# Lección 2 División de polinomios

## 2.1 División de polinomio por monomio

### Problema inicial

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$ b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

Para realizar la división de un polinomio por un número se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio.

### Solución

a) Se cambia la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor, es decir:

$$
\begin{aligned}
(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 5xy + 4x - y
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$.

b) Como en el literal anterior la división $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ equivale a multiplicar $12ab - 21b^2$ por el recíproco de $3b$; al realizar esto se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right) \\
&= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right) \\
&= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3}\cancel{b}} \\
&= 4a - 7b
\end{aligned}
$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

Luego, $(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$.

### En general

Para dividir un polinomio entre un monomio se multiplica cada término del polinomio por el recíproco del monomio y se simplifica el resultado.

### Ejemplo

Realiza la división $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$.

Aplicando lo visto en la conclusión:

$$
\begin{aligned}
(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right) \\
&= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cancel{x}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} \\
&= -3xy + 8x + 5
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$.

### Problemas

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

Unidad 2

## Indicador de logro

2.1 Realiza la división de un polinomio por un monomio multiplicando por el recíproco del divisor.

## Secuencia

En octavo grado se trabajó la división de un polinomio por un número. En esta clase se repasa lo anterior y se generaliza el procedimiento para dividir un polinomio por un monomio.

## Propósito

En el literal a) del Problema inicial se repasa la división de un polinomio por un número estudiada en octavo grado, transformándola en la multiplicación del polinomio por el recíproco del número; este mismo proceso se utiliza en el literal b) cuando se divide entre un monomio. La Conclusión generaliza este proceso, el cual debe ser utilizado tanto en el Ejemplo (el divisor es negativo) como en el bloque de Problemas.

## Posibles dificultades

De ser necesario, debe recordarles el proceso a utilizar cuando se multiplican fracciones.

Solución de problemas:

**a)** $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a) = -8abc\left(\frac{1}{2a}\right) + 22a^2\left(\frac{1}{2a}\right) - 18a\left(\frac{1}{2a}\right)$

$= -\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{a}bc}{\cancel{2}\cancel{a}} + \frac{\overset{11}{\cancel{22}}\overset{a}{\cancel{a^2}}}{\cancel{2}\cancel{a}} - \frac{\overset{9}{\cancel{18}}\cancel{a}}{\cancel{2}\cancel{a}}$

$= -4bc + 11a - 9$

**b)** $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz) = 18xyz\left(\frac{1}{3xyz}\right) + 24x^2yz\left(\frac{1}{3xyz}\right)$

$= \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\cancel{xyz}}{\cancel{3}\cancel{xyz}} + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{yz}}{\cancel{3}\cancel{xyz}}$

$= 6 + 8x$

**c)** $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab) = -10a^2b^2\left(-\frac{1}{5ab}\right) + 45a^2bc\left(-\frac{1}{5ab}\right) - 20abc\left(-\frac{1}{5ab}\right)$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{10}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}} - \frac{\overset{9}{\cancel{45}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\cancel{b}c}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}} + \frac{\overset{4}{\cancel{20}}\cancel{a}\cancel{b}c}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}}$

$= 2ab - 9ac + 4c$

**d)** $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz) = -xyz + 10xy + 8yz$

**e)** $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab) = \frac{4}{5}a + \frac{6}{5}b$

**f)** $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy) = \frac{7}{3}z^2 - \frac{5}{2}yz^2 + 3z$

**g)** $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{b}{2}\right) = -2ab^2\left(\frac{2}{b}\right) + 5ab^3\left(\frac{2}{b}\right)$

$= -4ab + 10ab^2$

**h)** $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right) = -6z + \frac{4}{3}$

# Lección 2

## 2.2 División de polinomio por polinomio

### Definición

Dados dos polinomios $p$ y $q$ en una variable, entonces existen los polinomios $d$ y $r$ tales que:

$$p = qd + r$$

donde $r$ es cero o de grado menor a $q$. Como en la división de números: el polinomio $\boldsymbol{p}$ **es el dividendo**, $\boldsymbol{q}$ **el divisor**, $\boldsymbol{d}$ **es el cociente** y el polinomio $\boldsymbol{r}$ **es el residuo** de la división de $p$ entre $q$.

El procedimiento para dividir polinomios es el siguiente:

1. Escribir la división en forma vertical y ordenar los términos del dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el término del cociente encontrado en el paso 2. Luego, restar este resultado del dividendo.
4. Repetir este proceso, ahora con el resultado obtenido en el paso 3 como dividendo, hasta que el grado del polinomio del dividendo sea menor al grado del polinomio del divisor.

> En Educación Básica se aprende a dividir números en forma vertical, ubicando los elementos de la división como sigue:
>
> $$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{Divisor}} \\ \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

A este procedimiento también se le conoce como **división larga** de polinomios.

### Ejemplo 1

Realiza la división $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ y escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Los términos del dividendo y el divisor ya se encuentran ordenados de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable. Se escribe $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ como la división en forma vertical de números:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2\;} \end{array}$$

se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, o sea $x^3 \div x$, para obtener el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2\;} \\ & x^2 \longleftarrow \text{Resultado de } x^3 \div x \end{array}$$

se multiplica el divisor por el primer término del cociente, o sea $(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$; este resultado se resta del dividendo:

Al restar $x^3 + 2x^2$ del dividendo, los términos del primero cambian de signo. $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2\;} \\ \underline{-\cancel{x^3} - 2x^2\phantom{- 5x - 4}} & x^2 \\ 0 + x^2 - 5x - 4 & \end{array}$$

Repite el proceso, tomando $x^2 - 5x + 4$ como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2\;} \\ \underline{-x^3 - 2x^2\phantom{- 5x - 4}} & x^2 + x \longleftarrow \text{Resultado de } x^2 \div x \\ 0 + \cancel{x^2} - 5x - 4 & \\ \underline{-\cancel{x^2} - 2x\phantom{- 4}} & \\ 0 \;\; - 7x - 4 & \end{array}$$

Restar el resultado de $(x + 2)(x)$ de $x^2 - 5x - 4$. $\longrightarrow$

# Lección 2

Ahora se toma $-7x-4$ como dividendo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & -5x & -4 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2+x-7 \\ \cline{1-2}
0 & +x^2 & -5x & -4 & \\
 & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\cancel{7x} & -4 & \\
 & & +\cancel{7x} & +14 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +10 &
\end{array}
$$

$\longleftarrow$ Resultado de $(-7x) \div x$

Restar el resultado de $(x+2)(-7)$ de $-7x-4$. $\longrightarrow$

Puedes desarrollar la operación: $(x+2)(x^2+x-7)+10$ para comprobar si la división es correcta.

