Unidad 1. Números reales

Competencia de la unidad

Utilizar las propiedades de orden, escritura y operaciones de los números reales para resolver problemas.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 2: Raíz cuadrada (9°) • Raíz cuadrada y números reales • Operaciones con raíces cuadradas	**Unidad 1: Números reales** • Números reales	**Unidad 4: Funciones trascendentales I** • Potencia y raíz n-ésima • Funciones y ecuaciones exponenciales
	Unidad 3: Desigualdades • Desigualdad • Desigualdad lineal • Desigualdad no lineal	**Unidad 5: Funciones trascendentales II** • Función biyectiva e inversa • Función logarítmica • Funciones trigonométricas • Práctica en GeoGebra
	Unidad 4: Funciones reales • Definición de función • Función cuadrática • Aplicaciones de la función cuadrática • Otras funciones	

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Números reales	1	1. Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)
	1	2. Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)
	1	3. Racionalización con denominador $\sqrt{a}$
	1	4. Racionalización con denominador binomio
	1	5. Los números neperiano y áureo
	1	6. Definición de los números reales: la recta numérica
	1	7. Definición de los números reales: números decimales
	1	8. El valor absoluto de un número real
	1	9. Definición de intervalo
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la unidad 1

10 horas clase + prueba de la unidad 1

Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Números reales

Se estudia la definición de raíz cuadrada, donde se observa la distinción entre la representación de la raíz cuadrada no negativa de un número real y las raíces cuadradas como soluciones de una ecuación cuadrática. Se trabajan las operaciones elementales y combinadas con raíces cuadradas, así como la racionalización simple y luego con denominador binomio. Se definen los números reales representados a través de la recta numérica y se aborda su representación escrita con números decimales. Se introduce el concepto de valor absoluto como función por medio de la noción de correspondencia. Por último se definen los intervalos y se estudian sus representaciones en la recta numérica y en la notación de conjuntos.

1.1 Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Recuerda que:
1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Solución

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10} \\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5} \\ &= 2\sqrt{3 \times 5} \\ &= 2\sqrt{15} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned} \sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}^{9}}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

se efectúa la suma de términos semejantes:

$$\begin{aligned} \sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned} \sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

se efectúa la resta de términos semejantes:

$$\begin{aligned} \sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusión

Un número b es raíz cuadrada de un número a si al elevar al cuadrado el número b se obtiene el número a, es decir $b^2 = a$.
Si $a \geq 0$, la raíz cuadrada no negativa de a se denota por $\sqrt{a}$.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

- Al efectuar un producto o una división de raíces se utilizan las propiedades:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

  Se realizan las operaciones indicadas y por último se simplifica si es posible.

Para simplificar utiliza el hecho que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

- Al efectuar una suma o una resta de raíces se simplifican las raíces cuadradas y luego se realiza la suma o resta de términos semejantes.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$ b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$ c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$ d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$ h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

Realiza la descomposición prima, para evitar cálculos grandes.

Indicador de logro

1.1 Efectúa operaciones elementales con raíces cuadradas.

Secuencia

En esta unidad se trabaja con raíces cuadradas, desde su definición, hasta la racionalización de denominadores. En esta clase se desarrollan las operaciones con raíces cuadradas: suma, resta, producto y división, así como la simplificación de raíces.

Propósito

El Problema inicial plantea las operaciones con raíces cuadradas en el orden con el que se trabajaron en noveno grado. Los estudiantes deben utilizar la descomposición en factores primos para efectuar la simplificación.

Solución de problemas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14} = \sqrt{21 \times 14}$
$= \sqrt{(3 \times 7) \times (2 \times 7)}$
$= \sqrt{2 \times 3 \times 7^2}$
$= 7\sqrt{2 \times 3}$
$= 7\sqrt{6}.$

b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12} = \sqrt{6 \times 12}$
$= \sqrt{(2 \times 3) \times (3 \times 2^2)}$
$= \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2}$
$= 2 \times 3\sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2}.$

c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$
$= \sqrt{\dfrac{\cancel{24}^{\,4}}{\cancel{6}^{\,1}}}$
$= \sqrt{4}$
$= 2.$

d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$
$= \sqrt{\dfrac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{27}^{\,9}}}$
$= \sqrt{\dfrac{5}{9}}$
$= \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$
$= \dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

e) Simplificando:
$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{10}.$
$\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = 3\sqrt{10}.$

Efectuando:
$\sqrt{40} + \sqrt{90} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10}$
$= 5\sqrt{10}.$

f) Simplificando:
$\sqrt{80} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$
$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}.$

Efectuando:
$\sqrt{80} + \sqrt{45} = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
$= 7\sqrt{5}.$

g) Simplificando:
$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}.$
$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}.$

Efectuando:
$\sqrt{28} - \sqrt{63} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$
$= -\sqrt{7}.$

h) Simplificando:
$\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}.$

Efectuando:
$\sqrt{32} - \sqrt{8} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
$= 2\sqrt{2}.$

1.2 Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Solución

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ Aplicando la propiedad distributiva,

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$ se puede hacer la descomposición prima de una sola vez,

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$.

Por lo tanto, $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$.

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$ Efectuando el producto,

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$ realizando la descomposición prima,

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}$.

Por lo tanto, $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}$.

Conclusión

En las operaciones combinadas con radicales se realizan los siguientes pasos:

1. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
2. Se simplifican las raíces cuadradas.
3. Se efectúan las sumas y restas de raíces semejantes.

Recuerda la propiedad distributiva y los productos notables:

$a(b+c) = ab+ac$

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$ b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})$ c) $\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$ e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$ h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$ i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

Indicador de logro

1.2 Efectúa operaciones combinadas con raíces cuadradas.

Secuencia

En la clase anterior se trabajaron las operaciones con raíces separadamente; en esta clase se desarrollan las operaciones combinadas. Siempre se debe recalcar la simplificación de los resultados.

