Unidad 2. Operaciones con polinomios y números complejos

Competencia de la unidad

Adquirir habilidades en la factorización y división de polinomios, identificando las condiciones necesarias para la aplicación de los mismos y utilizarlos en la verificación de teoremas en álgebra y la resolución de problemas de matemática.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 1: Multiplicación de polinomios (9°)
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Productos notables y factorización	1	1. Definición de monomio, polinomio y grado
	1	2. Productos de binomio por binomio, parte 1
	1	3. Productos de binomio por binomio, parte 2
	1	4. Productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$
	1	5. Cubo de un binomio, parte 1
	1	6. Cubo de un binomio, parte 2
	1	7. Combinaciones de productos notables
	1	8. Practica lo aprendido
	1	9. Factor común monomio y polinomio
	1	10. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$
	1	11. Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1
	1	12. Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2
	1	13. Método de la tijera, parte 1
	1	14. Método de la tijera, parte 2
	1	15. Combinaciones de métodos de factorización, parte 1
	1	16. Combinaciones de métodos de factorización, parte 2
	1	17. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la lección 1

Lección	Horas	Clases
2. División de polinomios	1	1. División de polinomio por monomio
	1	2. División de polinomio por polinomio
	1	3. División sintética, parte 1
	1	4. División sintética, parte 2
	1	5. Teorema del residuo
	1	6. Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1
	1	7. Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2
	1	8. Factorizaciones sucesivas
	1	9. Practica lo aprendido
3. Ecuación cuadrática y números complejos	1	1. Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización
	1	2. Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general
	1	3. Definición de número complejo
	1	4. Suma, resta y multiplicación de números complejos
	1	5. División de números complejos
	1	6. Raíces cuadradas de números negativos
	1	7. Discriminante de la ecuación cuadrática
	1	8. Factorización de un polinomio
	1	9. Raíces de un polinomio
	1	10. Practica lo aprendido
	1	11. Problemas de la unidad
	1	Prueba de las lecciones 2 y 3
	2	Prueba del primer periodo

37 horas clase + prueba de la lección 1 + prueba de las lecciones 2 y 3 + prueba del primer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Productos notables y factorización de polinomios
En esta lección se hace un repaso de los productos notables vistos en noveno grado: producto de la forma $(mx + a)(mx + b)$, el cuadrado de un binomio $(ax \pm by)^2$ y la suma por la diferencia de binomios $(ax + by)(ax - by)$. Luego de ello se deduce el desarrollo de los productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$ y del cubo de un binomio $(ax \pm by)^3$, y se trabajan combinaciones de productos notables. En la parte de factorización, primero se hace un repaso de los métodos vistos en noveno grado: factor común monomio, factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados; es importante mencionar que, en la clase sobre factor común, se agrega el factor común polinomio, método conocido también como factorización por agrupación de términos. Posteriormente, se introduce la factorización de trinomios usando el método de la tijera y se trabajan combinaciones de los métodos de factorización.

Lección 2: División de polinomios
En la primera clase de la lección se repasa la división de un polinomio por un número, estudiada en octavo grado; con el mismo enfoque se desarrolla la división de un polinomio por un monomio. Luego, se introduce la división de polinomios utilizando el algoritmo de la misma, conocida también como "división larga de polinomios". Después de ello se trabaja el caso particular de la división de polinomios por un binomio de la forma $x - a$ utilizando la división sintética, procedimiento que se utiliza para comprobar y enunciar los teoremas del residuo y del factor. Para finalizar la lección, se retoman los contenidos vistos a lo largo de la misma y los de la lección 1 para factorizar polinomios en una variable de hasta grado tres, cuyo coeficiente de la variable con potencia 3 es 1.

Lección 3: Ecuación cuadrática y números complejos
Las primeras clases son un repaso de la solución de ecuaciones cuadráticas usando factorización en la forma $(x + a)(x + b)$ y el método de la tijera, y la solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general. Después se definen los números complejos, sus operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y las raíces de números negativos. Todos estos contenidos son necesarios para que, más adelante, se trabaje la factorización de polinomios usando números complejos y definir qué son y cuántas raíces tiene un polinomio.

1.1 Definición de monomio, polinomio y grado

Definición

A la expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes enteros positivos, un número real llamado **coeficiente** y que solo involucra multiplicaciones se le llama **término**. La expresión formada por un término o por la suma de dos o más términos se conoce como **polinomio**, y al polinomio formado por un solo término se le llama **monomio**.

El término del polinomio que no posee variables se llama **término independiente**.

El **grado** es una característica relacionada con los exponentes de las variables, este se define de la siguiente forma:

1. El **grado de un término** es la suma de todos los exponentes de las variables. El grado del término independiente, es decir, aquel que no posee variable es igual a cero.
2. El **grado de un polinomio** puede dividirse en dos tipos:
   a) El **grado asociado a una variable** es el exponente mayor de la variable seleccionada.
   b) El **grado absoluto** es el mayor grado de los términos del polinomio.

Si en un polinomio aparece involucrada una sola variable entonces las definiciones a) y b) coinciden y el polinomio se llama **polinomio en una sola variable**.

Los términos de un polinomio pueden ordenarse de acuerdo al grado asociado a una variable o al grado de cada término. Ordenar de forma descendente es iniciar con el término de mayor grado hasta finalizar con el de menor grado, mientras que ordenar de forma ascendente es iniciar con el término de menor grado hasta finalizar con el de mayor grado.

Ejemplo 1

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Identifica las variables y los coeficientes del polinomio.
2. Identifica los términos del polinomio y calcula el grado de cada uno de ellos.
3. Calcula el grado asociado a cada una de las variables.
4. Calcula el grado absoluto del polinomio.

1. Las variables del polinomio son x y y; los coeficientes del polinomio son los siguientes:

   $11 \longrightarrow$ término independiente
   $3 \longrightarrow$ coeficiente de xy
   $-5 \longrightarrow$ coeficiente de x^3y^2
   $8 \longrightarrow$ coeficiente de x^2y

2. Los términos del polinomio son: 11, $3xy$, $-5x^3y^2$ y $8x^2y$. El grado de cada uno se calcula sumando los exponentes de las variables que aparecen en cada término, es decir:

   Grado de $11 \longrightarrow 0$, pues no aparece variable alguna.
   Grado de $3xy \longrightarrow 2$, pues las variables x y y tienen como exponente 1 y 1 respectivamente.

   El grado del término independiente siempre será igual a cero.

   Grado de $-5x^3y^2 \longrightarrow 5$, pues las variables x y y tienen como exponente 3 y 2 respectivamente.
   Grado de $8x^2y \longrightarrow 3$, pues x y y tienen exponentes 2 y 1 respectivamente.

3. El grado asociado a la variable x es 3, ya que es el mayor exponente de la misma. El grado asociado a y es 2, pues es el mayor exponente de la variable.

4. El grado absoluto del polinomio es el mayor grado de los términos del polinomio, del literal b) puede comprobarse que el término $-5x^3y^2$ es el que posee mayor grado. Por tanto, el grado absoluto es 5.

Ejemplo 2

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable x.
2. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable y.
3. Ordena el polinomio en forma ascendente y descendente con respecto a los términos.

1. En la forma ascendente se ordenan los términos empezando con el término de menor grado de la variable hasta llegar al término con mayor grado de la variable seleccionada; la forma descendente es lo contrario. Así, el polinomio ordenado con respecto a la variable x queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente $\longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente $\longrightarrow - 5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

2. La variable y en los términos $3xy$ y $8x^2y$ tiene el mismo grado, entonces para ordenarlos se toma en consideración el exponente de la variable x. Así, en la forma ascendente irá primero el término cuyo exponente de x sea menor, y en la forma descendente irá primero el término cuyo exponente de x sea mayor.

   El polinomio ordenado con respecto a la variable y, de forma ascendente y descendente queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente $\longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente $\longrightarrow - 5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = - 5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11$.

   Se observa que el término independiente 11, en la forma ascendente para cualquier variable siempre va primero, mientras que en la forma descendente para cualquier variable se coloca al final.

3. Para ordenar con respecto a los términos, en la forma ascendente se inicia con el término de menor grado, mientras que en la forma descendente se inicia con el término de mayor grado. Entonces, el polinomio ordenado en ambas formas queda de la siguiente manera:

   Forma ascendente $\longrightarrow \underbrace{11}_{\text{Grado 0}} + \underbrace{3xy}_{\text{Grado 2}} + \underbrace{8x^2y}_{\text{Grado 3}} - \underbrace{5x^3y^2}_{\text{Grado 5}}$.

   Forma descendente $\longrightarrow - 5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

> Generalmente, los términos de un polinomio se ordenan de forma descendente.

Problemas

1. En cada literal identifica las variables, los coeficientes y los términos del polinomio. Luego, calcula el grado de cada término, el grado asociado a cada variable y el grado absoluto del polinomio:
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $- 3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. Para cada uno de los polinomios del numeral 1 realiza lo siguiente:
   a) ordena los términos del polinomio con respecto a cada variable, tanto de forma ascendente como descendente;
   b) ordena el polinomio con respecto a sus términos.

3. Sin desarrollar los productos, calcula la suma de los coeficientes del siguiente polinomio: $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$.

> No olvides que el término independiente también es un coeficiente.

Indicador de logro

1.1 Identifica las variables y coeficientes de un polinomio, y calcula el grado con respecto a una variable o a sus términos.

Secuencia

En esta clase se presentan las definiciones de polinomio y monomio, enunciadas también en octavo grado. Se define también el grado de una expresión algebraica, dependiendo si se habla del grado de un término o de un polinomio. Obsérvese que la definición de polinomio no restringe el uso de letras como a, b, c, etc.

Propósito

Se colocan las definiciones primero para homogeneizar el vocabulario utilizado a lo largo de la unidad y, por ende, en todo el primer y segundo año de bachillerato.

Solución de problemas:

1a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
- Variables: x, y
- Coeficientes: 10, 5, –2 y –6
- Términos y grados: $10xy$ (grado 2), $5x^2y^2$ (grado 4), $-2xy^2$ (grado 3) y $-6x^3y^3$ (grado 6).
- Grado asociado a cada variable: x posee grado 3, y y posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 6

1b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
- Variables: a, b
- Coeficientes: –3, 4, –1 y 1
- Términos y grados: $-3a^2b^3$ (grado 5), $4a^3b$ (grado 4), $-ab^2$ (grado 3) y b (grado 1).
- Grado asociado a cada variable: a posee grado 3, y b posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 5

1c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
- Variables: m, n
- Coeficientes: 9, –12, 2, –5 y 1
- Términos y grados: $9m^2$ (grado 2), $-12m^2n^3$ (grado 5), $2mn$ (grado 2), $-5mn^2$ (grado 3) y 1 (grado 0).
- Grado asociado a cada variable: m posee grado 2, y n posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 5

1d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$
- Variables: x
- Coeficientes: 8, –10, 3 y 5
- Términos y grados: $8x^3$ (grado 3), –10 (grado 0), $3x$ (grado 1) y $5x^2$ (grado 2).
- Es un polinomio en una sola variable, el grado asociado coincide con el grado absoluto, el cual es 3.