Luego, $x^3+3x^2-5x-4 = (x+2)(x^2+x-7)+10$.

## Ejemplo 2

Realiza la división $(2x^3-20x-50) \div (x^2+x-4)$. Escribe el dividendo en la forma $qd+r$.

El dividendo no posee el término con $x^2$, entonces se coloca cero en la posición donde "debería" estar este término al momento de escribir la división en forma vertical:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

luego, se realiza el proceso visto en el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & +0x^2 & -20x & -50 & x^2+x-4 \\ \cline{5-5}
-\cancel{2x^3} & -2x^2 & +8x & & 2x-2 \\ \cline{1-3}
0 & -\cancel{2x^2} & -12x & -50 & \\
 & \cancel{2x^2} & +2x & -8 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -10x & -58 &
\end{array}
$$

Restar $(x^2+x-4)(2x)$ de $2x^3-20x-50$ $\longrightarrow$

Restar $(x^2+x-4)(-2)$ de $-2x^2-12x-50$ $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Resultado de $(2x^3) \div x^2$

$\longrightarrow$ Resultado de $(-2x^2) \div x^2$

Por lo tanto, $2x^3-20x-50 = (x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$.

## Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd+r$:

   a) $(x^3+x^2-5x+7) \div (x+3)$
   b) $(x^3+2x^2-5x+7) \div (x-1)$
   c) $(x^3+4x^2-8x-16) \div (x+5)$
   d) $(x^3-6x^2+4x+19) \div (x-3)$
   e) $(x^3+3x+9) \div (x+2)$
   f) $(x^3-7x^2+11) \div (x-2)$
   g) $(x^3+5x^2+5x+3) \div (x^2+4x+1)$
   h) $(x^3+x^2-12x+2) \div (x^2+3x-6)$
   i) $(x^3-5x^2+5x-1) \div (x-1)$
   j) $(x^3+4x^2-6x-5) \div (x+5)$
   k) $(2x^3-3x^2-x-2) \div (2x^2+x+1)$
   l) $(3x^3+2x^2-2x-1) \div (3x^2-x-1)$

2. Encuentra el valor de $a$ para que el residuo de la división $(x^3+2x^2-x+a) \div (x-2)$ sea igual a cero.

3. Efectúa la división $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1) \div (2x^2+1)$.

## Indicador de logro

2.2 Realiza la división de un polinomio por un polinomio utilizando el algoritmo de la división.

## Secuencia

En esta clase se introduce el algoritmo de la división de polinomios, también conocido como "la división larga de polinomios". Para ello se recuerda la forma vertical de la división de números visto en educación básica, pues el proceso es similar para polinomios.

## Propósito

La clase comienza con la Definición, pues con los Ejemplos se pretende ir haciendo el paso a paso descrito en la misma y que los estudiantes se apropien del algoritmo para utilizarlo en el bloque de Problemas. Observe que el numeral 2 requiere de un análisis más profundo y tener claro cuál es el residuo en una división.

## Posibles dificultades

Puede desarrollar un ejercicio sobre división en forma vertical de números naturales vista en educación básica para comparar con el proceso en la división de polinomios.

Solución de problemas:

**1a)**

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} + & x^2 & - 5x & + 7 & x+3 \\ \cline{5-5}
\cancel{-x^3} & - 3x^2 & & & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
0 & \cancel{-2x^2} & - 5x & + 7 & \\
 & \cancel{+2x^2} & + 6x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & \cancel{+x} & + 7 & \\
 & & \cancel{-x} & - 3 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & + 4 &
\end{array}$$

Luego, $x^3 + x^2 - 5x + 7 = (x + 3)(x^2 - 2x + 1) + 4$.

**1b)**

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & + 2x^2 & - 5x & + 7 & x-1 \\ \cline{5-5}
\cancel{-x^3} & + x^2 & & & x^2 + 3x - 2 \\ \hline
0 & \cancel{+3x^2} & - 5x & + 7 & \\
 & \cancel{-3x^2} & + 3x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & \cancel{-2x} & + 7 & \\
 & & \cancel{+2x} & - 2 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & + 5 &
\end{array}$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = (x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 5$.

**1c)** $x^3 + 4x^2 - 8x - 16 = (x + 5)(x^2 - x - 3) - 1$

**1d)** $x^3 - 6x^2 + 4x + 19 = (x - 3)(x^2 - 3x - 5) + 4$

**1e)** $x^3 + 3x + 9 = (x + 2)(x^2 - 2x + 7) - 5$

**1f)** $x^3 - 7x^2 + 11 = (x - 2)(x^2 - 5x - 10) - 9$

**1g)** $x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 4x + 1)(x + 1) + 2$

**1h)** $x^3 + x^2 - 12x + 2 = (x^2 + 3x - 6)(x - 2) - 10$

**1i)** $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

**1j)** $x^3 + 4x^2 - 6x - 5 = (x + 5)(x^2 - x - 1)$

**1k)** $2x^3 - 3x^2 - x - 2 = (2x^2 + x + 1)(x - 2)$

**1l)** $3x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (3x^2 - x - 1)(x + 1)$

**2.** Al utilizar el algoritmo de la división para efectuar $(x^3 + 2x^2 - x + a) \div (x - 2)$ se obtiene como residuo $a + 14$; para que este sea igual a cero entonces debe ocurrir:

$$a + 14 = 0$$

De lo anterior se obtiene $a = -14$. Puede sustituirse este valor para verificar que el residuo de la división

$$(x^3 + 2x^2 - x - 14) \div (x - 2)$$

es igual a cero.

**3.** $2x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = (2x^2 + 1)(x^2 + 3x - 1)$

Aún no se ha estudiado sobre propiedades de las potencias, por lo que puede indicar a sus estudiantes que $x^2(x^2) = x^4$.

## 2.3 División sintética, parte 1

### Definición

La **división sintética** es un método para realizar divisiones entre polinomios en una variable y se utiliza cuando el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$. En este método se trabaja con el esquema:

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{Dividendo} & \\ a & & \\ \hline & \text{Cociente} & \text{Residuo} \end{array}$$

> Este método también funciona cuando se divide entre un polinomio de la forma $mx - a$. En este caso, se ubica el número $\frac{a}{m}$ en lugar de $a$.

