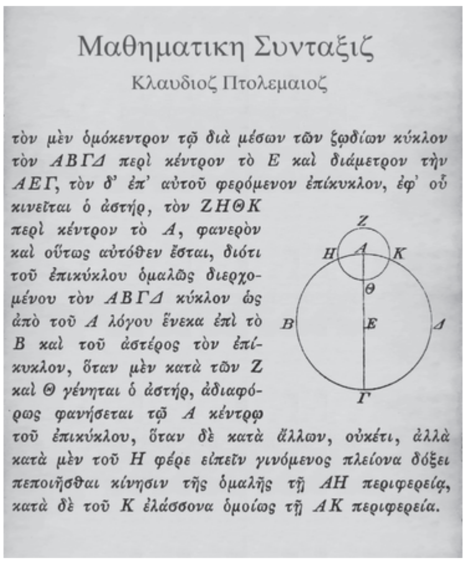
# Unidad 7

# Ángulo inscrito y central

La astronomía fue utilizada por las civilizaciones antiguas para predecir los periodos de abundancia de la caza, la siembra o la llegada del invierno.

El matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo (siglo II) realizó, en el tratado astronómico *Almagesto*, una descripción matemática del sistema geocéntrico (en el cual los planetas giran alrededor de la Tierra). Uno de sus aportes a la matemática fue un teorema sobre cuadriláteros cíclicos, en el que se utilizan propiedades importantes de ángulo inscrito.



Μαθηματικη Συνταξιζ

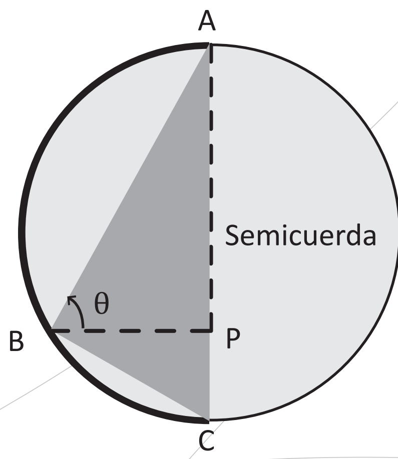
Κλαυδιοζ Πτολεμαιοζ

τὸν μὲν ὁμόκεντρον τῷ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλον τὸν ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΕΓ, τὸν δ' ἐπ' αὐτοῦ φερόμενον ἐπίκυκλον, ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ ἀστήρ, τὸν ΖΗΘΚ περὶ κέντρον τὸ Α, φανερὸν καὶ οὕτως αὐτόθεν ἔσται, διότι τοῦ ἐπικύκλου ὁμαλῶς διερχομένου τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ὡς ἀπὸ τοῦ Α λόγου ἕνεκα ἐπὶ τὸ Β καὶ τοῦ ἀστέρος τὸν ἐπίκυκλον, ὅταν μὲν κατὰ τῶν Ζ καὶ Θ γένηται ὁ ἀστήρ, ἀδιαφόρως φανήσεται τῷ Α κέντρῳ τοῦ ἐπικύκλου, ὅταν δὲ κατὰ ἄλλων, οὐκέτι, ἀλλὰ κατὰ μὲν τοῦ Η φέρε εἰπεῖν γινόμενος πλείονα δόξει πεποιῆσθαι κίνησιν τῆς ὁμαλῆς τῇ ΑΗ περιφερείᾳ, κατὰ δὲ τοῦ Κ ἐλάσσονα ὁμοίως τῇ ΑΚ περιφερείᾳ.



*Una hoja del tratado astronómico Almagesto.*

La trigonometría, que estudia la relación entre los lados y ángulos de un triángulo, se desarrolló por los estudios astronómicos. Los matemáticos hindúes Varahamihira (siglo VI) y Brahmagupta (siglo VII) formularon varias propiedades trigonométricas utilizando la semicuerda (un triángulo inscrito en el círculo con un lado como diámetro del círculo) y los  cuadriláteros cíclicos que tienen como base el estudio de los ángulos inscritos.





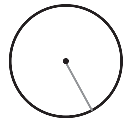
*El ángulo inscrito ABC es recto. Por medio de esta construcción se obtuvieron relaciones importantes.*

En los contenidos a desarrollar se abordará desde la definición hasta el teorema del ángulo inscrito, que establece una relación con el ángulo central. Estudiarás la construcción de rectas tangentes sobre la circunferencia, así como la definición del ángulo semiinscrito y la relación entre cuerdas y arcos de circunferencia.

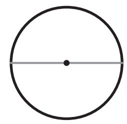
## 1.1 Elementos de la circuferencia

Los elementos de la circunferencia son:

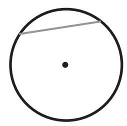
**Radio:** el segmento que va del centro a un punto de la circunferencia.



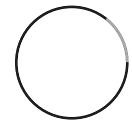
**Diámetro:** el segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro.



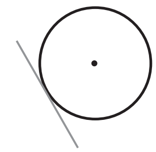
**Cuerda:** el segmento que va de un punto de la circunferencia a otro**.**



**Arco**: la parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella.



**Tangente:** la recta que toca la circunferencia en un punto**.**



1. Traslada los literales de los elementos de la circunferencia a los paréntesis que corresponden a su definición o alguna característica de ellos. Pueden repetirse los literales.

| | | |
|---|---|---|
| a) Cuerda | (   ) | Elemento cuya medida es la mitad de la medida del diámetro. |
| b) Tangente | (   ) | Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia. |
| c) Radio | (   ) | Elemento que es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia. |
| d) Arco | (   ) | Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia. |
| e) Diámetro | (   ) | Elemento de la circunferencia determinado por la abertura de un ángulo central. |
| | (   ) | Elemento cuya longitud es el doble de la medida del radio. |
| | (   ) | Cuerda de mayor longitud en una circunferencia. |
| | (   ) | Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella. |

2. En la siguiente circunferencia, traza sus elementos según el color que se te indica.

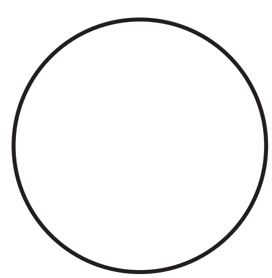
a) Cuerda: rojo

b) Tangente: azul

c) Radio: verde

d) Arco: amarillo

e) Diámetro: celeste





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

R Conecta los elementos de la circunferencia con su definición.