2a) Sólo se colocarán los polinomios ordenados en la forma ascendente, pues en la forma descendente solo hay que invertir el orden en el que aparecen los términos:

Variable x: $10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$
Variable y: $10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$

Variable a: $b - ab^2 - 3a^2b^3 + 4a^3b$
Variable b: $b + 4a^3b - ab^2 - 3a^2b^3$

Variable m: $1 + 2mn - 5mn^2 + 9m^2 - 12m^2n^3$
Variable n: $1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3$

Variable x: $-10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$

2b) Similar a 2a), solo se ordenará cada polinomio en su forma ascendente, pues en la descendente bastaría con invertir el orden en que aparecen los términos:

$$10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$$
$$1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3$$
$$b - ab^2 + 4a^3b - 3a^2b^3$$
$$-10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$$

3. La suma de los coeficientes del polinomio puede obtenerse al sustituir $x = 1$:

$$(1 - 3)^2 + (1 + 2)^2 + 9(1) - 10 = 4 + 9 + 9 - 10 = 12$$

Por lo tanto, la suma de los coeficientes de $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$ es igual a 12.

1.2 Productos de binomio por binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 9)(x - 5)$ b) $(x + 3)^2$ c) $(x - 7)^2$ d) $(x + 4)(x - 4)$

Solución

a) El producto es de la forma $(x + a)(x + b)$ cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 9)(x - 5) &= x^2 + (9 - 5)x + (9)(-5)\\ &= x^2 + 4x - 45\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 9)(x - 5) = x^2 + 4x - 45$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Luego, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

c) También es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x - 7)^2 &= x^2 - 2(7)x + 7^2\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

Luego, $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$.

d) Es un producto de la suma por la diferencia de binomios cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 4) &= x^2 - 4^2\\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$.

Conclusión

Los productos notables son productos de polinomios cuyos resultados pueden identificarse y escribirse de manera directa. Sean a y b números reales cualesquiera:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por la diferencia de binomios	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 3)(x + 10)$ b) $(y - 6)(y - 4)$ c) $(x - 8)(x + 2)$

d) $(y + 5)^2$ e) $(m - 2)^2$ f) $(x + 11)^2$

g) $(x + 3)(x - 3)$ h) $(10 + y)(10 - y)$ i) $(m - 6)(m + 6)$

j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2$ n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2$ o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right)$ q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right)$ r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right)$

Indicador de logro

1.2 Realiza productos notables que son de la forma $(x + a)(x + b)$, $(a \pm b)^2$ y $(a + b)(a - b)$.

Secuencia

Después de conocer las definiciones más generales sobre polinomios, se trabajan los productos notables cuyo desarrollo será de mucha utilidad al momento de factorizar. Observe que el coeficiente de la variable en cada binomio es igual a 1.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no recuerdan los productos notables desarrollados en noveno grado puede comenzar con la Conclusión y tomar el Problema inicial como ejemplos. No es el propósito de la clase deducir el desarrollo de los tres productos presentados, sino repasarlos o recordarlos.

Solución de problemas:

a) $(x + 3)(x + 10) = x^2 + (3 + 10)x + 3(10)$
$= x^2 + 13x + 30$

b) $(y - 6)(y - 4) = y^2 + (-6 - 4)y + (-6)(-4)$
$= y^2 - 10y + 24$

c) $(x - 8)(x + 2) = x^2 + (-8 + 2)x + (-8)(2)$
$= x^2 - 6x - 16$

d) $(y + 5)^2 = y^2 + 2(5)y + 5^2$
$= y^2 + 10y + 25$

e) $(m - 2)^2 = m^2 - 2(2)m + 2^2$
$= m^2 - 4m + 4$

f) $(x + 11)^2 = x^2 + 2(11)x + 11^2$
$= x^2 + 22x + 121$

g) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

h) $(10 + y)(10 - y) = 10^2 - y^2$
$= 100 - y^2$

i) $(m - 6)(m + 6) = m^2 - 6^2$
$= m^2 - 36$

j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = y^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)y + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$
$= y^2 + 2y + \frac{3}{4}$

k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
$= x^2 + x - \frac{4}{9}$

l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2 = x^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2 = y^2 + 2\left(2\sqrt{3}\right)y + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= y^2 + 4\sqrt{3}y + 12$

o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right) = m^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$
$= m^2 - \frac{1}{25}$

p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^2 - x^2$
$= \frac{16}{49} - x^2$

q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right) = y^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2$
$= y^2 - 6$

r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right) = x^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2$
$= x^2 - 40$

1.3 Productos de binomio por binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 3)(4x - 5)$ b) $(2x + y)^2$ c) $(3x - 2y)^2$ d) $(5x + 6y)(5x - 6y)$

Solución

a) El desarrollo del producto es similar al de $(x + a)(x + b)$, pues el término $4x$ aparece en cada binomio:

$$\begin{aligned}(4x + 3)(4x - 5) &= (4x)^2 + (3 - 5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(4x + 3)(4x - 5) = 16x^2 - 8x - 15$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

c) El producto es, como el literal anterior, el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x - 2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

Luego, $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$.

d) El producto es una suma por diferencia de binomios, y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(5x + 6y)(5x - 6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x + 6y)(5x - 6y) = 25x^2 - 36y^2$.

En general

Sean a, b y m números reales cualesquiera. Entonces:

1. El producto $(mx + a)(mx + b)$ se desarrolla de forma similar al de la forma $(x + a)(x + b)$, es decir:
   $(mx + a)(mx + b) = (mx)^2 + (a + b)(mx) + ab$.

2. Los productos $(ax + by)^2$ y $(ax - by)^2$ son el cuadrado de un binomio y se desarrollan:
   $(ax + by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$
   $(ax - by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2$.

3. El producto $(ax + by)(ax - by)$ es una suma por diferencia de binomios y se desarrolla:
   $(ax + by)(ax - by) = (ax)^2 - (by)^2$.

Los babilonios resolvían problemas como el siguiente: "encontrar dos números cuya suma (o diferencia) y producto fuesen conocidos" utilizando el producto notable del literal c). Por ejemplo, el "razonamiento babilónico" para encontrar dos números cuya suma sea 14 y producto sea 45, escrito en el lenguaje matemático actual es el siguiente:

14 corresponde a la suma de los números $7 + x$ y $7 - x$, el producto de ellos debe ser igual a 45:

$$(7 + x)(7 - x) = 45$$

de lo anterior se obtiene $49 - x^2 = 45$ cuya solución es $x = \pm 2$. Entonces, los números son 9 y 5.

Bunt, N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics.*

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 9)(2x + 1)$ b) $(3x - 1)(3x + 5)$ c) $(5y - 4)(5y - 2)$

d) $(4x + 5y)^2$ e) $(2x - 7y)^2$ f) $(3y - 10x)^2$

g) $(2x + 5y)(2x - 5y)$ h) $(6w + z)(6w - z)$ i) $(8y - 3x)(8y + 3x)$

j) $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{4}\right)$ k) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{9}{2}\right)$ l) $\left(\frac{2}{3}y + 11\right)\left(\frac{2}{3}y - 5\right)$

m) $\left(\sqrt{2}\,x + y\right)^2$ n) $\left(\sqrt{3}\,w + \sqrt{5}\,z\right)^2$ o) $\left(4 - 3\sqrt{2}\,x\right)^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right)$ q) $\left(\sqrt{5}\,x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{4}y\right)$ r) $\left(2\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{3}\,y\right)\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{3}\,y\right)$

Indicador de logro

1.3 Realiza productos notables que son de la forma $(mx + a)(mx + b)$, $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Secuencia

Se retoman los tres productos notables vistos en la clase anterior; esta vez se incluyen hasta dos variables en los polinomios, con coeficientes iguales o diferentes a 1. La idea es que se reconozcan o identifiquen los productos notables, independientemente de los coeficientes o la cantidad de variables que se utilizan.

Posibles dificultades

No es necesario que los estudiantes realicen los cálculos de las sumas o multiplicaciones de números directamente, pero sí deben identificar cada producto notable y utilizar el desarrollo correspondiente. Por ejemplo, para desarrollar $(2x + y)^2$ deben recordar que, se eleva al cuadrado $2x$, seguido del producto $2(2x)y$ y por último se eleva al cuadrado y.

Solución de problemas:

a) $(2x + 9)(2x + 1) = (2x)^2 + (9 + 1)(2x) + 9(1)$
$= 4x^2 + 20x + 9$

b) $(3x - 1)(3x + 5) = (3x)^2 + (-1 + 5)(3x) + (-1)(5)$
$= 9x^2 + 12x - 5$

c) $(5y - 4)(5y - 2) = (5y)^2 + (-4 - 2)(5y) + (-4)(-2)$
$= 25y^2 - 30y + 8$

d) $(4x + 5y)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(5y) + (5y)^2$
$= 16x^2 + 40xy + 25y^2$

e) $(2x - 7y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(7y) + (7y)^2$
$= 4x^2 - 28xy + 49y^2$

f) $(3y - 10x)^2 = (3y)^2 - 2(3y)(10x) + (10x)^2$
$= 9y^2 - 60xy + 100x^2$

Usualmente se toman las variables en orden alfabético. Por tanto, también es válido que la respuesta sea $100x^2 - 60xy + 9y^2$.

g) $(2x + 5y)(2x - 5y) = (2x)^2 - (5y)^2$
$= 4x^2 - 25y^2$

h) $(6w + z)(6w - z) = (6w)^2 - z^2$
$= 36w^2 - z^2$

i) $(8y - 3x)(8y + 3x) = (8y)^2 - (3x)^2$
$= 64y^2 - 9x^2$

j) $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{4}\right) = (2n)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(2n) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$
$= 4n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{8}$

k) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)$
$= \frac{1}{9}x^2 - x - \frac{27}{4}$

l) $\left(\frac{2}{3}y + 11\right)\left(\frac{2}{3}y - 5\right) = \left(\frac{2}{3}y\right)^2 + (11 - 5)\left(\frac{2}{3}y\right) + (11)(-5)$
$= \frac{4}{9}y^2 + 4y - 55$

m) $\left(\sqrt{2}x + y\right)^2 = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2$

n) $\left(\sqrt{3}w + \sqrt{5}z\right)^2 = 3w^2 + 2\sqrt{15}wz + 5z^2$

o) $\left(4 - 3\sqrt{2}x\right)^2 = 16 - 24\sqrt{2}x + 18x^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{81}y^2$

q) $\left(\sqrt{5}x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}x + \frac{3}{4}y\right) = 5x^2 - \frac{9}{16}y^2$

r) $\left(2\sqrt{2}x - 3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y\right) = 8x^2 - 27y^2$

Lección 1

1.4 Productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$

Problema inicial

Desarrolla el producto $(2x + 5)(3x + 4)$. Encuentra una regla para productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del primer binomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x+4) &= 2x(3x) + 2x(4) + 5(3x) + 5(4) && \text{multiplicar término a término,}\\ &= 2(3)x^2 + [2(4) + 5(3)]x + 5(4) && \text{propiedad conmutativa y distributiva,}\\ &= 6x^2 + [8 + 15]x + 20 && \text{desarrollar productos,}\\ &= 6x^2 + 23x + 20.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x + 5)(3x + 4) = 6x^2 + 23x + 20$. Un producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla como sigue: $(ax + b)(cx + d) = ax(cx) + ax(d) + b(cx) + bd$
$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

Luego, $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

Conclusión

El producto de binomios de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$(ax+b)(cx+d) = \overbrace{ac}^{\text{Producto de } a \text{ y } c}x^2 + (\underbrace{ad+bc}_{\text{Producto de } a \text{ y } d \text{ más el producto de } b \text{ y } c})x + \overbrace{bd}^{\text{Producto de } b \text{ y } d}.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(5x - 6)(2x + 7)$.
En este caso, $a = 5$, $b = -6$, $c = 2$ y $d = 7$. Luego:

$$\begin{aligned}(5x-6)(2x+7) &= 5(2)x^2 + [5(7) + (-6)(2)]x + (-6)(7)\\ &= 10x^2 + (35 - 12)x - 42\\ &= 10x^2 + 23x - 42.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x - 6)(2x + 7) = 10x^2 + 23x - 42$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 9)(3x + 1)$ b) $(4x + 1)(2x + 1)$ c) $(2x + 7)(3x - 2)$

d) $(4x + 3)(x - 2)$ e) $(-x + 7)(6x + 4)$ f) $(x - 8)(-2x - 5)$

g) $(3x - 10)(-2x + 3)$ h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right)$ i) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)\left(6x - \frac{1}{10}\right)$

2. Para cada caso, determina el valor de los enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(ax - 7)(4x + d) = 12x^2 - 25x - 7$ b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$

c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x - 42$ d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$

Dos polinomios de grado 2, $ex^2 + fx + g$ y $mx^2 + nx + p$ son iguales si $e = m$, $f = n$ y $g = p$.