Propósito

En la Solución se sugiere a los estudiantes realizar el paso de la descomposición prima desde la multiplicación para no efectuar el producto. En los Problemas puede sugerirse a los estudiantes el uso del paréntesis para la multiplicación.

Solución de problemas:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5}) = \sqrt{2}\times\sqrt{14}+\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{2\times 14}+\sqrt{2\times 5} = \sqrt{2^2\times 7}+\sqrt{10} = 2\sqrt{7}+\sqrt{10}$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8}) = \sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{8} = \sqrt{6\times 3}-\sqrt{6\times 8} = \sqrt{2\times 3^2}-\sqrt{2^2\times 2^2\times 3} = 3\times\sqrt{2}-2\times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15}) &= \sqrt{5}\times 4\sqrt{10}+\sqrt{5}\times 7\sqrt{15}\\ &= 4\sqrt{5\times 10}+7\sqrt{5\times 15}\\ &= 4\sqrt{2\times 5^2}+7\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 4\times 5\times\sqrt{2}+7\times 5\times\sqrt{3}\\ &= 20\sqrt{2}+35\sqrt{3}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18}) &= 2^2-(\sqrt{18})^2\\ &= 4-18\\ &= -14\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{2\times 3}+3\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{8})^2-2(\sqrt{8})(\sqrt{6})+(\sqrt{6})^2\\ &= 14-2\sqrt{8\times 6}\\ &= 14-2\sqrt{2^2\times 2^2\times 3}\\ &= 14-2\times 2\times 2\sqrt{3}\\ &= 14-8\sqrt{3}\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24}) &= \sqrt{5}\times\sqrt{10}+\sqrt{5}\times\sqrt{24}+\sqrt{12}\times\sqrt{10}+\sqrt{12}\times\sqrt{24}\\ &= \sqrt{5\times 10}+\sqrt{5\times 24}+\sqrt{12\times 10}+\sqrt{12\times 24}\\ &= \sqrt{2\times 5^2}+\sqrt{5\times 2^2\times 2\times 3}+\sqrt{2^2\times 3\times 2\times 5}+\sqrt{2^2\times 2^2\times 2\times 3^2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+2\times 2\times 3\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+12\sqrt{2}\\ &= 17\sqrt{2}+4\sqrt{30}\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15}) &= \sqrt{7}\times\sqrt{21}-\sqrt{7}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{21}+\sqrt{5}\times\sqrt{15}\\ &= \sqrt{7\times 21}-\sqrt{7\times 15}-\sqrt{5\times 21}+\sqrt{5\times 15}\\ &= \sqrt{3\times 7^2}-\sqrt{105}-\sqrt{105}+\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 7\sqrt{3}-2\sqrt{105}+5\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{3}-2\sqrt{105}\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned}(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9) &= \sqrt{12}\times\sqrt{6}+\sqrt{12}\times 9-4\times\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{12\times 6}+9\sqrt{12}-4\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{2^2\times 2\times 3^2}+9\sqrt{2^2\times 3}-4\sqrt{6}-36\\ &= 6\sqrt{2}+18\sqrt{3}-4\sqrt{6}-36\end{aligned}$$

1.3 Racionalización con denominador $\sqrt{a}$

Problema inicial

Racionaliza el denominador y simplifica si es posible:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{20}}$

Solución

a) $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{6}$, observa que $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$,

Por lo tanto, $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Simplificando la raíz cuadrada,

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$

$= 2\sqrt{5}$

sustituyendo y racionalizando,

$\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1 \times \sqrt{5}}{5}$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Por lo tanto, $\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Conclusión

Para racionalizar el denominador de $\frac{b}{\sqrt{a}}$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se multiplica por: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se simplifica el resultado cuando sea posible: $\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$.

Racionalizar una fracción es encontrar una fracción equivalente con denominador entero.

Problemas

1. Racionaliza el denominador y simplifica siempre que sea posible.

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{18}}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$ h) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

Revisa si se simplifica antes de racionalizar.

2. Racionaliza el denominador y determina cuáles son iguales.

a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

Indicador de logro

1.3 Racionaliza fracciones con denominador $\sqrt{a}$.

Secuencia

Ahora que ya se han utilizado las operaciones con raíces cuadradas se aborda la racionalización de fracciones con denominador $\sqrt{a}$, se sugiere simplificar antes para evitar cálculos grandes.

Posibles dificultades

En algunos problemas la división permite la simplificación por lo que es bueno mencionarla; sin embargo, puede dar lugar a confusión, en tal caso es mejor simplificar después de racionalizar.

Solución de problemas:

1a) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

1b) $\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

1c) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

1d) Simplificando:

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$\frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

1e) Simplificando:

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$\frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

1f) Simplificando:

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$.

Racionalizando:

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{6 \times 3}}{6} = \frac{\sqrt{2 \times 3^2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En este caso, también puede efectuar primero la división y luego racionalizar:

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{3 \times 10}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

1h) Simplificando:

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{2}}{6 \times 2} = \frac{\sqrt{15 \times 2}}{12} = \frac{\sqrt{30}}{12}$.

2a) $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2b) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

2d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35} \times \sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3 \times 5 \times 7^2}}{21} = \frac{7\sqrt{15}}{21} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

2e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3^2 \times 3^2 \times 7}}{21} = \frac{3 \times 3\sqrt{7}}{21} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

2g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{2 \times 5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{7 \times 3} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Son iguales los siguientes pares:

a) y g)
b) y e)
f) y h)

1.4 Racionalización con denominador binomio

Problema inicial

¿De qué manera podrías racionalizar el denominador?