El procedimiento es el siguiente:

1. Ordenar los términos del dividendo según las potencias decrecientes de la variable. Luego se escriben los coeficientes del dividendo en forma horizontal, en la parte con título “Dividendo”.
2. Se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte con título “Cociente”; luego se multiplica este número por el valor de $a$ y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades del paso 2, el resultado será el segundo coeficiente del cociente.
4. Repetir este proceso hasta obtener un número debajo del término independiente del dividendo.
5. El residuo será la suma de las cantidades de la última columna; los números a la izquierda del residuo corresponden a los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado del polinomio del dividendo.

### Ejemplo

Utiliza la división sintética para realizar $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

> $x + 2 = x - (-2)$, es decir, $a = -2$

De acuerdo al esquema mostrado en la definición, se escriben los coeficientes del polinomio del dividendo en el lugar correspondiente, en forma horizontal; se sustituye también el valor de $a = -2$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte correspondiente al cociente (este será el coeficiente de la variable con mayor potencia del polinomio del cociente). Este número se multiplica por $-2$ y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo, o sea, debajo de 3:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & \downarrow & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$-2(1)$

se efectúa la suma $3 + (-2)$ y el resultado será el segundo número del cociente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

Resultado de $3 + (-2)$

se repite el proceso ahora multiplicando –2 por el segundo número del cociente, se escribe el resultado debajo de –5 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -7 & \end{array}$$

Resultado de –5 + (–2)

se multiplica –2 por –7, el resultado se escribe debajo de –4 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & -7 & 10 \end{array}$$

Resultado de –4 + 14

Este último resultado 10, corresponde al residuo de la división. Los números 1, 1 y –7 son los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será 2 pues el grado del polinomio del dividendo es 3; o sea, el polinomio del cociente es: $\boldsymbol{x^2 + x - 7}$.

Por lo tanto, $x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$.

A la división sintética también se le conoce como **método de Ruffini** o **regla de Ruffini** debido al matemático italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822), que además estudió Medicina, Filosofía y Literatura en la Universidad de Módena en Italia. Puedes comprobar que el resultado de la división sintética es el mismo que el de la división larga.

## Problemas

Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

## Indicador de logro

2.3 Efectúa la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ utilizando la división sintética.

## Secuencia

En la clase se plantea y utiliza el algoritmo de la división sintética cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$. Puede utilizarse la división larga de polinomios para comprobar que los resultados son iguales.

## Propósito

Similar a la clase 2.2, se comienza con la Definición para que en los Ejemplos se desarrolle el paso a paso del proceso de la división sintética y los estudiantes no tengan mayor dificultad en el bloque de Problemas.

Solución de problemas:

**a)** $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −12 | 23 | −5 |
| 3 | | 3 | −27 | −12 |
| | 1 | −9 | −4 | −17 |

$x^3 - 12x^2 + 23x - 5 = (x - 3)(x^2 - 9x - 4) - 17$

**b)** $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 9 | −13 | −4 |
| 1 | | 1 | 10 | −3 |
| | 1 | 10 | −3 | −7 |

$x^3 + 9x^2 - 13x - 4 = (x - 1)(x^2 + 10x - 3) - 7$

**c)** $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −4 | −11 | −2 |
| −1 | | −1 | 5 | 6 |
| | 1 | −5 | −6 | 4 |

$x^3 - 4x^2 - 11x - 2 = (x + 1)(x^2 - 5x - 6) + 4$

**d)** $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | −31 | 20 |
| −5 | | −5 | 35 | −20 |
| | 1 | −7 | 4 | 0 |

$x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = (x + 5)(x^2 - 7x + 4)$

**e)** $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −3 | −4 | −1 |
| 2 | | 4 | 2 | −4 |
| | 2 | 1 | −2 | −5 |

$2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 2)(2x^2 + x - 2) - 5$

**f)** $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | −11 | −5 | 4 |
| 4 | | 12 | 4 | −4 |
| | 3 | 1 | −1 | 0 |

$3x^3 - 11x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(3x^2 + x - 1)$

# Lección 2

## 2.4 División sintética, parte 2

### Problema inicial

Realiza la división $(x^3 - 8) \div (x - 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Si falta una potencia de la variable debes colocar cero en el lugar correspondiente.

### Solución

El polinomio $x^3 - 8$ no posee términos con las variables $x^2$ y $x$, entonces debe colocarse cero en el lugar correspondiente:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - 8) \div (x - 2)$$

Utilizando división sintética se obtiene lo siguiente:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | –8 |
| 2 | ↓ | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 2 | 4 | 0 |

El polinomio del cociente es $x^2 + 2x + 4$ y el residuo es cero. Por lo tanto, $(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

### En general

Al dividir dos polinomios en una variable, los términos del dividendo y del divisor siempre deben estar ordenados según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.

Si el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ entonces se utiliza la división sintética; en cualquier otro caso se utiliza la división larga de polinomios.

### Ejemplo

Realiza la división $(x^2 - 2x^3 - 20) \div (3 + x)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Deben ordenarse los polinomios del dividendo y del divisor de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable, y colocar cero en el lugar donde falte una de la potencias:

$$(-2x^3 + x^2 + 0x - 20) \div (x + 3)$$

como el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ se utiliza división sintética, con $a = -3$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | –2 | 1 | 0 | –20 |
| –3 | ↓ | 6 | –21 | 63 |
| | –2 | 7 | –21 | 43 |

Luego, $-2x^3 + x^2 + 0 - 20 = (x + 3)(-2x^2 + 7x - 21) + 43$.

### Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 40x + 12) \div (x - 6)$

b) $(2x^3 - 65x - 45) \div (x + 5)$

c) $(x^3 - 50) \div (x - 4)$

d) $(7x - 2x^3 - 5) \div (x + 2)$

e) $(10x^2 - 10 - 3x^3) \div (-3 + x)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. Determina el valor de $a$ para que el residuo de la división $(x^3 - 27) \div (x - a)$ sea igual a cero.

## Indicador de logro

2.4 Utiliza la división sintética cuando el dividendo no posee todas las potencias de la variable.

## Secuencia

En esta clase se continúa con el algoritmo de la división sintética. En este caso, los polinomios tomados como dividendo no poseen todas las potencias de la variable.

## Propósito

Tanto en el Problema inicial como en el Ejemplo y el bloque de Problemas, los estudiantes deben recordar que, tal y como se hace en la división larga de polinomios, deben colocar cero en el “espacio” correspondiente a la potencia de la variable que no aparezca.