Indicador de logro

1.4 Desarrolla el producto notable de la forma $(ax + b)(cx + d)$.

Secuencia

En esta clase se deduce la forma para el desarrollo de los productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$, donde los números a y c son diferentes. Este producto notable servirá posteriormente para factorizar trinomios utilizando el método de la tijera.

Propósito

En el Problema inicial se deduce la regla para desarrollar el producto de $ax + b$ y $cx + d$. La Conclusión la presenta de manera general pues será aplicada tanto en el Ejemplo como en el numeral 1 del bloque de Problemas.

Posibles dificultades

Para el Problema Inicial, debe tener cuidado que los estudiantes no utilicen erróneamente el producto notable de la forma $(mx + a)(mx + b)$; si es necesario, recuerde el proceso para desarrollar productos de polinomios, es decir, término a término. Por otro lado, no es necesario que los estudiantes realicen los cálculos de las sumas o productos de números directamente, el propósito es aplicar correctamente la regla para el desarrollo de $(ax + b)(cx + d)$.

Solución de problemas:

1a) $(x + 9)(3x + 1) = 3x^2 + (1 + 27)x + 9$
$= 3x^2 + 28x + 9$

1b) $(4x + 1)(2x + 1) = 8x^2 + (4 + 2)x + 1$
$= 8x^2 + 6x + 1$

1c) $(2x + 7)(3x – 2) = 6x^2 + (–4 + 21)x – 14$
$= 6x^2 + 17x – 14$

1d) $(4x + 3)(x – 2) = 4x^2 + (–8 + 3)x – 6$
$= 4x^2 – 5x – 6$

1e) $(–x + 7)(6x + 4) = – 6x^2 + (–4 + 42)x + 28$
$= – 6x^2 + 38x + 28$

1f) $(x – 8)(–2x – 5) = – 2x^2 + (–5 + 16)x + 40$
$= – 2x^2 + 11x + 40$

1g) $(3x – 10)(– 2x + 3) = – 6x^2 + (9 + 20)x – 30$
$= – 6x^2 + 29x – 30$

1h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right) = 3x^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{5}{4}$
$= 3x^2 + 4x + \frac{5}{4}$

1i) $\left(5x – \frac{1}{4}\right)\left(6x – \frac{1}{10}\right) = 30x^2 + \left(– \frac{1}{2} – \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{40}$
$= 30x^2 – 2x + \frac{1}{40}$

2a) $(ax – 7)(4x + d) = 12x^2 – 25x – 7$; entonces debe cumplirse $4a = 12$ y $–7d = –7$. De esto se obtiene $a = 3$ y $d = 1$, y se verifica $ad – 28 = –25$.

2b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$; entonces debe cumplirse $5c = 10$ y $4d = 20$. De esto se obtiene $c = 2$ y $d = 5$, y se verifica $5d + 4c = 33$.

2c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x – 42$; entonces debe cumplirse $ac = 2$ y $6b = –42$. De la segunda se obtiene $b = –7$. Para encontrar a y c se plantea además $6a – 7c = 5$ y se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ac = 2 \\ 6a - 7c = 5 \end{cases}$$

como son números enteros se obtiene $a = 2$ y $c = 1$, y se verifica $6a + bc = 5$.

En d) se obtienen otras soluciones intercambiando los valores de a con c y b con d.

2d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$ y $d = 3$, o $a = –1$, $b = –4$, $c = –5$ y $d = –3$.

1.5 Cubo de un binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$(a + b)^3$.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b)$

Solución

El producto $(a + b)^3$ es la potencia cúbica de $a + b$, y es igual a:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

asociando los primeros dos factores se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= [(a + b)(a + b)](a + b)\\ &= (a + b)^2(a + b).\end{aligned}$$

Se desarrolla $(a + b)^2$ y se efectúa el producto de trinomio por binomio:

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$	desarrollar el cuadrado de un binomio,
$= a^2(a) + a^2(b) + 2ab(a) + 2ab(b) + b^2(a) + b^2(b)$	multiplicar término a término,
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$	desarrollar los productos de monomios,
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.	reducir términos semejantes.

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a + b)^3$ se llama **cubo de un binomio** y se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x + y)^3$.

El producto $(2x + y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x + y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)y^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)y + 6xy^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 1)^3$

b) $(y + 4)^3$

c) $(m + 5)^3$

d) $(x + 2y)^3$

e) $(3x + y)^3$

f) $(m + 4n)^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3$

i) $(3x + 2y)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3$

k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3$

l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3$

Indicador de logro

1.5 Realiza el producto notable de la forma $(ax + by)^3$.

Secuencia

Ya se ha recordado el desarrollo del cuadrado de un binomio. En esta clase, y utilizando el producto notable $(a + b)^2$, se deduce y aplica la regla para desarrollar cubos de binomios, cuando el segundo término se suma al primero.

Propósito

En el Problema inicial se deduce el desarrollo del producto de la forma $(a + b)^3$. En el Ejemplo y los Problemas debe utilizarse lo descrito en la Conclusión, aplicándolo a binomios que involucran hasta dos variables y cuyos coeficientes pueden ser enteros o fracciones.

Solución de problemas:

a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(y + 4)^3 = y^3 + 3y^2(4) + 3y(4^2) + 4^3$
$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

c) $(m + 5)^3 = m^3 + 3m^2(5) + 3m(5^2) + 5^3$
$= m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

d) $(x + 2y)^3 = x^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

e) $(3x + y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2y + 3(3x)y^2 + y^3$
$= 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

f) $(m + 4n)^3 = m^3 + 3m^2(4n) + 3m(4n)^2 + (4n)^3$
$= m^3 + 12m^2n + 48mn^2 + 64n^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3 = m^3 + 3m^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3m\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$
$= m^3 + m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{1}{27}$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 = y^3 + 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}$

i) $(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$
$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(3y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(3y)^2 + (3y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 + x^2y + 9xy^2 + 27y^3$

k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}x\right)^2 y + 3\left(\frac{2}{3}x\right) y^2 + y^3$
$= \frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2y + 2xy^2 + y^3$

l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3 = \left(\frac{1}{3}m\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}m\right)^2\left(\frac{1}{3}n\right) + 3\left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{3}n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}n\right)^3$
$= \frac{1}{27}m^3 + \frac{1}{9}m^2n + \frac{1}{9}mn^2 + \frac{1}{27}n^3$

1.6 Cubo de un binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a-b)^3.$$

$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3$

Solución

Se escribe $(a-b)^3$ como $[a+(-b)]^3$ y se desarrolla como el cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a-b)^3$ también es el **cubo de un binomio** y se desarrolla:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

En general, $(ax+by)^3$ y $(ax-by)^3$ también son productos notables y se les llama cubo de un binomio; se desarrollan de la siguiente forma:

$$(ax \overset{\text{Positivo}}{+} by)^3 = (ax)^3 \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)^2(by) \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \overset{\text{Positivo}}{+} (by)^3.$$

$$(ax \underset{\text{Negativo}}{-} by)^3 = (ax)^3 \underset{\text{Negativo}}{-} 3(ax)^2(by) \underset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \underset{\text{Negativo}}{-} (by)^3.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x-3y)^3$.

El producto $(2x-3y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x-3y)^3 &= (2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3\\ &= 8x^3-3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)-27y^3\\ &= 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3\end{aligned}$$

Luego, $(2x-3y)^3 = 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x-1)^3$ b) $(y-3)^3$ c) $(m-10)^3$

d) $(4x-y)^3$ e) $(m-5n)^3$ f) $(5x-2y)^3$

g) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^3$ h) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3$ i) $\left(m-\frac{2}{3}\right)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3$ k) $\left(3m-\frac{1}{6}n\right)^3$ l) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$

2. Para cada caso, determina el valor de a o b para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x+a)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ b) $(y-a)^3 = y^3-12y^2+48y-64$

c) $(ax+by)^3 = 8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$ d) $(ax-by)^3 = \frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{6}xy^2-\frac{1}{27}y^3$

Indicador de logro

1.6 Realiza el producto notable de la forma $(ax - by)^3$.

Secuencia

En esta clase se deducirá el desarrollo del cubo de un binomio, cuando su segundo término se resta del primero, es decir, $(a - b)^3$. Además, se presenta en forma general el desarrollo del producto notable $(ax \pm by)^3$.

Propósito

En el Problema inicial se deduce el desarrollo del producto de la forma $(a - b)^3$ escribiéndolo como $[a + (-b)]^3$ para utilizar el resultado de la clase anterior. En el Ejemplo y los Problemas debe utilizarse lo descrito en la Conclusión, aplicándolo a binomios que involucran hasta dos variables y cuyos coeficientes pueden ser enteros o fracciones.

Posibles dificultades

Debe tenerse cuidado con el signo negativo del segundo término en los binomios.

Solución de problemas:

1a) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

1b) $(y - 3)^3 = y^3 - 3y^2(3) + 3y(9) - 27$
$= y^3 - 9y^2 + 27y - 27$

1c) $(m - 10)^3 = m^3 - 3m^2(10) + 3m(100) - 1000$
$= m^3 - 30m^2 + 300m - 1000$

1d) $(4x - y)^3 = (4x)^3 - 3(4x)^2y + 3(4x)y^2 - y^3$
$= 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

1e) $(m - 5n)^3 = m^3 - 3m^2(5n) + 3m(5n)^2 - (5n)^3$
$= m^3 - 15m^2n + 75mn^2 - 125n^3$

1f) $(5x - 2y)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(2y) + 3(5x)(2y)^2 - (2y)^3$
$= 125x^3 - 150x^2y + 60xy^2 - 8y^3$

1g) $\left(x - \frac{1}{6}\right)^3 = x^3 - 3x^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3x\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{216}$

1h) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = y^3 - 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y - \frac{1}{8}$

1i) $\left(m - \frac{2}{3}\right)^3 = m^3 - 3m^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3m\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$
$= m^3 - 2m^2 + \frac{4}{3}\,m - \frac{8}{27}$

1j) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(2y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(2y)^2 - (2y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + 4xy^2 - 8y^3$

1k) $\left(3m - \frac{1}{6}n\right)^3 = 27m^3 - \frac{9}{2}m^2n + \frac{1}{4}mn^2 - \frac{1}{216}n^3$

1l) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

2a) El desarrollo del miembro izquierdo es $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, entonces debe ocurrir $3a = 6$, $3a^2 = 12$ y $a^3 = 8$. De la primera de estas ecuaciones se obtiene $a = 2$ y, al comprobarlo en las demás se satisfacen cada una. Por lo tanto, $a = 2$.

