Unidad 3. Desigualdades

Competencia de la unidad

Resolver desigualdades lineales y no lineales con una variable haciendo uso de las propiedades de desigualdad para la demostración o comprobación de teoremas matemáticos, así como la interpretación y resolución de situaciones del entorno que impliquen el uso de las mismas.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 3: Ecuaciones de primer grado (7°)
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuaciones de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Primer año de bachillerato

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones reales
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Desigualdad	1	1. Propiedades de las desigualdades, parte 1
	1	2. Propiedades de las desigualdades, parte 2
2. Desigualdad lineal	1	1. Definición de desigualdad lineal
	1	2. Solución de desigualdades lineales, parte 1
	1	3. Solución de desigualdades lineales, parte 2
	1	4. Solución de desigualdades lineales, parte 3
	1	5. Interpretación gráfica de una desigualdad lineal
	1	6. Aplicaciones de las desigualdades lineales
	1	7. Practica lo aprendido
3. Desigualdad no lineal	1	1. Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados
	1	2. Desigualdad triangular, parte 1
	1	3. Desigualdad triangular, parte 2
	1	4. Desigualdad de las medias aritmética y geométrica
	1	5. Desigualdades con expresiones racionales
	1	6. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 3

15 horas clase + prueba de la unidad 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Desigualdad
En esta lección se enuncian las dos propiedades a utilizar en la resolución de desigualdades: cuando se suma o multiplica por un número real (diferente de cero) ambos miembros de la desigualdad. En las clases se parte de casos particulares para que los estudiantes verifiquen y deduzcan el resultado en cada situación.

Lección 2: Desigualdad lineal
La primera clase retoma la definición de desigualdad lineal vista en séptimo grado. Luego, similar a la resolución de ecuaciones de primer grado, se comienzan a resolver desigualdades lineales de formas específicas ($x + a \geq c$, $ax \geq c$) de tal manera que las propiedades vistas en la lección 1 se apliquen directamente, y por último llegar a la forma $ax + b \geq c$ (o $ax + b \leq c$). La lección finaliza con aplicaciones en la vida cotidiana, es decir, situaciones donde se planteen desigualdades lineales para encontrar e interpretar su solución de acuerdo al contexto.

Lección 3: Desigualdad no lineal
En esta lección se demuestran dos teoremas sobre desigualdades: la desigualdad triangular (tanto de las longitudes de un triángulo como del valor absoluto de números reales) y la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Se resuelven también desigualdades con expresiones racionales, cuyo numerador es un número real y cuyo denominador es un polinomio de grado 1 en una variable.

Lección 1 Desigualdad

1.1 Propiedades de las desigualdades, parte 1

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $\leq, \geq, <$ o $>$:

a) $1 \; \square \; -2$ b) $3.5 \; \square \; \frac{7}{2}$ c) $-3 + 2 \; \square \; 5 + 2$

d) $-5 + 3 \; \square \; -7 + 3$ e) $\frac{1}{2} - 1 \; \square \; -1 - 1$ f) $1.5 - 5 \; \square \; 4 - 5$

Solución

a) Un número positivo siempre será mayor que un número negativo. Entonces:

$$1 \; \boxed{>} \; -2$$

b) El número 3.5 es el decimal correspondiente a $\frac{7}{2}$. Se puede utilizar cualquiera de los símbolos $\leq$ o $\geq$:

$$3.5 \; \boxed{\geq} \; \frac{7}{2}$$

c) $-3 < 5$ y al sumar 2 a ambos números se obtiene $-3 + 2 = -1$ y $5 + 2 = 7$, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$-3 + 2 \; \boxed{<} \; 5 + 2$$

d) De igual forma al literal anterior, como $-5 > -7$ entonces:

$$-5 + 3 \; \boxed{>} \; -7 + 3$$

e) $\frac{1}{2} > -1$ y al restar 1 a ambos números se obtienen como resultados $-\frac{1}{2}$ y -2 respectivamente, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$\frac{1}{2} - 1 \; \boxed{>} \; -1 - 1$$

f) De forma similar al literal e), como $1.5 < 4$, entonces:

$$1.5 - 5 \; \boxed{<} \; 4 - 5$$

Conclusión

Los símbolos $\leq, \geq, <$ y $>$ se utilizan para representar relaciones entre cantidades distintas o iguales. Estos se leen como sigue:

$\leq$: menor o igual que $\geq$: mayor o igual que

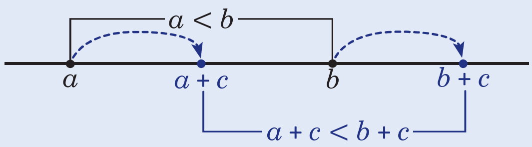
$<$: menor que $>$: mayor que

La relación que indica cuando dos cantidades o expresiones matemáticas son distintas o iguales se llama **desigualdad**. En la desigualdad $a \leq b$, la cantidad a es el **miembro izquierdo** y la cantidad b es el **miembro derecho**.

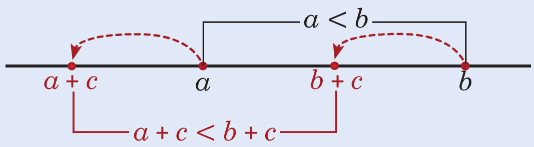
Sean a, b y c números reales cualesquiera; **si $a < b$ entonces $a + c < b + c$**. En general, si se suma (o resta) un número real a ambos miembros de una desigualdad entonces la desigualdad se mantiene.

La propiedad es válida para cualquier tipo de desigualdad: $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$. Es decir, al sumar un número real c a ambos miembros a y b entonces la desigualdad se mantendrá.

$\boxed{c > 0}$



$\boxed{c < 0}$



Problemas

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $3 + 7 \; \square \; 10 + 7$ b) $-1 + 4 \; \square \; 5 + 4$ c) $-6 - 2 \; \square \; -9 - 2$

d) $-\frac{1}{2} - 5 \; \square \; -0.5 - 5$ e) $-0.25 + 5 \; \square \; -\frac{1}{4} + 5$ f) $4.5 + 1.2 \; \square \; 1 + 1.2$

g) $-3 + 2.7 \; \square \; -1.9 + 2.7$ h) $-3 + \sqrt{2} \; \square \; -1 + \sqrt{2}$ i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \; \square \; -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

Indicador de logro

1.1 Determina el símbolo de relación que hace verdadera una desigualdad cuando se suma el mismo número real a ambos miembros.

Secuencia

En los grados anteriores se han trabajado con los símbolos de desigualdad $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$ para comparar cantidades. En esta clase se repasa esa noción y se enuncia, además, la propiedad de las desigualdades cuando se suma un número real a ambos miembros.