Solución de problemas:

**1a)** $(x^3 + 0x^2 - 40x + 12) \div (x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -40 & 12 \\ 6 & & 6 & 36 & -24 \\ \hline & 1 & 6 & -4 & -12 \end{array}$$

$x^3 - 40x + 12 = (x - 6)(x^2 + 6x - 4) - 12$

**1b)** $(2x^3 + 0x^2 - 65x - 45) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & -65 & -45 \\ -5 & & -10 & 50 & 75 \\ \hline & 2 & -10 & -15 & 30 \end{array}$$

$2x^3 - 65x - 45 = (x + 5)(2x^2 - 10x - 15) + 30$

**1c)** $(x^3 + 0x^2 + 0x - 50) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -50 \\ 4 & & 4 & 16 & 64 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & 14 \end{array}$$

$x^3 - 50 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 14$

**1d)** $( - 2x^3 + 0x^2 + 7x - 5) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -2 & 0 & 7 & -5 \\ -2 & & 4 & -8 & 2 \\ \hline & -2 & 4 & -1 & -3 \end{array}$$

$-2x^3 + 7x - 5 = (x + 2)(-2x^2 + 4x - 1) - 3$

**1e)** $(- 3x^3 + 10x^2 + 0x - 10 ) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -3 & 10 & 0 & -10 \\ 3 & & -9 & 3 & 9 \\ \hline & -3 & 1 & 3 & -1 \end{array}$$

$- 3x^3 + 10x^2 - 10 = (x - 3)(-3x^2 + x + 3) - 1$

**1f)** $\left(x^3 + 0x^2 + 0x + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}$$

$x^3 + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

**2.** Usando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 - 27 \end{array}$$

Debe ocurrir entonces que $a^3 - 27 = 0$, o sea, $a^3 = 27$. El número que satisface lo anterior es 3, pues $3^3 = 27$. Luego, $a = 3$; puede efectuarse $(x^3 - 27) \div (x - 3)$ y comprobar que el residuo es cero.

## 2.5 Teorema del residuo

### Problema inicial

Dados los polinomios $p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ y $q = x - 5$:

1. Encuentra el residuo de la división $p \div q$.
2. Sustituye $x = 5$ en el polinomio $p$. ¿A qué es igual este resultado?

### Solución

1. Utilizando la división sintética:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & -9 & -6 & 7 \\
5 & \downarrow & 10 & 5 & -5 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & 2
\end{array}
$$

El residuo al realizar $p \div q$ es 2.

2. Al sustituir $x = 5$ en el polinomio $p$ se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Este resultado es el residuo de la división $p \div q$.

Sean $p$, $q$, $d$ y $r$ polinomios en una variable $x$ tales que $p = qd + r$ y $q = x - a$. Así:

$$p = (x - a)d + r$$

Sustituir $x = a$ en $p$ será igual a sustituir $x = a$ en la expresión $(x - a)d + r$, cuyo resultado es igual a $r$:

$$(a - a)d + r = (0)d + r = r$$

Luego, el residuo al efectuar la división de polinomios $p \div q$ es igual a sustituir $x = a$ en el polinomio $p$.

### Teorema

Sean $p$ y $q$ dos polinomios en una variable, con $q$ de la forma $x - a$. El residuo al realizar la división $p \div q$ es igual al valor obtenido cuando se sustituye $x = a$ en el polinomio $p$. A este resultado se le conoce como **teorema del residuo** o **teorema del resto**.

### Ejemplo

Encuentra el residuo que se obtiene al realizar la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$.

Utilizando el teorema, el residuo será igual al valor obtenido al sustituir $x = -7$ en $x^3 + 8x^2$, es decir:

$$
\begin{aligned}
x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2 \\
&= -343 + 392 \\
&= 49
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el residuo de la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ es 49.

### Problemas

1. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$

b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$

c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$

d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$

e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$

f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$

g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

2. En cada caso determina el valor de $a$ para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = x^3 - 4ax + 3$, $q = x - 1$

b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2$, $q = x - 2$

## Indicador de logro

2.5 Calcula el residuo de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ utilizando el teorema del residuo.

## Secuencia

Luego de haber desarrollado la división de polinomios se presenta el teorema del residuo. Este será utilizado en la factorización de polinomios de grado tres que se estudiará en las siguientes clases.

## Propósito

El Problema inicial pretende, mediante un caso particular, ejemplificar el resultado enunciado en el Teorema. El Ejemplo lo utiliza de una forma más concreta, misma que deben seguir los estudiantes en el numeral 1 del bloque de Problemas.

Solución de problemas:

**1a)** Utilizando el teorema del residuo, se sustituye $x = 1$ en el polinomio del dividendo, o sea:

$$\begin{aligned} 3(1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 2 &= 3 - 2 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, el residuo de $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$ es igual a 0.

**1b)** Se sustituye $x = 2$ en el polinomio del dividendo:

$$\begin{aligned} (2)^3 + 2(2)^2 - 14(2) + 2 &= 8 + 8 - 28 + 2 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Luego, el residuo de $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$ es igual a $-10$.

**1c)** Sustituyendo $x = 10$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} -(10)^3 + 9(10)^2 + 7(10) + 15 &= -1\,000 + 900 + 70 + 15 \\ &= -15 \end{aligned}$$

El residuo de $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$ es $-15$.

**1d)** Sustituyendo $x = -1$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} 3(-1)^3 - 5(-1) &= -3 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

El residuo de $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$ es 2.

**1e)** Sustituyendo $x = -3$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} 2(-3)^3 - 4(-3)^2 - 21(-3) + 30 &= -54 - 36 + 63 + 30 \\ &= 3 \end{aligned}$$

El residuo de $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$ es 3.

**1f)** Sustituyendo $x = -1$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} (-1)^3 - 7(-1)^2 + 55 &= -1 - 7 + 55 \\ &= 47 \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$ es 47.

**1g)** Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$ es $\frac{3}{8}$.

**1h)** Sustituyendo $x = -\frac{1}{3}$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 &= -\frac{1}{27} + \frac{1}{3} - 1 \\ &= -\frac{19}{27} \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$ es $-\frac{19}{27}$.

**2a)** Sustituyendo $x = 1$ en $p$:

$$1^3 - 4a(1) + 3 = -4a + 4$$

Debe ocurrir que $-4a + 4 = 0$, luego:

$$\begin{aligned} 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a$ debe ser igual a 1.