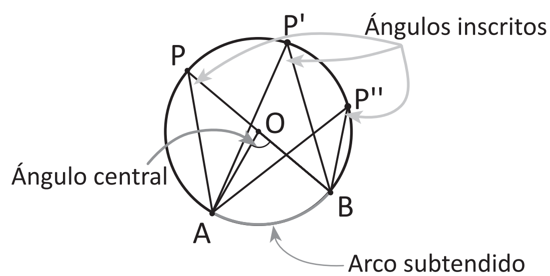
| | |
|---|---|
| 1. Diámetro | a) Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia. |
| 2. Tangente | b) Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia. |
| 3. Radio | c) Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella. |
| 4. Arco | d) Recta que toca la circunferencia en un solo punto. |
| 5. Cuerda | e) Segmento trazado entre dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. |

C

Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman **ángulos inscritos**.

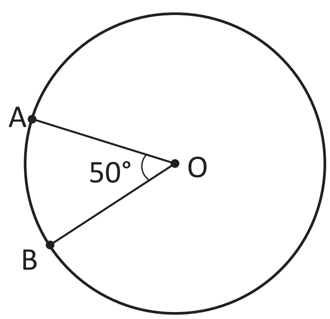
En una circunferencia se cumple que, la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

Recuerda que subtender significa compartir el mismo arco.

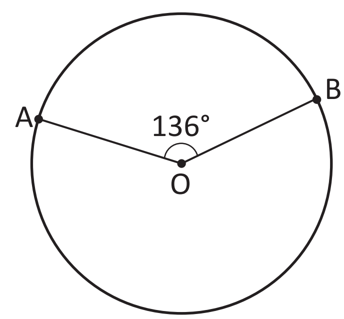



Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en las siguientes circunferencias y determina su medida.

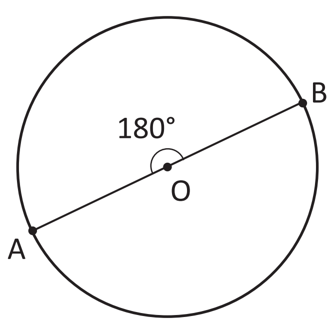
a)



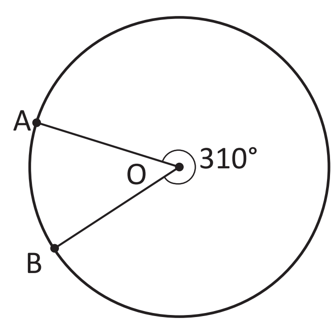

b)




c)




d)





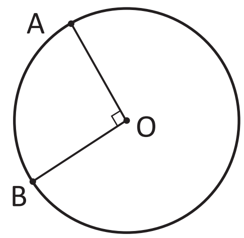

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.3 Ángulo inscrito, parte 1

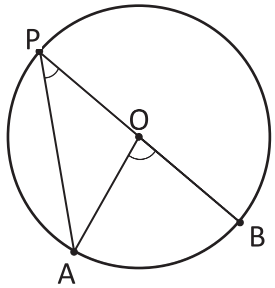
1. Escribe la definición de los elementos de la circunferencia.

   a) Diámetro________________________________________________________________
   ___________________________________________________________________________
   b) Tangente________________________________________________________________
   ___________________________________________________________________________
   c) Radio___________________________________________________________________
   ___________________________________________________________________________
   d) Arco____________________________________________________________________
   ___________________________________________________________________________
   e) Cuerda__________________________________________________________________
   ___________________________________________________________________________

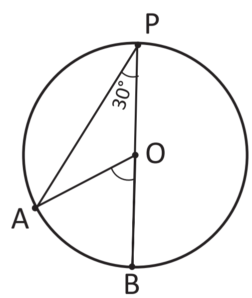
2. Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en la circunferencia y determina su medida.




En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.** Por ejemplo:




∢BOA = 2∢BPA

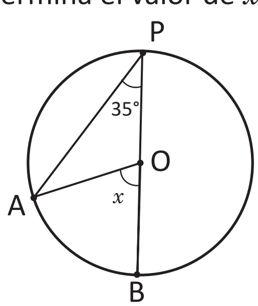



Como ∢BOA = 2∢BPA

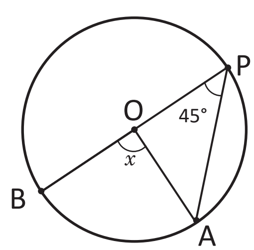
∢BOA = 2(30) = 60°

Determina el valor de $x$ para cada caso.

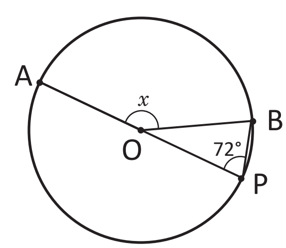
a)



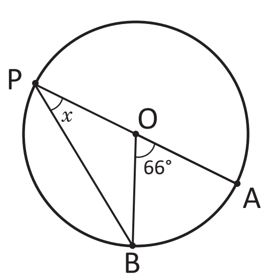

b)



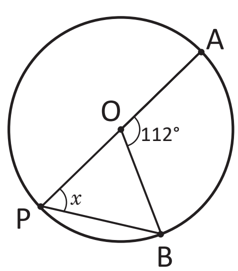

c)



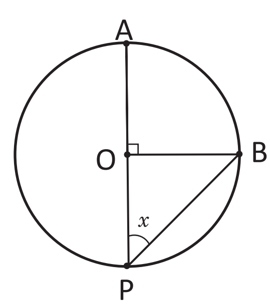

d)




e)




f)