Propósito

En el Problema inicial, los estudiantes deben realizar los cálculos de las sumas (o restas) para escribir el símbolo de desigualdad adecuado. En el bloque de Problemas, los estudiantes deben establecer el símbolo de desigualdad sin realizar antes las operaciones, es decir, utilizando la propiedad descrita en la Conclusión.

Solución de problemas:

a) $3 + 7 \boxed{<} 10 + 7$; ya que $3 < 10$ y se está sumando 7 a ambos miembros de la desigualdad.

b) $-1 + 4 \boxed{<} 5 + 4$; ya que $-1 < 5$ y se está sumando 4 a ambos miembros de la desigualdad.

c) $-6 - 2 \boxed{>} -9 - 2$; ya que $-6 > -9$ y se está sumando -2 (o restando 2) a ambos miembros de la desigualdad.

d) $-\frac{1}{2} - 5 \boxed{\geq} -0.5 - 5$; ya que -0.5 es el decimal correspondiente a la fracción $-\frac{1}{2}$. También pudo utilizarse el símbolo $\leq$.

e) $-0.25 + 5 \boxed{\geq} -\frac{1}{4} + 5$; ya que -0.25 es el decimal correspondiente a la fracción $-\frac{1}{4}$. También pudo utilizarse el símbolo $\leq$.

f) $4.5 + 1.2 \boxed{>} 1 + 1.2$; ya que $4.5 > 1$ y se está sumando 1.2 a ambos miembros de la desigualdad.

g) $-3 + 2.7 \boxed{<} 1.9 + 2.7$; ya que $-3 < 1.9$ y se está sumando 2.7 a ambos miembros de la desigualdad.

h) $-3 + \sqrt{2} \boxed{<} -1 + \sqrt{2}$; ya que $-3 < -1$ y se está sumando $\sqrt{2}$ a ambos miembros de la desigualdad.

i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \boxed{>} -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$; ya que $\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ y se está sumando $-\frac{1}{2}$ $\left(\text{o restando } \frac{1}{2}\right)$ a ambos miembros de la desigualdad.

Lección 1

1.2 Propiedades de las desigualdades, parte 2

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$:

a) $2(4)$ ☐ $5(4)$ b) $-5(3)$ ☐ $4(3)$ c) $-3(10)$ ☐ $-9(10)$

d) $6(-2)$ ☐ $3(-2)$ e) $8(-4)$ ☐ $-5(-4)$ f) $-11(-5)$ ☐ $-7(-5)$

Solución

a) $2 < 5$ y al aumentar 4 veces ambas cantidades resultan $2(4) = 8$ y $5(4) = 20$, es decir, la desigualdad se mantiene. Entonces:

$2(4)$ $\boxed{<}$ $5(4)$

b) De forma similar al literal a), $-5 < 4$, al multiplicar por 3 ambos miembros la desigualdad se mantiene, y:

$-5(3)$ $\boxed{<}$ $4(3)$

c) $-3 > -9$; si se aumentan 10 veces ambas cantidades la desigualdad se mantiene. Luego:

$-3(10)$ $\boxed{>}$ $-9(10)$

d) $6 > 3$, pero ahora ambas cantidades se multiplican por un número negativo obteniendo $6(-2) = -12$ y $3(-2) = -6$, es decir, la desigualdad se invierte:

$6(-2)$ $\boxed{<}$ $3(-2)$

e) De forma similar al literal d), $8 > -5$ y al multiplicar por un número negativo ambos miembros se obtiene $8(-4) = -32$ y $-5(-4) = 20$, o sea, la desigualdad se invierte:

$8(-4)$ $\boxed{<}$ $-5(-4)$

f) $-11 < -7$, y como en los literales anteriores, si se multiplica ambos miembros por un número negativo la desigualdad se invierte; entonces:

$-11(-5)$ $\boxed{>}$ $-7(-5)$

Conclusión

Sean a, b y c números reales tales que $\boldsymbol{a < b}$.

1. **Si $\boldsymbol{c > 0}$ entonces $\boldsymbol{ac < bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número positivo entonces la desigualdad se mantiene.
2. **Si $\boldsymbol{c < 0}$ entonces $\boldsymbol{ac > bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número negativo entonces la desigualdad se invierte.

La propiedad es válida también para las desigualdades $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$.

Problemas

1. Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $8(5)$ ☐ $11(5)$ b) $-3(6)$ ☐ $-7(6)$ c) $6(-3)$ ☐ $-4(-3)$

d) $-10(-7)$ ☐ $-5(-7)$ e) $4.8(9)$ ☐ $1.3(9)$ f) $-3.5(-2)$ ☐ $-3.6(-2)$

g) $\frac{4}{5}(-4)$ ☐ $5(-4)$ h) $-\frac{8}{5}(3)$ ☐ $\frac{1}{2}(3)$ i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ ☐ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ ☐ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$ k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ ☐ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$ l) $\sqrt{6}\,(-11)$ ☐ $\sqrt{3}\,(-11)$

2. Sean c y d números reales positivos tales que $c < d$. Escribe el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$ (justifica tu respuesta):

a) $3c$ ☐ $3d$ b) $-c$ ☐ $-d$ c) $5.6c$ ☐ $5.6d$

d) $-2c$ ☐ $-2d$ e) $-7c$ ☐ $-7d$ f) $\frac{3}{4}c$ ☐ $\frac{3}{4}d$

3. Sea a un número positivo. Demuestra lo siguiente:

a) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$; b) Si $a < 1$ entonces $a^2 < a$.

Indicador de logro

1.2 Determina el símbolo de relación que hace verdadera una desigualdad cuando se multiplica el mismo número real a ambos miembros.

Secuencia

Se continúa con la verificación de las propiedades de las desigualdades. Se comprueba el resultado al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número real diferente de cero, tanto el caso cuando el número es positivo como cuando es negativo.

Propósito

Similar a la clase 1.1, en el Problema inicial los estudiantes deben realizar los cálculos de los productos para establecer el símbolo de desigualdad adecuado, diferenciando cuando se multiplica por un número positivo o negativo. En el bloque de Problemas, en el numeral 1 deben utilizar las propiedades descritas en la Conclusión para determinar el símbolo de desigualdad sin realizar los cálculos de los productos.

Posibles dificultades

Verifique que los estudiantes invierten el símbolo de desigualdad cuando se multiplica por un número negativo; es importante hacer énfasis en este caso y evitar dificultades cuando se resuelvan desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $8(5)$ $\boxed{<}$ $11(5)$; ya que $8 < 11$ y se multiplican ambos miembros por un número positivo (la desigualdad se mantiene).