2b) Por un razonamiento similar a 2a) se obtiene $a = 4$.

2c) El desarrollo del miembro izquierdo es $a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3$, entonces debe ocurrir $a^3 = 8$, $3a^2b = 60$, $3ab^2 = 150$ y $b^3 = 125$. De la primera y última de estas ecuaciones se deducen $a = 2$ y $b = 5$; al comprobarlo en las demás se cumplen cada una. Por lo tanto, $a = 2$ y $b = 5$.

2d) Por un razonamiento similar a 2c) se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$.

1.7 Combinaciones de productos notables

Problema inicial

Desarrolla lo siguiente:

a) $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3$ b) $(a + b + c)^2$

Solución

a) Ambos productos, $(2x + 3)^3$ y $(2x - 3)^3$, son cubos de binomios. Una vez identificados los productos notables que aparecen en la expresión se desarrollan de acuerdo a lo visto en clases anteriores y se reducen los términos semejantes, si los hay:

$$\overbrace{(2x+3)^3}^{(1)} - \overbrace{(2x-3)^3}^{(2)} = \overbrace{8x^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + 27}^{(1)} - \overbrace{[8x^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 27]}^{(2)}$$

$$= \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) + \cancel{3(2x)(9)} \boxed{+ 27} - \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) - \cancel{3(2x)(9)} \boxed{+ 27}$$

$$= 36x^2 + 27 + 36x^2 + 27$$

$$= 72x^2 + 54$$

Por lo tanto, $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3 = 72x^2 + 54$.

b) Sea $a + b = x$; entonces $(a + b + c)^2 = (x + c)^2$ corresponde al cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= (x + c)^2 && \text{sustituir } a + b = x, \\
&= x^2 + 2xc + c^2 && \text{desarrollar el cuadrado de un binomio,} \\
&= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 && \text{sustituir } x = a + b, \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).
\end{aligned}$$

Luego, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

En general

Al desarrollar combinaciones de productos notables:

1. Se identifican primero cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Se desarrollan los productos teniendo cuidado con los signos.
3. Se reducen los términos semejantes, si los hay.

Problemas

1. Desarrolla lo siguiente:

a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y)$ b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2$

c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5)$ d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right)$ f) $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right) - (x + y + 1)^2$

2. Utiliza productos notables para resolver lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $a^2 - b^2$ si $a + b = 25$ y $a - b = 10$?
b) ¿Cuál es el valor numérico de ab si $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$?
c) Sin utilizar calculadora encuentra el resultado de 101^3.

Indicador de logro

1.7 Desarrolla operaciones con polinomios utilizando los productos notables.

Secuencia

En esta clase se retoman todos los productos notables estudiados anteriormente; en esta ocasión están incluidos dentro de expresiones algebraicas las cuáles hay que desarrollar y escribir en su mínima expresión.

Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que deben identificar los productos notables involucrados en la expresión algebraica antes de empezar a desarrollar. Aunque la factorización ya se ha visto en noveno grado no se recomienda utilizarla en este momento, pues el contenido se retomará posteriormente en esta unidad.

Solución de problemas:

1a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y) = (5x)^2 + (11 - 6)(5x) + 11(-6) + x^2 - (2y)^2$
$= 25x^2 + 25x - 66 + x^2 - 4y^2$
$= 26x^2 - 4y^2 + 25x - 66$

1b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2 = (10x)^2 - 2(10x)y + y^2 + x^2 - 2x(10y) + (10y)^2$
$= 100x^2 - 20xy + y^2 + x^2 - 20xy + 100y^2$
$= 101x^2 - 40xy + 101y^2$

1c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5) = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 - x - 20$
$= 3x^2 + x - 15$

1d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3 = x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 + x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3$
$= 2x^3 - 3x^2y + 123xy^2 - 61y^3$

1e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - 1^2$
$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - 1$

En 9° grado se demostró que:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

1f) $\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y\right) - (x + y + 1)^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - \left(\sqrt{3}y\right)^2 - [x^2 + y^2 + 1 + 2(xy + x + y)]$
$= 2x^2 - 3y^2 - x^2 - y^2 - 1 - 2xy - 2x - 2y$
$= x^2 - 2xy - 4y^2 - 2x - 2y - 1$

2a) Se sabe que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; se sustituyen $a + b = 25$ y $a - b = 10$ en lo anterior:
$(25)(10) = a^2 - b^2$
$a^2 - b^2 = 250$
Por lo tanto, el valor numérico de $a^2 - b^2$ es 250.

En los problemas 2a) y 2b) NO deben encontrarse los valores de a y b.

2b) Se sabe que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; se despeja ab y se sustituyen $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$:
$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$
$2ab = 100 - 58 = 42$
$ab = 21$
Por lo tanto, el valor numérico de ab es 21.

2c) $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3(100^2)(1) + 3(100)(1^2) + 1^3$
$= 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1$
$= 1\,030\,301$

1.8 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 5)$ b) $(m + 8)^2$ c) $(n - 6)\left(n - \frac{1}{2}\right)$

d) $(y - 10)(y + 8)$ e) $(y - 4)^2$ f) $(x + 6)^2$

g) $(x + 5)(x - 5)$ h) $\left(\frac{1}{7} - y\right)\left(\frac{1}{7} - y\right)$ i) $(n - 2\sqrt{2})(n + 2\sqrt{2})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 7)(3x + 2)$ b) $\left(\frac{1}{2}y + 5\right)\left(\frac{1}{2}y - 9\right)$ c) $\left(5n - \frac{4}{5}\right)\left(5n - \frac{1}{5}\right)$

d) $(9x + 4y)^2$ e) $\left(3x - \frac{1}{3}y\right)^2$ f) $(2x + \sqrt{3}\,y)^2$

g) $(10m + 7n)(10m - 7n)$ h) $\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right)$ i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

3. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$:

a) $(2x - 3)(x - 4)$ b) $(x + 6)(3x + 5)$ c) $(4y - 3)(5y + 2)$

d) $\left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{2}{3}\right)$ e) $\left(5n + \frac{1}{2}\right)\left(4n - \frac{4}{5}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x - 8\right)\left(\frac{1}{4}x + 3\right)$

4. Determina los números enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x + b)(cx - 6) = 2x^2 + 12x - 54$ b) $(2x - 5)(cx + d) = 6x^2 - 35x + 50$

c) $(ax + 1)(cx + 5) = 8x^2 + 22x + 5$ d) $(5x + b)(cx + d) = 10x^2 - 9x - 9$

5. Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

a) $(m + 3)^3$ b) $(y + 10)^3$ c) $\left(x + \frac{1}{6}\right)^3$

d) $(y - 4)^3$ e) $(5 - m)^3$ f) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^3$

g) $(10x + 3y)^3$ h) $\left(\frac{1}{5}m - 5n\right)^3$ i) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^3$

6. Desarrolla lo siguiente:

a) $(3x + 4)(3x - 4) - (2x + 5)(2x - 9)$ b) $(x + 3y)^2 + (2x - 5y)^2$

c) $(2x - y)^3 - (x + y)^3$ d) $(3x - 4y + 5)(3x - 4y - 5)$

e) $(3x - 7)(4x + 5) + (5x + 1)(5x - 6)$ f) $(x + 9)(2x - 11) + (x - 5)^2$

7. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 40$ y $ab = 12$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a^2 - b^2 = 24$ y $a - b = 2$?

c) Utilizando productos notables, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

- 103^2
- $105(95)$
- $45(55)$

d) Sea $x = 445$, calcula el resultado de la operación: $446(444) - 447(443)$ escribiendo las cantidades en términos de x y utilizando productos notables.

e) Demuestra que $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$.

Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas correspondientes a productos notables.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + 2x - 35$ **1b)** $m^2 + 16m + 64$ **1c)** $n^2 - \frac{13}{2}n + 3$

1d) $y^2 - 2y - 80$ **1e)** $y^2 - 8y + 16$ **1f)** $x^2 + 12x + 36$

1g) $x^2 - 25$ **1h)** $\frac{1}{49} - y^2$ **1i)** $n^2 - 8$

2a) $9x^2 + 27x + 14$ **2b)** $\frac{1}{4}y^2 - 2y - 45$ **2c)** $25n^2 - 5n + \frac{4}{25}$

2d) $81x^2 + 72xy + 16y^2$ **2e)** $9x^2 - 2xy + \frac{1}{9}y^2$ **2f)** $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$

2g) $100m^2 - 49n^2$ **2h)** $\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{9}y^2$ **2i)** $x - y$

3a) $2x^2 - 11x + 12$ **3b)** $3x^2 + 23x + 30$ **3c)** $20y^2 - 7y - 6$

3d) $6x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{2}{9}$ **3e)** $20n^2 - 2n - \frac{2}{5}$ **3f)** $\frac{1}{12}x^2 - x - 24$

4a) $b = 9$, $c = 2$ **4b)** $c = 3$, $d = -10$ **4c)** $a = 4$, $c = 2$

4d) $b = 3$, $c = 2$, $d = -3$ **5a)** $m^3 + 9m^2 + 27m + 27$ **5b)** $y^3 + 30y^2 + 300y + 1\,000$

5c) $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{216}$ **5d)** $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$ **5e)** $125 - 75m + 15m^2 - m^3$

Al ordenar los términos en 5e) se tiene $-m^3 + 15m^2 - 75m + 125$

5f) $x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125}$ **5g)** $1\,000x^3 + 900x^2y + 270xy^2 + 27y^3$

5h) $\frac{1}{125}m^3 - \frac{3}{5}m^2n + 15mn^2 - 125n^3$ **5i)** $x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{xy} + y\sqrt{y}$

6a) $5x^2 + 8x + 29$ **6b)** $5x^2 - 14xy + 34y^2$ **6c)** $7x^3 - 15x^2y + 3xy^2 - 2y^3$

6d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25$ **6e)** $37x^2 - 38x - 41$ **6f)** $3x^2 - 3x - 74$

7a) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 40 - 24 = 16$

7b) $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{24}{2} = 12$

7c) $103^2 = (100 + 3)^2$
$= 10\,000 + 600 + 9$
$= 10\,609$

$105(95) = (100 + 5)(100 - 5)$
$= 10\,000 - 25$
$= 9\,975$

$45(55) = (50 - 5)(50 + 5)$
$= 2\,500 - 25$
$= 2\,475$

7d) $446(444) - 447(443) = (445 + 1)(445 - 1) - (445 + 2)(445 - 2)$ sea $x = 445$,
$= (x + 1)(x - 1) - (x + 2)(x - 2)$
$= x^2 - 1 - x^2 + 4$
$= 3$

7e) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$= x^3 + y^3 + (3x^2y + 3xy^2)$ se aplican propiedades conmutativa y asociativa,
$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ se extrae factor común $3xy$.