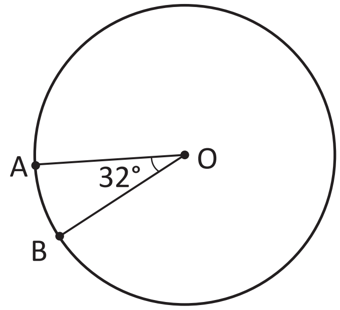



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

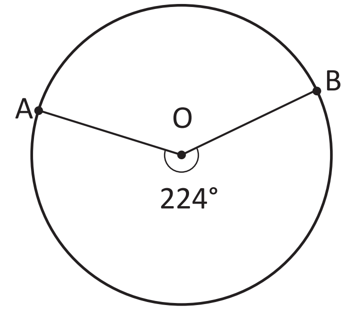
# 1.4 Ángulo inscrito, parte 2

R 1. Dibuja 3 ángulos inscritos diferentes en las siguientes circunferencias y determina su medida:

a)

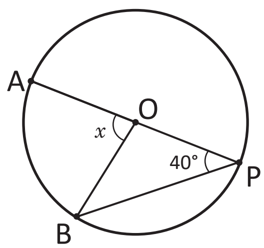



b)

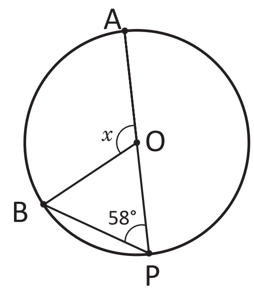



2. Determina el valor de $x$ para cada caso:

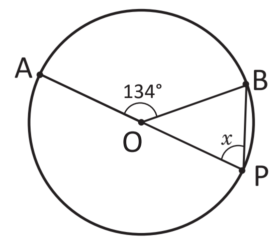
a)



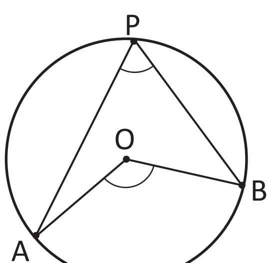

b)



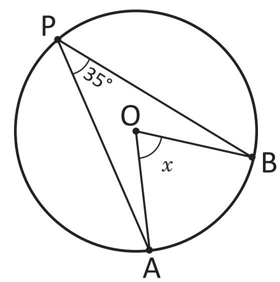

c)




C En los ángulos inscritos que tienen en el interior el ángulo central que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**. Por ejemplo:




∢BOA = 2∢BPA

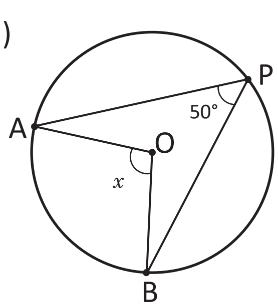



Como ∢BOA = 2∢BPA

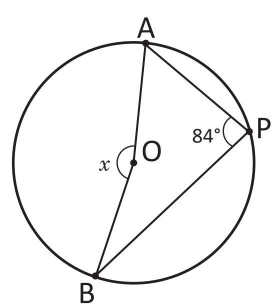
∢BOA = 2(35) = 70°

Determina el valor de $x$ para cada caso:

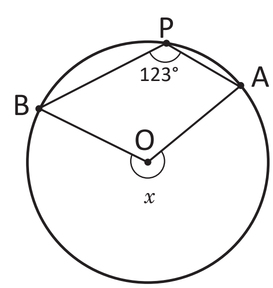
a)



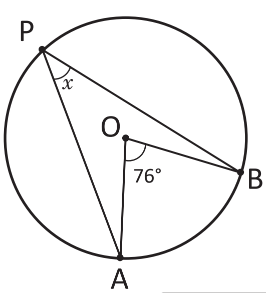

b)



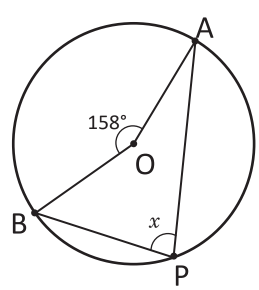

c)



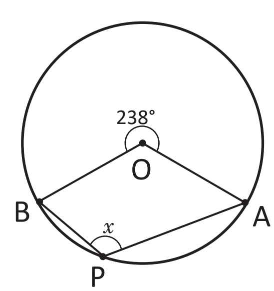

d)




e)




f)

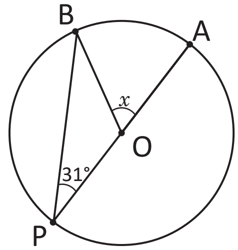



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

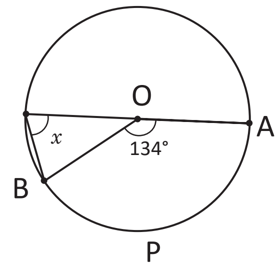
# 1.5 Teorema del ángulo inscrito

R 1. Determina el valor de $x$ para cada caso:

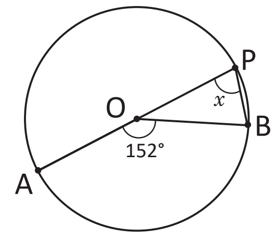
a)




b)

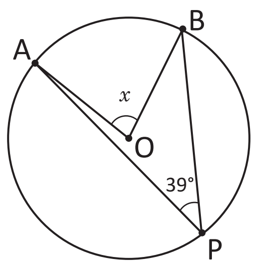



c)

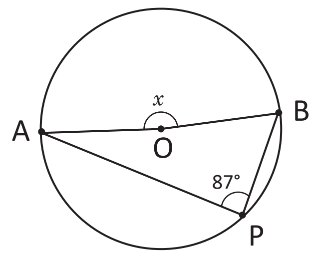



2. Determina el valor de $x$ para cada caso:

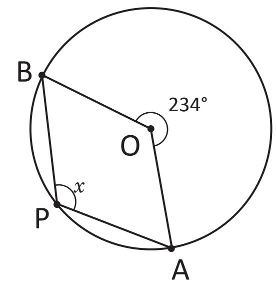
a)




b)



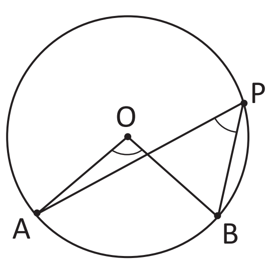

c)




C

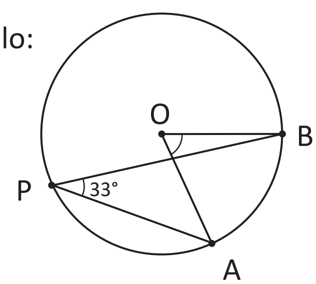
En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**. Este resultado se conoce como el Teorema del ángulo inscrito.

