Lección 3

3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solución

a) Esta ecuación no puede resolverse por factorización; cuando esto ocurre se resuelve utilizando la fórmula general. En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Entonces, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ y } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) Si se intenta resolver la ecuación por factorización, se llega a que no es posible encontrar dos números enteros cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -2. De forma similar al literal anterior, se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Entonces, las soluciones de $x^2 - 2x - 6 = 0$ son:

$x = 1 + \sqrt{7}$ y $x = 1 - \sqrt{7}$.

Observa que $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ se simplifica porque puede sacarse 2 como factor común en el numerador:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Conclusión

Cuando una ecuación cuadrática no pueda resolverse mediante factorización, se utiliza la fórmula general.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x = 7 - \frac{4}{x}$.

Nótese que $x = 0$ no es solución de la ecuación. La ecuación puede llevarse a una ecuación cuadrática al multiplicar por x ambos miembros:

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

esta ecuación no puede resolverse mediante factorización, por lo que al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49-16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Entonces, las soluciones de $x = 7 - \frac{4}{x}$ son:

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Problemas

Calcula las soluciones de cada ecuación:

a) $3x^2 + x - 1 = 0$ b) $x^2 = -2(2x + 1)$ c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$ d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$ f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$ g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$ h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

Indicador de logro

3.2 Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

Secuencia

En esta clase se repasa la solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general. Se incluyen ecuaciones con términos fraccionarios cuyo denominador es igual a x y que se reducen a ecuaciones cuadráticas.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes, al momento de usar la fórmula general, incluir el signo de los coeficientes.

Solución de problemas:

a)

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones de $3x^2 + x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$$

b) La ecuación es equivalente a $x^2 + 4x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones de $x^2 = -2(2x + 1)$ son:

$$x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = -2 - \sqrt{2}$$

c) La ecuación es equivalente a $x^2 - 6x - 3 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

Las soluciones de $x^2 - 3(2x + 1) = 0$ son:

$$x = 3 + 2\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = 3 - 2\sqrt{3}$$

d) La ecuación es equivalente a $2x^2 - 6x + 3 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Las soluciones de $2x(3 - x) = 3$ son:

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

e) La ecuación es equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones de $x = x^2 - 1$ son:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

f) La ecuación es equivalente a $4x^2 - 30x + 45 = 0$:

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 720}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

Las soluciones de $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$ son:

$$x = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4}$$

g) La ecuación es equivalente a $2x^2 - 8x + 5 = 0$; al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{4 - \sqrt{6}}{2}$$

h) La ecuación es equivalente a $x^2 + 3x - 2 = 0$; al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

Lección 3

3.3 Definición de número complejo

Definición

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Dados dos números reales cualesquiera a y b, el número de la forma $z = a + bi$ se llama **número complejo**. Al conjunto de todos los números complejos, es decir, aquellos de la forma $a + bi$ se le denota por $\mathbb{C}$.

Sea $z = a + bi$ un número complejo:

1. Si $b = 0$ entonces z es un número real.
2. Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $z = bi$ se llama **número imaginario puro**.

Para denotar números complejos, usualmente se utilizan las letras z y w. Si se necesitan más de dos números complejos, se utilizan subíndices, por ejemplo, z_1, z_2, z_3, z_4, etc.

Al número a se le llama **parte real** de z, y se denota por Re(z); mientras que al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se denota por Im(z). Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo 1

Para cada caso, determina Re(z) e Im(z):

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \frac{-4 + 9i}{2}$

a) Re(z) = 5
Im(z) = –7

b) Re(z) = $\sqrt{2}$
Im(z) = 1

c) Lo primero es reescribir z:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, Re(z) = –2 e Im(z) = $\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2

Sean $z = 2x + 3i$ y $w = 4 + (y - 1)i$ dos números complejos. Determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$.

Para que se cumpla la igualdad entre los números complejos z y w debe ocurrir:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(w) \qquad\qquad \text{Im}(z) = \text{Im}(w)$$

$$2x = 4 \qquad\qquad 3 = y - 1$$

al resolver ambas ecuaciones lineales se obtiene:

$$x = 2 \qquad\qquad 4 = y$$

Por lo tanto, para que se cumpla $z = w$ los valores de x y y deben ser 2 y 4 respectivamente.

Problemas

1. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de z:

a) $z = -3 + 8i$
b) $z = \frac{1}{2} - 6i$
c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$
d) $z = 11i$
e) $z = 3$
f) $z = \frac{-12 - i}{3}$

2. Para cada caso, determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$:

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$
b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$
c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$
d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

Indicador de logro

3.3 Identifica la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.

Secuencia

En la clase se definen los números complejos, su parte real e imaginaria y la condición para la igualdad de dos números complejos. Con este contenido los estudiantes lograrán más adelante calcular todas las raíces de un polinomio, sean reales o imaginarias.

Propósito

Esta clase solo trabaja lo relacionado a la parte real e imaginaria de un número complejo, para que los estudiantes se apropien del lenguaje matemático y del uso de la unidad imaginaria. En las siguientes clases se desarrollarán las operaciones básicas con números complejos.

Solución de problemas:

1a) $z = -3 + 8i$
$\text{Re}(z) = -3$; $\text{Im}(z) = 8$

1b) $z = \frac{1}{2} - 6i$
$\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$; $\text{Im}(z) = -6$

1c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$
$\text{Re}(z) = \sqrt{5}$; $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$

1d) $z = 11i$
$\text{Re}(z) = 0$; $\text{Im}(z) = 11$

1e) $z = 3$
$\text{Re}(z) = 3$; $\text{Im}(z) = 0$

1f) $z = \frac{-12 - i}{3} = -\frac{12}{3} - \frac{1}{3}i = -4 - \frac{1}{3}i$
$\text{Re}(z) = -4$; $\text{Im}(z) = -\frac{1}{3}$

2a) Debe ocurrir que $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$, $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) \\ x + 1 &= -6 \\ x &= -6 - 1 \\ x &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ 5 &= 4 - y \\ y &= 4 - 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser -7 y -1 respectivamente.