1.9 Factor común monomio y polinomio

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$

b) $xy + 3x + 2y + 6$

Identifica el factor común en los términos del polinomio del literal a). En el literal b) asocia las parejas de términos que tienen factor común.

Solución

a) Se debe identificar el factor común en los términos del polinomio:

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) &= 2xy(5x) \\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) &= 2xy(3y) \\ -8xy &= -2(4)(x)(y) &= -2xy(4) \end{aligned}$$

se extrae dicho factor y escribiendo como producto de un monomio por un polinomio se tiene:

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4) \\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$.

b) Los cuatro términos del polinomio no poseen factor común. Sin embargo, el primer y segundo término tienen factor común x; mientras que el tercer y cuarto término tienen factor común 2. Se asocian estas dos parejas y se extrae el factor común en cada caso:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)] \\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

sea $m = y + 3$; sustituyendo en la expresión anterior y extrayendo factor común m se obtiene:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m \\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

Luego, $xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$.

Conclusión

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de polinomios más simples; a dichos polinomios simples se les llama **factores**. Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae ese monomio y se escribe como producto de un monomio por un polinomio:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

Si los términos del polinomio no tienen factor común pero estos pueden asociarse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo, entonces:

1. Se extrae el factor común en cada grupo.
2. Si al hacer lo anterior en la expresión quedan monomios multiplicados por un mismo polinomio, entonces se extrae este polinomio común:

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b) \\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

Al proceso de factorizar asociando términos que tengan el mismo factor común también se le llama **factor común por agrupación de términos**.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + xy^2$

b) $2a - 8ab$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$

h) $xy - 2x - 5y + 10$

i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$

k) $6mn + 8m + 15n + 20$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

Indicador de logro

1.9 Factoriza polinomios cuyo factor común es un monomio o un polinomio, utilizando las propiedades asociativa y distributiva.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización extrayendo el factor común monomio, vista en noveno grado. Se agrega además la factorización extrayendo el factor común polinomio, conocida también como factor común por agrupación de términos (en la clase no se utiliza este nombre, se espera que el estudiante identifique los casos donde debe agrupar los términos).

Propósito

En el Problema inicial, el literal a) es para recordar cómo factorizar extrayendo factor común; en el literal b) debe indicar que asocien o agrupen los términos, tal como dice el recuadro de la pista. En el bloque de Problemas los estudiantes deben identificar en cuáles polinomios es necesario asociar los términos para factorizar.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes, cuando resuelvan el bloque de Problemas, identificar si todos los términos del polinomio tienen factor común o es necesario agruparlos. También aclararles que la manera de asociar los términos puede ser diferente, pero deben llegar a la misma respuesta (los factores solamente aparecerán conmutados).

Solución de problemas:

a) $x^2 + xy^2 = x(x) + x(y^2)$
$= x(x + y^2)$

b) $2a - 8ab = 2a - 2a(4b)$
$= 2a(1 - 4b)$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy = xy(xy) - xy(x) + xy$ $\quad xy = 1xy$
$= xy(xy - x + 1)$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc = 5ab(-2ab + b - 3c)$

El resultado también puede ser $-5ab(2ab - b + 3c)$.

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy = 4x(-3y^2 + 5x + 4y)$

El resultado también puede ser $-4x(3y^2 - 5x - 4y)$.

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc = 6abc(2ab - bc + 3a)$

g) $mn - 4m + 3n - 12 = m(n - 4) + 3(n - 4)$
$= (m + 3)(n - 4)$

h) $xy - 2x - 5y + 10 = x(y - 2) - 5(y - 2)$
$= (x - 5)(y - 2)$

i) $2ab - 12a + b - 6 = 2a(b - 6) + (b - 6)$ $\quad (b - 6) = 1(b - 6)$
$= (2a + 1)(b - 6)$

j) $3xy - 7x - 12y + 28 = x(3y - 7) - 4(3y - 7)$
$= (x - 4)(3y - 7)$

k) $6mn + 8m + 15n + 20 = 2m(3n + 4) + 5(3n + 4)$
$= (2m + 5)(3n + 4)$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y = xy(x - 3y) + 8(x - 3y)$
$= (xy + 8)(x - 3y)$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x = \left(\frac{1}{2}x\right)(x^2) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{1}{2}x\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

También puede extraerse el factor común $\frac{1}{8}x$, de esta forma el resultado sería $\frac{1}{8}x(4x^2 + 2x + 1)$.

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab = 2\sqrt{2}ab(5a) + 2\sqrt{2}ab(3)$
$= 2\sqrt{2}ab(5a + 3)$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n = \frac{1}{2}m(m + n) + \frac{1}{3}(m + n)$
$= \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}\right)(m + n)$

1.10 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 + 10x + 16$

b) $y^2 - y - 20$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Solución

a) Para factorizar $x^2 + 10x + 16$ en la forma $(x + a)(x + b)$ deben buscarse dos números cuya suma sea igual a 10 y cuyo producto sea 16. Como la suma es positiva entonces ambos números deben ser positivos:

Pareja	Producto	Suma
1 y 16	16	17
2 y 8	16	10

Puedes desarrollar el producto $(x + 2)(x + 8)$ para verificar si la factorización es correcta.

Luego, $a = 2$ y $b = 8$, y $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$.

b) De forma similar al literal anterior, se buscan dos números cuya suma sea igual a –1 y cuyo producto sea –20. Como el producto de ambos es negativo, uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
–1 y 20	–20	19
–2 y 10	–20	8
–4 y 5	–20	1
4 y –5	–20	–1

Se puede descomponer el número 20 en sus factores primos para encontrar las parejas: 20 = 2(2)(5).

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -5$, y $y^2 - y - 20 = (y + 4)(y - 5)$.

Conclusión

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ debe verificarse que, dentro de los términos del trinomio se encuentren: x^2, otro término con variable x y el otro sin variable (término independiente). Sean m y n números positivos:

a) Si el trinomio es $x^2 + mx + n$ entonces se buscan **dos números positivos** cuyo producto sea n y cuya suma sea m.

b) Si el trinomio es $x^2 - mx + n$ entonces se buscan **dos números negativos** cuyo producto sea n y cuya suma sea $-m$.

c) Si el trinomio es $x^2 + mx - n$ o $x^2 - mx - n$ entonces se buscan **dos números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-n$ y cuya suma sea m o $-m$, según sea el caso.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 7x + 6$
b) $x^2 - 9x + 14$
c) $y^2 - 3y - 40$
d) $y^2 + 2y - 15$
e) $a^2 + 2a - 63$
f) $b^2 - 12b + 20$
g) $y^2 + 14y + 40$
h) $x^2 - 2x - 35$
i) $x^2 - 12x + 27$
j) $y^2 + 5y - 24$
k) $a^2 + 15a + 56$
l) $b^2 - 9b - 22$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza cada uno de los siguientes polinomios:

a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24$

Sustituye $y = x - 1$.

b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21$
c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50$
d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6$

Indicador de logro

1.10 Factoriza trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ vista en noveno grado. Para ello se recuerda el desarrollo del producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$. En el bloque de Problemas se agregan casos donde debe realizarse un cambio de variable para utilizar esta factorización.

Posibles dificultades

En los trinomios del Problema inicial, recuerde a los estudiantes que deben encontrar dos números enteros cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de la variable con exponente 1. Por ser una clase de repaso, puede optar también por comenzar por la Conclusión.

Solución de problemas:

1a) El coeficiente de x es positivo al igual que el término independiente. Entonces deben encontrarse dos números positivos cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 7:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	6	7

Por lo tanto, $x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$.

1b) El coeficiente de x es negativo y el término independiente es positivo. Entonces deben encontrarse dos números negativos cuyo producto sea 14 y cuya suma sea –9:

Pareja	Producto	Suma
–1 y –14	14	–15
–2 y –7	14	–9

Por lo tanto, $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$.

1c) El término independiente es negativo. Entonces deben encontrarse dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea –40 y cuya suma sea –3. Los que satisfacen lo anterior son 5 y –8; por lo tanto, $y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$.

1d) El término independiente es negativo. Entonces deben encontrarse dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea –15 y cuya suma sea 2. Los que satisfacen lo anterior son 5 y –3; por lo tanto, $y^2 + 2y - 15 = (y + 5)(y - 3)$.

1e) $a^2 + 2a - 63 = (a + 9)(a - 7)$

1f) $b^2 - 12b + 20 = (b - 2)(b - 10)$

1g) $y^2 + 14y + 40 = (y + 10)(y + 4)$

1h) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$

1i) $x^2 - 12x + 27 = (x - 3)(x - 9)$

1j) $y^2 + 5y - 24 = (y + 8)(y - 3)$

1k) $a^2 + 15a + 56 = (a + 8)(a + 7)$

1l) $b^2 - 9b - 22 = (b + 2)(b - 11)$

2a) Sea $y = x - 1$, sustituyendo en el trinomio original se tiene $y^2 - 2y - 24$. Este último se factoriza en el producto $(y + 4)(y - 6)$; sustituyendo nuevamente $y = x - 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24 &= [(x - 1) + 4][(x - 1) - 6]\\ &= (x + 3)(x - 7)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24 = (x + 3)(x - 7)$.

2b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21 = [(x + 1) + 7][(x + 1) + 3] = (x + 8)(x + 4)$

2c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50 = [(x - 2) + 10][(x - 2) - 5] = (x + 8)(x - 7)$

2d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6 = [(x - 3) - 2][(x - 3) - 3] = (x - 5)(x - 6)$

En los problemas 2b), 2c) y 2d), los estudiantes pueden utilizar una estrategia como la presentada en 2a), es decir, hacer el cambio de variable, o factorizar directamente. Queda a criterio de ellos factorizar como les resulte más comprensible.

1.11 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 12x + 36$ b) $y^2 - 100$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Solución

a) El primer término del trinomio y el término independiente son cuadrados, pues x^2 es el cuadrado de x y 36 es el cuadrado de 6. Además, $12x = 2(6)(x)$.

Entonces: $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio, $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$.

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

b) Ambos términos del binomio son cuadrados: $y^2 - 100 = y^2 - 10^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo de una suma por diferencia de binomios, $y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$.

Luego, $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$.

Conclusión

El trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número, luego comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por otro lado, el polinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 - a^2}$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $y^2 + 10y + 25$ c) $b^2 - 8b + 16$

d) $x^2 - 4$ e) $a^2 - 36$ f) $49 - y^2$

g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$ h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

j) $a^2 - \frac{1}{25}$ k) $b^2 - \frac{1}{64}$ l) $\frac{4}{9} - y^2$

m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$ o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$

p) $a^2 - \frac{36}{49}$ q) $y^2 - \frac{4}{121}$ r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. Sin utilizar calculadora, determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $77^2 - 23^2$ b) $998^2 - 4$ c) $97^2 + 6(97) + 9$

Indicador de logro

1.11 Factoriza polinomios que son trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados en los productos notables $(x \pm a)^2$ y $(x + a)(x - a)$.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados, vista en noveno grado. Observe que el coeficiente de la variable con exponente dos siempre es 1. En el bloque de Problemas se agregan operaciones aritméticas que deben resolverse utilizando estas dos factorizaciones.