1b) $-3(6)$ $\boxed{>}$ $-7(6)$; ya que $-3 > -7$ y se multiplican ambos miembros por un número positivo (la desigualdad se mantiene).

1c) $6(-3)$ $\boxed{<}$ $-4(-3)$; ya que $6 > -4$ y se multiplican ambos miembros por un número negativo (la desigualdad se invierte).

1d) $-10(-7)$ $\boxed{>}$ $-5(-7)$; ya que $-10 < -5$ y se multiplican ambos miembros por un número negativo (la desigualdad se invierte).

1e) $4.8(9)$ $\boxed{>}$ $1.3(9)$

1f) $-3.5(-2)$ $\boxed{<}$ $-3.6(-2)$

1g) $\frac{4}{5}(-4)$ $\boxed{>}$ $5(-4)$

1h) $-\frac{8}{5}(3)$ $\boxed{<}$ $\frac{1}{2}(3)$

1i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{>}$ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

1j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{>}$ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$

1k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ $\boxed{>}$ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$

1l) $\sqrt{6}(-11)$ $\boxed{<}$ $\sqrt{3}(-11)$

2a) $3c$ $\boxed{<}$ $3d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo (3).

2b) $-c$ $\boxed{>}$ $-d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–1).

2c) $5.6c$ $\boxed{<}$ $5.6d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo (5.6).

2d) $-2c$ $\boxed{>}$ $-2d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–2).

2e) $-7c$ $\boxed{>}$ $-7d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–7).

2f) $\frac{3}{4}c$ $\boxed{<}$ $\frac{3}{4}d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo.

3a) Si en $a > 1$ se multiplican ambos miembros por a, entonces la desigualdad se mantiene (pues $a > 0$). Luego $a(a) > a(1)$, o sea, $a^2 > a$.

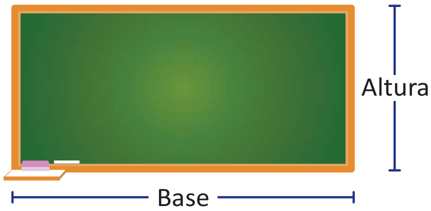
3b) Si en $a < 1$ se multiplican ambos miembros por a, entonces la desigualdad se mantiene (pues $a > 0$). Luego $a(a) < a(1)$, o sea, $a^2 < a$.

Lección 2 Desigualdad lineal

2.1 Definición de desigualdad lineal

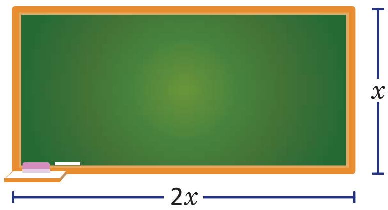
Problema inicial

La longitud de la base de una pizarra rectangular es el doble de su altura, y la medida de su perímetro es a lo sumo 7.20 m^2. Escribe una desigualdad que relacione el perímetro y la medida máxima que este puede tomar.



Solución

Sea x la longitud en metros de la altura de la pizarra como lo muestra la figura de abajo. De acuerdo al enunciado del problema la longitud en metros de su base será igual a $2x$ pues es el doble de la altura.



El perímetro de la pizarra se calcula:

$$2x + 2(2x) = 6x$$

es decir, la medida del perímetro de la pizarra es igual a $6x$. De acuerdo al problema, el perímetro es a lo sumo 7.20 m^2; esto es equivalente a decir que la medida del perímetro es menor o igual a 7.20 m^2. Por lo tanto, la desigualdad que relaciona el perímetro y la medida máxima de este es: $6x \leq 7.20$.

Definición

La desigualdad de dos expresiones matemáticas de grado 1 que involucra una variable se llama **desigualdad lineal**. En una desigualdad lineal, al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita**, al intervalo de los valores numéricos de la incógnita que cumplen con la desigualdad se llaman **solución de la desigualdad**.

En esta unidad, las variables únicamente podrán tomar valores reales, es decir, números reales.

Problemas

1. Escribe los siguientes enunciados como desigualdades lineales:
   a) Sara se tarda en llegar a su trabajo a lo sumo 1 hora con 15 minutos.
   b) Según el Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN), para el 2015 la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; mientras que en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año.
   c) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio, y la suma de sus edades es inferior a 28 años.
   d) El consumo de energía de una lavadora es 500 watts por hora. Al finalizar cierto tiempo, el consumo de energía superó los 3 500 watts por hora.

2. Beatriz y José deciden ahorrar durante todo el período escolar; al finalizar el año lectivo, el dinero ahorrado por Beatriz es superior a la mitad del dinero ahorrado por José. Escribe una desigualdad que relacione el dinero ahorrado por Beatriz y José.

Indicador de logro

2.1 Expresa situaciones de la vida cotidiana utilizando desigualdades lineales de una variable.

Secuencia

En esta clase se repasa lo visto en séptimo grado, sobre representación de relaciones entre expresiones matemáticas. Se define qué es una desigualdad lineal y las partes de la misma.

Propósito

Tanto en el Problema inicial como en el bloque de Problemas, no se pretende resolver las desigualdades, solamente plantearlas para que los estudiantes se familiaricen con el uso de letras para representar una variable en el contexto de las desigualdades.

Posibles dificultades

En el numeral 1 del bloque de Problemas, puede dar pistas sobre las cantidades que se están relacionando y la importancia de las frases "a lo sumo", "superior", "inferior" en cada literal, las cuáles indican una desigualdad. En el numeral 2, es necesario usar dos variables para las cantidades de dinero ahorradas por Beatriz y José.

Solución de problemas:

1a) Se debe relacionar el tiempo que se tarda Sara en llegar a su trabajo con el tiempo máximo que puede llegar a hacer (1 hora con 15 minutos o 75 minutos). Sea x el tiempo en minutos que se tarda Sara en llegar, desde su casa hasta su trabajo. Luego, $x \leq 75$.