2b) Igualando las partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) \\ 10 &= 8y \\ y &= \frac{10}{8} \\ y &= \frac{5}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ -3x &= 15 \\ x &= \frac{15}{-3} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser -5 y $\frac{5}{4}$ respectivamente.

2c) Al igualar las partes imaginarias de ambos:

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ 4 &= 3y \\ y &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Igualando las partes reales y sustituyendo y:

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ x + y &= -2x \\ 3x &= -\frac{4}{3} \\ x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser $-\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{3}$ respectivamente.

2d) Al igualar las partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) \\ -x &= y - 1 \\ x &= -y + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ 3y &= -x \\ x &= -3y \end{aligned}$$

Se forma un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Utilizando el método de sustitución:

$$\begin{aligned} -y + 1 &= -3y \\ 2y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, $x = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$ y $y = -\frac{1}{2}$.

3.4 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema inicial

Sean $z = 3 + 7i$ y $w = 2 - 3i$. ¿Cuál es el resultado de las operaciones $z + w$, $z - w$ y zw?

Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

Solución

Como en la suma de polinomios, solo pueden sumarse aquellos términos que sean "semejantes":

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Para la resta deben cuidarse los signos de la parte real e imaginaria de w:

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

La multiplicación se desarrolla como si fuese el producto de binomios, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Definición

La suma y **resta de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por $z + w$ y $z - w$ respectivamente, y se definen:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

El **producto de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por zw y se define:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$, o simplemente conjugado de z, es otro número complejo denotado por $\overline{z}$ tal que $\overline{z} = a - bi$. Se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al número real denotado por $|z|$ y definido por:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$ y zw. Además, encuentra el conjugado y el módulo de cada número:
   a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
   b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
   c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
   d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
   e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
   f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Demuestra lo siguiente:
   a) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
   b) $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)i$

Indicador de logro

3.4 Efectúa la suma, resta y multiplicación de números complejos, y determina el conjugado y el módulo de un número complejo.

Secuencia

En esta clase se trabajan las operaciones de suma, resta y multiplicación de números complejos, haciendo una comparación con el desarrollo de las mismas en polinomios.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición; es decir, identificar y sustituir los números a, b, c y d.

Solución de problemas:

1a) $z + w = (-5 + 2) + (4 - 3)i = -3 + i$

$z - w = (-5 - 2) + (4 + 3)i = -7 + 7i$

$zw = [-5(2) - 4(-3)] + [-5(-3) + 4(2)]i = 2 + 23i$

$\overline{z} = -5 - 4i$; $\overline{w} = 2 + 3i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$|w| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

1b) $z + w = (4 - 6) + (-1 + 4)i = -2 + 3i$

$z - w = (4 + 6) + (-1 - 4)i = 10 - 5i$

$zw = [4(-6) - (-1)4] + [4(4) + (-1)(-6)]i = -20 + 22i$

$\overline{z} = 4 + i$; $\overline{w} = -6 - 4i$

$|z| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$|w| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

1c) $z + w = (-3 - 5) + (-2 + 1)i = -8 - i$

$z - w = (-3 + 5) + (-2 - 1)i = 2 - 3i$

$zw = [-3(-5) - (-2)1] + [-3(1) + (-2)(-5)]i = 17 + 7i$

$\overline{z} = -3 + 2i$; $\overline{w} = -5 - i$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$|w| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

1d) $z + w = (8 + 12) + (-1 + 3)i = 20 + 2i$

$z - w = (8 - 12) + (-1 - 3)i = -4 - 4i$

$zw = [8(12) - (-1)3] + [8(3) + (-1)(12)]i = 99 + 12i$

$\overline{z} = 8 + i$; $\overline{w} = 12 - 3i$

$|z| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$

$|w| = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$

1e) $z + w = (5 + 0) + (-2 + 6)i = 5 + 4i$

$z - w = (5 - 0) + (-2 - 6)i = 5 - 8i$

$zw = (5 - 2i)6i = 30i - 12i^2 = 12 + 30i$

$\overline{z} = 5 + 2i$; $\overline{w} = -6i$

$|z| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|w| = \sqrt{6^2} = 6$

1f) $z + w = (-3 + 2) + 8i = -1 + 8i$

$z - w = (-3 - 2) + 8i = -5 + 8i$

$zw = (-3 + 8i)2 = -6 + 16i$

$\overline{z} = -3 - 8i$; $\overline{w} = 2$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

$|w| = \sqrt{2^2} = 2$

2a)
$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= (a + a) + (b - b)i \\ &= 2a + 0i \\ &= 2a \\ &= 2\text{Re}(z) \end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= (a - a) + (b + b)i \\ &= 0 + 2bi \\ &= 2bi \\ &= 2\text{Im}(z)i \end{aligned}$$

Lección 3

3.5 División de números complejos

Problema inicial

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Solución

1. Al multiplicar por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ se está multiplicando por 1, o sea que la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. Al efectuar los productos indicados, se obtiene:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. La división de z entre w es entonces el número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Definición

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. La división de z entre w se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo

Divide $4 + 3i$ entre $5 - i$.

En este caso, al multiplicar por el conjugado de $5 - i$ en el numerador y denominador, se tiene que:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$.

