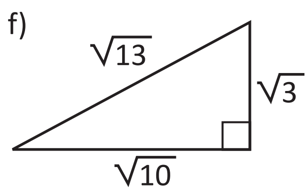
d)



e)



f)

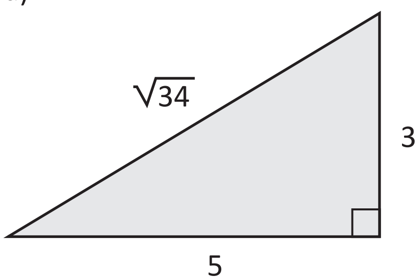


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

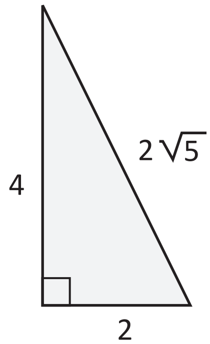
1.4 Teorema de Pitágoras, parte 2

Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

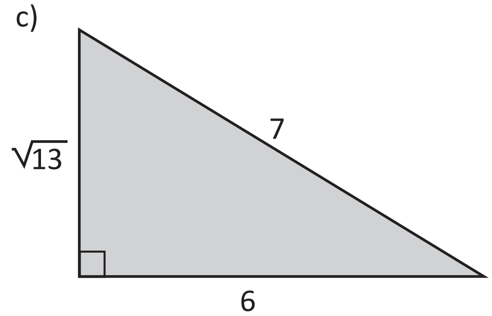
a)



b)

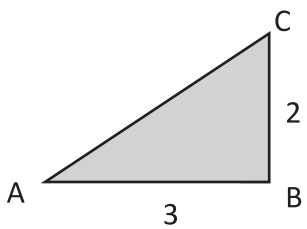


c)



El teorema de Pitágoras se puede demostrar por medio de semejanza de triángulos, y es aplicable a todo triángulo rectángulo, este enuncia que la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

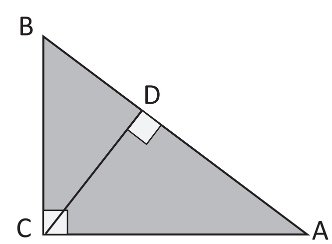
Por ejemplo, determina la longitud de la hipotenusa del siguiente triángulo:



En ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

$\Rightarrow CA = \sqrt{13}$

LLena los espacios en blanco con la información que hace falta en el procedimiento que se realiza para establecer que en el ΔABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$.



a) Se traza la altura del vertice C al lado AB, formándose los triángulos rectángulos ____________________

b) Los triángulos Δ_____ , ΔCBD son semejantes por el criterio _______.

c) $\frac{AB}{BC} = \frac{\quad}{\quad}$ (por semejanza de los triángulos). Entonces, $BC^2 =$ _______.

d) Los triángulos Δ_____ , ΔACD son semejantes por el criterio _______.

e) $\frac{AB}{CA} = \frac{\quad}{\quad}$ (por semejanza de los triángulos). Entonces, $CA^2 =$ __________

f) Luego, $BC^2 + CA^2 =$ ____________________ $= AB \times (BD + DA) = AB^2$

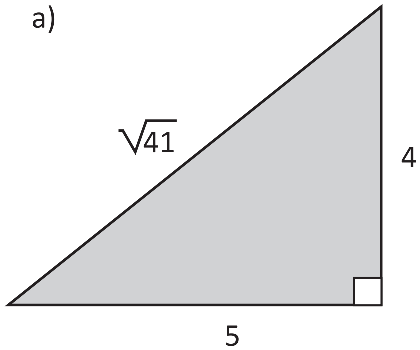
Por lo tanto, _________________

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

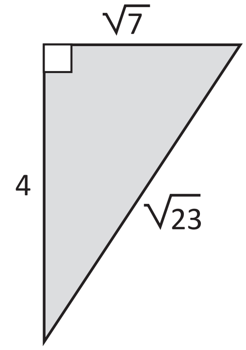
1.5 Cálculo de la medida de un cateto

R Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

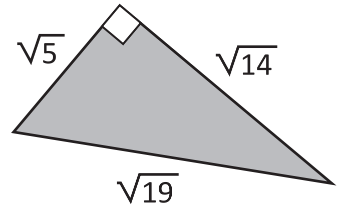
a)



b)