**2b)** Sustituyendo $x = 2$ en $p$:

$$-(2)^3 + a(2)^2 - a(2) + a^2 = a^2 + 2a - 8$$

Debe ocurrir que $a^2 + 2a - 8 = 0$; al resolver la ecuación se obtiene $a = -4$ y $a = 2$. Por lo tanto, el valor de $a$ debe ser igual a $-4$ o 2.

# Lección 2

## 2.6 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1

### Problema inicial

Sea $p = x^3 + 4x^2 + x - 6$:

1. Verifica que el valor obtenido al sustituir $x = 1$ en el polinomio $p$ es igual a cero.
2. Factoriza el polinomio $p$.

¿Cuál será el residuo al dividir $p$ entre $x - 1$?

### Solución

1. Sustituyendo $x = 1$ en el polinomio $p$ se obtiene:

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

es decir, el valor del polinomio $p$ es igual a cero cuando $x = 1$.

2. Utilizando el teorema del residuo y con base en el resultado del literal a), el residuo al dividir el polinomio $p$ entre $x - 1$ será igual a cero. Entonces $p$ puede escribirse en la forma $(x - 1)d$, donde $d$ es un polinomio de grado 2 (pues el producto es de grado 3). Para encontrar al polinomio $d$ se realiza $p \div (x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

luego, $d = x^2 + 5x + 6$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

### Teorema

Sea $p$ un polinomio cualquiera. Si el valor de $p$ al sustituir $x = a$ es igual a cero entonces $p$ puede escribirse en la forma $(x - a)d$, donde $d$ es un polinomio de un grado menor que $p$. Este resultado se conoce como **teorema del factor**.

### Ejemplo

Sea $p = x^3 - 7x + 6$. Verifica que si $x = -3$ entonces $p = 0$ y utiliza esto para factorizar el polinomio $p$.

Al sustituir $x = -3$ en $p$ se obtiene:

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

Por el teorema del factor, $p$ puede escribirse en la forma $(x + 3)d$. Se utiliza división sintética para encontrar $d$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -3 & & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

luego, $d = x^2 - 3x + 2$ y este se factoriza como el producto $(x - 1)(x - 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

### Problemas

Para cada caso verifica que el valor del polinomio $p$ es cero si $x = a$; luego factoriza $p$:

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2$; $a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$; $a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$; $a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20$; $a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$; $a = 5$

## Indicador de logro

2.6 Utiliza el teorema del factor para factorizar polinomios de la forma $x^3 + mx^2 + nx + k$ cuando se conoce uno de sus factores lineales.

## Secuencia

En esta clase se utilizan los procedimientos y resultados vistos en clases anteriores sobre división de polinomios y residuos, y el teorema del factor, para factorizar polinomios de grado a lo sumo 3. Observe que, en los polinomios utilizados, el coeficiente de $x^3$ es igual a 1.

## Propósito

El Problema inicial sirve para mostrar el significado de que en la división de polinomios el residuo sea cero. Junto con el Teorema del Factor y el Ejemplo de la clase se presenta cómo factorizar un polinomio de grado 3, partiendo de uno de sus factores.

Solución de problemas:

**a)** Se sustituye $x = 1$ en el polinomio $p$:

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - x - 2$ puede escribirse en la forma $(x - 1)d$. Se usa división sintética para encontrar $d$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | –1 | –2 |
| 1 | | 1 | 3 | 2 |
| | 1 | 3 | 2 | 0 |

$d = x^2 + 3x + 2$, y se factoriza como $(x + 2)(x + 1)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1).$$

**b)** Se sustituye $x = -1$ en el polinomio $p$:

$$(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -12 + 12 = 0$$

$p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ puede escribirse en la forma $(x + 1)d$. Se usa división sintética para encontrar $d$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 11 | 6 |
| –1 | | –1 | –5 | –6 |
| | 1 | 5 | 6 | 0 |

$d = x^2 + 5x + 6$, y se factoriza como $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 3)(x + 2).$$

**c)** Se sustituye $x = 2$ en el polinomio $p$:

$$2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 16 - 16 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ puede escribirse en la forma $(x - 2)d$. Se usa división sintética para encontrar $d$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | –5 | –6 |
| 2 | | 2 | 8 | 6 |
| | 1 | 4 | 3 | 0 |

$d = x^2 + 4x + 3$, y se factoriza como $(x + 3)(x + 1)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x + 1).$$

**d)** Se sustituye $x = -2$ en el polinomio $p$:

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 = -28 + 28 = 0$$

$p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ puede escribirse en la forma $(x + 2)d$. Se usa división sintética para encontrar $d$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –5 | –2 | 24 |
| –2 | | –2 | 14 | –24 |
| | 1 | –7 | 12 | 0 |

$d = x^2 - 7x + 12$, y se factoriza como $(x - 3)(x - 4)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4).$$

**e)** Se sustituye $x = -4$ en el polinomio $p$:

$$(-4)^3 - 21(-4) - 20 = -84 + 84 = 0$$

$p = x^3 - 21x - 20$ puede escribirse en la forma $(x + 4)d$. Al usar división sintética para encontrar $d$ se obtiene $d = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 21x - 20 = (x + 4)(x + 1)(x - 5).$$

**f)** Se sustituye $x = 5$ en el polinomio $p$:

$$5^3 - 9(5)^2 + 23(5) - 15 = 240 - 240 = 0$$

$p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ puede escribirse en la forma $(x - 5)d$. Al usar división sintética para encontrar $d$ se obtiene $d = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 5)(x - 1)(x - 3).$$

## 2.7 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2



### Problema inicial

Sea $p = x^3 - 19x - 30$:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina en cuál de ellos $p$ es igual a cero; luego factoriza el polinomio $p$.

### Solución

1. Los divisores del término independiente –30 son: ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 y ±30 (se coloca "±" para indicar el divisor positivo y negativo), estos pueden encontrarse al descomponer 30 en sus factores primos.

2. Se sustituye el valor de $x$ en el polinomio $p$ por los números encontrados en el literal anterior:

   a) si $x = 1$ entonces $(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$;
   b) si $x = -1$ entonces $(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$;
   c) si $x = 2$ entonces $(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$;
   d) si $x = -2$ entonces $(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$.

   Por el teorema del factor, el polinomio $p$ se puede escribir en la forma $(x + 2)d$; para encontrar $d$ se utiliza división sintética:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -19 & -30 \\
-2 & \downarrow & -2 & 4 & 30 \\
\hline
 & 1 & -2 & -15 & 0
\end{array}
$$

   entonces $d = x^2 - 2x - 15$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

### Conclusión

Sea $p = x^3 + mx^2 + nx + k$; los posibles valores de $a$ tales que $p$ pueda escribirse en la forma $(x - a)d$ son los divisores del término independiente $k$.