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución

Recordando el producto notable "Suma por diferencia de binomios": $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

Se puede efectuar este producto para una suma por diferencia de dos raíces cuadradas:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

El producto de una suma de raíces cuadradas, de números racionales, por su diferencia es un número racional.

Ahora se aplicará esto a los ejercicios propuestos.

a) $$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$ multiplicando y dividiendo por una resta de términos

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$
$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$.

b) $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$ multiplicando y dividiendo por una suma de términos

$$=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Definición

A la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se le denomina la **conjugada** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. La **conjugada** de una expresión de dos términos se obtiene cambiando el signo del segundo término. Dos expresiones son **conjugadas** si una es la **conjugada** de la otra.

Para **racionalizar** una fracción cuyo denominador sea suma o diferencia con raíces cuadradas, se multiplica y divide por la **conjugada** del denominador.

Ejemplo

Racionaliza el denominador $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$$ la conjugada de $\sqrt{7}-2$ es $\sqrt{7}+2$,

$$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$ efectuando el producto notable, $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-(2)^2=7-4=3$,

$$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times 2}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}$.

Problemas

Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\dfrac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

Indicador de logro

1.4 Racionaliza fracciones con denominador $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ o $a \pm \sqrt{b}$.

Secuencia

Con la base de las operaciones combinadas se estudia ahora la racionalización de fracciones con denominador binomio.

Propósito

En el Ejemplo se indica a los estudiantes que al efectuar el producto notable (suma por diferencia) escriban la diferencia de los cuadrados ya calculados, omitiendo el proceso.

Solución de problemas:

a) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{12}-\sqrt{6})}{(\sqrt{12}+\sqrt{6})(\sqrt{12}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{12-6} = \frac{\sqrt{3\times12}-\sqrt{3\times6}}{6} = \frac{\sqrt{2^2\times3^2}-\sqrt{2\times3^2}}{6} = \frac{6-3\sqrt{2}}{6} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6}\times(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})} = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{11}+\sqrt{6}\times\sqrt{10})}{11-10} = \frac{\sqrt{6\times11}+\sqrt{6\times10}}{1} = \sqrt{66}+\sqrt{2^2\times3\times5} = \sqrt{66}+2\sqrt{15}$

e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})(\sqrt{8}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{8}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{8-6} = \frac{\sqrt{3\times8}-\sqrt{3\times6}+\sqrt{2\times8}-\sqrt{2\times6}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2^2\times2\times3}-\sqrt{2\times3^2}+\sqrt{2^2\times2^2}-\sqrt{2^2\times3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{15})^2+2\sqrt{15}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{15-5} = \frac{15+2\sqrt{15\times5}+5}{10} = \frac{20+2\sqrt{3\times5^2}}{10} = \frac{20+2\times5\sqrt{3}}{10} = 2+\sqrt{3}$

g) $\frac{4}{\sqrt{10}+3} = \frac{4\times(\sqrt{10}-3)}{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)} = \frac{4\sqrt{10}-12}{10-9} = \frac{4\sqrt{10}-12}{1} = 4\sqrt{10}-12$

h) $\frac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{14}+2)(1+\sqrt{7})}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{14}\times1+\sqrt{14}\times\sqrt{7}+2\times1+2\times\sqrt{7}}{1-7} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{14\times7}+2+2\sqrt{7}}{-6} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{2\times7^2}+2+2\sqrt{7}}{-6}$

$= -\frac{\sqrt{14}+7\sqrt{2}+2+2\sqrt{7}}{6}$

1.5 Los números neperiano y áureo

Problema inicial

El número neperiano e

Su valor es 2.718281828459045... y puede aproximarse mediante la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donde n es un número natural muy grande.

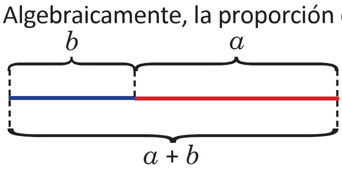
A partir de lo anterior realiza lo siguiente:

1. Observa que el valor numérico de la expresión anterior aumenta, si aumenta el valor de n.
2. Encuentra el valor numérico de la expresión anterior con los valores n = 1000, n = 10 000, n = 100 000.

El número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es la razón de las longitudes de dos segmentos distintos a y b a través de la relación: La suma de las longitudes es al segmento mayor, como el segmento mayor es al segmento menor.

Algebraicamente, la proporción dada se escribe así:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

A partir de la proporción calcula ϕ.

Solución

1. Se evalúan los valores con una calculadora.

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

Al aumentar el valor de n aumenta el valor de la expresión.

2. Se elabora una tabla con los valores dados.

n	1000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

Al tomar valores "muy grandes" de n, se aproxima al valor de e dado al principio.

$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b} = \frac{\phi}{1}$, luego $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$

$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, sustituyendo en la proporción,

$\phi^2 = 1 + \phi$, multiplicando por ϕ,

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, transponiendo los términos del miembro izquierdo.

Se aplica la fórmula general de la ecuación cuadrática para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ϕ es positivo, pues es la razón de longitudes.

Por lo tanto, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusión

El número e es irracional, por lo que su valor exacto solo es aproximable.

Leonard Euler, en Introductio in Analysin infinitorum de 1748, dio dos expresiones para aproximar el valor de e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ y } e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

J.L. Coolidge. (1950). *The number e*.

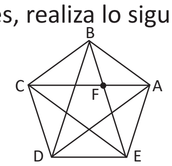
El número ϕ es irracional pues no puede escribirse como el cociente de dos números enteros.

El número áureo es una constante que aparece con frecuencia en diversos campos de la naturaleza: crecimiento de las hojas, esqueletos de los mamíferos, etc. Además, tiene presencia en el arte y la música, pues tal proporción, se cree, tiene relación con la percepción de la armonía y belleza.