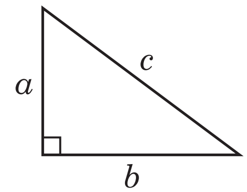


c)

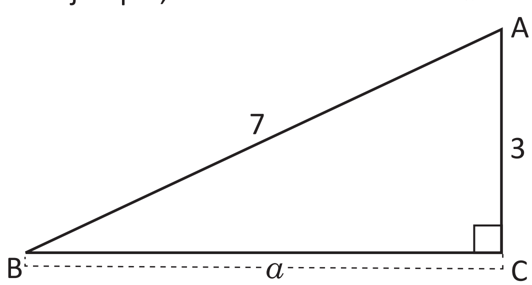


C En general, en un triángulo rectángulo de lados a, b y c, debido a que se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la hipotenusa y los catetos se pueden encontrar de la siguiente manera:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\qquad$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$



Por ejemplo, determina el valor de a.

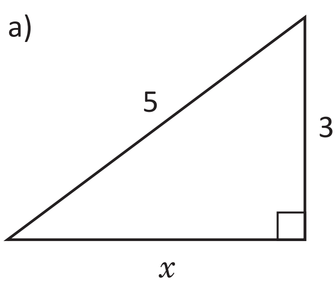


$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

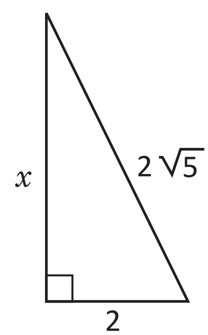
$$a = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Determina el valor de x en cada triángulo.

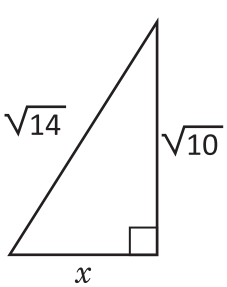
a)



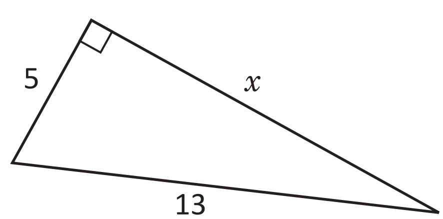
b)



c)



d)

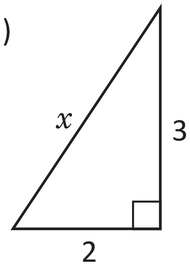


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

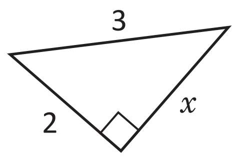
1.6 Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras

R Determina el valor de x en cada triángulo.

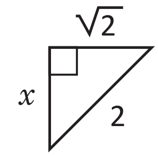
a)



b)



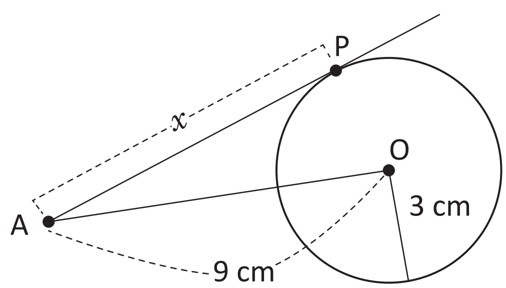
c)