Es decir, para factorizar $p = x^3 + mx^2 + nx + k$ puede realizarse lo siguiente:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina cuál de ellos hace que el valor del polinomio sea igual a cero.
3. Realiza la división para escribir $p$ en la forma $(x - a)d$, donde $d$ es un polinomio de grado 2.
4. Factoriza $d$ con cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

### Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
   b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
   c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$
   e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$
   f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. Factoriza: $(x + 10)^3 + 1$. Sustituye $x + 10$ por $y$.

3. Encuentra la suma de los factores del polinomio: $x^3 - 13x - 12$.

## Indicador de logro

2.7 Factoriza polinomios de la forma $x^3 + mx^2 + nx + k$ encontrando los divisores del término independiente y aplicando el teorema del factor.

## Secuencia

En esta clase se factorizan polinomios de grado 3, encontrando primero un número entero $a$ tal que al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado sea cero, y luego aplicar lo estudiado en la clase 2.6. Para ello se utiliza un resultado en álgebra sobre los divisores del término independiente del polinomio, por esa razón solo se incluyen polinomios cuyo coeficiente de la variable con exponente 3 es igual a 1.

## Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que siempre deben tomar los divisores positivos y negativos del término independiente y probar con cuál de ellos el polinomio se hace cero. Para encontrar los divisores, pueden descomponer el término independiente en sus factores primos.

### Solución de problemas:

**1a)** Los divisores de 2 son ±1 y ±2; al sustituir $x = 1$ en $x^3 - 2x^2 - x + 2$ se obtiene:

$$1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 3 - 3 = 0$$

Luego, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)d$; se utiliza división sintética para encontrar $d$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

Es decir, $d = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, y:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

**1b)** Los divisores de –2 son ±1 y ±2; al sustituir $x = 1$ en $x^3 + 2x^2 - x - 2$ se obtiene:

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)d$; se utiliza división sintética para encontrar $d$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

Es decir, $d = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, y:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

**1c)** $x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$

**1d)** $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = (x - 3)(x + 3)(x - 5)$

**1e)** $y^3 - 4y^2 + y + 6 = (y + 1)(y - 2)(y - 3)$

**1f)** $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = (y - 2)(y + 2)(y - 3)$

**2.** Al sustituir $y = x + 10$ se obtiene $y^3 + 1$. Los divisores de 1 son ±1; si $y = -1$ entonces:

$$(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Luego, $y^3 + 1 = (y + 1)d$; al usar la división sintética para encontrar $d$ se obtiene $d = y^2 - y + 1$; este polinomio no se puede factorizar, por tanto $y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$. Se sustituye $y = x + 10$:

El trinomio $y^2 - y + 1$ tiene raíces complejas.

$$\begin{aligned}(x + 10)^3 + 1 &= (x + 10 + 1)[(x + 10)^2 - (x + 10) + 1] \\ &= (x + 11)(x^2 + 20x + 100 - x - 10 + 1) \\ &= (x + 11)(x^2 + 19x + 91)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 10)^3 + 1 = (x + 11)(x^2 + 19x + 91)$.

**3.** Se debe factorizar $x^3 - 13x - 12$. Los divisores de –12 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12. Al sustituir $x = -1$:

$$(-1)^3 - 13(-1) - 12 = -13 + 13 = 0$$

Luego, $x^3 - 13x - 12 = (x + 1)d$; si se utiliza la división sintética para encontrar $d$ se obtiene $d = x^2 - x - 12$, el cual a su vez se factoriza en $(x + 3)(x - 4)$. Así, $x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$; sumando sus factores:

$$(x + 1) + (x + 3) + (x - 4) = 3x.$$

# Lección 2

## 2.8 Factorizaciones sucesivas

### Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$

b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

### Solución

a) Primero debe extraerse el factor común de los términos del polinomio, en este caso es $y^2$:

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2$$
$$= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$$

se factoriza $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ utilizando el teorema del factor y división sintética; en este caso, el polinomio es igual a cero cuando $x = 2$:

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –2 | –9 | 18 |
| 2 | | 2 | 0 | –18 |
| | 1 | 0 | –9 | 0 |

de lo anterior, $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x^2 - 9)$. El tercer factor, $x^2 - 9$, es una diferencia de cuadrados que se factoriza en el producto $(x + 3)(x - 3)$. Por lo tanto,

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x + 3)(x - 3).$$

b) No todos los términos tienen un monomio común, así que se asocian aquellos que lo posean y se extrae el factor común polinomio:

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2)$$
$$= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2)$$

el polinomio $n^3 - 3n^2 + 4$ se factoriza usando el teorema del factor y división sintética, este se anula cuando $n = -1$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –3 | 0 | 4 |
| –1 | | –1 | 4 | –4 |
| | 1 | –4 | 4 | 0 |

de lo anterior, $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$. El factor $n^2 - 4n + 4$, es un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es $(n - 2)^2$ y $x^2 - y^2$ puede factorizarse por diferencia de cuadrados, siendo $(x - y)(x + y)$. Por lo tanto,

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n - 2)^2(x - y)(x + y).$$

### En general

Para factorizar un polinomio $p$ se extrae el monomio común de los términos del polinomio y se factoriza el segundo factor. Si no todos los términos tienen un monomio común entonces se asocian estos de forma conveniente y se factorizan por cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores. Este proceso se repite hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios en su más simple expresión.

### Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$

b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$

d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

## Indicador de logro

2.8 Factoriza polinomios aplicando los métodos de factorización y división de polinomios..

## Secuencia

En esta clase, para factorizar los polinomios los estudiantes deben aplicar los métodos vistos en las clases anteriores: factor común, factorización de trinomios, diferencia de cuadrados y división de polinomios.

## Propósito

En ambos literales del Problema inicial debe, primero, extraerse el factor común de los términos (ya sea un monomio o un polinomio). Igual que en la lección anterior, al factorizar un polinomio lo primero es verificar si sus términos poseen factor común, y luego utilizar otro de los métodos estudiados. Esto se explica en la parte "En general", y debe aplicarse en el bloque de Problemas.