Casans, A. (2001). *Aspectos estéticos de la divina proporción*.

Problemas

1. Utilizando la expresión $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, con n un número natural y $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, aproxima el valor de e hasta n = 10.
2. En el pentágono regular ABCDE de lado 1 se han trazado todas las diagonales, realiza lo siguiente:
   a) Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta BFA$.
   b) Demuestra que ΔBCF es isósceles.
   c) Demuestra que $FA = a - 1$, donde a es la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.
   d) Demuestra que $a = \frac{1}{a-1}$.
   e) Encuentra el valor de a.



Indicador de logro

1.5 Realiza cálculos de los números neperiano y áureo.

Secuencia

Se presentan dos números reales que poseen como peculiaridad las siguientes características: el número neperiano se obtiene como aproximación de ciertas expresiones algebraicas y la razón áurea como una proporción geométrica.

Posibles dificultades

Respecto al problema 2, los estudiantes pueden haber olvidado varias nociones geométricas, por lo que se sugiere recordar las propiedades del pentágono regular como: todos los lados y ángulos tienen igual medida.

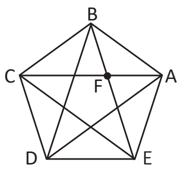
Solución de problemas:

1.

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}$	2	2.5	$2.\overline{6}$	$2.708\overline{3}$	$2.71\overline{6}$
n	6	7	8	9	10
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}$	$2.7180\overline{5}$	$2.71\overline{825396}$	2.7182787698...	2.7182815255...	2.7182818011...

2a) En el triángulo ABC.
∢ABC = 180° × 3 ÷ 5 =108°
AB = BC ⇒ ΔABC es isósceles ⇒ ∢BCA = ∢CAB.

Sea θ = ∢BCA = ∢CAB
⇒ 2θ + 108° = 180° ⇒ θ = 36°.
Así ∢BCA = ∢CAB = 36°.



Análogamente se prueba en ΔABE que
∢BEA = ∢ABE = 36°.
Por lo que en el triángulo BFA
∢ABE = ∢CAB = ∢FAB = 36°.

Por lo tanto, por criterio AA se tiene que
ΔABC ~ ΔBFA.

2b) En el triángulo BCF,
∢FBC = ∢ABC – ∢ABF
⇒ ∢FBC = 108° – 36° = 72°

Luego, ∢CFB es exterior al ΔABF
⇒ ∢CFB = ∢FAB + ∢ABF
⇒ ∢CFB = 36° + 36° = 72 °

⇒ ∢FBC = ∢CFB = 72°.

Por lo tanto, ΔBCF es isósceles.

2c) Se tiene que
CF + FA = AC ⇒ FA = AC – CF ⇒ FA = a – CF
ΔBCF es isósceles con ∢FBC = ∢CFB = 72°,
entonces CF = CB = 1.
Por lo tanto, FA = a – 1.

2d) Del resultado en 2a), ΔABC ~ ΔBFA, entonces
$$\frac{AC}{BA}=\frac{BA}{FA}\Rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\Rightarrow a=\frac{1}{a-1}.$$

2e) $a=\frac{1}{a-1}\Rightarrow a(a-1)=1\Rightarrow a^2-a-1=0$
Aplicando la fórmula cuadrática: $a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Como $a>0$, $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo).

Lección 1

1.6 Definición de los números reales: la recta numérica

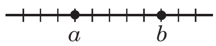
Problema inicial

1. Dibuja la recta numérica y ubica los siguientes números:

   a) 3 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{9}{5}$ e) -2.5 f) 1.4 g) $\sqrt{5}$ h) ϕ i) -1 j) π

2. Clasifica cada uno de los números anteriores como racional e irracional.

En la recta numérica b está a la derecha de a si y solo si $a < b$.



Solución

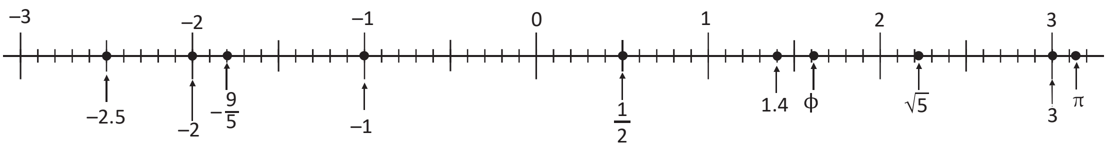
1. Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:

   a) $3 = 3$ b) $-2 = -2$ c) $\frac{1}{2} = 0.5$ d) $-\frac{9}{5} = -1.8$ e) $-2.5 = -2.5$

   f) 1.4 g) $\sqrt{5} = 2.236...$ h) $\phi = 1.618...$ i) -1 j) $\pi = 3.141...$

   Antes de colocar los números en la recta numérica, se ordenan de menor a mayor.

   $-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



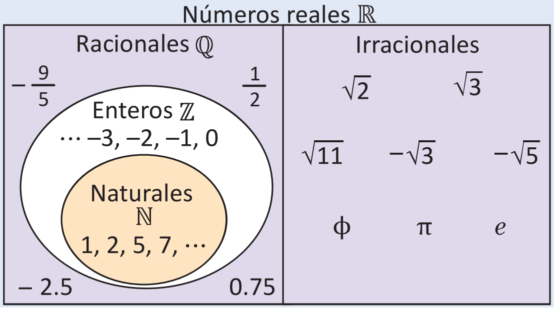
a) 3 es racional
b) -2 es racional
c) $\frac{1}{2}$ es racional
d) $-\frac{9}{5}$ es racional
e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ es racional
f) $1.4 = \frac{7}{5}$ es racional
g) $\sqrt{5}$ es irracional
h) ϕ es irracional
i) -1 es racional
j) π es irracional

Definición

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los números irracionales.