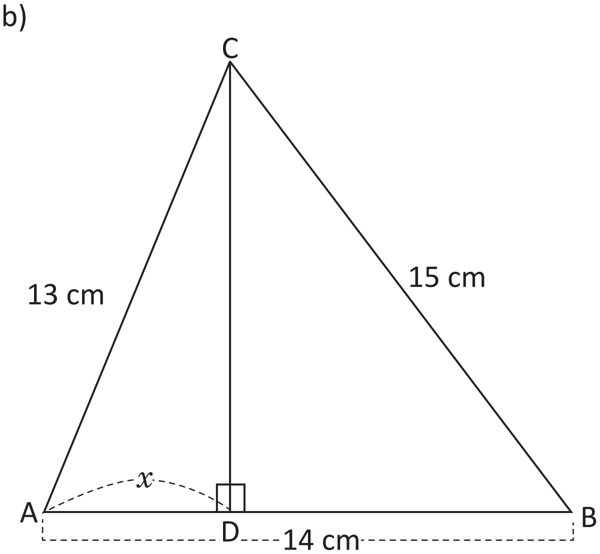
C Para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras, identifica los triángulos rectángulos en la figura y utiliza los valores que se proporcionan en ella para determinar la medida de algunos segmentos.

Determina el valor de x en las siguientes figuras:

a) La recta que pasa por AP es tangente al círculo con centro O.



b)

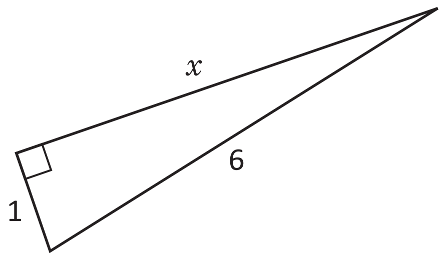


1.7 Triángulos notables

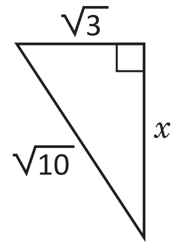
R

1. Determina el valor de x en cada triángulo:

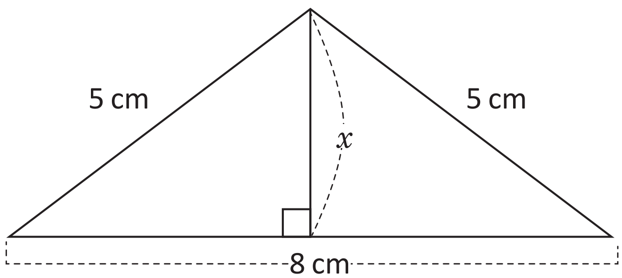
a)



b)

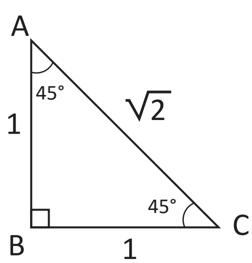


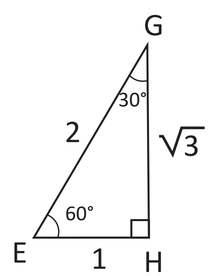
2. Determina el valor de x en la siguiente figura:



C

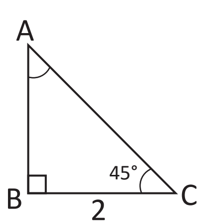
A los triángulos ABC y EHG se les denomina **triángulos notables**.



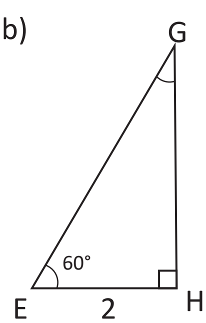


Determina todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos:

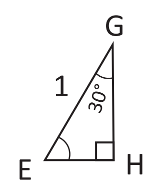
a)



b)



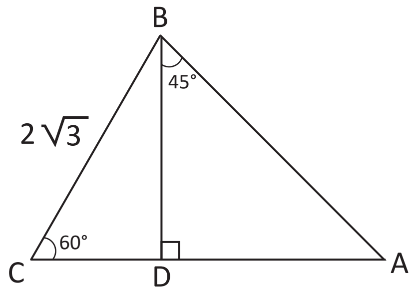
c)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Recíproco del teorema de Pitágoras

R Determina todos los lados y los ángulos del triángulo ABC.



C Si en un triángulo, sus lados a, b y c, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, y su hipotenusa es c. Este resultado es llamado el **recíproco del teorema de Pitágoras**.