Posibles dificultades

Recuerde el desarrollo de los productos notables $(x \pm a)^2$ y $(x + a)(x - a)$ para que los estudiantes puedan factorizar los polinomios del Problema inicial. En el bloque de Problemas, en el numeral 2, si los estudiantes tienden a querer desarrollar los productos para calcular los resultados de las operaciones entonces desarrolle el literal a) como ejemplo.

Solución de problemas:

1a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(3)(x) + 3^2$
$= (x - 3)^2$

1b) $y^2 + 10y + 25 = y^2 + 2(5)(y) + 5^2$
$= (y + 5)^2$

1c) $b^2 - 8b + 16 = b^2 - 2(4)b + 4^2$
$= (b - 4)^2$

1d) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$= (x + 2)(x - 2)$

1e) $a^2 - 36 = a^2 - 6^2$
$= (a + 6)(a - 6)$

1f) $49 - y^2 = 7^2 - y^2$
$= (7 + y)(7 - y)$

1g) $b^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)b + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(b + \frac{1}{2}\right)^2$

1h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$

1i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \left(y + \frac{1}{3}\right)^2$

1j) $a^2 - \frac{1}{25} = \left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right)$

1k) $b^2 - \frac{1}{64} = \left(b + \frac{1}{8}\right)\left(b - \frac{1}{8}\right)$

1l) $\frac{4}{9} - y^2 = \left(\frac{2}{3} + y\right)\left(\frac{2}{3} - y\right)$

1m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

1n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \left(y - \frac{3}{4}\right)^2$

1o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100} = \left(x - \frac{7}{10}\right)^2$

1p) $a^2 - \frac{36}{49} = \left(a + \frac{6}{7}\right)\left(a - \frac{6}{7}\right)$

1q) $y^2 - \frac{4}{121} = \left(y + \frac{2}{11}\right)\left(y - \frac{2}{11}\right)$

1r) $\frac{81}{64} - b^2 = \left(\frac{9}{8} + b\right)\left(\frac{9}{8} - b\right)$

2a) $77^2 - 23^2 = (77 + 23)(77 - 23)$
$= (100)(54)$
$= 5\,400$

2b) $998^2 - 4 = (998 + 2)(998 - 2)$
$= (1\,000)(996)$
$= 996\,000$

2c) $97^2 + 6(97) + 9 = 97^2 + 2(3)(97) + 3^2$
$= (97 + 3)^2$
$= (100)^2$
$= 10\,000$

1.12 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$ b) $121x^2 - 16y^2$

Solución

a) El primer término del trinomio es el cuadrado de $7x$ y el tercer término es el cuadrado de $2y$:

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

además, $-2(7x)(2y) = -28xy$, por lo que $49x^2 - 28xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$\begin{aligned}49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2\\ &= (7x - 2y)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$.

b) El primer término es el cuadrado de $11x$ mientras que el segundo es el cuadrado de $4y$:

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

entonces $121x^2 - 16y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$\begin{aligned}121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2\\ &= (11x + 4y)(11x - 4y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$.

En general

El trinomio de la forma $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

El binomio de la forma $a^2x^2 - b^2y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)(ax - by).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$

d) $9x^2 - 100y^2$ e) $25x^2 - 16y^2$ f) $49a^2 - 4b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$ h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$ i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$

j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$ k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$ l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$ n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$ o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$

p) $100a^2 - 7b^2$ q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$ r) $8x^2 - 11y^2$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$ Sustituye $z = y + 2$. b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$

c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$ d) $16a^2 - (b + 5)^2$

e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$ f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

Indicador de logro

1.12 Factoriza polinomios que son trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados en los productos notables $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Secuencia

En esta clase se continua con la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados. En los polinomios utilizados (Problema Inicial y el bloque de Problemas), el coeficiente de las variables con exponente dos es diferente de 1.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no pueden factorizar los polinomios del Problema inicial, puede recordarles el desarrollo de los productos notables $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Solución de problemas:

1a) $4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = (2x + 5y)^2$

1b) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$

1c) $25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a + 6b)^2$

1d) $9x^2 - 100y^2 = (3x + 10y)(3x - 10y)$

1e) $25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2 = (5x + 4y)(5x - 4y)$

1f) $49a^2 - 4b^2 = (7a)^2 - (2b)^2 = (7a + 2b)(7a - 2b)$

1g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)y + y^2 = \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2$

1h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$

1i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2$

1j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2 = \left(\frac{1}{8}x + 3y\right)\left(\frac{1}{8}x - 3y\right)$

1k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2 = \left(\frac{5}{3}a + \frac{1}{7}b\right)\left(\frac{5}{3}a - \frac{1}{7}b\right)$

1l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2 = \left(\frac{2}{9}x + \frac{5}{4}y\right)\left(\frac{2}{9}x - \frac{5}{4}y\right)$

1m) $4x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = \left(2x + \sqrt{2}y\right)^2$

1n) $5a^2 - 2\sqrt{15}ab + 3b^2 = \left(\sqrt{5}a - \sqrt{3}b\right)^2$

1o) $6x^2 + 8\sqrt{3}xy + 8y^2 = \left(\sqrt{6}x + 2\sqrt{2}y\right)^2$

1p) $100a^2 - 7b^2 = \left(10a + \sqrt{7}b\right)\left(10a - \sqrt{7}b\right)$

1q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2 = \left(\sqrt{6}x + \frac{1}{5}y\right)\left(\sqrt{6}x - \frac{1}{5}y\right)$

1r) $8x^2 - 11y^2 = \left(2\sqrt{2}x + \sqrt{11}y\right)\left(2\sqrt{2}x - \sqrt{11}y\right)$

2a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2 = 9x^2 + 6xz + z^2 = (3x + z)^2 = (3x + y + 2)^2$

Se sustituye $z = y + 2$.

2b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2 = z^2 - 10zb + 25b^2 = (z - 5b)^2 = (a - 5b - 3)^2$

Se sustituye $z = a - 3$.

2c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2 = w^2 + 2wz + z^2 = (w + z)^2 = (2x + 1 + 3y - 4)^2 = (2x + 3y - 3)^2$

Se sustituye $w = 2x + 1$ y $z = 3y - 4$.

2d) $16a^2 - (b + 5)^2 = (4a + b + 5)(4a - b - 5)$

2e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2 = (x + 9 + y - 9)(x + 9 - y + 9) = (x + y)(x - y + 18)$

2f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y = (x + y)^2 + 10(x + y) = (x + y)(x + y + 10)$

Lección 1

1.13 Método de la tijera, parte 1

Problema inicial

El polinomio $2x^2 + 13x + 15$ no es un trinomio cuadrado perfecto; sin embargo puede factorizarse en la forma $(ax + b)(cx + d)$ realizando lo siguiente:

1. Descomponer 2 y 15 como producto de dos factores.
2. En el siguiente esquema, sustituye los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15. Realiza las operaciones indicadas hasta que se cumpla $ad + bc = 13$.

$$\begin{array}{rcccl} & ax & \times & b & \longrightarrow \; bcx \\ \text{Multiplicar} & \downarrow & & \downarrow \text{Multiplicar} & \quad \downarrow \text{Sumar} \\ & \underline{cx} & & \underline{d} & \longrightarrow \; \underline{adx} \\ & acx^2 & & bd & \quad (ad + bc)x \end{array}$$

3. Escribe $2x^2 + 13x + 15$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

1. Los números 2 y 15 pueden descomponerse como producto de dos factores de las siguientes maneras:

$$2 = 1(2) \qquad\qquad 15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$$

El producto es conmutativo, por tanto $1(2) = 2(1)$.

2. Se sustituyen los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15 hasta que $ad + bc = 13$:

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = 15$:

$$\begin{array}{rcccl} & 1x & \times & 1 & \longrightarrow \; 2x \\ \text{Multiplicar} & \downarrow & & \downarrow \text{Multiplicar} & \quad \downarrow \text{Sumar} \\ & \underline{2x} & & \underline{15} & \longrightarrow \; \underline{15x} \\ & 2x^2 & & 15 & \quad 17x \; ✗ \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = 5$:

$$\begin{array}{rcccl} & 1x & \times & 3 & \longrightarrow \; 6x \\ \text{Multiplicar} & \downarrow & & \downarrow \text{Multiplicar} & \quad \downarrow \text{Sumar} \\ & \underline{2x} & & \underline{5} & \longrightarrow \; \underline{5x} \\ & 2x^2 & & 15 & \quad 11x \; ✗ \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 5$ y $d = 3$:

$$\begin{array}{rcccl} & 1x & \times & 5 & \longrightarrow \; 10x \\ \text{Multiplicar} & \downarrow & & \downarrow \text{Multiplicar} & \quad \downarrow \text{Sumar} \\ & \underline{2x} & & \underline{3} & \longrightarrow \; \underline{3x} \\ & 2x^2 & & 15 & \quad \mathbf{13x} \; ✓ \end{array}$$

3. De lo anterior se obtiene: $2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero. Si existen a, b, c y d números enteros tales que $\boldsymbol{ac = m}$, $\boldsymbol{bd = p}$ y $\boldsymbol{ad + bc = n}$ entonces:

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el esquema del Problema inicial:

a) $3a^2 + 8a + 5$
b) $2x^2 + 7x + 3$
c) $2x^2 + 9x + 9$
d) $2y^2 + 11y + 12$
e) $3y^2 + 8y + 4$
f) $3a^2 + 17a + 20$
g) $4x^2 + 5x + 1$
h) $6x^2 + 11x + 3$
i) $8y^2 + 22y + 5$
j) $6y^2 + 23y + 20$
k) $6x^2 + 17x + 12$
l) $10a^2 + 27a + 18$

Indicador de logro

1.13 Utiliza el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto $(ax + b)(cx + d)$ donde a, b, c y d son enteros positivos.

Secuencia

En noveno grado y en las clases anteriores, solamente se factorizaban trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ o trinomios cuadrados perfectos. En esta clase se introduce el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto notable $(ax + b)(cx + d)$. Observe que, tal como lo enuncia el indicador de logro, solo se utilizan trinomios cuyos valores de a, b, c y d son enteros positivos.

Propósito

El Problema inicial enuncia los pasos a seguir cuando se factoriza aplicando el método de la tijera; para esta clase solamente se tomarán trinomios cuyos coeficientes son positivos para que los estudiantes vayan familiarizándose con el procedimiento. Desde el literal a) hasta el f) el coeficiente de la variable con exponente 2 es un número primo, esto reduce el número de ensayos.

Posibles dificultades

Si con la Solución del Problema inicial los estudiantes aún tienen dificultades entonces desarrolle el literal a) del bloque de Problemas como un ejemplo, explicando paso a paso la solución del mismo.