Problemas

1. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$:
   a) $z = 3$, $w = 2 + 4i$
   b) $z = 5$, $w = 2 - 7i$
   c) $z = -7i$, $w = 6 - 2i$
   d) $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$
   e) $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$
   f) $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$
   g) $z = 4 - 2i$, $w = -5i$
   h) $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

2. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; realiza lo siguiente:
   a) Calcula $\frac{z}{w}$
   b) Calcula $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$
   c) Calcula $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
   d) Compara los resultados de b) y c)

Observa que el objetivo en cada una de las operaciones vistas con los números complejos es escribir la operación como un número complejo $u + vi$. Así, en el caso de la división, el objetivo es quitar el número complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Indicador de logro

3.5 Efectúa el cociente de dos números complejos multiplicando por el conjugado del divisor.

Secuencia

En esta clase se trabaja la operación de división (cociente) de dos números complejos. La estrategia a utilizar es la multiplicación por el conjugado del divisor (denominador), para escribir el resultado en la forma $u + vi$, donde u y v son números reales cualesquiera.

Propósito

Si bien la Definición indica el resultado de la operación de división para los números $z = a + bi$ y $w = c + di$, en la resolución del bloque de Problemas no deben sustituirse los valores de a, b, c y d, sino multiplicar por el conjugado del divisor y realizar las operaciones resultantes tal como lo establece el indicador de logro.

Solución de problemas:

1a) $\frac{z}{w} = \frac{3}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{3(2-4i)}{2^2+4^2} = \frac{6-12i}{4+16} = \frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$

1b) $\frac{z}{w} = \frac{5}{2-7i} \times \frac{2+7i}{2+7i} = \frac{5(2+7i)}{2^2+7^2} = \frac{10+35i}{4+49} = \frac{10}{53} + \frac{35}{53}i$

1c) $\frac{z}{w} = \frac{-7i}{6-2i} \times \frac{6+2i}{6+2i} = \frac{-7i(6+2i)}{6^2+2^2} = \frac{14-42i}{36+4} = \frac{7}{20} - \frac{21}{20}i$

1d) $\frac{z}{w} = \frac{2+9i}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{(-6-9)+(2-27)i}{9+1} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

1e) $\frac{z}{w} = \frac{-4+6i}{2+7i} \times \frac{2-7i}{2-7i} = \frac{(-8+42)+(28+12)i}{4+49} = \frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$

1f) $\frac{z}{w} = \frac{-3-2i}{5+2i} \times \frac{5-2i}{5-2i} = \frac{(-15-4)+(6-10)i}{25+4} = -\frac{19}{29} - \frac{4}{29}i$

1g) $\frac{z}{w} = \frac{4-2i}{-5i} \times \frac{5i}{5i} = \frac{10+20i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

1h) $\frac{z}{w} = \frac{-2+6i}{3i} \times \frac{-3i}{-3i} = \frac{18+6i}{9} = 2 + \frac{2}{3}i$

2a) $\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$

2b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$
$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

2c) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a-bi}{c-di}$
$= \frac{a-bi}{c-di} \times \frac{c+di}{c+di}$
$= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$
$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

2d) Los resultados son iguales, es decir:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

3.6 Raíces cuadradas de números negativos*

Problema inicial

Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Solución

Se busca el número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a –5; observa que –5 puede escribirse como el producto 5(–1), entonces: $x^2 = 5(-1) = 5i^2$,

luego, $x^2 = 5i^2$ se cumple para $x = \sqrt{5}\,i$ o $x = -\sqrt{5}\,i$. En efecto:

$$\left(\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5 \qquad \left(-\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Definición

Sea a un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo

Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$ b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

Primero se escriben las raíces de números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$, luego se realizan las operaciones respectivas:

a) $\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \left(\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{5}\,i\right)$

$= \sqrt{15}\,i^2$

$= -\sqrt{15}$

De lo anterior se concluye que:

$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = -\sqrt{15}$.

b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\dfrac{-i}{-i}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{-i^2}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{1}\right)$

$= -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

En general, si a y b son números reales positivos:

1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$ 2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

También puedes multiplicar por el conjugado de $\sqrt{5}\,i$, o sea, $-\sqrt{5}\,i$ y verificar que se llega a la misma respuesta.

Problemas

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de $-a$ si:

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 7$ d) $a = 10$

e) $a = 4$ f) $a = 25$ g) $a = \dfrac{1}{3}$ h) $a = \dfrac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-7}\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}\sqrt{-2}$ c) $\sqrt{-3}\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$ e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

Indicador de logro

3.6 Encuentra las raíces cuadradas de números reales negativos y los escribe en la forma $a + bi$.

Secuencia

Luego de haber definido y realizado las operaciones básicas con números complejos, en esta clase se encuentran las raíces cuadradas de números reales negativos (al igual que en noveno grado se encontraron las raíces cuadradas de números positivos). Esto sirve para que los estudiantes comprendan que si a es un número real positivo entonces $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Propósito

En el Problema inicial se retoma la definición de solución de una ecuación cuadrática; esta parte junto con la Definición de la clase sirven para introducir a los estudiantes en el cálculo de las soluciones de una ecuación y de las raíces de un polinomio, tomando también aquellas complejas. En el numeral 1 del bloque de Problemas los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición, es decir, los resultados deben ser bastante inmediatos.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas, recuerde a sus estudiantes que, antes de realizar las operaciones, deben escribir los radicales en la forma bi. En el caso de los literales d) y f) pueden multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador o solamente por $-i$ tal como el literal c) del ejemplo.

Solución de problemas:

1a) $-a = -2$, luego las raíces de -2 son $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.

1b) $-a = -3$, luego las raíces de -3 son $\sqrt{3}i$ y $-\sqrt{3}i$.

1c) $-a = -7$, luego las raíces de -7 son $\sqrt{7}i$ y $-\sqrt{7}i$.

1d) $-a = -10$, luego las raíces de -10 son $\sqrt{10}i$ y $-\sqrt{10}i$.