Por ejemplo:
Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, se debe cumplir que la suma de los cuadrados de dos de ellos es igual al cuadrado del tercero.

$$15^2 + 8^2 = 289,\ 17^2 = 289, \text{ luego } 15^2 + 8^2 = 17^2$$

Por el recíproco del teorema de Pitágoras se puede concluir que el triángulo tiene un ángulo recto, y por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 12 cm, 5 cm y 13 cm

b) 3 cm, 2 cm y $\sqrt{13}$ cm

c) 3, 5, 7

d) 8, 15, y 17

e) 6, 2, y $\sqrt{41}$

f) 3, $\sqrt{5}$, y 2

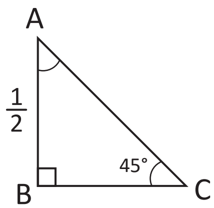
Unidad 6

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

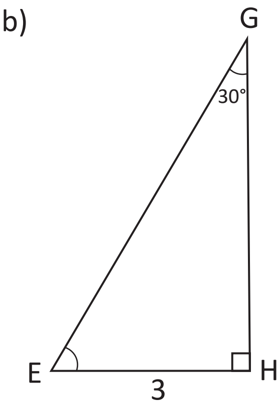
2.1 Cálculo de la altura y el volumen de un cono

1. Determina todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos:

a)



b)



2. Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 7 cm, 25 cm y 24 cm

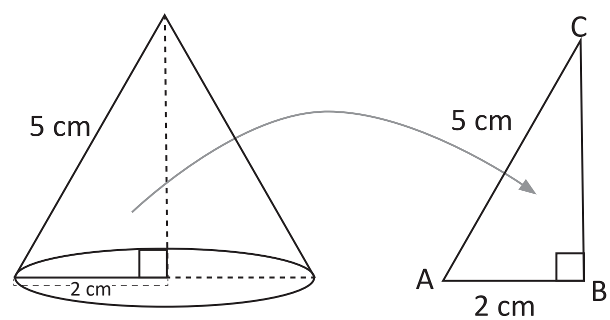
b) 5 , 2 y $\sqrt{29}$

Para determinar el volumen o la altura desconocida de un cono, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la altura del cono, que será igual a la medida del cateto BC en el triángulo ABC.

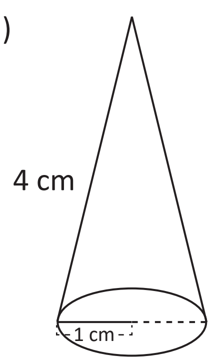
Por lo tanto, la altura del cono mide $\sqrt{21}$ cm.

Y luego también es posible determinar el volumen del cono utilizando la fórmula $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

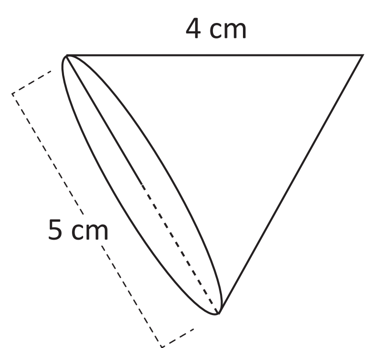


Determina la altura y el volumen de los siguientes conos:

a)



b)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Cálculo de la medida de la altura y del volumen de la pirámide cuadrangular

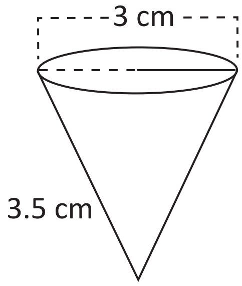
R

1. Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

   a) 7 cm, 8 cm y 9 cm

   b) 3, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$

2. Determina la altura y el volumen del siguiente cono:

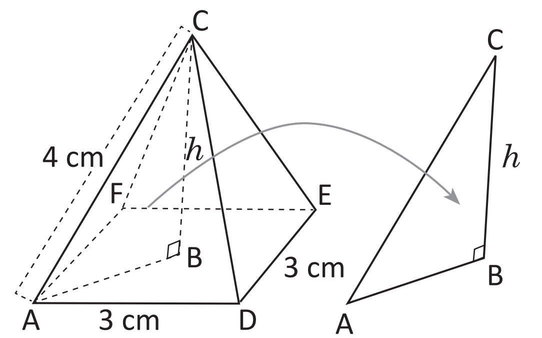


C

Para determinar el volumen o la altura desconocida de una pirámide, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la altura de la pirámide, que será igual a la medida del cateto BC en el triángulo ABC.