1b) Se relacionan las cantidades de sismos, sentidos y no sentidos, con el total registrado en el año 2015 (que fue superior a los 4 000). Sea x la cantidad de sismos sentidos en el año 2015; entonces la cantidad de sismos no sentidos es igual a $11x$. Luego:

$$x + 11x > 4\,000$$
$$12x > 4\,000.$$

1c) Se relacionan las edades de Mario y Antonio con la cantidad máxima que puede tomar la suma de ellas (es inferior a 28 años). Sea x la edad en años de Mario, entonces la edad de Antonio es igual a $3x$. Luego:

$$x + 3x < 28$$
$$4x < 28.$$

Otra solución puede ser la siguiente: sea y la edad en años de Antonio, entonces la edad de Mario es igual a $\frac{1}{3}y$. Luego:

$$y + \frac{1}{3}y < 28$$
$$\frac{4}{3}y < 28.$$

1d) Sea x el tiempo en horas que estuvo funcionando la lavadora; entonces, al finalizar, el consumo de energía es $500x$. Luego:

$$500x > 3\,500.$$

2. Sea x el dinero ahorrado por Beatriz, y y el dinero ahorrado por José (ambos durante todo el período escolar). Luego:

$$x > \frac{1}{2}y.$$

Lección 2

2.2 Solución de desigualdades lineales, parte 1

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

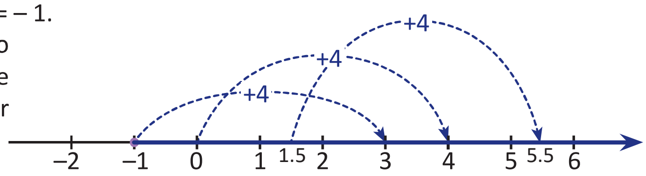
a) $x + 4 \geq 3$ b) $x - 5 < 2$

Solución

a) Deben encontrarse los números reales tales que al sumarles 4, el resultado es mayor o igual a 3. Resolver la ecuación lineal $x + 4 = 3$ equivale a encontrar el número real cuyo resultado al sumarle 4 es 3:

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros,}$$
$$x = -1.$$

En la figura de la derecha se observa lo siguiente: todos los números mayores que -1 satisfacen la desigualdad $x + 4 \geq 3$. Por lo tanto, $x + 4 \geq 3$ si $x \geq -1$.



Este resultado también puede obtenerse utilizando la propiedad vista en la clase 1.1, es decir, en la desigualdad original restar 4 a ambos miembros:

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x \geq -1.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x + 4 \geq 3$ se cumple para $x \geq -1$. Utilizando intervalos, $x \geq -1$ se escribe $x \in [-1, \infty[$.

b) Usando propiedades de desigualdades, se suma 5 a ambos miembros:

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5 \qquad \text{sumar 5 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x < 7.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x - 5 < 2$ se cumple para $x < 7$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, 7[$.

Conclusión

Sean b y c números reales cualesquiera. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$, esta debe escribirse como $x \geq d$ o $x \leq d$ sumando $-b$ a ambos miembros de la desigualdad:

1. $x + b \geq c$ se cumple para $x \geq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in [c - b, \infty[$.
2. $x + b \leq c$ se cumple para $x \leq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, c - b]$.

Si las desigualdades son $x + b > c$ o $x + b < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $c - b$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $x + 7 \geq 10$ b) $x - 3 > -8$ c) $x - 2 < 11$

d) $x + 4 \leq -6$ e) $x - 6 \geq 0$ f) $0 \geq x + 8$

g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$ i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$

j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$ k) $x + \frac{1}{2} < -4$ l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. Utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 para justificar por qué la solución de $x + b \leq c$ es $x \in]-\infty, c - b]$.

Indicador de logro

2.2 Resuelve desigualdades lineales de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$.

Secuencia

En esta clase se utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 (cuando se suma un número real a ambos miembros) para resolver desigualdades lineales del tipo $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$ (se incluyen también las desigualdades estrictas $>$ y $<$).

Propósito

En el literal a) del Problema inicial se presenta una solución intuitiva para la desigualdad. Esta se comprueba luego con la solución algebraica usando la propiedad de la clase 1.1, misma que se utiliza para resolver el literal b). En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Conclusión, es decir, la solución algebraica de las desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $x + 7 \geq 10$
$x \geq 10 - 7$
$x \geq 3$
Entonces, $x + 7 \geq 10$ se cumple para $x \in [3, \infty[$.

1b) $x - 3 > -8$
$x > -8 + 3$
$x > -5$
Entonces, $x - 3 > -8$ se cumple para $x \in]-5, \infty[$.

1c) $x - 2 < 11$
$x < 11 + 2$
$x < 13$
Entonces, $x - 2 < 11$ se cumple para $x \in]-\infty, 13[$.

1d) $x + 4 \leq -6$
$x \leq -6 - 4$
$x \leq -10$
Entonces, $x + 4 \leq -6$ se cumple para $x \in]-\infty, -10]$.

1e) $x - 6 \geq 0$ se cumple para $x \in [6, \infty[$.

1f) $0 \geq x + 8$ se cumple para $x \in]-\infty, -8]$.

1g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$
$x < \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$
$x < -\frac{1}{3}$
Entonces, $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$

1h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$
$x > \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$
$x > 3$
Entonces, $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$ se cumple para $x \in]3, \infty[$.

1i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$ se cumple para $x \in \left[\frac{3}{4}, \infty\right[$.

1j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$ se cumple para $x \in \left]-\infty, \frac{7}{12}\right]$.

1k) $x + \frac{1}{2} < -4$
$x < -4 - \frac{1}{2}$
$x < -\frac{9}{2}$
Así, $x + \frac{1}{2} < -4$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{9}{2}\right[$.

1l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$
$x \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$x \geq 4\sqrt{2}$
Así, $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$ se cumple para $x \in [4\sqrt{2}, \infty[$.

2. El número b es un número real cualquiera. Entonces, en la desigualdad $x + b \leq c$:

$x + b - b \leq c - b$ sumar $-b$ en ambos miembros no altera la desigualdad,
$x \leq c - b$

Luego, la solución de la desigualdad $x + b \leq c$ es $x \leq c - b$, en notación de intervalo: $x \in]-\infty, c - b]$.

2.3 Solución de desigualdades lineales, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $3x > 12$ b) $-5x \leq -10$

Al multiplicar ambos miembros por un número real, si el número es positivo la desigualdad no se altera y si es negativo la desigualdad se invierte.

Solución

a) Para solucionar la desigualdad debe llevarse a la forma $x > d$, donde d es un número real. Para ello se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{3}$:

$$3x > 12$$
$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4$$

multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos miembros no altera la desigualdad.

Por lo tanto, la desigualdad $3x > 12$ se cumple para $x > 4$, es decir, si $x \in]4, +\infty[$.

b) De forma similar al literal anterior, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{5}$, esto hace que el símbolo de desigualdad se invierta de $\leq$ a $\geq$:

$$-5x \leq -10$$
$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$x \geq 2$$

Por lo tanto, $-5x \leq -10$ se cumple para $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.

Conclusión

Sea a un número real diferente de cero. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$ se multiplican ambos miembros de la desigualdad por el recíproco de a, es decir, $\frac{1}{a}$:

1. Si a es positivo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \geq \frac{c}{a}$ y $x \leq \frac{c}{a}$ respectivamente.
2. Si a es negativo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \leq \frac{c}{a}$ y $x \geq \frac{c}{a}$ respectivamente.