Además, todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.




∢BOA = 2∢BPA

Por ejemplo:

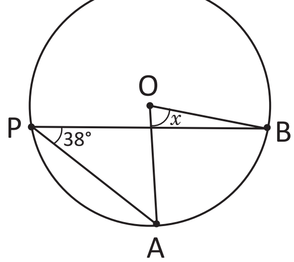



Como ∢BOA = 2∢BPA.

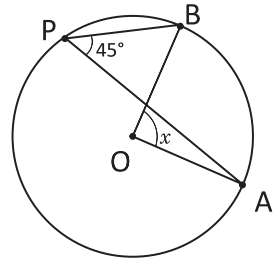
∢BOA = 2(33) = 66°.

Determina el valor de $x$, $y$ y $z$ para cada caso.

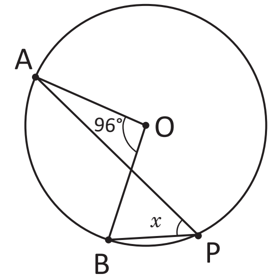
a)



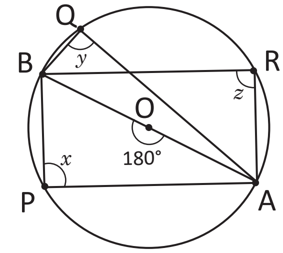

b)




c)




d)

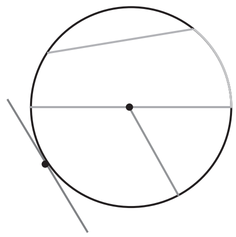
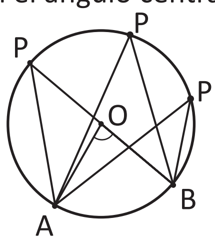
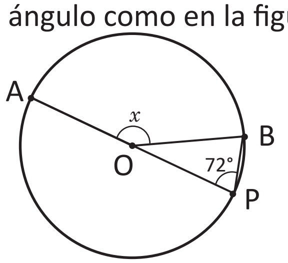
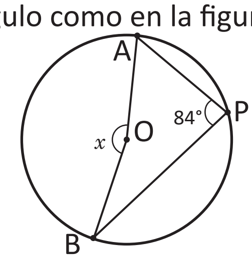
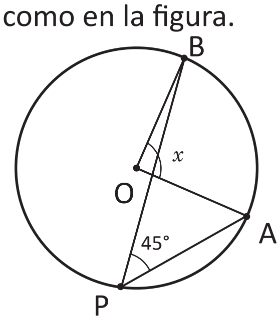





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Identifico los elementos de la circunferencia en la figura de abajo.  | | | | |
| 2. Comprendo la definición de ángulo inscrito e identifico su posible relación con el ángulo central del mismo arco.   | | | | |
| 3. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está en algún lado del ángulo como en la figura.   | | | | |
| 4. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está al interior del ángulo como en la figura.   | | | | |
| 5. Aplico el teorema del ángulo inscrito cuando el centro está fuera del ángulo como en la figura.   | | | | |

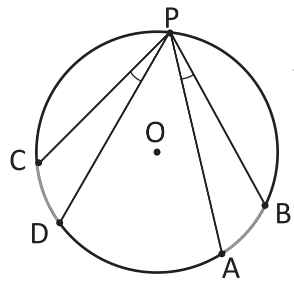
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

# 1.7 Arcos congruentes

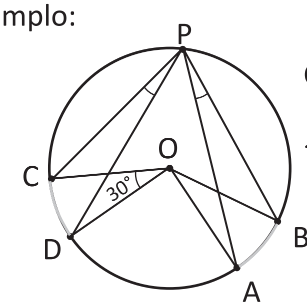
En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.




$\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC$

Por ejemplo:

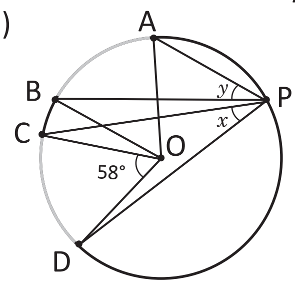



Como $\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$.

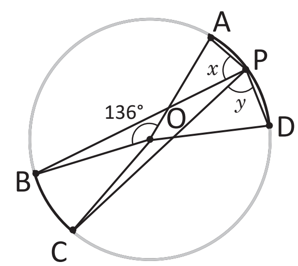
$\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC = \frac{30}{2} = 15°$.