El símbolo utilizado para representar el conjunto de los números reales es $\mathbb{R}$.

La recta numérica es una representación del conjunto de los números reales: a cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa.



Problemas

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica.

   a) $\frac{2}{5}$ b) 1 c) -3 d) $\sqrt{3}$

   e) $-\frac{8}{5}$ f) $-0.\overline{5}$ g) 2.9 h) 0.15

   i) $-\frac{11}{10}$ j) e k) $\sqrt{2}$ l) $\frac{7}{3}$

2. Determina a cuáles de los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ pertenece cada número del problema 1 o si es un número irracional.

Indicador de logro

1.6 Ubica los números reales en la recta numérica.

Secuencia

En esta clase se explora la relación de orden de los números reales a través de la ubicación de puntos en la recta numérica. Posteriormente, el estudiante utilizará estos conocimientos para elaborar gráficas y establecer soluciones de desigualdades.

Posibles dificultades

Es posible que el orden no esté claro, por lo que es necesario que los estudiantes dibujen la recta numérica con marcas entre las unidades para diferenciar al menos los valores de las décimas entre los números.

Solución de problemas:

1a) $\frac{2}{5} = 0.4$ **1b)** 1 **1c)** -3 **1d)** $\sqrt{3} = 1.73...$

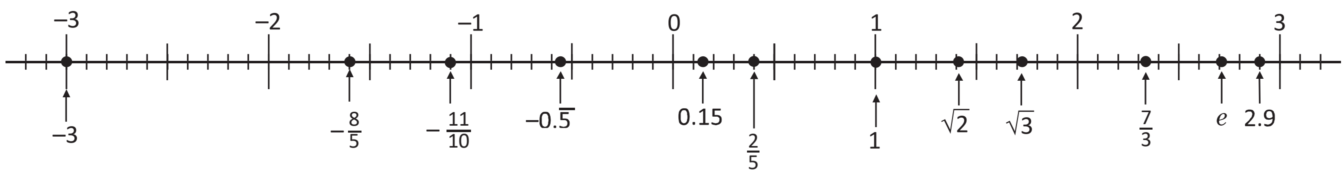
1e) $-\frac{8}{5} = -1.6$ **1f)** $-0.\overline{5} = -0.555...$ **1g)** 2.9 **1h)** 0.15

1i) $-\frac{11}{10} = -1.1$ **1j)** $e = 2.71....$ **1k)** $\sqrt{2} = 1.41....$ **1l)** $\frac{7}{3} = 2.333....$

Se ordenan de menor a mayor.

$-3 < -\frac{8}{5} < -\frac{11}{10} < -0.5 < 0.15 < \frac{2}{5} < 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{3} < e < 2.9$

Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:



2a) $\frac{2}{5}$ es racional. **2b)** 1 es natural. **2c)** -3 es entero.

2d) $\sqrt{3} = 1.73...$ es irracional. **2e)** $-\frac{8}{5}$ es racional. **2f)** $-0.\overline{5} = -\frac{5}{9}$ es racional.

2g) $2.9 = \frac{29}{10}$ es racional. **2h)** $0.15 = \frac{3}{20}$ es racional. **2i)** $-\frac{11}{10}$ es racional.

2j) $e = 2.71...$ es irracional. **2k)** $\sqrt{2} = 1.41...$ es irracional. **2l)** $\frac{7}{3}$ es racional.

En el problema 2, pueden haber distintas soluciones. Por ejemplo, en 2b), 1 es natural, entero y racional.

Lección 1

1.7 Definición de los números reales: números decimales

Problema inicial

Escribe como un número decimal los siguientes números reales:

a) 3 b) –2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\sqrt{7}$ g) e h) π

Solución

a) 3.000..., es un número decimal, su parte entera es 3 y su parte decimal es 0.000...

b) –2.000..., es un número decimal, su parte entera es –2 y su parte decimal es 0.000...

c) $\frac{3}{2}$, se divide $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$.

d) $\frac{5}{3}$, se divide $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$.

e) $\frac{1}{6}$, se divide $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$.

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) $e = 2.7182818...$

h) $\pi = 3.141592...$

Definición

Los números decimales se utilizan para representar partes de la unidad, por lo que un número decimal se escribe de la forma $a.bcdefg\ldots$ donde a es un número entero y los números $b, c, d, e, f, g\ldots$ pueden ser los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Al número a se le denomina la **parte entera** y al número $0.bcdefg\ldots$ se le denomina **parte decimal**.

Así, el conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$ está formado por todos los números decimales:

Números Reales $\mathbb{R}$

Racionales $\mathbb{Q}$
Números decimales periódicos

Enteros $\mathbb{Z}$
Números decimales con parte decimal 0.0000...

Irracionales
Números decimales no periódicos

Problemas

Clasifica cada uno de los siguientes números decimales como racional o irracional.

a) 0.125 b) 0.101001000100001... c) 0

d) 5.75757575... e) –7.321 f) 1.221212121212121...

g) –10 h) 3.333333... i) 3.141592653589...

j) 4.12666666 k) 0.123456789101112... l) –0.61803398874989...

Indicador de logro

1.7 Clasifica los números decimales en racionales e irracionales.

Secuencia

En noveno grado se estudió la definición de los números irracionales como aquellos números reales que no pueden representarse como el cociente de dos enteros. En esta clase se establecen las características de los números reales por su representación decimal.

Posibles dificultades

Es de observar que el concepto implícito de decimal periódico utilizado en la clase, incluye a los números enteros y los decimales con parte decimal finita, por la posibilidad de adicionar ceros en la parte decimal; en ese sentido, cada número real por su representación decimal es periódico o no periódico.