1e) $-a = -4$, luego las raíces de -4 son:
$$\sqrt{4}i = 2i \quad \text{y} \quad -\sqrt{4}i = -2i.$$

1f) $-a = -25$, luego las raíces de -25 son:
$$\sqrt{25}i = 5i \quad \text{y} \quad -\sqrt{25}i = -5i.$$

1g) $-a = -\frac{1}{3}$, luego las raíces de $-\frac{1}{3}$ son:
$$\sqrt{\frac{1}{3}}i = \frac{1}{\sqrt{3}}i \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{1}{3}}i = -\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

1h) $-a = -\frac{1}{9}$, luego las raíces de $-\frac{1}{9}$ son:
$$\sqrt{\frac{1}{9}}i = \frac{1}{3}i \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{1}{9}}i = -\frac{1}{3}i.$$

Pueden racionalizarse las fracciones y dejarlas expresadas como $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2a) $\sqrt{-7}\sqrt{2} = \left(\sqrt{7}i\right)\sqrt{2}$
$= \sqrt{14}i$

2b) $\sqrt{7}\sqrt{-2} = \sqrt{7}\left(\sqrt{2}i\right)$
$= \sqrt{14}i$

2c) $\sqrt{-3}\sqrt{-7} = \left(\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{7}i\right)$
$= \sqrt{21}i^2$
$= -\sqrt{21}$

2d) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}} = \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}$
$= \sqrt{\frac{3}{7}}$

2e) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{3}}$
$= \frac{2}{\sqrt{3}}i$

Puede racionalizarse el resultado y dejarlo expresado como $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2f) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}i}\left(\frac{-i}{-i}\right)$
$= -2i$

3.7 Discriminante de la ecuación cuadrática

Problema inicial

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se define el número $\Delta = b^2 - 4ac$. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcula el valor de Δ, establece su signo y resuelve cada una utilizando la fórmula general (considera las soluciones complejas):

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ es una letra griega llamada "Delta".

Solución

a) Al calcular Δ se tiene:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

es decir, $\Delta > 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general (el valor de Δ es el radicando de la fórmula general):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

La ecuación $2x^2 - 5x - 1 = 0$ tiene dos soluciones reales.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

o sea, $\Delta = 0$. Luego, el valor del radicando en la fórmula general es cero y:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una solución real.

c) El valor de Δ es:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

es decir, $\Delta < 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}.$$

La ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas.

Definición

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática al número $\Delta = b^2 - 4ac$. El número y tipo de soluciones de la ecuación cuadrática puede determinarse de acuerdo a lo siguiente:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, pertenecen a los números reales.
2. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias, es decir, de la forma $u + vi$ con $v \neq 0$.

Ejemplo

¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real?
Para que tenga una solución real debe cumplirse que $\Delta = 0$, es decir $\Delta = m^2 - 16 = 0$. Luego, $m = 4$ o $m = -4$.
Por lo tanto, para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real m debe ser 4 o -4.

Problemas

1. Determina si las soluciones de cada ecuación son reales o imaginarias:

a) $4x^2 + x - 3 = 0$ b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. ¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tenga una solución real?

Indicador de logro

3.7 Determina el número de soluciones reales o imaginarias de una ecuación cuadrática utilizando su discriminante.

Secuencia

En esta clase se generaliza el número o tipo de soluciones de una ecuación cuadrática, considerando aquellas cuyo resultado son números complejos; lo anterior se realiza analizando el discriminante de la ecuación.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición, es decir, calcular el discriminante en cada caso (no deben resolver la ecuación). En el numeral 2 debe realizarse un análisis similar al mostrado en el Ejemplo.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas puede suceder que los estudiantes asignen a c solamente el valor de 5; indíqueles que $c = 5 - m$.

Solución de problemas:

1a) $a = 4$, $b = 1$, $c = -3$; luego:

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(-3) = 1 + 48 = 49$$

De lo anterior se tiene $\Delta > 0$, por lo tanto, la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$ tiene dos soluciones reales.

1b) $a = 4$, $b = 1$, $c = 14$; luego:

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(14) = 1 - 224 = -223$$

De lo anterior se tiene $\Delta < 0$, por lo tanto, la ecuación $4x^2 + x + 14 = 0$ no tiene soluciones reales, sino dos soluciones imaginarias.

1c) $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$; luego:

$$\Delta = (-30)^2 - 4(9)(25) = 900 - 900 = 0$$

De lo anterior se tiene $\Delta = 0$, por lo tanto, la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$ tiene una solución real.

1d) La ecuación es equivalente a $15x^2 + 8x + 12 = 0$, con $a = 15$, $b = 8$, $c = 12$; luego:

$$\Delta = 8^2 - 4(15)(12) = 64 - 720 = -656$$

De lo anterior se tiene $\Delta < 0$, por lo tanto, la ecuación $15x^2 + 12 = -8x$ no tiene soluciones reales, sino dos soluciones imaginarias.

2. En la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 5 - m = 0$: $a = 1$, $b = -6$ y $c = 5 - m$. Luego,

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4(1)(5 - m)\\ &= 36 - 20 + 4m\\ &= 4m + 16\end{aligned}$$

Para que la ecuación solo tenga una solución real debe ocurrir $\Delta = 0$, o sea, $4m + 16 = 0$:

$$\begin{aligned}4m &= -16\\ m &= -4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tendrá solamente una solución real si $m = -4$.

3.8 Factorización de un polinomio*

Problema inicial

Utilizando números complejos factoriza el polinomio $x^2 + 12x + 40$.

Solución

Similar al caso de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en este caso deben encontrarse dos números complejos cuyo producto sea igual a 40 y cuya suma sea igual a 12. Primero se resuelve la ecuación $x^2 + 12x + 40 = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} x = -6 + 2i & \text{o} & x = -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) = 0 & \text{o} & x - (-6 - 2i) = 0 \\ x + 6 - 2i = 0 & \text{o} & x + 6 + 2i = 0 \end{array}$$

sean $z = 6 - 2i$ y $w = 6 + 2i$; puede comprobarse que $zw = 40$ y $z + w = 12$, y se tiene:

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$.