1. Determina el valor de $x$ y $y$ para cada caso. Considera $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.

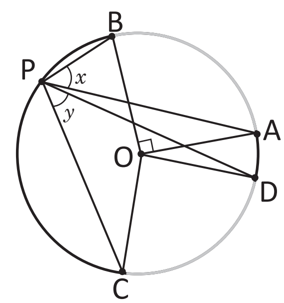
a)



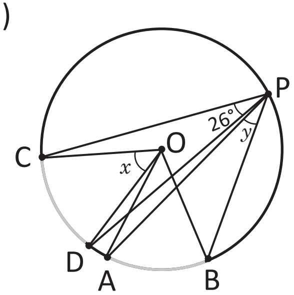

b)



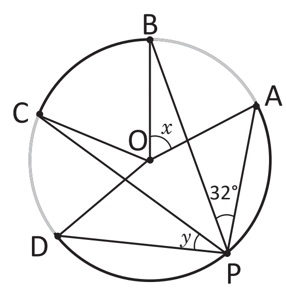

c)



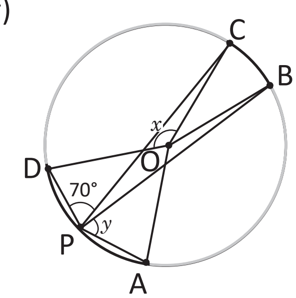

d)




e)

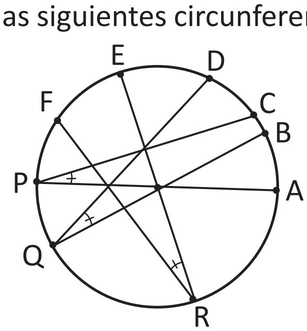



f)

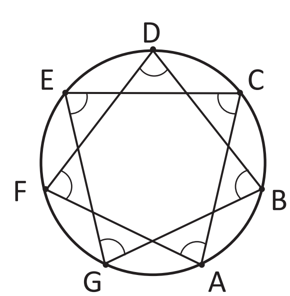



2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que son de igual medida.

a)




b)



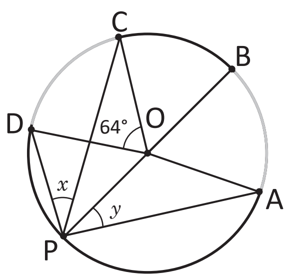


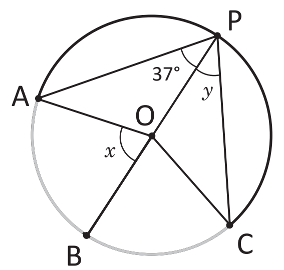

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.8 Autoevaluación de lo aprendido

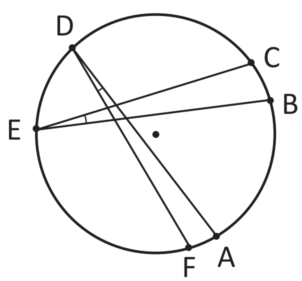
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>no</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>
1. Aplico las propiedades de los arcos con medidas iguales para determinar las medidas de ángulos, como en las figuras.



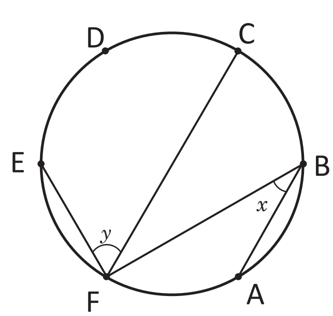


</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
2. Utilizo las propiedades de ángulos inscritos de igual medida para determinar qué arcos tienen igual medida como en la figura de abajo.



</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
3. Aplico correctamente los resultados del teorema del ángulo inscrito y su recíproco para resolver problemas como el siguiente:

Determina el valor de $x$ y $y$ si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.



</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

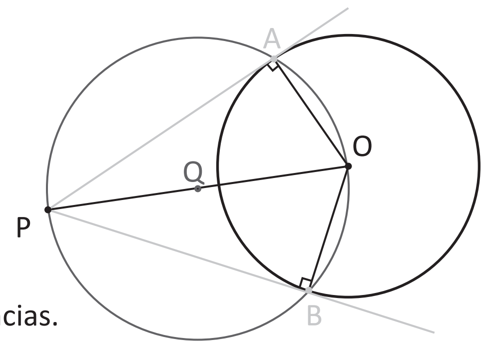
## 2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada, siguiendo los pasos:

1. Se toma el punto medio del segmento PO.

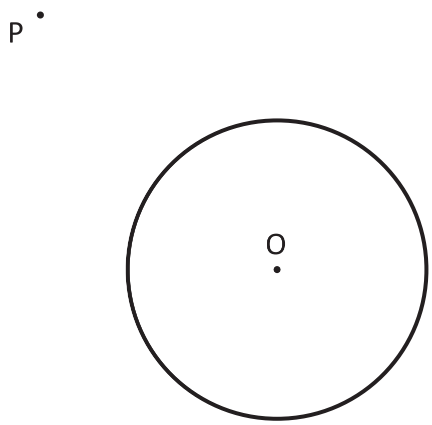
2. Se traza la circunferencia de diámetro PO.

3. Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

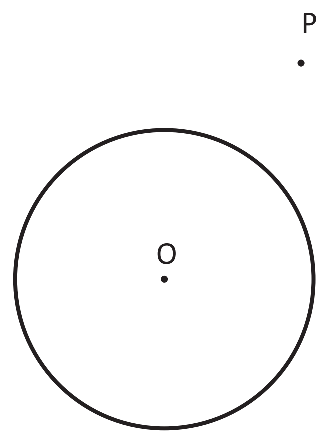



1. Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

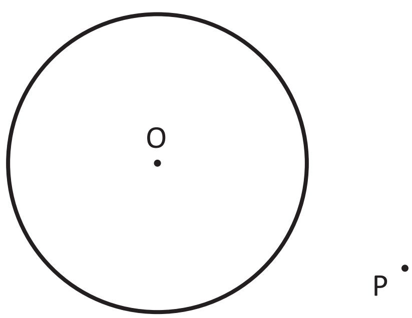
a)



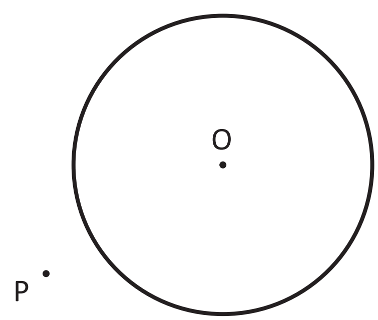

b)




c)




d)




2. ¿Por qué los segmentos de la recta tangente al punto de tangencia son iguales?