Solución de problemas:

a) 0.125 es racional pues es periódico.

b) 0.101001000100001... es irracional pues es no periódico.

c) 0 es racional pues es periódico.

d) 5.75757575... es racional pues es periódico.

e) –7.321 es racional pues es periódico.

f) 1.2212121212121... es racional pues es periódico.

g) –10 es racional pues es periódico.

h) 3.333333... es racional pues es periódico.

i) 3.1415926535... es irracional pues es no periódico.

j) 4.12666666 es racional pues es periódico.

k) 0.123456789101112... es irracional pues es no periódico.

l) –0.61803398874... es irracional pues es no periódico.

1.8 El valor absoluto de un número real

Problema inicial

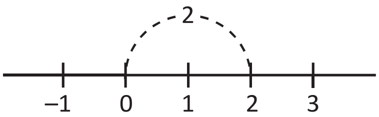
Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) 2 b) -3 c) $\sqrt{7}$ d) $-\frac{3}{4}$

Solución

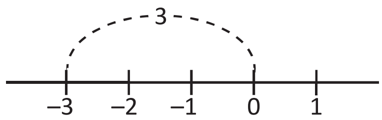
El valor absoluto de un número real es la distancia de ese número a cero en la recta numérica.

a) 2



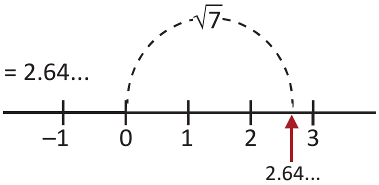
$|2| = 2$

b) -3



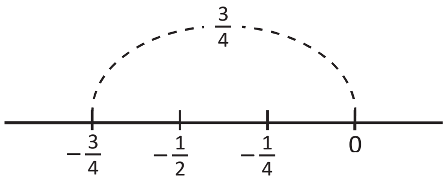
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

El valor absoluto de un número positivo es el mismo número:

$|2| = 2$ $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

El valor absoluto de un número negativo es igual a su número opuesto:

$|-3| = 3$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Observa que:

$-(-3) = 3$ y $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Definición

Se observa que:

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número, es decir, si $a > 0$ entonces $|a| = a$.
- El valor absoluto de cero es cero: $|0| = 0$.
- El valor absoluto de un número negativo es su número opuesto: si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$.
- Cada número real determina un único valor absoluto, es decir, un número tiene un único valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a \ , & \text{si } a \geq 0 \\ -a \ , & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recuerda que:

$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$ y $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Por lo que, para todo número real a se cumple que:

$\sqrt{a^2} = |a|$

Problemas

1. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{1}{70}$ c) -0.11111 d) -153

e) e f) $-\phi$ g) 0 h) $-\frac{1}{3}$

2. Sean a y b dos números positivos, demuestra que: si $a \geq b$ entonces $|a - b| = a - b$.

Indicador de logro

1.8 Calcula el valor absoluto de números reales.

Secuencia

En séptimo grado, los estudiantes utilizaron el valor absoluto con la definición de la distancia al origen, ahora se define como una regla de asignación utilizando la noción de correspondencia.

Propósito

En la Solución se hace la observación de que obtener el valor absoluto de un número negativo tiene el mismo resultado que obtener su opuesto, con el objetivo de inducir su definición como función.

Solución de problemas:

1a) $|\sqrt{6}| = \sqrt{6}$

1b) $\left|\frac{1}{70}\right| = \frac{1}{70}$

1c) $|-0.11111| = -(-0.11111) = 0.11111$

1d) $|-153| = -(-153) = 153$

1e) $|e| = e$

1f) $|-\phi| = -(-\phi) = \phi$

1g) $|0| = 0$

1h) $\left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2. $a \geq b > 0$

Por casos:

Caso 1: si $a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow |a - b| = |0| = 0 = a - b$.

Caso 2: si $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$.

1.9 Definición de intervalo

Problema inicial

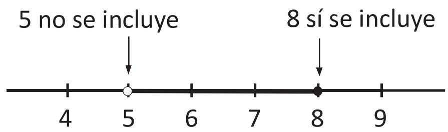
Escribe cómo se lee y representa en la recta numérica las siguientes desigualdades:

a) $5 < x \leq 8$ b) $-1 \leq x \leq 4$ c) $0 < x < 2$ d) $-3 \leq x < -1$

e) $x > 8$ f) $x < -4$ g) $x \leq 5$ h) $x \geq -2$

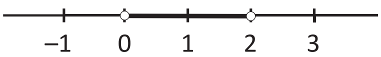
Solución

a) $5 < x \leq 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 5 y menor o igual que 8.
Su representación en la recta es:

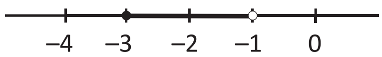


b) $-1 \leq x \leq 4$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -1 y menor o igual que 4.
Esta desigualdad se representa así:

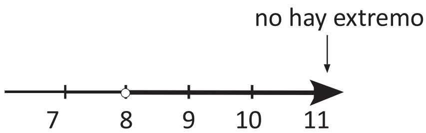
c) $0 < x < 2$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 0 y menor que 2, por lo que su representación es:



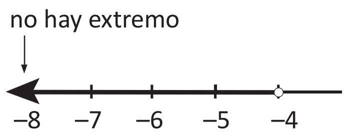
d) $-3 \leq x < -1$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -3 y menor que -1, por lo que su representación es:



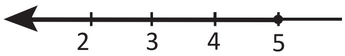
e) $x > 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 8.
Se representa de la siguiente manera:



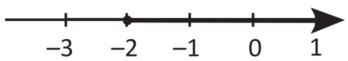
f) $x < -4$, esta desigualdad se lee:
x menor que -4.
Se representa de la siguiente manera:



g) $x \leq 5$, esta desigualdad se lee:
x menor o igual que 5.



h) $x \geq -2$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -2.