Conclusión

Si x_1 y x_2 son las soluciones (reales o imaginarias) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Los divisores del término independiente son $a = \pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Al sustituir $x = 2$ en el polinomio original se obtiene:

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

por el teorema del factor, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$, donde d es un polinomio de grado 2; utilizando división sintética se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

el siguiente paso es factorizar el polinomio $x^2 - 4x + 7$; esto puede realizarse utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

Por lo tanto, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$.

Problemas

Factoriza cada polinomio:

a) $x^2 - 12x + 40$
b) $5x^2 + 8x + 5$
c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$
e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$
f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

Unidad 2

Indicador de logro

3.8 Factoriza polinomios de grado dos o tres utilizando números complejos.

Secuencia

En esta clase se utilizan los números complejos para escribir polinomios de hasta grado tres en la forma $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, donde los números x_1, x_2 y x_3 son complejos. Esto dará paso a que, en la clase 3.9, se definan y calculen las raíces de un polinomio. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Posibles dificultades

En esta clase se utiliza básicamente todo lo visto en lecciones anteriores, por ejemplo cómo factorizar un polinomio de grado tres, las raíces de números negativos, resolver una ecuación cuadrática, etc. Los estudiantes deben tener claridad de los procesos desarrollados en la clase.

Solución de problemas:

a) Se factoriza $x^2 - 12x + 40$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-160}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{12 \pm 4i}{2} = 6 \pm 2i$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 40 &= [x-(6+2i)][x-(6-2i)] \\ &= (x-6-2i)(x-6+2i). \end{aligned}$$

b) Se factoriza $5x^2 + 8x + 5$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-100}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{-8 \pm 6i}{10} = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$$

Por lo tanto,

$$5x^2 + 8x + 5 = 5\left(x + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right)\left(x + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

c) Para factorizar $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$ se utiliza lo visto en la lección 2. Los divisores de 24 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 y ±24; al sustituir $x = 4$ en el polinomio se obtiene:

$$4^3 - 6(4)^2 + 2(4) + 24 = 64 - 96 + 8 + 24 = 0$$

Luego, $x^3 - 6x^2 + 2x + 24 = (x-4)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 2x - 6$; este último se factoriza en el producto $(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 6x^2 + 2x + 24 = (x-4)(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7}).$$

d) El proceso es similar al del literal anterior; los divisores de 10 son ±1, ±2, ±5 y ±10. Al sustituir $x = -2$ en $x^3 + x + 10$:

$$(-2)^3 - 2 + 10 = -8 + 8 = 0$$

Luego, $x^3 + x + 10 = (x+2)d$. Se usa división sintética para encontrar el polinomio d, obteniendo $d = x^2 - 2x + 5$; este último se factoriza en el producto $(x-1-2i)(x-1+2i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 + x + 10 = (x+2)(x-1-2i)(x-1+2i).$$

e) Los divisores de 29 son ±1 y ±29. Al sustituir $x = -1$ en $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

Luego, $x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 4x + 29$; este último se factoriza en el producto $(x-2-5i)(x-2+5i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)(x-2-5i)(x-2+5i).$$

f) Los divisores de −50 son ±1, ±2, ±5, ±10, ±25 y ±50. Al sustituir $x = 5$ en $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$:

$$5^3 - 7(5)^2 + 20(5) - 50 = 125 - 175 + 100 - 50 = 0$$

Luego, $x^3 - 7x^2 + 20x - 50 = (x-5)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 2x + 10$; este último se factoriza en el producto $(x-1-3i)(x-1+3i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 7x^2 + 20x - 50 = (x-5)(x-1-3i)(x-1+3i).$$

3.9 Raíces de un polinomio*

Problema inicial

Un número a (real o imaginario) es una raíz de un polinomio en variable x si al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado es cero. Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 12$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

Solución

a) Para determinar las raíces de $3x - 12$ hay que encontrar los valores de x que hacen cero el polinomio; es decir, basta resolver la ecuación $3x - 12 = 0$ para determinar las raíces. La solución de la ecuación es $x = 4$, entonces 4 es la única raíz de $3x - 12$.

b) De igual forma que en el literal anterior, basta resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ para calcular las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$. Resolviendo por factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entonces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -3$ son las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$.

c) Como el polinomio es de grado 3 se utiliza el teorema del factor para determinar alguno de los valores que hacen cero el polinomio; se sustituye x por alguno de los números ±1, ±29:

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } (-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

se utiliza división sintética para realizar $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ y factorizar el polinomio original; de esto se obtiene:

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

una de las raíces del polinomio es $x = -1$. Se calculan ahora las raíces de $x^2 - 4x + 29$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 29 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ son $x = -1$, $x = 2 + 5i$ y $x = 2 - 5i$.

Conclusión

Sea p un polinomio en una variable:

1. Si p es de grado 1, entonces tiene una raíz compleja.
2. Si p es de grado 2 entonces tiene dos raíces complejas, contando aquellas que se repiten. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede escribirse como $(x + 1)^2$ y $x = -1$ es una raíz doble.
3. Si p es de grado 3, entonces tiene tres raíces complejas, contando aquellas que se repiten.

Un polinomio de grado 1 se llama **lineal**, al de grado 2 se le conoce como polinomio **cuadrático** y si es de grado 3 se le llama polinomio **cúbico**. Un polinomio puede ser de grado n, para n un entero no negativo, y cuando es de una variable es de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_n es distinto de cero.

Un polinomio de grado n tiene n raíces complejas. Si x_1, x_2, ..., x_r son las raíces (distintas) del polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces puede factorizarse como:

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

donde a los m_i se les llama **multiplicidades de la raíz** x_i y cumplen que:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Si un polinomio tiene una raíz imaginaria, el conjugado también es raíz.