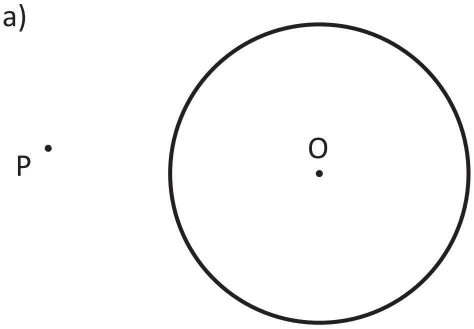


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

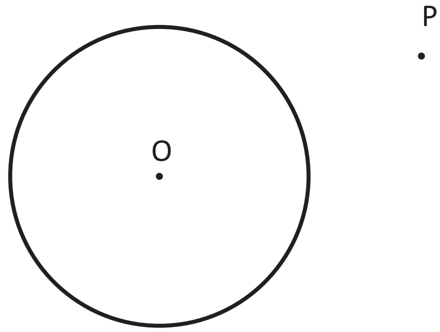
## 2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

R Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

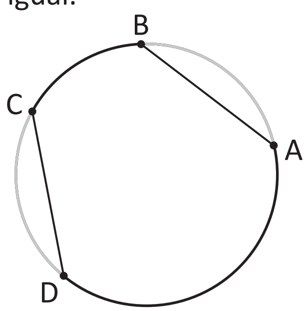
a)




b)

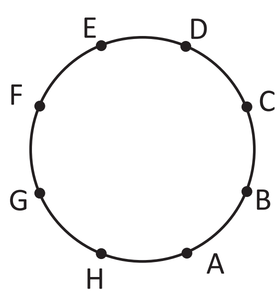



C En una circunferencia, si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.

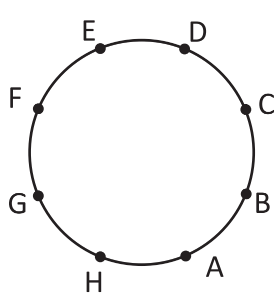



Si $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ entonces AB = CD.

Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H dividen la circunferencia en 8 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal.




a) ACEG b) CEG c) CDGH d) BFGA




e) EGA f) BEH g) BCF h) ABCDEFGH

Unidad 7

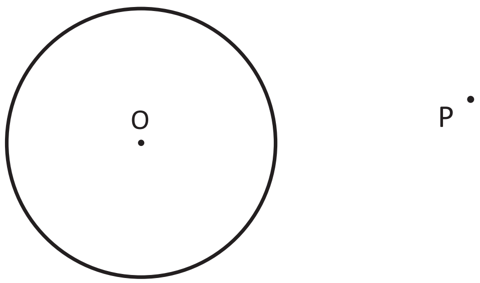
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

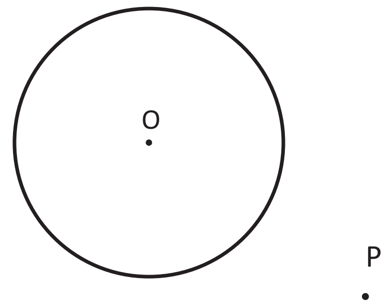
R

1. Construye las tangentes a cada circunferencia que pasan por el punto P.

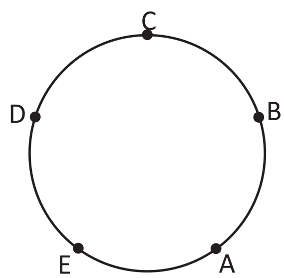
a)




b)




2. Los puntos A, B, C, D, E dividen la circunferencia en 5 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal. Observa el ejemplo.

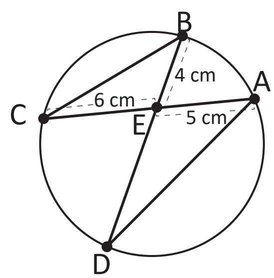



a) ABD    b) CDE    c) ABDE    d) ABCDE

C

Se puede determinar la semejanza entre triángulos observando los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. Y se puede utilizar para determinar la longitud de algunos segmentos.

Por ejemplo:




$\Delta AED \sim \Delta BEC$. Ya que hay dos ángulos opuestos por el vértice y además $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$. Por el criterio AA, se concluye que $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

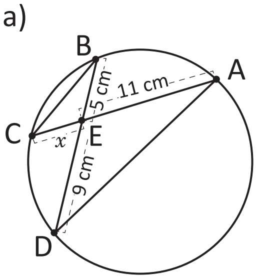
Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$, entonces $\frac{ED}{CE} = \frac{AE}{BE}$.

Por lo tanto $ED = CE \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$

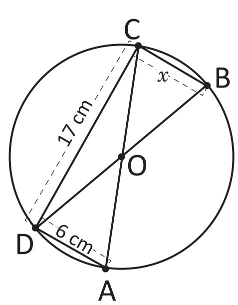
**ED = 7.5 cm**

Determina $x$ en las siguientes figuras:

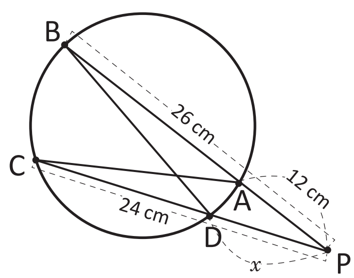
a)




b) Si $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DA}$




c)

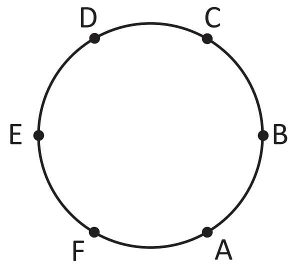





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.4 Paralelismo

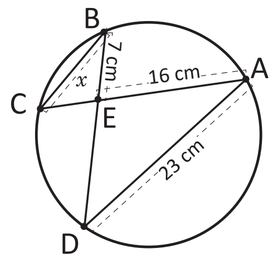
1. Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que representa cada literal. Observa el ejemplo.