Si las desigualdades son $ax > c$ o $ax < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $\frac{c}{a}$.

La solución $x \geq \frac{c}{a}$ se escribe utilizando intervalos como $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$; mientras que $x \leq \frac{c}{a}$ se escribe: $x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $2x \leq 6$ b) $4x \geq 24$ c) $-3x > -33$

d) $-14 > 7x$ e) $-8x \geq 0$ f) $0 \geq 5x$

g) $-4x < 18$ h) $5x > -1$ i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$

j) $\frac{2}{5}x < -1$ k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$ l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

Indicador de logro

2.3 Resuelve desigualdades lineales de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$.

Secuencia

Las desigualdades lineales presentadas en esta clase son del tipo $ax \geq c$ o $ax \leq c$ (se incluyen las desigualdades estrictas $>$ y $<$), cuya solución se encuentra usando las propiedades vistas en la clase 1.2, tanto para a positivo como para a negativo.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes invertir la desigualdad cuando el coeficiente de la variable sea un número negativo. Además, si los estudiantes tienen dificultades para "pasar a dividir" directamente el coeficiente de la variable al otro lado de la desigualdad entonces pueden multiplicar por el recíproco y luego simplificar la fracción.

Solución de problemas:

1a) $2x \leq 6$
$x \leq \frac{6}{2}$
$x \leq 3$

Luego, $2x \leq 6$ se cumple si $x \in]-\infty, 3]$.

1b) $4x \geq 24$
$x \geq \frac{24}{4}$
$x \geq 6$

Luego, $4x \geq 24$ se cumple si $x \in [6, \infty[$.

1c) $-3x > -33$
$x < \frac{-33}{-3}$
$x < 11$

Luego, $-3x > -33$ se cumple si $x \in]-\infty, 11[$.

1d) $-14 > 7x$
$7x < -14$
$x < \frac{-14}{7}$
$x < -2$

Luego, $-14 > 7x$ (o su equivalente $7x < -14$) se cumple si $x \in]-\infty, -2[$.

1e) $-8x \geq 0$ se cumple si $x \in]-\infty, 0]$.

1f) $0 \geq 5x$ se cumple si $x \in]-\infty, 0]$.

1g) $-4x < 18$ se cumple si $x \in \left]-\frac{9}{2}, \infty\right[$.

1h) $5x > -1$ se cumple si $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$.

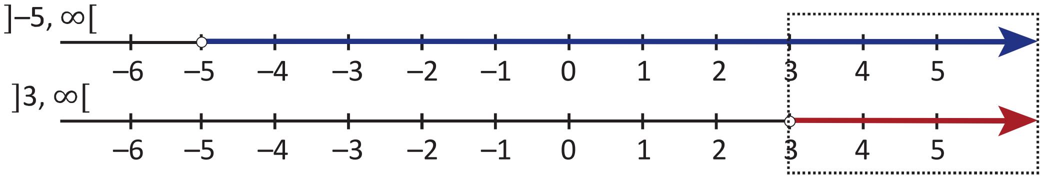
1i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$ se cumple si $x \in]-\infty, -9]$.

1j) $\frac{2}{5}x < -1$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$.

1k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right]$.

1l) $-\sqrt{2}x > 1$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

2a) La desigualdad $x + 2 > -3$ se cumple si $x \in]-5, \infty[$; mientras que $3x > 9$ se cumple si $x \in]3, \infty[$. Los valores de x que satisfacen ambas desigualdades pueden encontrarse representando los intervalos $]-5, \infty[$ y $]3, \infty[$ en la recta numérica e identificar los valores donde coinciden:



Luego, el intervalo donde coinciden es $]3, \infty[$, es decir, los valores de x que satisfacen $x + 2 > -3$ y $3x > 9$ pertenecen al intervalo $]3, \infty[$.

2b) $x - 5 \geq 2$ si $x \in [7, \infty[$; mientras que $-2x > 10$ si $]-\infty, -5[$. Los intervalos $[7, \infty[$ y $]-\infty, -5[$ no coinciden en ningún valor (puede representarlos en la recta numérica para observarlo). Luego, no existen números reales que satisfagan $x - 5 \geq 2$ y $-2x > 10$.

2c) $x + 4 < 1$ si $x \in]-\infty, -3[$; mientras que $5x > -30$ si $]-6, \infty[$. Los intervalos $]-\infty, -3[$ y $]-6, \infty[$ coinciden en $]-6, -3[$. Así, los valores de x que satisfacen $x + 4 < 1$ y $5x > -30$ pertenecen al intervalo $]-6, -3[$.

2.4 Solución de desigualdades lineales, parte 3

Problema inicial

Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

a) $2x + 7 > -9$ b) $6x - 5 \leq 2x + 15$

Solución

a) Se utilizan propiedades de desigualdades para llevarla a la forma $x > d$; primero deben realizarse las sumas o restas y luego las multiplicaciones:

$$2x + 7 > -9$$
$$2x + \cancel{7} - \cancel{7} > -9 - 7 \quad \text{restar 7 a ambos miembros,}$$
$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) > -16\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ ambos miembros,}$$
$$x > -8.$$

Por lo tanto, la desigualdad $2x + 7 > -9$ se cumple para $x \in]-8, \infty[$.

Puede deducirse lo siguiente:
- Un término que se encuentra sumando en uno de los miembros pasa al otro miembro a restar y viceversa (**transposición de términos**).
- Al llegar a la forma $mx \leq n$, se escribe x con coeficiente 1 y se multiplica n por el recíproco de m.

b) Aplicando lo encontrado en el literal anterior, para resolver $6x - 5 \leq 2x + 15$ se realiza lo siguiente:

$$6x - 5 \leq 2x + 15$$
$$6x \leq 2x + 15 + 5 \quad \text{se transpone 5 en el miembro derecho,}$$
$$6x - 2x \leq 20 \quad \text{se transpone } 2x \text{ en el miembro izquierdo,}$$
$$4x \leq 20$$
$$x \leq 20\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{se escribe } x \text{ con coeficiente 1 y se multiplica por } \frac{1}{4} \text{ el miembro izquierdo,}$$
$$x \leq 5.$$

Por lo tanto, la desigualdad $6x - 5 \leq 2x + 15$ se cumple para $x \in]-\infty, 5]$.