Indicador de logro

3.9 Calcula las raíces de un polinomio de a lo sumo grado tres, usando números complejos.

Secuencia

En la clase se definen las raíces de un polinomio. Dado que ya se han trabajado números complejos, se indica, de manera general, cuántas raíces complejas tiene un polinomio de hasta grado tres. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Propósito

La clase solo cuenta con el Problema inicial, su respectiva Solución y la Conclusión. Esto debido a que los procesos para encontrar las raíces de un polinomio vienen a ser los mismos estudiados durante toda la unidad. En el enunciado del Problema inicial y la Conclusión se indica qué es una raíz de un polinomio y cuántas puede llegar a tener.

Posibles dificultades

Verifique que los estudiantes tienen claro qué significa encontrar las raíces de un polinomio. Lo anterior se reduce a resolver una ecuación, pero es incorrecto decir "la raíz de $3x - 12 = 0$ es 4"; lo correcto es "la raíz de $3x - 12$ es 4 o $x = 4$".

Problemas propuestos:

La clase no cuenta con un bloque de Problemas. A continuación se proponen algunos problemas para desarrollarlos con los estudiantes, si lo considera necesario.

Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $-4x - 16$

El polinomio es de grado 1, solo tendrá una raíz compleja. Para encontrarla se resuelve la ecuación $-4x - 16 = 0$:

$$-4x = 16$$
$$x = -4$$

Por lo tanto, la raíz de $-4x - 16$ es $x = -4$.

b) $x^2 - 2x - 1$

El polinomio es de grado 2, tendrá entonces dos raíces complejas. Para encontrarlas se resuelve $x^2 - 2x - 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo tanto, las raíces de $x^2 - 2x - 1$ son $x = 1 + \sqrt{2}$ y $x = 1 - \sqrt{2}$.

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

El polinomio es de grado 3, tiene entonces tres raíces complejas. Una de ellas se encuentra usando el teorema del factor, y buscando entre los divisores de -2 (± 1 y ± 2) el que hace cero el polinomio. Si $x = 1$:

$$1^3 - 3(1)^2 + 4(1) - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$$

Se usa división sintética para calcular el cociente $(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$, donde resulta:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$$

Por medio de la fórmula cuadrática se obtienen las raíces de $x^2 - 2x + 2$, o sea, $x = 1 + i$ y $x = 1 - i$. Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ son $x = 1$, $x = 1 + i$ y $x = 1 - i$.

d) $x^3 - 3x^2 + x + 5$

El polinomio es de grado 3, tiene tres raíces complejas. Usando el teorema del factor, se busca entre los divisores de 5 (± 1 y ± 5) el que hace cero el polinomio. Si $x = -1$:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 5 = -1 - 3 - 1 + 5 = 0$$

Se usa división sintética para calcular el cociente $(x^3 - 3x^2 + x + 5) \div (x + 1)$, donde resulta:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x + 1)(x^2 - 4x + 5)$$

Por medio de la fórmula cuadrática se obtienen las raíces de $x^2 - 4x + 5$, o sea, $x = 2 + i$ y $x = 2 - i$. Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + x + 5$ son $x = -1$, $x = 2 + i$ y $x = 2 - i$.

3.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, analizando primero si puede resolverse por factorización; de lo contrario, utiliza la fórmula general:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$
b) $x^2 + 5x = 0$
c) $x(3x + 10) = 77$
d) $15x^2 - 14 = 29x$
e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$
f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$
g) $x^2 - 6x + 12 = 0$
h) $x^2 + 5x + 6 = 0$
i) $x^2 - 2x + 26 = 0$
j) $6x^2 + x + 12 = 0$
k) $x^2 + 3x + 6 = 0$
l) $-3x^2 - 5 = -x$
m) $4x^2 + x + 14 = 0$
n) $15x^2 + 8x = -12$
o) $x^2 + 4x + 14 = 0$
p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Calcula el valor de x si:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

¿Qué se puede observar de la expresión encerrada en el recuadro rojo?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. Sea $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

Demuestra que $x = 3$.

4. Para cada caso, realiza $z + w$ y $z - w$:

a) $z = 2 - i,\ w = 3 + 7i$
b) $z = -3 + 2i,\ w = 2 - 4i$
c) $z = -6 - i,\ w = i$
d) $z = 2 + i,\ w = 8 - i$
e) $z = 1 - 3i,\ w = 5 - 2i$
f) $z = 9i,\ w = 5i$
g) $z = -5,\ w = 15i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

5. Para cada caso, realiza zw y $\frac{z}{w}$:

a) $z = -5 + 4i,\ w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i,\ w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i,\ w = -5 + i$
d) $z = 8 - i,\ w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i,\ w = 6i$
f) $z = -3 + 8i,\ w = 2$
g) $z = -9 + 7i,\ w = 4 + 9i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

6. Factoriza cada polinomio utilizando números complejos:

a) $4x^2 + x + 1$
b) $9x^2 + 28x + 50$
c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

Indicador de logro

3.10 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones cuadráticas y números complejos.

Solución de problemas:

1a) Se multiplican ambos miembros por 12, obteniendo la equivalente $12x^2 + 8x + 1 = 0$. Luego:
$(6x + 1)(2x + 1) = 0$, o sea, $x = -\frac{1}{6}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

1b) $x(x + 5) = 0$, o sea, $x = 0$ y $x = -5$.

1c) Se efectúa el producto para encontrar la equivalente $3x^2 + 10x - 77 = 0$. Luego:
$(x + 7)(3x - 11) = 0$, es decir, $x = -7$ y $x = \frac{11}{3}$.

1d) $(3x - 7)(5x + 2) = 0$, es decir, $x = \frac{7}{3}$ y $x = -\frac{2}{5}$.

1e) $(2x + 7)(11x - 5) = 0$, o sea, $x = -\frac{7}{2}$ y $x = \frac{5}{11}$.

1f) $(3x + 4)(9x + 2) = 0$, es decir, $x = -\frac{4}{3}$ y $x = -\frac{2}{9}$.