Definición

Un **intervalo** es una porción de la recta numérica representado por una semirrecta o un segmento de recta. Por ejemplo, los subconjuntos representados en el Problema inicial son intervalos: a), b), c) y d) son segmentos, y e), f), g) y h) son semirrectas.

Retomando el Problema inicial, la notación utilizada para representar un intervalo es:

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow \left]5, 8\right]$ b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$ c) $0 < x < 2 \Rightarrow \left]0, 2\right[$ d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow \left[-3, -1\right[$

A los números que aparecen en el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.
Si el extremo del intervalo no se incluye, el corchete se escribe al revés : "]" al principio y "[" al final.

e) $x > 8 \Rightarrow]8, \infty[$ f) $x < -4 \Rightarrow]-\infty, -4[$ g) $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$ h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

El símbolo "∞" representa el infinito, mientras que "–∞" representa menos infinito. Estos símbolos en un intervalo indican que no existe otro número que sea extremo del intervalo.

El corchete correspondiente a –∞ o ∞ se coloca al revés, por ejemplo: "]–∞, 8]" y "]1, ∞[".

La siguiente tabla resume la notación de los tipos de intervalos, su representación en la recta numérica y la notación como conjunto utilizando desigualdades:

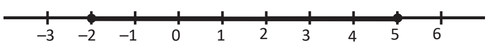
Tipo de intervalo	Notación de intervalo	Representación en la recta numérica	Notación de conjunto
Cerrado	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Semiabierto por la derecha	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Semiabierto por la izquierda	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Abierto	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Infinitos	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

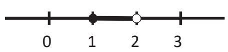
En la notación de conjunto, por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ se lee: los elementos x que pertenecen a los números reales tal que x es mayor o igual que a y menor o igual que b.

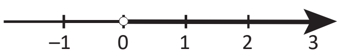
Problemas

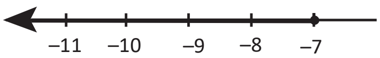
Representa los siguientes intervalos en las otras dos notaciones:

a) $]-3, 0]$ b) $]-\infty, -5[$ c) $[5, \infty[$ d) $]2, 6[$

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Indicador de logro

1.9 Representa intervalos en la recta numérica o en la notación de conjunto.

Secuencia

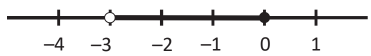
El estudiante conoció en Tercer Ciclo el conjunto de los números reales, así como algunos de sus subconjuntos. En esta clase conocerá otro tipo de subconjunto de los números reales: los intervalos, que son importantes para trabajar con desigualdades en la Unidad 3 y con funciones reales en la Unidad 4.

Propósito

Los estudiantes pueden representar números reales por medio de puntos en la recta numérica, por lo que en el Problema inicial se pretende que el estudiante deduzca la representación del segmento de recta o semirrecta para una desigualdad. Sin embargo, el primer ítem puede utilizarse como ejemplo.

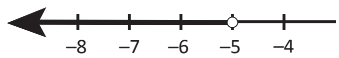
Intervalo | Recta numérica | Notación de conjunto

a) $]-3, 0]$



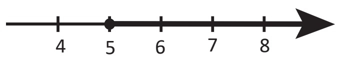
$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$

b) $]-\infty, -5[$



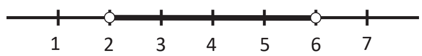
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

c) $[5, \infty[$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

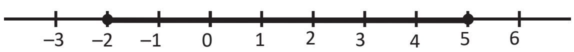
d) $]2, 6[$



$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

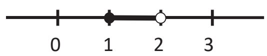
Recta numérica | Intervalo | Notación de conjunto

e)



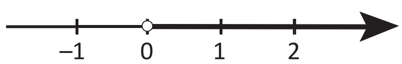
$[-2, 5]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

f)



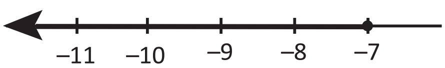
$[1, 2[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

g)



$]0, \infty[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

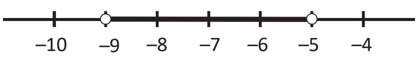
h)



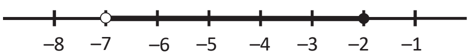
$]-\infty, -7]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\}$

Notación de conjunto | Intervalo | Recta numérica

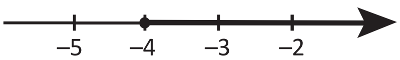
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ $]-9, -5[$



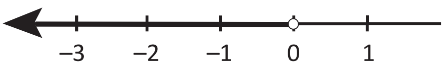
j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$ $]-7, -2]$



k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ $[-4, \infty[$



l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ $]-\infty, 0[$



Lección 1

1.10 Practica lo aprendido

1. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$ d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. Sea n un número natural. Ubica en la recta numérica los números $\sqrt{n}$ tales que $2 < \sqrt{n} < 3$.

3. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ g) $\sqrt{10}-3$ h) $2\sqrt{7}-6$

Utiliza el resultado del problema 2 de la clase 1.8 y también que si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

4. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Al efectuar la división $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$ se obtiene un número entero.

b) Al efectuar la división $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ se obtiene un número racional.

c) El número áureo ϕ es menor que el neperiano e.

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

Utiliza la definición de raíz cuadrada.

e) Al efectuar la operación: $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$ se obtiene un número entero.

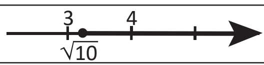
f) El valor absoluto de un número real nunca es un número negativo.

g) Sean a y b números reales, si $0 < b < a$ entonces $|b-a| = a-b$.

5. En los siguientes literales, ¿qué valores puede tomar la variable x para que la igualdad se cumpla?

a) $|x| = 1$ b) $|x| = 6$ c) $|x| = 0$ d) $|x+1| = 3$

6. Completa el siguiente cuadro sobre las representaciones de intervalos.

Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$		
		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$	
		

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a los números reales.