Conclusión

Para resolver una desigualdad lineal se hace lo siguiente:
1. Transponer términos para llevar la desigualdad a la forma $mx \geq n$ o $mx \leq n$.
2. Escribir la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco de m.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $3x - 4 < 8$ b) $2 \leq 5x + 12$ c) $7x - 24 > -x$

d) $4x + 9 < 2x + 11$ e) $2x - 1 \leq 5x + 14$ f) $3x - 2 \geq x + 6$

g) $x - 4 \leq -2x - 9$ h) $3x + 16 < 7x + 2$ i) $6x + 3 \geq 4x - 1$

j) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - \frac{7}{2}$ k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4 \leq 3x \\ 5x - 1 > 4x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 7 > -x - 5 \\ -2x > 3x - 10 \end{cases}$

Indicador de logro

2.4 Resuelve desigualdades lineales de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$.

Secuencia

Se utilizan las propiedades de desigualdades para resolver desigualdades lineales de las formas $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ (incluyendo las desigualdades estrictas $>$ y $<$). Se hace una comparación con la transposición de términos realizada en la resolución de ecuaciones lineales.

Propósito

En las desigualdades del bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar la transposición de términos para llevar las desigualdades a la forma $mx \geq n$ (o similar, según sea el símbolo de desigualdad) tal como lo indica la Conclusión. Es decir, no es necesario indicar paso a paso lo de "sumar o restar" la misma cantidad a ambos miembros.

Solución de problemas:

1a) $3x - 4 < 8$
$3x < 8 + 4$
$3x < 12$
$x < 12\left(\frac{1}{3}\right)$
$x < 4$

Luego, $3x - 4 < 8$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 4[$.

Luego de $3x < 12$, también puede escribirse directamente la fracción $\frac{12}{3}$ y efectuar el cociente, como en la clase anterior.

1b) $2 \leq 5x + 12$
$5x + 12 \geq 2$
$5x \geq 2 - 12$
$x \geq -10\left(\frac{1}{5}\right)$
$x \geq -2$

Luego, $2 \leq 5x + 12$ se cumple si $x \in [-2, \infty[$.

Los estudiantes pueden realizar el proceso con menos pasos, siempre y cuando no tengan dificultad en ello.

1c) $7x - 24 > -x$
$7x + x > 24$
$8x > 24$
$x > 24\left(\frac{1}{8}\right)$
$x > 3$

Luego, $7x - 24 > -x$ se cumple si $x \in \,]3, \infty[$.

1d) $4x + 9 < 2x + 11$
$4x - 2x < 11 - 9$
$2x < 2$
$x < 1$

Luego, $4x + 9 < 2x + 11$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 1[$.

1e) $2x - 1 \leq 5x + 14$ se cumple si $x \in [-5, \infty[$.

1f) $3x - 2 \geq x + 6$ se cumple si $x \in [4, \infty[$.

1g) $x - 4 \leq -2x - 9$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$.

1h) $3x + 16 < 7x + 2$ se cumple si $x \in \left]\frac{7}{2}, \infty\right[$.

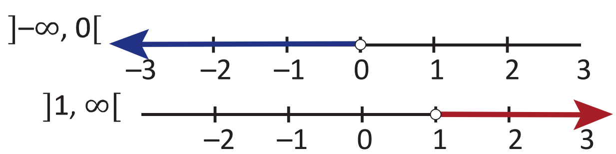
1i) $6x + 3 \geq 4x - 1$ se cumple si $x \in [-2, \infty[$.

1j) $\frac{1}{3}x - 2 > x - \frac{7}{2}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{9}{4}\right[$.

1k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{14}{33}\right[$.

1l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \,]-\infty, -3\sqrt{3}[$.

2a) $-3x > 0$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 0[$ y $2x - 5 > -3$ se cumple si $x \in \,]1, \infty[$. Se colocan estos intervalos en la recta numérica:



No hay valores coincidentes en ambos. Luego, no hay números reales que satisfagan $-3x > 0$ y $2x - 5 > -3$.

2b) $x + 4 \leq 3x$ se cumple si $x \in [2, \infty[$ y $5x - 1 > 4x + 7$ se cumple si $x \in \,]8, \infty[$. Estos intervalos coinciden en $]8, \infty[$, es decir, los valores de x que satisfacen $x + 4 \leq 3x$ y $5x - 1 > 4x + 7$ pertenecen a $]8, \infty[$.

2c) $3x + 7 > -x - 5$ se cumple si $x \in \,]-3, \infty[$ y $-2x > 3x - 10$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 2[$. Estos intervalos coinciden en $]-3, 2[$, es decir, los valores de x que satisfacen $3x + 7 > -x - 5$ y $-2x > 3x - 10$ pertenecen a $]-3, 2[$.

Lección 2

2.5 Interpretación gráfica de una desigualdad lineal

Problema inicial

Dada la función lineal $y = 2x - 4$:

1. Traza la gráfica de la función encontrando la intersección con los ejes de coordenadas.
2. Utilizando la gráfica de $y = 2x - 4$ determina los valores de x para los cuales $y \geq 0$.
3. ¿Cuál es la relación entre los valores de x encontrados en el literal anterior y la solución de $2x - 4 \geq 0$?

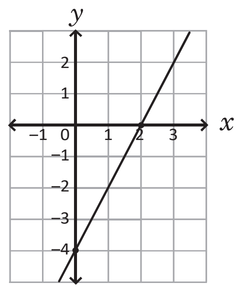
La gráfica de una función lineal $y = ax + b$ es una línea recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(x, 0)$, donde el valor de x del segundo punto se encuentra al resolver $y = 0$.

Solución

1. La intersección con el eje y es el punto (0, –4); mientras que la intersección del eje x se encuentra resolviendo $y = 0$:

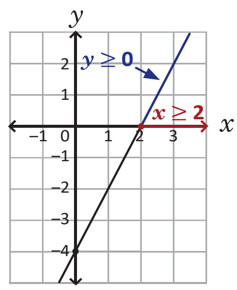
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

se colocan los puntos (0, –4) y (2, 0) en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ambos puntos como se muestra en la figura de la derecha.



2. Encontrar los valores de x para los cuales $y \geq 0$ significa, gráficamente, los números para los cuales la gráfica de $y = 2x - 4$ corta al eje x o queda arriba de este.

Se observa lo siguiente: $y \geq 0$ si $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.



3. La solución de la desigualdad $2x - 4 \geq 0$ es $x \geq 2$, o sea, la misma encontrada en el literal anterior.

Conclusión

Resolver una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ corta al eje x o se encuentra arriba de este en el caso de $ax + b \geq 0$, o debajo de este en el caso de $ax + b \leq 0$.

Cuando las desigualdades son $>$ o $<$ no se toman en cuenta los valores donde $y = ax + b$ es igual a cero.

Problemas

1. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-2x + 6 < 0$ b) $5x - 5 > 0$ c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. ¿Será posible que una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$, con $a \neq 0$, no tenga solución? Justifica tu respuesta con base en la gráfica de $y = ax + b$.