1g) Usando la fórmula cuadrática se encuentran las soluciones: $x = 3 + \sqrt{3}i$ y $x = 3 - \sqrt{3}i$.

1h) $(x + 2)(x + 3) = 0$, es decir, $x = -2$ y $x = -3$.

1i) Soluciones: $x = 1 + 5i$ y $x = 1 - 5i$.

1j) Soluciones: $x = -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{287}}{12}i$ y $x = -\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{287}}{12}i$.

1k) Soluciones: $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ y $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

1l) Soluciones: $x = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i$ y $x = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i$.

1m) Soluciones: $x = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{223}}{8}i$ y $x = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{223}}{8}i$.

1n) Soluciones: $x = -\frac{4}{15} + \frac{2\sqrt{41}}{15}i$ y $x = -\frac{4}{15} - \frac{2\sqrt{41}}{15}i$.

1o) Soluciones: $x = -2 + \sqrt{10}i$ y $x = -2 - \sqrt{10}i$.

1p) Soluciones: $x = -4 + i$ y $x = -4 - i$.

2. Observe que: $x > 0$ y la expresión encerrada en el recuadro es igual a x. Al sustituirla, se obtiene la ecuación $x = 1 + \frac{1}{x}$.

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

Esta es equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$ (con $x \neq 0$). Al resolverla por la fórmula cuadrática se obtiene la solución no negativa $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $x > 0$, y la expresión encerrada en el recuadro es igual a x. Al sustituirla, se obtiene la ecuación:

$$x = 2 + \cfrac{3}{\boxed{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}}$$

$$x = 2 + \frac{3}{x}$$

Esta es equivalente a $x^2 - 2x - 3 = 0$ (con $x \neq 0$), y su solución no negativa es $x = 3$.

4a) $z + w = 5 + 6i$; $z - w = -1 - 8i$

4b) $z + w = -1 - 2i$; $z - w = -5 + 6i$

4c) $z + w = -6$; $z - w = -6 - 2i$

4d) $z + w = 10$; $z - w = -6 + 2i$

4e) $z + w = 6 - 5i$; $z - w = -4 - i$

4f) $z + w = 14i$; $z - w = 4i$

4g) $z + w = -5 + 15i$; $z - w = -5 - 15i$

4h) $z + w = -4 - 9i$; $z - w = 18 - 3i$

5a) $zw = 2 + 23i$; $\frac{z}{w} = -\frac{22}{13} - \frac{7}{13}i$

5b) $zw = -20 + 22i$; $\frac{z}{w} = -\frac{7}{13} - \frac{5}{26}i$

5c) $zw = 17 + 7i$; $\frac{z}{w} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

5d) $zw = 99 + 12i$; $\frac{z}{w} = \frac{31}{51} - \frac{4}{17}i$

5e) $zw = 12 + 30i$; $\frac{z}{w} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{6}i$

5f) $zw = -6 + 16i$; $\frac{z}{w} = -\frac{3}{2} + 4i$

5g) $zw = -99 - 53i$; $\frac{z}{w} = \frac{27}{97} + \frac{109}{97}i$

5h) $zw = -95 + 45i$; $\frac{z}{w} = -\frac{59}{130} + \frac{87}{130}i$

6a) $4x^2 + x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)\left(x + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)$

6b) $9x^2 + 28x + 50 = 9\left(x + \frac{14}{9} - \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)\left(x + \frac{14}{9} + \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)$

6c) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$

6d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5})$

En el problema 6b), los estudiantes pueden usar calculadora.

3.11 Problemas de la unidad

1. Factoriza los siguientes polinomios:
   a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$
   b) $(x + y)^2 + (x - y)^2$

2. Utiliza productos notables para calcular el resultado de las siguientes operaciones:
   a) 190(210)
   b) 96(104) – 94(106)
   c) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$
   d) $\sqrt{100(101)(102)(103) + 1}$

Toma $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ y calcula x^2.

Considera $x = 100$ y multiplica el primero con el último y el segundo con el tercero.

3. Considera los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:
   a) $z_1 + z_2 + z_3$
   b) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$
   c) $z_1z_2z_3$
   d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
   e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$
   f) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

4. Desarrolla cada uno de los productos para demostrar las igualdades:
   a) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$
   b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
   c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

5. Encuentra un polinomio de segundo grado en una variable x que cumpla lo siguiente: el coeficiente de x y el término independiente sean iguales; los valores del polinomio al sustituir x por 1 y 2 sean 7 y 18 respectivamente.

6. Sean x y y números reales positivos. Factoriza los siguientes polinomios (puedes dejar los términos de los factores con raíces cuadradas):
   a) $x + 2\sqrt{x} + 1$
   b) $x - y$
   c) $y + 4\sqrt{y} + 4$
   d) $x - 1$

7. Demuestra que para cualquier número complejo z, se cumple que $|z| \geq 0$.

8. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $|zw| = |z||w|$?

9. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$?

10. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $mx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

11. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tenga dos soluciones imaginarias.

Indicador de logro

3.11 Resuelve problemas correspondientes a operaciones con polinomios y números complejos.

Solución de problemas:

1a) $(x+y)^2-(x-y)^2 = [(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)]$ factorizar diferencia de cuadrados,
$= (x \cancel{+y} + x \cancel{-y})(\cancel{x} + y \cancel{-x} + y)$ quitar paréntesis,
$= (2x)(2y)$ reducir términos semejantes,
$= 4xy$ desarrollar el producto.

1b) $(x+y)^2+(x-y)^2 = x^2 \cancel{+2xy} + y^2 + x^2 \cancel{-2xy} + y^2$ desarrollar los cuadrados de los binomios,
$= 2x^2+2y^2$ reducir términos semejantes,
$= 2(x^2+y^2)$ extraer factor común.