Solución de problemas:

a)

$$\begin{array}{ccccc} 1a & & 1 & \longrightarrow & 3a \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3a & & 5 & \longrightarrow & 5a \\ \hline 3a^2 & & 5 & & 8a \end{array}$$

Luego, $3a^2 + 8a + 5 = (a + 1)(3a + 5)$.

b)

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \longrightarrow & 6x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & & 1 & \longrightarrow & 1x \\ \hline 2x^2 & & 3 & & 7x \end{array}$$

Luego, $2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$.

c)

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \longrightarrow & 6x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & & 3 & \longrightarrow & 3x \\ \hline 2x^2 & & 9 & & 9x \end{array}$$

Luego, $2x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 3)$.

d)

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & 4 & \longrightarrow & 8y \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 2y & & 3 & \longrightarrow & 3y \\ \hline 2y^2 & & 12 & & 11y \end{array}$$

Luego, $2y^2 + 11y + 12 = (y + 4)(2y + 3)$.

e)

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & 2 & \longrightarrow & 6y \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3y & & 2 & \longrightarrow & 2y \\ \hline 3y^2 & & 4 & & 8y \end{array}$$

Luego, $3y^2 + 8y + 4 = (y + 2)(3y + 2)$.

f)

$$\begin{array}{ccccc} 1a & & 4 & \longrightarrow & 12a \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3a & & 5 & \longrightarrow & 5a \\ \hline 3a^2 & & 20 & & 17a \end{array}$$

Luego, $3a^2 + 17a + 20 = (a + 4)(3a + 5)$.

g)

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 1 & \longrightarrow & 4x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 4x & & 1 & \longrightarrow & 1x \\ \hline 4x^2 & & 1 & & 5x \end{array}$$

Luego, $4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$.

h)

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & 3 & \longrightarrow & 9x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3x & & 1 & \longrightarrow & 2x \\ \hline 6x^2 & & 3 & & 11x \end{array}$$

Luego, $6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$.

i) $8y^2 + 22y + 5 = (2y + 5)(4y + 1)$

j) $6y^2 + 23y + 20 = (2y + 5)(3y + 4)$

k) $6x^2 + 17x + 12 = (2x + 3)(3x + 4)$

l) $10a^2 + 27a + 18 = (2a + 3)(5a + 6)$

1.14 Método de la tijera, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 - 5x - 12$ b) $3y^2 - 11y + 8$

Utiliza el método visto en la clase anterior.

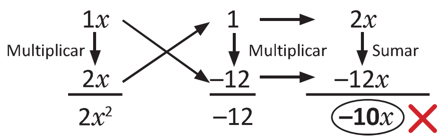
Solución

a) El coeficiente de x^2 y el término independiente deben escribirse como producto de dos números enteros. Como el término independiente es negativo entonces debe ser el resultado de multiplicar un número negativo por uno positivo. Los números 2 y –12 pueden escribirse como producto de dos factores de la siguiente forma:

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

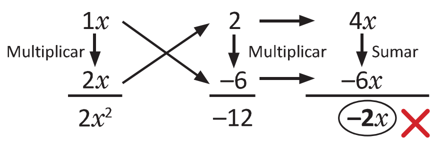
Debe tenerse en cuenta lo siguiente: el resultado de $ad + bc$ al sustituir $a = 1$, $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$ no será el mismo si se toman $a = 1$, $c = 2$, $b = -12$ y $d = 1$; es decir, intercambiar los valores de b y d dará un resultado diferente para $ad + bc$. El método de la tijera es, por tanto, una estrategia para factorizar trinomios que consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta; a esta estrategia de resolución de problemas se le llama **ensayo y error**.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$:

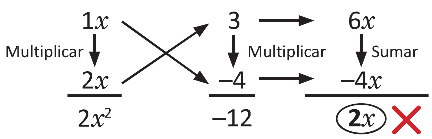


Al sustituir $b = -12$ y $d = 1$ el resultado de $ad + bc$ será igual a –23.

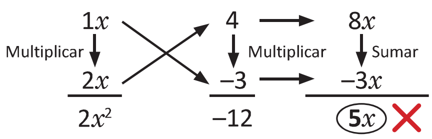
- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 2$ y $d = -6$:



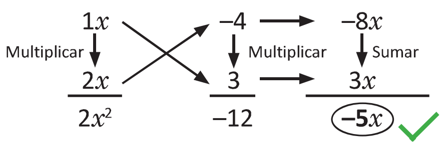
- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = -4$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 4$ y $d = -3$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = -4$ y $d = 3$:



Luego, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

b) Se toman a y c positivos; el coeficiente de y es negativo, mientras que el término independiente es positivo; esto indica que los números b y d deben ser ambos negativos. Teniendo en cuenta lo anterior, los números 3 y 8 pueden escribirse como producto de dos factores de las siguientes formas:

$$3 = 1(3) \qquad\qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

- Si $a = 1$ y $c = 3$, $b = -1$ y $d = -8$:

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & -1 & \longrightarrow & -3y \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3y & & -8 & \longrightarrow & -8y \\ \hline 3y^2 & & 8 & & -11y \end{array}$$

Por lo tanto, $3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero, y m positivo. Para factorizarlo en el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se realiza lo siguiente:

1. Se descomponen los números m y p en dos factores:
   a) si n y p son positivos entonces p debe escribirse como producto de dos números positivos;
   b) si n es negativo y p es positivo entonces p debe escribirse como producto de dos números negativos;
   c) si p es negativo entonces debe escribirse como producto de un número positivo y uno negativo.
2. En el siguiente esquema, se sustituyen los valores de a y c por los factores de m, y los valores de b y d por los factores de p, realizando todas las combinaciones hasta que $ad + bc = n$:

$$\begin{array}{ccccc} ax & & b & \longrightarrow & bcx \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ cx & & d & \longrightarrow & adx \\ \hline acx^2 & & bd & & (ad + bc)x \end{array}$$

3. Se escribe $mx^2 + nx + p$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Al método anterior para factorizar trinomios se le llama **método de la tijera** por la forma cruzada en que se multiplican ax y d, cx y b en el esquema; también se le conoce como método del aspa simple.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de la tijera:

   a) $2x^2 - x - 10$ b) $2y^2 - y - 15$ c) $3y^2 - 16y + 5$
   d) $5x^2 + 2x - 3$ e) $5a^2 - 14a + 8$ f) $7x^2 - 5x - 2$
   g) $4x^2 + 17x - 15$ h) $6y^2 - 17y + 12$ i) $8a^2 - 18a - 5$

2. Sea n un número entero tal que el trinomio $21x^2 + nx + 21$ puede factorizarse en el producto $(ax + b)(cx + d)$, con a, b, c y d números enteros. Explica por qué n es un número par.

3. El binomio $x + 1$ es un factor del trinomio $x^2 + mx - 2$, es decir, $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$. Además, el binomio $2x - 1$ es un factor del trinomio $nx^2 + 5x - 4$. Con base en lo anterior, calcula el resultado de $\frac{n}{m}$.

Indicador de logro

1.14 Utiliza el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto $(ax + b)(cx + d)$ donde a, b, c y d son enteros cualesquiera.

Secuencia

En esta clase se continúa utilizando el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto notable $(ax + b)(cx + d)$, en este caso los números a, b, c y d pueden ser enteros positivos o negativos.

Propósito

En los trinomios del Problema inicial y del bloque de Problemas se admiten coeficientes tanto positivos como negativos para que, en la Conclusión se generalice el método de la tijera.

Posibles dificultades

Si con la Solución del Problema inicial los estudiantes aún tienen dificultades para utilizar el método de la tijera entonces desarrolle el problema 1a) del bloque de Problemas como un ejemplo, explicando paso a paso la solución del mismo.

Solución de problemas:

1a)

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 2 & \longrightarrow & 4x \\ \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & & -5 & \longrightarrow & -5x \\ \hline 2x^2 & & -10 & & -x \end{array}$$

Luego, $2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)$.

1b)

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & -3 & \longrightarrow & -6y \\ \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 2y & & 5 & \longrightarrow & 5y \\ \hline 2y^2 & & -15 & & -y \end{array}$$

Luego, $2y^2 - y - 15 = (y - 3)(2y + 5)$.

1c) $3y^2 - 16y + 5 = (y - 5)(3y - 1)$

1d) $5x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(5x - 3)$

1e) $5a^2 - 14a + 8 = (a - 2)(5a - 4)$

1f) $7x^2 - 5x - 2 = (x - 1)(7x + 2)$

1g) $4x^2 + 17x - 15 = (x + 5)(4x - 3)$

1h) $6y^2 - 17y + 12 = (2y - 3)(3y - 4)$

1i) $8a^2 - 18a - 5 = (2a - 5)(4a + 1)$

2. Como $21x^2 + nx + 21 = (ax + b)(cx + d)$ entonces se cumple lo siguiente: $ac = 21$, $bd = 21$ y $ad + bc = n$. De las primeras dos se deduce que a, c, b y d son todos impares (pues los resultados de los productos son iguales a un número impar). Entonces ad y bc también son números impares; pero su suma, $ad + bc$, dará como resultado un número par. Por lo tanto, $ad + bc = n$ es par.

Para la solución del numeral 2 no es necesario una demostración matemática exhaustiva. Basta con que los estudiantes tengan la idea intuitiva de por qué se cumple que n es par.

3. Si $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$ entonces $-b = -2$ y $1 - b = m$; de lo anterior resulta $b = 2$ y $m = -1$. Se sabe también que $nx^2 + 5x - 4 = (2x - 1)(cx + d)$, usando el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & -1 & \longrightarrow & -cx \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ cx & & d & \longrightarrow & 2dx \\ \hline 2cx^2 & & -d & & (-c + 2d)x \end{array}$$

Luego, $-d = -4$ y $-c + 2d = 5$; al resolver las ecuaciones anteriores resulta $d = 4$ y $c = 3$. Finalmente, $2c = n$, es decir, $n = 6$ y $\frac{n}{m} = \frac{6}{-1} = -6$.

1.15 Combinaciones de métodos de factorización, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$ b) $6x^2y + 57xy + 27y$

Solución

a) Lo primero es extraer el factor común de los términos del polinomio, luego utilizar alguna de las factorizaciones vistas en las clases anteriores:

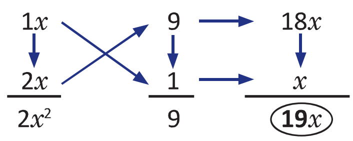
$$\begin{aligned} 6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{factor común } 2x, \\ &= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{asociar los términos dentro del corchete,} \\ &= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{extraer factor común } x \text{ y } 5 \text{ respectivamente,} \\ &= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{extraer factor común } 3y - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$.

b) Igual que en el literal anterior, debe extraerse el factor común de los términos del polinomio y luego utilizar los métodos estudiados en clases anteriores para factorizar:

$$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9) \qquad \text{factor común } 3y.$$

Se utiliza el método de la tijera para factorizar $2x^2 + 19x + 9$:



Por lo tanto, $6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$.

En general

Cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el otro polinomio utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

El Ministerio de Educación (MINED) ha elaborado una serie de videos sobre Matemática en lo cotidiano, uno de ellos presenta la factorización de polinomios. Puedes visualizarlo en el siguiente enlace:
https://goo.gl/ZgJVzs

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $20xy^2 - 20xy - 15x$ b) $90x^3 - 40xy^2$

c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$ d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$

e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$ f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. Factoriza el polinomio $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$.