3. Sea a un número positivo. Demuestra que la solución de la desigualdad $ax + b < 0$ es $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

Indicador de logro

2.5 Resuelve desigualdades lineales utilizando la gráfica de la función $f(x) = ax + b$.

Secuencia

En la clase se relaciona la solución algebraica de una desigualdad del tipo $ax + b \geq 0$ con los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ queda sobre el eje x. Un análisis similar debe hacerse para las desigualdades del tipo $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ y $ax + b < 0$.

Propósito

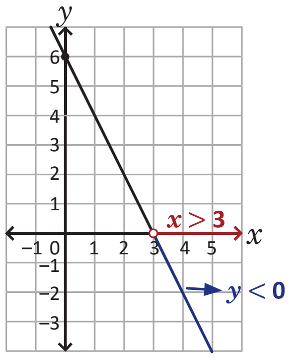
El análisis realizado en esta clase para la solución de las desigualdades, a partir de la gráfica de una función lineal, servirá en la interpretación de la solución de desigualdades cuadráticas, contenido que se estudiará en la siguiente unidad.

Solución de problemas:

1a) Sea $y = -2x + 6$; deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de $y = -2x + 6$ queda debajo del eje x. El punto de intersección de la gráfica de $y = -2x + 6$ con el eje y es (0, 6); mientras que para encontrar la intersección con el eje x se resuelve $y = 0$:

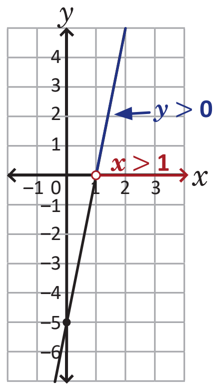
$$-2x + 6 = 0$$
$$6 = 2x$$
$$x = 3$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $y = -2x + 6$ con el eje x es (3, 0); la gráfica se muestra en la figura. De ella se deduce que: $y = -2x + 6 < 0$ se cumple si $x > 3$; en notación de intervalo, para $x \in]3, \infty[$.



1b) Sea $y = 5x - 5$; deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de $y = 5x - 5$ queda arriba del eje x. El punto de intersección de la gráfica con el eje y es (0, –5); mientras que con el eje x es (1, 0). La gráfica queda como lo muestra la figura.

De ella se deduce que: $y = 5x - 5 > 0$ se cumple si $x > 1$; en notación de intervalo, para $x \in]1, \infty[$.



1c) Se realiza un análisis similar a los literales 1a y 1b. Por lo tanto, $y = -\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$ se cumple si $x \leq -2$, o sea, si $x \in]-\infty, -2]$.

2. Sea $y = ax + b$, con $a \neq 0$ (tal como lo indica el enunciado del problema). Las soluciones de $y = ax + b \geq 0$ o $y = ax + b \leq 0$ son los valores de x para los cuales la gráfica de $y = ax + b$ queda arriba o debajo del eje x (ver Conclusión de la clase). Como la gráfica de una función lineal es una línea recta, esta siempre cortará en un único punto al eje x (pues $a \neq 0$), por lo tanto, siempre se podrán encontrar valores de x que satisfagan $y = ax + b \geq 0$ o $y = ax + b \leq 0$.

3. Se resuelve $ax + b < 0$ usando propiedades de desigualdades:

$$ax + b < 0$$
$$ax < -b \quad \text{se transpone } -b \text{ en el miembro derecho,}$$
$$x < -\frac{b}{a} \quad \text{se multiplica el miembro derecho por } \frac{1}{a}\text{, este número es positivo pues } a > 0.$$

Luego, $ax + b < 0$ se cumple para $x < -\frac{b}{a}$, es decir, para $x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

Lección 2

2.6 Aplicaciones de las desigualdades lineales

Problema inicial

Mario contratará un servicio de internet para su negocio y debe decidir entre dos compañías A y B. La compañía A le cobrará \$9.50 por la instalación del módem y \$45.00 mensual; mientras que la compañía B le cobrará \$12.50 por la instalación del módem y \$43.50 mensual. Si Mario calcula el gasto total por la instalación y el pago mensual, ¿después de cuántos meses el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A?

Solución

El gasto total por el servicio de la compañía A después de transcurrir x meses se calcula:

$$45x + 9.5,$$

mientras que el gasto total por el servicio de la compañía B después de transcurrir x meses será:

$$43.5x + 12.5$$

debe encontrarse la cantidad de meses que deben transcurrir para que:

$$\text{Gasto total B} < \text{Gasto total A}$$

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

se resuelve la desigualdad lineal:

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$

$$3 < 1.5x$$

$$2 < x.$$

En la solución pueden multiplicarse todos los términos de ambos miembros de la desigualdad por 10 para trabajar con números enteros.

Luego, el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A después de dos meses, es decir, del tercer mes en adelante.

En general

Para resolver una situación que implique el uso de desigualdades lineales se realiza lo siguiente:

1. Determinar, según la información del problema, la cantidad que representa la incógnita.
2. Plantear una desigualdad lineal.
3. Resolver la desigualdad lineal e interpretar la solución.

Problemas

1. El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN) registró en el 2015 que la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; si en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año, ¿cuál fue la cantidad mínima de sismos sentidos?

2. La distancia y en kilómetros recorrida por un automóvil después de x horas está dada por la expresión $y = 70x$. ¿En cuántas horas recorrerá al menos 315 kilómetros de una carretera?

3. En la mayoría de países anglosajones se utiliza el grado Fahrenheit para medir la temperatura; por ejemplo en un día de agosto de 2017 la temperatura registrada en Canadá fue de 71°F (se lee "71 grados Fahrenheit"), mientras que en El Salvador ese mismo día la temperatura fue de 31°C (se lee "31 grados Celsius o centígrados"). La relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F en grados Fahrenheit. Si en un día de septiembre de 2 017 la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C, ¿cuál fue la temperatura mínima en grados Fahrenheit?

Indicador de logro

2.6 Utiliza desigualdades lineales para interpretar matemáticamente y resolver situaciones de la vida cotidiana.

Secuencia

En esta clase se presentan situaciones que deben ser modeladas con desigualdades lineales para encontrar e interpretar la solución de la misma.

Posibles dificultades

Sobre el planteamiento de la desigualdad lineal, a partir de lo descrito en cada problema, para ello se pueden brindar algunas pistas que faciliten este proceso.

Solución de problemas:

1. Sea x la cantidad de sismos sentidos en el 2 015 (por la naturaleza de la situación, debe ser un número entero positivo); así, la cantidad de sismos no sentidos es igual a $11x$. Como en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año entonces $x + 11x > 4\,000$. Resolviendo esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 12x &> 4\,000 \\ x &> \frac{4\,000}{12} \end{aligned}$$

Es decir, $x > 333.\overline{3}$. Por lo tanto, la cantidad mínima de sismos sentidos en el 2 015 fue de 334.