### Solución de problemas:

**a)** Se extrae el factor común $3x$ de los términos del polinomio:

$$3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y^3 + 5y^2 + 3y - 9)$$

Para factorizar $y^3 + 5y^2 + 3y - 9$ se usa el teorema del factor y división sintética: los divisores de $-9$ son $\pm1$, $\pm3$ y $\pm9$. Si $y = 1$:

$$(1)^3 + 5(1)^2 + 3(1) - 9 = 9 - 9 = 0$$

Luego, $y^3 + 5y^2 + 3y - 9 = (y - 1)d$; usando división sintética para encontrar el polinomio $d$:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 5 & 3 & -9 \\
1 & \downarrow & 1 & 6 & 9 \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

De lo anterior, $d = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$. Por lo tanto, $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y - 1)(y + 3)^2$.

**b)**
$$\begin{aligned}
2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab &= 2ab(c^3 + c^2 - 25c - 25) && \text{extraer factor común } 2ab,\\
&= 2ab[c^2(c + 1) - 25(c + 1)] && \text{asociar términos y extraer factor común,}\\
&= 2ab(c^2 - 25)(c + 1) && \text{extraer factor común } c + 1,\\
&= 2ab(c + 5)(c - 5)(c + 1) && \text{factorizar } c^2 - 25.
\end{aligned}$$

**c)**
$$\begin{aligned}
m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2 &= n^2(m^3 - 4m^2 - 11m + 30) && \text{extraer factor común } n^2,\\
&= n^2(m - 2)(m^2 - 2m - 15) && \text{usar el teorema del factor y los divisores de 30,}\\
&= n^2(m - 2)(m + 3)(m - 5) && \text{factorizar } m^2 - 2m - 15.
\end{aligned}$$

**d)**
$$\begin{aligned}
4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18 &= 4y^2(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) - (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)\\
&= (4y^2 - 1)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)\\
&= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x^2 - 6x + 9)\\
&= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x - 3)^2
\end{aligned}$$

## 2.9 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$

b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$

c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$

d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$

e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$

f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. Realiza las siguientes divisiones utilizando la división larga y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$

d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$

e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$

f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. Utiliza la división sintética para efectuar las siguientes divisiones de polinomios y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$

b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$

c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$

d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$

e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$

f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$

g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$

h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$

i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$

b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$

c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$

d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$

e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. Sea $k$ un número entero. Para cada caso determina el valor de $k$ para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\ \ q = x + 1$

b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\ \ q = x - 3$

c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\ \ q = x - 1$

d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\ \ q = x + 2$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$

b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$

c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$

b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

## Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas correspondientes a división y factorización de polinomios.

Solución de problemas:

**1a)** $-x^2 + xy - y^2$

**1b)** $8mn + 10n - 5$

**1c)** $a^2 - 2a + 5$

**1d)** $7xyz - 5x - 9z$

**1e)** $3m + 3mn - 9n$

**1f)** $-3x^2y + \frac{9}{2}xy + \frac{15}{2}$

**2a)** $2x^3 + 3x^2 + 9 = (x + 2)(2x^2 - x + 2) + 5$

**2b)** $2x^3 - 7x^2 - 3x + 2 = (x - 4)(2x^2 + x + 1) + 6$

**2c)** $2y^3 - 13y^2 + 14y + 2 = (y - 5)(2y^2 - 3y - 1) - 3$

**2d)** $2y^3 + 5y^2 - 8y - 6 = (2y + 1)(y^2 + 2y - 5) - 1$

**2e)** $3x^3 + 11x^2 - x - 3 = (x^2 + 4x + 1)(3x - 1) - 2$

**2f)** $5y^3 - 8y^2 - 14y + 4 = (y^2 - 2y - 2)(5y + 2) + 8$

**3a)** $x^3 - 9x^2 + 21x + 2 = (x - 4)(x^2 - 5x + 1) + 6$

**3b)** $y^3 - 3y^2 - 6y - 11 = (y - 5)(y^2 + 2y + 4) + 9$

**3c)** $2m^3 + 4m^2 + 3m + 8 = (m + 3)(2m^2 - 2m + 9) - 19$

**3d)** $3n^3 + 4n^2 - 6n - 7 = (n + 2)(3n^2 - 2n - 2) - 3$

**3e)** $a^3 - 37a - 1 = (a - 6)(a^2 + 6a - 1) - 7$

**3f)** $b^3 + 8b^2 - 29 = (b + 7)(b^2 + b - 7) + 20$

**3g)** $2x^3 + 1 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 2) + 3$

**3h)** $y^3 + 2y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8}$

**3i)** $x^3 + x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}\right) - \frac{34}{27}$

**3j)** $y^3 + \frac{1}{27} = \left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}\right)$

**4a)** $2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$

**4b)** $8(-1)^3 - 5(-1) = -8 + 5 = -3$

**4c)** $5(-2)^3 + 11(-2)^2 - 9 = -40 + 44 - 9 = -5$

**4d)** $3^3 - 13(3)^2 + 29(3) + 10 = 27 - 117 + 87 + 10 = 7$

**4e)** $(-5)^3 + 4(-5)^2 - 6(-5) - 6 = -125 + 100 + 30 - 6 = -1$

**4f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$

**5a)** Se sustituye $x = -1$ en $p$:

$$k(-1)^3 + (k + 1)(-1)^2 + (k - 4)(-1) - 2 = -k + 3$$

Por el teorema del residuo, debe ocurrir que $-k + 3 = 0$, o sea, $k = 3$.

**5b)** Se sustituye $x = 3$ en $p$:

$$3^3 + (k - 3)(3)^2 + (k + 4)(3) - 6k = 6k + 12$$

Por el teorema del residuo, debe ocurrir que $6k + 12 = 0$, o sea, $k = -2$.

**5c)** Se sustituye $x = 1$ en $p$:

$$1^3 - k^2(1)^2 + 2k(1) + k - 1 = -k^2 + 3k$$

Debe ocurrir que $-k^2 + 3k = 0$, o sea, $k = 0$ o $k = 3$.

En los problemas del numeral 5, puede sustituir el valor de $k$ calculado en cada caso y comprobar que el residuo $p \div q$ es igual a cero.

**5d)** Se sustituye $x = -2$ en $p$:

$$k^2(-2)^3 + (k + 1)(-2)^2 - 7(-2) + 3k = -8k^2 + 7k + 18$$

Luego, $-8k^2 + 7k + 18 = 0$, o sea, $8k^2 - 7k - 18 = 0$. Al resolver la ecuación anterior se obtiene $k = -\frac{9}{8}$ o $k = 2$.