1a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **1b)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **1c)** $\frac{4-\sqrt{7}}{9}$

1d) $4+2\sqrt{3}$ **1e)** $-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$ **1f)** $\frac{13+5\sqrt{6}}{19}$

1g) Efectuando el cambio de variable $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{y+\sqrt{5}}=\frac{y-\sqrt{5}}{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}=\frac{y-\sqrt{5}}{y^2-5}$$

$$y^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{2\times3}+3=5+2\sqrt{6}.$$

Sustituyendo $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $y^2=5+2\sqrt{6}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{y-\sqrt{5}}{y^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{2(6)}$$

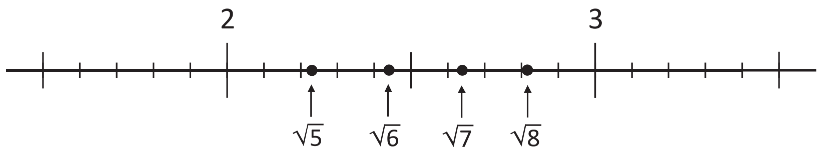
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6})2+\sqrt{3}(\sqrt{6})-\sqrt{5}(\sqrt{6})}{12}=\frac{\sqrt{2^2\times3}+\sqrt{2\times3^2}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

1h) $\frac{2+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{23}$

2. Para los números naturales la condición $2<\sqrt{n}<3$ equivale a la condición $4<n<9$.
Así los números naturales buscados son 5, 6, 7 y 8.

También se puede resolver a prueba y error.

Ahora utilizando su valor decimal para ubicarlos en la recta numérica.
$\sqrt{5}=2.23...$ $\sqrt{6}=2.44...$ $\sqrt{7}=2.64...$ $\sqrt{8}=2.82...$



3a) $\frac{5}{6}$ **3b)** $\frac{1}{12}$ **3c)** $\frac{1}{3}$

3d) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}|$
La suma de dos números positivos es un número positivo, es decir $\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$ por lo que $|\sqrt{2}+\sqrt{3}|=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

3e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.
Puesto que $5<7\Rightarrow\sqrt{5}<\sqrt{7}$.
Aplicando el resultado del problema 2, clase 1.8 se tiene que $|\sqrt{7}-\sqrt{5}|=\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

3f) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.
Puesto que $2<3\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{3}$
$\Rightarrow\ \sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+(-\sqrt{3})$ es un número negativo
$\Rightarrow\ |\sqrt{2}-\sqrt{3}|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

3g) $\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}$
$9<10\Rightarrow\sqrt{9}<\sqrt{10}\Rightarrow3<\sqrt{10}$.
Aplicando el resultado del problema 2, clase 1.8 se tiene que $|\sqrt{10}-3|=\sqrt{10}-3$.

3h) $2\sqrt{7}-6=\sqrt{28}-\sqrt{36}$.
Puesto que $28<36\Rightarrow\sqrt{28}<\sqrt{36}$
$\Rightarrow\ \sqrt{28}-\sqrt{36}=\sqrt{28}+(-\sqrt{36})$ es negativo
$\Rightarrow\ |2\sqrt{7}-6|=-(2\sqrt{7}-6)=6-2\sqrt{7}$.

4a) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$, es entero.

4b) $\sqrt{2}\div\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, es racional.

4c) Utilizando sus valores decimales: $\phi = 1.61803...$ y $e = 2.71828...$ por lo que $\phi < e$.

4d) Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ entonces $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5$.
Efectuando
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$
$$= 5 + 2\sqrt{6} \neq 5.$$
Por lo tanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

> En la solución se ha utilizado la reducción al absurdo asumiendo que la suma de ambos números es la raíz cuadrada positiva de 5.

4e) $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \phi^2 - \frac{1}{\phi} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4f) Efectuando la resolución por casos
Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$.
Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$.
Si $a = 0 \Rightarrow |0| = 0$.
Por lo tanto, el valor absoluto de un número real nunca es negativo.

4g) $b - a$
El signo de $b + (-a)$, será el signo del mayor valor absoluto de los números $(-a)$ y b.
$|-a| = a$, $|b| = b$ y $0 < b < a$.

Así, $b - a < 0$, por lo tanto:
$|b - a| = -(b - a) = -b - (-a) = -b + a = a - b$.

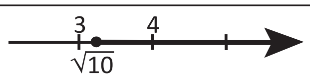
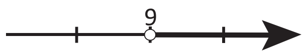
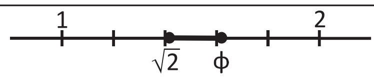
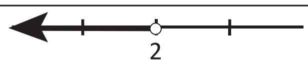
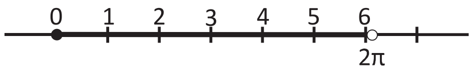
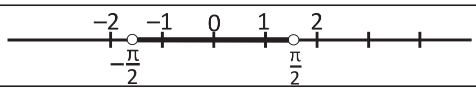
5a) $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ o $x = -1$.
Por lo tanto, x puede tomar los valores 1 o –1.

5b) $|x| = 6 \Rightarrow x = 6$ o $x = -6$.
Por lo tanto, x puede tomar los valores 6 o –6.

5c) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
Por lo tanto, x solo puede tomar el valor 0.

5d) $|x + 1| = 3 \Rightarrow x + 1 = 3$ o $x + 1 = -3$
Si $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.
Si $x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$.
Por lo tanto, x puede tomar los valores 2 o –4.

6.

Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 7\}$	
$[\sqrt{10}, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{10}\}$	
$]9, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \phi\}$	
$]-\infty, 2[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$	
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$	
$]-\infty, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$