Y para determinar la medida del cateto AB fue necesario encontrar la mitad de la diagonal del cuadrado de la base.

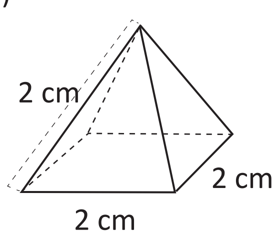


Por lo tanto, AB = $\frac{AE}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.
$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{46}{4}} = \sqrt{\frac{23}{2}}$, por lo tanto $h = \sqrt{\frac{23}{2}}$.

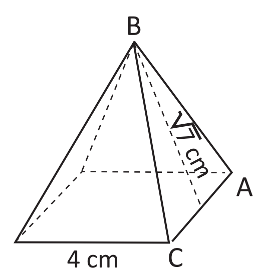
Y luego también es posible determinar el volumen de la pirámide con la fórmula $V_p = \frac{1}{3}A_B\,h$.
Donde A_B es el área de la base y h es la altura.

Determina la altura y el volumen de las pirámides cuadrangulares.

a)



b) El triángulo ABC es isósceles.

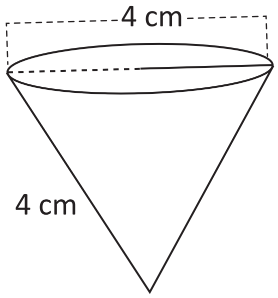


Unidad 6

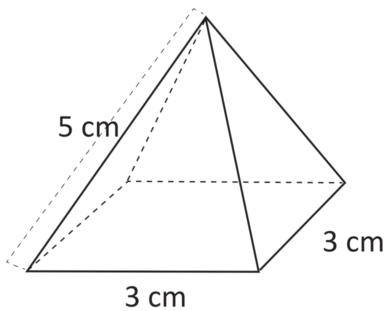
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro

R 1. Determina la altura y el volumen del siguiente cono:

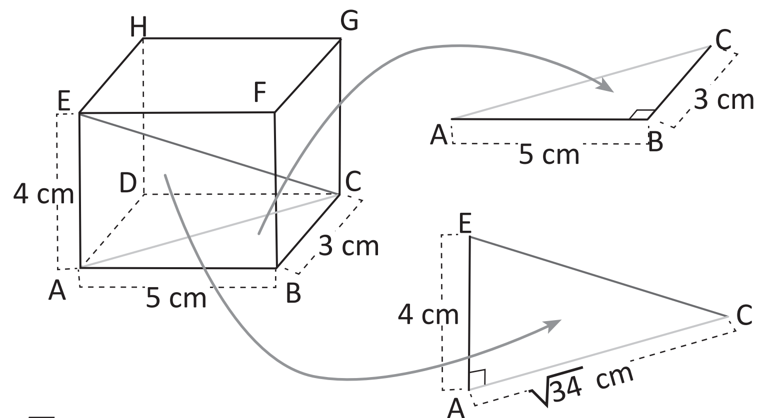


2. Determina la altura y el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular:



C Para determinar la diagonal de un ortoedro, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo:
En este caso se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la diagonal de la base y luego se utiliza nuevamente para calcular la diagonal del ortoedro.

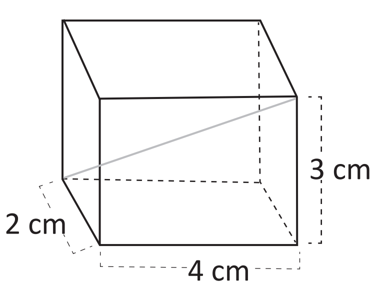


Por lo tanto, AC = $\sqrt{34}$.