2a) $190(210) = (200-10)(200+10)$ reescribir las cantidades,
$= 200^2 - 10^2$ efectuar suma por diferencia de binomios,
$= 40\,000 - 100$ calcular cuadrados,
$= 39\,900$ realizar resta.

2b) $96(104)-94(106) = (100-4)(100+4)-(100-6)(100+6)$ reescribir las cantidades,
$= 100^2-4^2-(100^2-6^2)$ efectuar suma por diferencia de binomios,
$= \cancel{100^2}-16\cancel{-100^2}+36$ calcular cuadrados y eliminar términos
$= 20$ realizar resta.

2c) Sea $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$. Se calcula el resultado de x^2:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3 \cancel{+\sqrt{5}} - 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) + 3 \cancel{-\sqrt{5}} \\ &= 6 - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= 6-2\sqrt{9-5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Es decir, $x^2 = 2$. Como $x > 0$ entonces $x = \sqrt{2}$.

2d) Sea $x = 100$, entonces $\sqrt{100(101)(102)(103)+1} = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$. Se desarrollan los productos $x(x+3)$ y $(x+1)(x+2)$, y se asocian términos “convenientemente”:

$$\begin{aligned} \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} &= \sqrt{(x^2+3x)[(x^2+3x)+2]+1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1} \\ &= \sqrt{[(x^2+3x)+1]^2} \\ &= (x^2+3x)+1 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 100$ en x^2+3x+1 se obtiene como resultado 10 301. Por lo tanto,

$$\sqrt{100(101)(102)(103)+1} = 10\,301.$$

3a) $z_1+z_2+z_3 = (1-2+1)+(2+3-1)i = 4i$.

3b) $z_1z_2 = -8-i$; $z_2z_3 = 1+5i$; $z_3z_1 = 3+i$; luego $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = -4+5i$.

3c) $z_1z_2 = -8-i$ y $z_3 = 1-i$; luego $z_1z_2z_3 = -9+7i$.

3d) $z_1^2 = -3+4i$, $z_2^2 = -5-12i$ y $z_3^2 = -2i$; luego $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = -8-10i$. Lo anterior también puede resolverse tomando en cuenta que $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = (z_1+z_2+z_3)^2 - 2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$. Así:

$$\begin{aligned} z_1^2+z_2^2+z_3^2 &= (4i)^2-2(-4+5i) \\ &= -8-10i. \end{aligned}$$

3e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$, $\frac{z_2}{z_3} = -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$ y $\frac{z_3}{z_1} = -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$; luego, $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1} = -\frac{311}{130}-\frac{83}{130}i$.

3f) $z_1^2 + z_2^2 = -8 - 8i$ y $z_2^2 + z_3^2 = -5 - 14i$; luego, $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2} = \dfrac{152}{221} - \dfrac{72}{221}i$.

4a) $(x + a)(x + b)(x + c) = [x^2 + (a + b)x + ab](x + c)$ desarrollar $(x + a)(x + b)$,
$= x^3 + (a + b)x^2 + abx + cx^2 + (ac + bc)x + abc$ desarrollar el producto resultante,
$= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$ asociar y extraer factor común.

4b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3$ desarrollar el producto,
$= a^3 + b^3$ reducir términos semejantes.

4c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2abxy$ desarrollar el producto y sumar cero,
$= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) + (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2)$ asociar términos,
$= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ factorizar trinomios cuadrados perfectos.

5. Sea $ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado. Como el coeficiente de x debe ser igual al término independiente entonces $b = c$, o sea, $ax^2 + bx + b$. Al sustituir $x = 1$ se obtiene $a + 2b$, y al sustituir $x = 2$ resulta $4a + 3b$. Según lo indicado en el enunciado del problema, $a + 2b = 7$ y $4a + 3b = 18$; la solución del sistema es $a = 3$ y $b = 2$. Por lo tanto, el polinomio buscado es $3x^2 + 2x + 2$.

6a) $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

6b) $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

6c) $y + 4\sqrt{y} + 4 = (\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})(2) + 2^2 = (\sqrt{y} + 2)^2$

6d) $x - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

7. Sea $z = a + bi$; entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ver Definición de la clase 3.4). Los números a^2 y b^2 son no negativos (pues a y b son reales), y por tanto su suma también lo será. Luego, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

En este problema, basta con que el estudiante deduzca, intuitivamente, por qué la propiedad es verdadera. No se espera una demostración matemática muy rigurosa.

8. $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego:

$|zw| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$ sustituyendo en la fórmula del módulo de un complejo,
$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ usando el resultado del problema 4c), con $x = d$ y $y = c$.

Además, $|z||w| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$. Por lo tanto, sí se cumple $|zw| = |z||w|$.

9. De la Definición de la clase 3.5 se tiene $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$; luego:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2}{(c^2 + d^2)^2}}$$

Del resultado del problema 4c) se deduce que $(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Entonces:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\cancel{(c^2 + d^2)}}{(c^2 + d^2)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

Además, $\dfrac{|z|}{|w|} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$. Por lo tanto, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

En los problemas 10 y 11, puede orientar a los estudiantes que los resuelvan a prueba y error.

10. Para que la ecuación tenga dos soluciones reales, el discriminante $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ debe ser mayor que cero. Para que Δ sea mayor que cero, $1 - m$ debe ser mayor que cero. Al probar algunos valores:

- Para $m = -1$: $1 - m = 2$
- Para $m = 0$: $1 - m = 1$
- Para $m = 1$: $1 - m = 0$
- Para $m = 1.5$: $1 - m = -0.5$
- Para $m = 2$: $1 - m = -1$
- Para $m = 3$: $1 - m = -2$

Se observa entonces, que Δ será mayor que cero cuando m es menor a 1.

11. Para que la ecuación tenga dos soluciones reales, el discriminante $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ debe ser menor que cero. Para que Δ sea menor que cero, $1 - m$ debe ser menor que cero. De la solución del problema 10 se puede observar que esto sucede cuando m es mayor que 1.