**6a)** $-2x(y + 4)(y - 4)(y + 2)$

**6b)** $5y^2(x - 2)(x + 4)(x - 5)$

**6c)** $-ab(c - 1)(c + 3)(c + 7)$

**7a)**
$$\begin{aligned} 4b^2(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) - 9(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) &= (4b^2 - 9)(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) \\ &= (2b + 3)(2b - 3)(a - 4)(a^2 + 10a + 25) \\ &= (2b + 3)(2b - 3)(a - 4)(a + 5)^2 \end{aligned}$$

**7b)** Sea $y = x + 1$; así, $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72 = y^3 - y^2 - 30y + 72$, y:

$$y^3 - y^2 - 30y + 72 = (y - 3)(y^2 + 2y - 24) = (y - 3)(y + 6)(y - 4)$$

Pero $(y - 3)(y + 6)(y - 4) = (x + 1 - 3)(x + 1 + 6)(x + 1 - 4) = (x - 2)(x + 7)(x - 3)$. Por lo tanto:

$$(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72 = (x - 2)(x + 7)(x - 3).$$

# Lección 3 Ecuación cuadrática y números complejos

## 3.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

### Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$ b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

> Si $a$ y $b$ son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

### Solución

a) Para factorizar el polinomio se buscan dos números cuyo producto sea 56 y cuya suma sea igual a –15 (como el producto es positivo y la suma negativa ambos números deben ser negativos). Para encontrarlos puede descomponerse 56 en sus factores primos y buscar una combinación de ellos que cumplan lo dicho anteriormente. Se verifica entonces que: $(-8)(-7) = 56$ y $-8 - 7 = -15$, por lo que $x^2 - 15x + 56$ puede factorizarse en el producto $(x - 8)(x - 7)$. Luego:

$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

como el producto es cero, uno de los factores debe ser igual a cero:

$$x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 8$ o $x = 7$.

b) Para factorizar $5x^2 + 11x - 12$ se descomponen 5 y –12 en dos factores y se aplica el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc}
5x & & -4 & \longrightarrow & -4x \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
x & & 3 & \longrightarrow & 15x \\
\hline
5x^2 & & -12 & & 11x
\end{array}$$

entonces, $5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$, por lo que $5x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$. Entonces, $x = \frac{4}{5}$ o $x = -3$ son las soluciones de $5x^2 + 11x - 12 = 0$.

### Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$ se llama **ecuación cuadrática**. Para resolverla utilizando factorización se escribe $ax^2 + bx + c$ como producto de dos binomios lineales, se iguala cada uno de ellos a cero y se resuelven ambas ecuaciones lineales.

### Ejemplo

Resuelve por factorización, la ecuación $\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x$.

Si se encuentra una ecuación equivalente a la dada pero cuyos coeficientes sean todos enteros, la factorización resultará más fácil. Así, al multiplicar ambos miembros por 6, se obtiene la ecuación equivalente $15x^2 - 12 = -8x$. Para utilizar factorización la ecuación debe estar igualada a cero: se pasa $-8x$ al miembro izquierdo y se obtiene la ecuación $15x^2 + 8x - 12 = 0$. Al factorizar por el método de la tijera se obtiene $(5x + 6)(3x - 2) = 0$, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{6}{5}$ y $x = \frac{2}{3}$.

### Problemas

1. Calcula las soluciones de cada ecuación utilizando factorización.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $x^2 - 15x + 44 = 0$ c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$ e) $x^2 + 16x + 63 = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$ h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$ i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$ k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$ l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. Encuentra una ecuación de grado 2 que tenga por soluciones a 1 y –15.

## Indicador de logro

3.1 Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando factorización en la forma $(x + a)(x + b)$ o el método de la tijera.

## Secuencia

Esta clase es un repaso de noveno grado sobre los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas utilizando factorización. Se agregan casos donde el trinomio debe factorizarse usando el método de la tijera o aquellos con coeficientes fraccionarios o decimales donde debe multiplicarse la ecuación por un número entero.

## Propósito

Esta clase y la siguiente (3.2) sirven para introducir la idea sobre las raíces de un polinomio, tomando primero ecuaciones cuadráticas. En esta clase no debe utilizarse la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones, sino hasta la siguiente.

Solución de problemas:

**1a)**
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
Las soluciones son $x = -5$ o $x = 3$.

**1c)**
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(x + 3)(x + 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
Las soluciones son $x = -3$ o $x = -1$.

**1e)**
$$x^2 + 16x + 63 = 0$$
$$(x + 9)(x + 7) = 0$$
$$x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x + 7 = 0$$
Las soluciones son $x = -9$ o $x = -7$.

**1g)** Se multiplican ambos miembros por 2, obteniendo la ecuación equivalente:
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x + 3)(x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -3$ o $x = -2$.

**1i)**
$$8x^2 - 38x + 35 = 0$$
$$(2x - 7)(4x - 5) = 0$$
$$2x - 7 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 5 = 0$$
Las soluciones son $x = \frac{7}{2}$ o $x = \frac{5}{4}$.

**1k)** Se multiplican ambos miembros por 10, obteniendo la ecuación equivalente:
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(2x - 1) = 0$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$
Las soluciones son $x = -2$ o $x = \frac{1}{2}$.

**1b)**
$$x^2 - 15x + 44 = 0$$
$$(x - 4)(x - 11) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 11 = 0$$
Las soluciones son $x = 4$ o $x = 11$.

**1d)**
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$
$$(x + 12)(x - 5) = 0$$
$$x + 12 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$
Las soluciones son $x = -12$ o $x = 5$.

**1f)** Se multiplican ambos miembros por 4, obteniendo la ecuación equivalente:
$$x^2 - 4x - 60 = 0$$
$$(x + 6)(x - 10) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 10 = 0$$
Las soluciones son $x = -6$ o $x = 10$.

**1h)**
$$3x^2 + 13x - 10 = 0$$
$$(x + 5)(3x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -5$ o $x = \frac{2}{3}$.

**1j)**
$$4x^2 + 21x - 18 = 0$$
$$(x + 6)(4x - 3) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 3 = 0$$
Las soluciones son $x = -6$ o $x = \frac{3}{4}$.

**1l)** Se multiplican ambos miembros por 10, obteniendo la ecuación equivalente:
$$6x^2 - x - 2 = 0$$
$$(2x + 1)(3x - 2) = 0$$
$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -\frac{1}{2}$ o $x = \frac{2}{3}$.

**2.** $(x - 1)(x + 15) = 0 \Rightarrow x^2 + 14x - 15 = 0$