$\Rightarrow$EC = $\sqrt{50}$ = 5 $\sqrt{2}$

Por lo tanto, la diagonal del ortoedro mide 5 $\sqrt{2}$ m.

Calcula la medida de la diagonal del ortoedro.

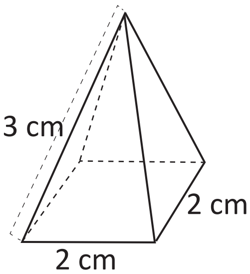


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

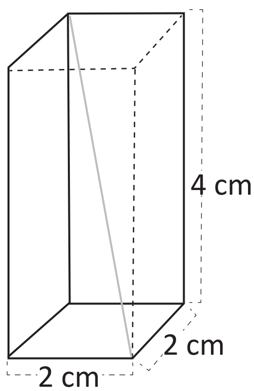
2.4 Cálculo del área de un hexágono

R

1. Determina la altura y el volumen de la pirámide cuadrangular.

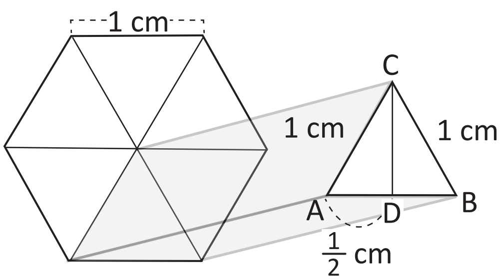


2. Calcula la medida de la diagonal y el volumen del ortoedro.



C

Para determinar el área de un hexágono regular de 1 cm de lado, se tuvo que calcular el área de uno de los 6 triángulos equiláteros congruentes que lo conforman, en el se utilizó el teorema de Pitágoras para determinar su altura.



$AC^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2$

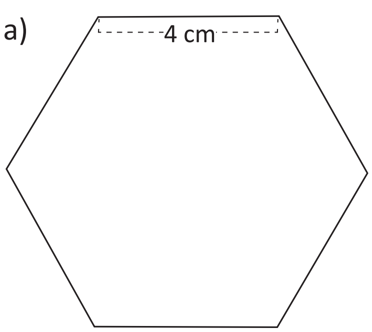
$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego, el área de ΔABC es: $(\Delta ABC) = \dfrac{1 \text{ cm} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

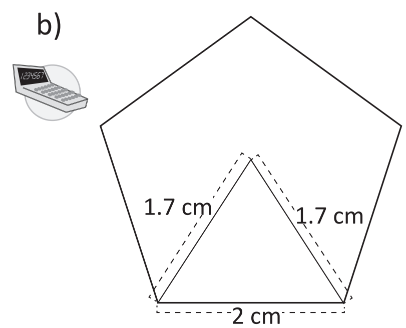
El área del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Encuentra la longitud del apotema y el área de los siguientes polígonos regulares:

a)



b)

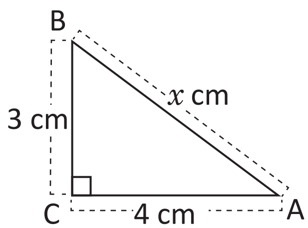
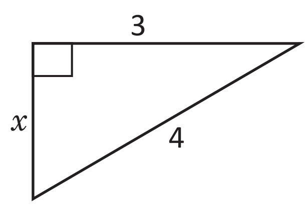
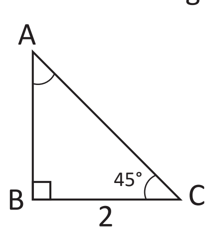
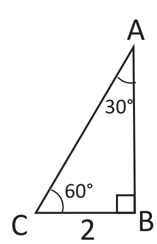