No desarrolles los productos, identifica en este caso el factor común.

Indicador de logro

1.15 Factoriza polinomios extrayendo el factor común monomio de sus términos.

Secuencia

En la clase se utilizan todos los métodos vistos en la lección para factorizar diferentes polinomios; en cada uno de ellos los estudiantes deben, primero, extraer el factor común de los términos y luego usar otra factorización.

Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que siempre deben verificar si los términos del polinomio poseen un factor común. Para no extenderse tanto en el Problema inicial puede repartir ambos problemas o trabajar solo uno y el otro dejarlo como ejemplo.

Solución de problemas:

1a) $20xy^2 - 20xy - 15x = 5x(4y^2 - 4y - 3)$ extraer factor común $5x$,
$= 5x[(2y)^2 - 2(2y) - 3]$ factorizar $4y^2 - 4y - 3$ usando la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$.
$= 5x(2y + 1)(2y - 3)$

Para factorizar $4y^2 - 4y - 3$ también puede utilizarse el método de la tijera.

1b) $90x^3 - 40xy^2 = 10x(9x^2 - 4y^2)$ extraer factor común $10x$,
$= 10x[(3x)^2 - (2y)^2]$ escribir $9x^2 = (3x)^2$ y $4y^2 = (2y)^2$,
$= 10x(3x + 2y)(3x - 2y)$ factorizar diferencia de cuadrados.

1c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3 = 2xy(9x^2 + 6xy + y^2)$ extraer factor común $2xy$,
$= 2xy[(3x)^2 + 2(3x)(y) + y^2]$ escribir $9x^2 = (3x)^2$ y $6xy = 2(3x)(y)$,
$= 2xy(3x + y)^2$ factorizar trinomio cuadrado perfecto.

1d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab = 3ab(2b^2 - 11b + 12)$ extraer factor común $3ab$,
$= 3ab(b - 4)(2b - 3)$ factorizar $2b^2 - 11b + 12$ usando el método de la tijera.

1e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3 = 9xy(25x^2 - 20xy + 4y^2)$ extraer factor común $9xy$,
$= 9xy[(5x)^2 - 2(5x)(2y) + (2y)^2]$ $25x^2 = (5x)^2$, $20xy = 2(5x)(2y)$ y $4y^2 = (2y)^2$,
$= 9xy(5x - 2y)^2$ factorizar trinomio cuadrado perfecto.

1f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2 = a^2(3bc + 6bd + 15b - 2c - 4d - 10)$
$= a^2[3b(c + 2d + 5) - 2(c + 2d + 5)]$
$= a^2(3b - 2)(c + 2d + 5)$

2. $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2 = (x + 1)[(x - 3y + 4)^2 - (2x + y - 5)^2]$
$= (x + 1)[(x - 3y + 4) + (2x + y - 5)][(x - 3y + 4) - (2x + y - 5)]$
$= (x + 1)(x - 3y + 4 + 2x + y - 5)(x - 3y + 4 - 2x - y + 5)$
$= (x + 1)(3x - 2y - 1)(- x - 4y + 9)$

1.16 Combinaciones de métodos de factorización, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$　　　b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

Solución

a) Los términos del polinomio no poseen un factor común, sin embargo pueden asociarse aquellos que sí lo posean y extraer el factor común, o sea:

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy) \quad \text{asociar términos;}$$

$$\left.\begin{aligned} &= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \\ &= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \end{aligned}\right\} \text{extraer el factor común en cada caso.}$$

Ahora se extrae el factor común polinomio $a + b$ y se factoriza el segundo factor:

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy &= (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy) && \text{extraer el factor común } a + b; \\ &= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2) && \text{ordenar los términos;} \\ &= (a + b)(x - y)^2 && \text{factorizar } x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$.

b) De forma similar al literal anterior, se asocian los términos que posean factor común y se extrae dicho factor:

$$\begin{aligned} 2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n &= 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(m - n) \end{aligned}$$

se factoriza $2x^2 + 5x - 3$ usando el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \rightarrow & 6x \\ \downarrow & \times & \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & -1 & \rightarrow & -x \\ \hline 2x^2 & & -3 & & 5x \end{array}$$

Luego, $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$ y $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$.

En general

Al factorizar un polinomio, si sus términos NO poseen un monomio común entonces se asocian los términos que sí lo posean, se extrae el factor común polinomio y se aplica al otro factor cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

También pueden asociarse términos convenientemente para factorizar un polinomio, sin que estos tengan factor común.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

Indicador de logro

1.16 Factoriza polinomios asociando términos que tienen factor común monomio.

Secuencia

En esta clase, los estudiantes deben asociar los términos de los polinomios presentados que posean factor común monomio; luego de ello, utilizar cualquiera de los métodos vistos en la lección.

Posibles dificultades

Tal como lo indica la Conclusión, recuerde a sus estudiantes que pueden asociar términos que posean factor común. Si considera extenso el Problema inicial, retome solo un literal, retome el otro como ejemplo opcional.

Solución de problemas:

Recuerde que, en la solución de cada literal, la manera de asociar los términos puede ser diferente pero siempre debe llegarse a la misma respuesta. La diferencia será que los factores en cada caso aparecerán conmutados.

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y = (4a^2x + 4a^2y) - (b^2x + b^2y)$
$= 4a^2(x + y) - b^2(x + y)$
$= (4a^2 - b^2)(x + y)$
$= (2a + b)(2a - b)(x + y)$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn = (2cm^2 + 50cn^2 + 20cmn) + (dm^2 + 25dn^2 + 10dmn)$
$= 2c(m^2 + 25n^2 + 10mn) + d(m^2 + 25n^2 + 10mn)$
$= (2c + d)[m^2 + 2m(5n) + (5n)^2]$
$= (2c + d)(m + 5n)^2$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y = (4a^2x - 12abx + 9b^2x) - (8a^2y - 24aby + 18b^2y)$
$= x(4a^2 - 12ab + 9b^2) - 2y(4a^2 - 12ab + 9b^2)$
$= (x - 2y)(4a^2 - 12ab + 9b^2)$
$= (x - 2y)[(2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2]$
$= (x - 2y)(2a - 3b)^2$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2 = (a + b)[(c - d)^2 + 2(c - d)(2c + 3d) + (2c + 3d)^2]$
$= (a + b)[(c - d) + (2c + 3d)]^2$
$= (a + b)(c - d + 2c + 3d)^2$
$= (a + b)(3c + 2d)^2$

1.17 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios (factor común):

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$

b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$

c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$

d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$

e) $2ax + bx + 6ay + 3by$

f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$

g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$

h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. Factoriza los siguientes trinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 - 17x + 70$

b) $y^2 + 3y - 40$

c) $a^2 - 3a - 54$

d) $b^2 + 14b + 33$

e) $m^2 + 2m - 35$

f) $n^2 - 8n - 20$

g) $4x^2 + 24x + 35$

h) $4y^2 - 24y + 27$

i) $9a^2 - 3a - 20$

En el problema 2, para los literales g), h) e i), realiza un cambio de variable de modo que el polinomio pueda transformarse en otro polinomio de la forma $m^2 + pm + q$ y luego factorizarlo en la forma $(m + a)(m + b)$.

3. Factoriza los siguientes polinomios (trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados):

a) $x^2 + 18x + 81$

b) $y^2 - 20y + 100$

c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$

d) $b^2 - 16$

e) $y^2 - 121$

f) $\frac{1}{49} - a^2$

g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$

h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$

i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. Factoriza utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 + 19x + 45$

b) $3y^2 + 26y + 16$

c) $5a^2 - 27a - 18$

d) $3a^2 - 10a + 8$

e) $5b^2 + 13b - 6$

f) $10a^2 - 23a - 5$

g) $12y^2 - 23y + 5$

h) $8x^2 + 10x - 25$

i) $6x^2 + 11x + 4$

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^3y - 100xy^3$

b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$

c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$

d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$

e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$

f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. Factoriza los siguientes polinomios sin desarrollar los productos:

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$

b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$

c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$

d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$

e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$

f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. Factoriza el siguiente polinomio: $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$

8. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $999^2 - 1$

b) $550^2 - 450^2$

c) $98^2 + 4(98) + 4$

d) $995^2 + 3(995) - 10$

Indicador de logro

1.17 Resuelve problemas correspondientes a factorización de polinomios.

Solución de problemas:

1a) $2xy(2xy + 3x - 5)$

1b) $-3b^2(5a^2 - 4b + 7)$

1c) $-2abc(abc + 10b + 5)$

1d) $\frac{1}{2}x\left(xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

1e) $(2a + b)(x + 3y)$

1f) $(m - 4n)(3x - 2y)$

1g) $(5a - 2b)\left(x + \frac{1}{3}y\right)$

1h) $(m + 2n)(2x - 3y + 5)$

2a) $(x - 7)(x - 10)$

2b) $(y + 8)(y - 5)$

2c) $(a + 6)(a - 9)$

2d) $(b + 3)(b + 11)$

2e) $(m + 7)(m - 5)$

2f) $(n + 2)(n - 10)$

2g) $(2x + 5)(2x + 7)$

2h) $(2y - 3)(2y - 9)$

2i) $(3a + 4)(3a - 5)$

3a) $(x + 9)^2$

3b) $(y - 10)^2$

3c) $\left(a + \frac{1}{4}\right)^2$

3d) $(b + 4)(b - 4)$

3e) $(y + 11)(y - 11)$

3f) $\left(\frac{1}{7} + a\right)\left(\frac{1}{7} - a\right)$

3g) $(5x + 3y)^2$

3h) $\left(\frac{3}{2}a + \frac{5}{7}b\right)\left(\frac{3}{2}a - \frac{5}{7}b\right)$

3i) $\left(30x + \frac{11}{10}y\right)\left(30x - \frac{11}{10}y\right)$

4a) $(x + 5)(2x + 9)$

4b) $(y + 8)(3y + 2)$

4c) $(a - 6)(5a + 3)$

4d) $(a - 2)(3a - 4)$

4e) $(b + 3)(5b - 2)$

4f) $(2a - 5)(5a + 1)$

4g) $(3y - 5)(4y - 1)$

4h) $(2x + 5)(4x - 5)$

4i) $(2x + 1)(3x + 4)$

5a) $4xy(x + 5y)(x - 5y)$

5b) $5m(m + 10)(m - 7)$

5c) $3ab(5a - 2b)^2$

5d) $-6xy(4x + 3y)^2$

5e) $2xy(y - 3)(2y - 7)$

5f) $10a(2a + b)(3m - 4n)$

6a) $(6x - 2y + 1)(4x - 2y + 17)$

6b) $(a + b + 1)^2$

6c) $2(y + 5)(2y - 1)$

6d) $2(6y + 1)(3y - 4)$

6e) $(2m + n + 2)^2$

6f) $2(2x + 3)(12x - 1)$

7. $(a + b)(m + n)(x + y)$

8a) $999^2 - 1^2 = (999 + 1)(999 - 1) = 998\,000$

8b) $550^2 - 450^2 = (550 + 450)(550 - 450) = 100\,000$

8c) $98^2 + 2(98)(2) + 2^2 = (98 + 2)^2 = 10\,000$

8d) $995^2 + 3(995) - 10 = (995 + 5)(995 - 2) = 993\,000$