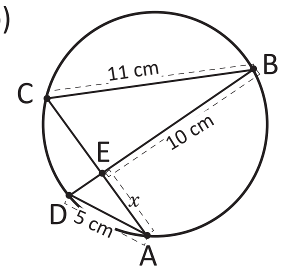

a) BDF　　b) ABDE　　c) CDEF　　d) ABCDEEF

2. Determina $x$ en las siguientes figuras:

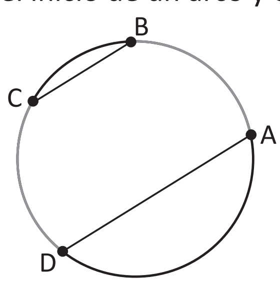
a)




b)




En una circunferencia, si se tienen dos arcos de circunferencia iguales, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.



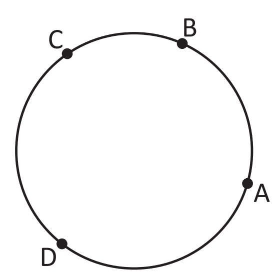

Si $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, entonces AD || BC.

Una condición A es suficiente para otra condición B si se cumple la proposición "Si A entonces B ".

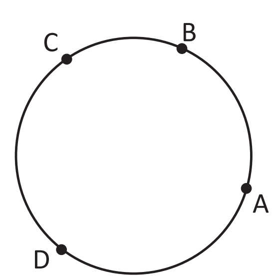
Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

$\widehat{ABC}$ denota el arco sostenido desde A hasta C, pasando por B.

a) $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$　　b) ∢DAC = ∢BDA　　c) CD = BA




d) AC = BD　　e) CB = BA　　f) ΔABC ≅ ΔDCB



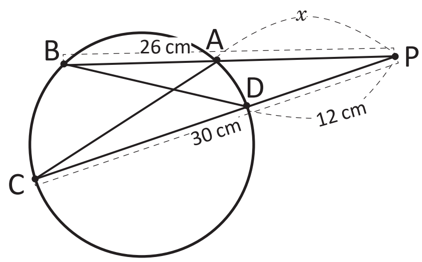

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

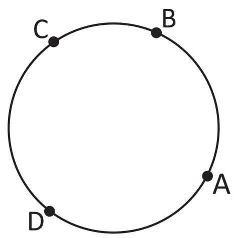
## 2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

R

1. Determina $x$ en las siguientes figuras:




2. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

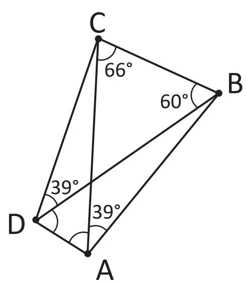



a) $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DC}$ b) CB = BA c) ΔABC ≅ ΔDCB

C

Si dos ángulos son iguales y además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

Por ejemplo:

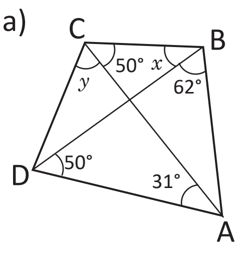



Como ∢CAB = ∢CDB y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

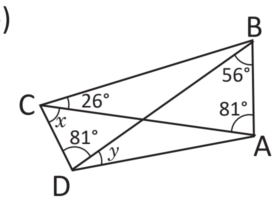
Se debe cumplir que ∢BDA = ∢BCA = 66°.
Y además se debe cumplir que ∢CAD = ∢CBD = 60°.

Determina el valor de $x$ y $y$.

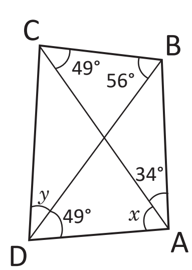
a)



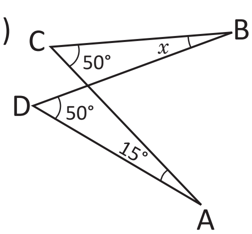

b)




c)




d)



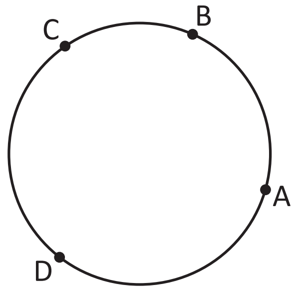



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Ángulo semiinscrito

R

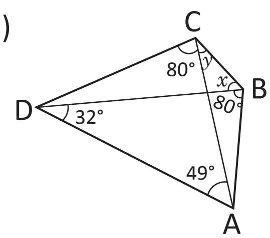
1. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.



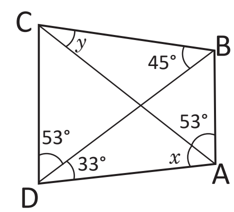

a) $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$  b) $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DBC$  c) $\Delta BCD \sim \Delta BCA$

2. Determina el valor de $x$ y $y$.

a)

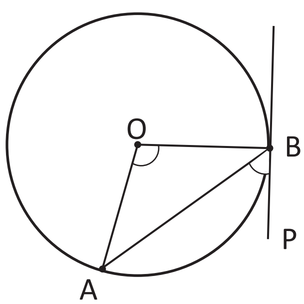



b)



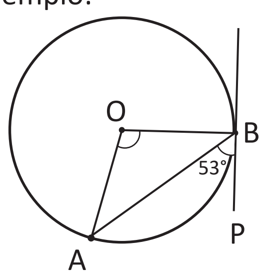

C

El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**. En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco.**




$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$

Por ejemplo:

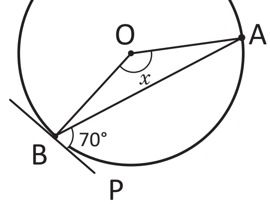



Como $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$

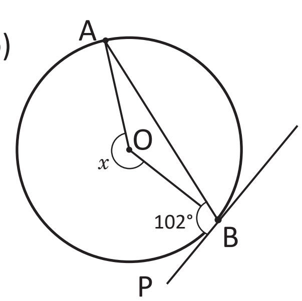
$\sphericalangle BOA = 2(53) = 106°$

Determina el valor de $x$ para cada caso.