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 6

2.5 Autoevaluación de lo aprendido

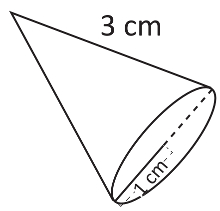
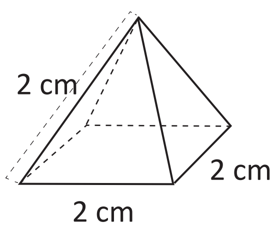
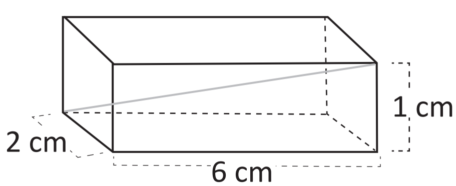
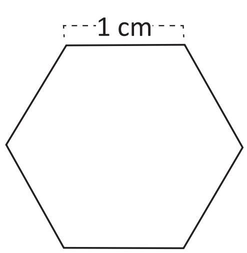
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Comprendo las demostraciones del teorema de Pitágoras y puedo explicarlas con mis propias palabras.				
2. Calculo la hipotenusa de un triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras, como en el siguiente caso: 				
3. Utilizo correctamente el teorema de Pitágoras para calcular el cateto de un triángulo rectángulo, como en el caso siguiente: 				
4. Determino la medida de los ángulos y los lados de un triánculo rectángulo notable como el siguiente:  				
5. Utilizo el recíproco del teorema de Pitágoras para determinar si un triángulo es rectángulo como en el siguiente caso: 12 cm, 5 cm y 13 cm				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la altura de un cono como el siguiente: 				
2. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la altura y el volumen de una pirámide como la siguiente: 				
3. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un ortoedro como el siguiente: 				
4. Aplico correctamente el teorema de Pitágoras para calcular el área de un hexágono regular como el siguiente: 				

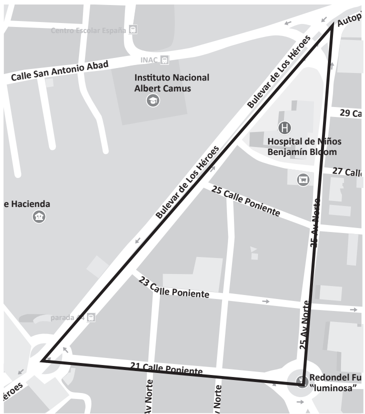
Unidad 6

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Aplicación del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es aplicable para medir distancias, así fue posible determinar que la distancia entre la entrada principal de la Universidad de El Salvador y la intersección entre el Bulevar de Los Héroes y la 21 calle poniente es 669.9 m.

Por ejemplo:

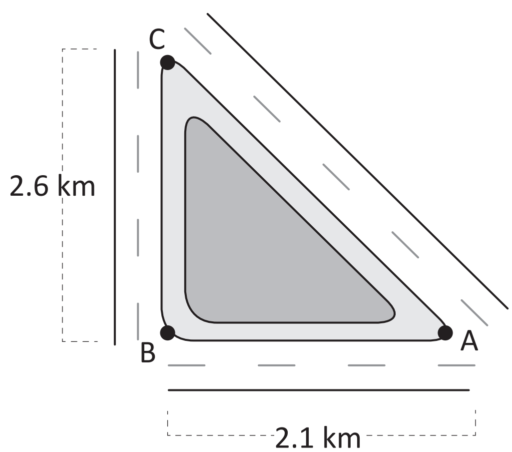


Observando el mapa, se forma el triángulo rectángulo ABC, del cual ya se conoce la longitud de los catetos AB y BC. Utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra la longitud de la hipotenusa CA:

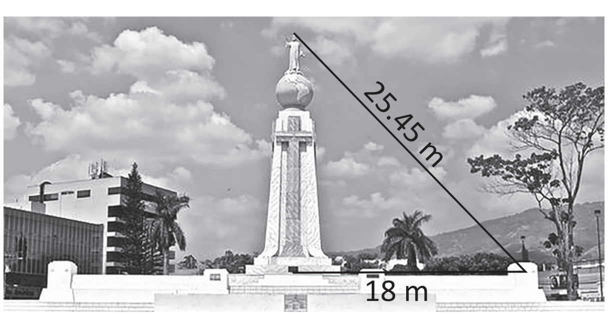
$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 = 141075.4 + 307803.04 = 448878.4$$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{448878.4} \approx 669.9$$

1. Determina qué camino es el más corto para que Marta llegue a su casa si ella está en el punto A y su casa en el punto C. Puedes utilizar calculadora.



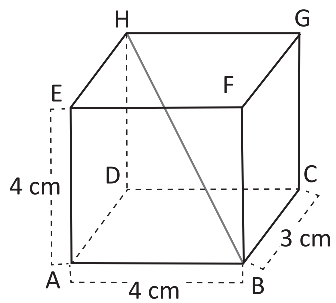
2. Calcula la altura del Monumento al Divino Salvador del Mundo, ubicado en el centro de la Plaza Salvador del Mundo. Este monumento fue develado el 26 de noviembre de 1942 y fue diseñado por el arquitecto José María Barahona Villaseñor.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Ana tiene una escalera de 10 pies de longitud y quiere cambiar una lámpara que está a 8 pies de altura en un poste, ¿a qué distancia de la base del poste se debe colocar la escalera?				
2. En una cisterna de concreto, se necesita colocar un alambre entre los puntos H y B. ¿Cuál debe ser la medida de este?  				

2.9 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

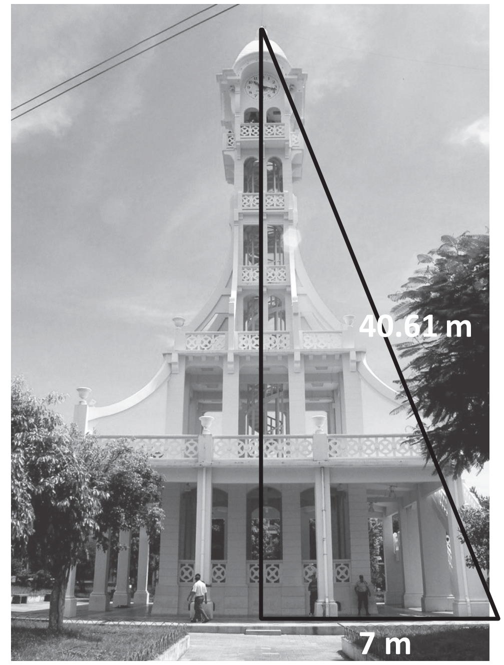
Ítem	Sí	Podría mejorar	no	Comentario
1. Una cancha de básquetbol úbicada en el centro escolar donde estudia Carlos, tiene 28 m de largo y su diagonal mide 31.77 m. ¿Cuál es el área de la cancha?				
2. La pantalla de un televisor mide 32 pulgadas en su diagonal (81.28 cm) y 24.98 pulgadas a lo largo. ¿Cuánto mide la altura del televisor?				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. **La torre del reloj de San Vicente**, ubicada en el parque central Antonio José Cañas de San Vicente, su construcción inició en 1928 y finalizó en 1930, durante la presidencia del Dr. Pío Romero Bosque. En el terremoto del 13 de enero de 2001 la torre sufrió algunos daños, por lo que tuvo que ser remodelada e inagurada nuevamente en el año 2009. Esta torre es uno de los íconos turisticos de El Salvador.

   Con los datos dados en la imagen, encuentra aproximadamente la altura real de la torre del reloj de San Vicente.



2. El estadio **Jorge Mágico González**, está ubicado en la colonia Flor Blanca de San Salvador, es hasta el momento el segundo estadio más grande de El Salvador. En los años 1935 y 2002 se desarrollaron los Juegos Centroamericanos y del Caribe, para ciertas disciplinas deportivas. Fue construido durante el mandato del presidente Maximiliano Hernández Martínez, se le dió el nombre de Estadio Nacional de San Salvador Flor Blanca, fue hasta el año 2006 que se cambió su nombre a Estadio Nacional "Jorge Mágico González" en honor al futbolista salvadoreño más reconocido en este deporte.

   La imagen muestra el estadio "Jorge Mágico González" desde lo alto. Utilizando las medidas dadas en la imagen, encuentra la medida real del largo de la cancha del estadio.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?