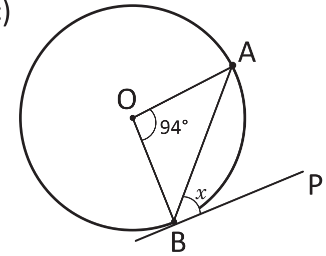
a)



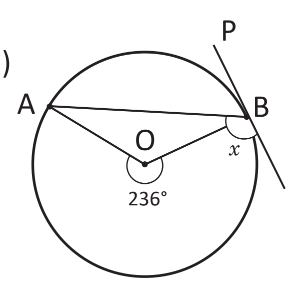

b)




c)




d)




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Construyo correctamente las tangentes a una circunferencia que pasan por un punto P. | | | | |
| 2. Aplico correctamente que cuando la medida de dos arcos es igual entonces la medida de las cuerdas es igual, para determinar qué tipo de figura se forman en una circunferencia dividida en arcos iguales. | | | | |
| 3. Utilizo el ángulo inscrito para encontrar triángulos semejantes y determinar medidas de lados. | | | | |
| 4. Puedo determinar condiciones suficientes y necesarias para que en cuatro puntos sobre una circunferencia al menos dos cuerdas sean paralelas. | | | | |

## 2.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

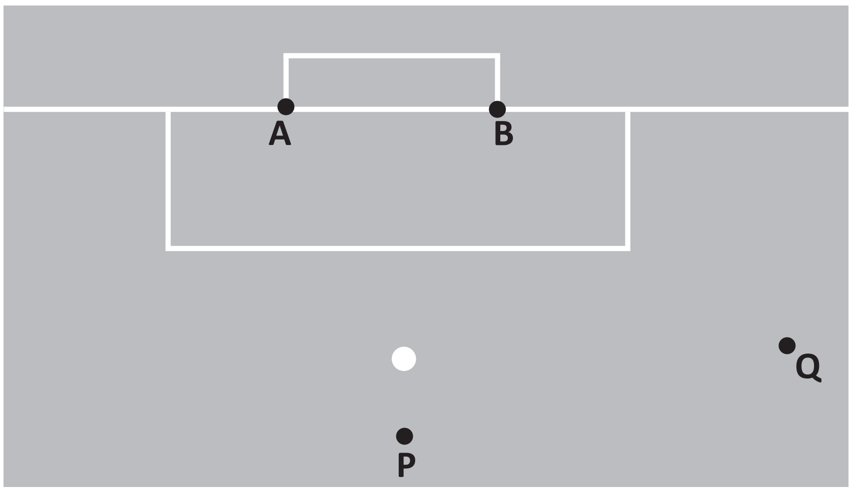
| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Determino correctamente cuándo cuatro puntos están sobre una circunferencia y utilizo el resultado para encontrar las medidas de otros ángulos. | | | | |
| 2. Determino la relación que existe entre un ángulo semiinscrito y el ángulo central que subtiende el mismo arco. | | | | |
| 3. Aplico el teorema del ángulo inscrito para resolver problemas con ángulos al interior de la circunferencia. | | | | |
| 4. Aplico el teorema del ángulo inscrito para resolver problemas con ángulos al exterior de la circunferencia. | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## Problemas de aplicación

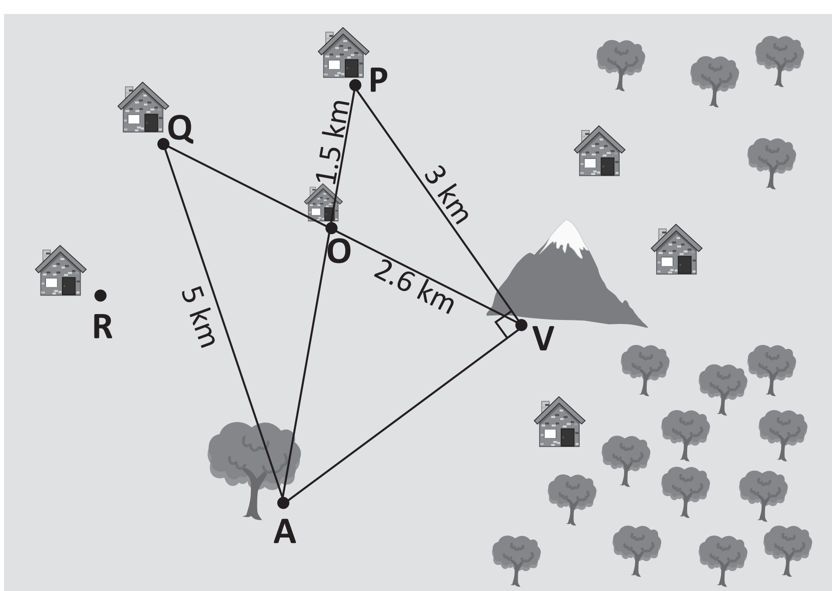
1. **Ángulo de tiro.** En un juego de tiros libres un jugador se ubica en el punto P y otro en el punto Q. Mide los ángulos ∢APB, ∢AQB y responde:
   a) Según el ángulo de tiro, ¿cuál de ellos tiene mayores posibilidades de anotar?
   b) Marca otro punto P' que tenga el mismo ángulo de tiro que P.




Dibuja una circunferencia que pase por A, B y P, además considera $\widehat{AB}$ y los ángulos inscritos que tienen igual medida que el ∢APB.

2. **Mapa.** Un turista cuenta con el mapa a escala que se muestra en la imagen y necesita saber algunos datos faltantes. Ayuda al turista siguiendo estos pasos:

   a) Utilizando transportador comprueba que la medida de los ángulos ∢VPA y ∢VQA es 45°.
   b) Encuentra la distancia entre el gran árbol y el volcán.
   c) Justifica que los puntos P, Q, A y V están en una circunferencia sobre el mapa.
   d) ¿Cuál es la distancia entre la comunidad Q y el volcán?






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?