2. Como la distancia recorrida debe ser al menos 315 km entonces y puede ser igual a 315 km o una cantidad superior a esta. Así, $y = 70x \geq 315$; resolviendo esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 70x &\geq 315 \\ x &\geq \frac{315}{70} \\ x &\geq 4.5 \end{aligned}$$

Entonces, el automóvil recorrerá al menos 315 kilómetros en un tiempo de, al menos, 4.5 horas o 4 horas con 30 minutos.

3. Como la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C entonces $C \geq 20$. Sustituyendo $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ en lo anterior y resolviendo la desigualdad para F:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}(F - 32) &\geq 20 \\ F - 32 &\geq 20\left(\frac{9}{5}\right) \\ F - 32 &\geq 36 \\ F &\geq 36 + 32 \\ F &\geq 68 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la temperatura mínima en grados Fahrenheit fue de 68°F.

2.7 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $5x - 7 < -2x$ b) $3x + 11 \geq 8x - 14$ c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$

d) $-x - 10 < 9x - 8$ e) $2x - 6 \geq 4x + 5$ f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$

g) $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$ h) $4x > x + 12\sqrt{3}$ i) $-3x - 9\sqrt{5} \leq -7x - 13\sqrt{5}$

j) $x + 4\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}x + 10\sqrt{2}$ k) $6\sqrt{3}\,x - 9 < 2\sqrt{3}\,x + 7$ l) $\sqrt{6}\,x + 5 > x + 4$

2. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-3x + 12 \geq 0$ b) $4x + 8 < 0$ c) $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$

3. Resuelve las siguiente situaciones:

a) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio. Si la suma de sus edades es inferior a 28 años, ¿cuál es la edad máxima que puede tener Mario?

b) La cantidad total de estudiantes de la Facultad de Odontología de la Universidad de El Salvador en el año 2017 fue de a lo sumo 717 estudiantes. Si la razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres es 1 : 2, ¿cuál es la cantidad máxima de hombres que hay?

c) En San Salvador, en Agosto de 2017 el precio mínimo del quintal de frijol rojo de seda nacional fue de \$50.00, y el máximo de \$58.00. Un quintal equivale a 100 libras aproximadamente. ¿Cuál debe ser el precio mínimo por libra de frijol para obtener ganancia si:

- Se compra el quintal a \$50.00?
- Se compra el quintal a \$58.00?

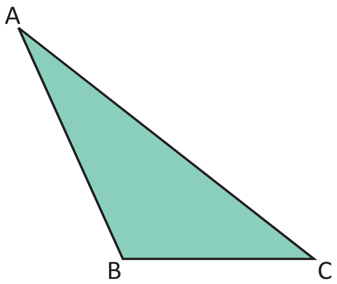
d) El ritmo de crecimiento de los niños, después de los dos años, es de al menos 6 centímetros por año hasta llegar a la adolescencia (15 años). ¿Cuál será la estatura mínima de un niño mayor de 10 años, si a los 7 años medía 1.19 m?

e) Carolina es vendedora de automóviles. Por la venta de un automóvil de \$6,000 obtiene una comisión del 3% sobre el precio de venta. ¿Cuántos automóviles de ese precio vendió Carolina como mínimo si su comisión al finalizar el año fue de más de \$1,080?

f) Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo están en razón 3 : 4. Si el perímetro del rectángulo mide a lo sumo 105 cm, ¿cuál es la longitud máxima de la altura? ¿Y de la base?

g) En el triángulo ABC de la derecha, el lado AB mide 2 centímetros más que el lado BC, y el lado CA mide el doble del lado BC. Si la medida del perímetro del triángulo es menor o igual que 34 cm:

- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado BC?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado AB?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado CA?



Indicador de logro

2.7 Resuelve problemas correspondientes a desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $5x - 7 < -2x$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 1[$.

1b) $3x + 11 \geq 8x - 14$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 5]$.

1c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$ se cumple si $x \in [-24, \infty[$.

1d) $-x - 10 < 9x - 8$ se cumple si $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$.

1e) $2x - 6 \geq 4x + 5$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{11}{2}\right]$.

1f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right]$.

1g) $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} > \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}x$$
$$\frac{13}{20} > \frac{23}{6}x$$
$$x > \frac{13}{20}\left(\frac{6}{23}\right)$$
$$x > \frac{39}{230} \quad \text{o sea, } x \in \left]\frac{39}{230}, \infty\right[.$$

1h) $4x > x + 12\sqrt{3}$

$$4x - x > 12\sqrt{3}$$
$$3x > 12\sqrt{3}$$
$$x > 12\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4\sqrt{3}$$

Luego, $4x > x + 12\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \,]4\sqrt{3}, \infty[$.

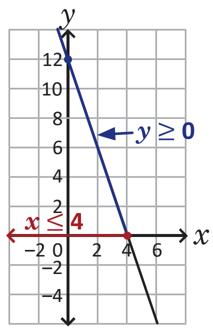
1i) La desigualdad se cumple si $x \in \,]-\infty, -\sqrt{5}]$.

1j) La desigualdad se cumple si $x \in [12\sqrt{2}, \infty[$.

1k) La desigualdad se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right[$.

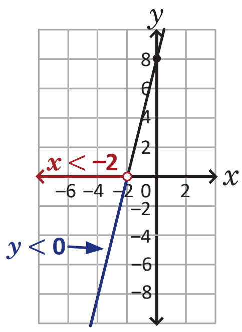
1l) La desigualdad se cumple si $x \in \left]-\frac{\sqrt{6}+1}{5}, \infty\right[$.

2a) Sea $y = -3x + 12$; su gráfica pasa por (0, 12) y (4, 0):



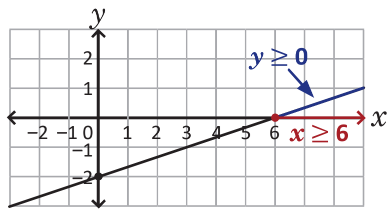
$y = -3x + 12 \geq 0$ si $x \in \,]-\infty, 4]$.

2b) Sea $y = 4x + 8$; su gráfica pasa por (0, 8) y (–2, 0):



$y = 4x + 8 < 0$ si $x \in \,]-\infty, -2[$.

2c) Sea $y = \frac{1}{3}x - 2$; su gráfica pasa por (0, –2) y (6, 0):



$y = \frac{1}{3}x - 2 \geq 0$ si $x \in [6, \infty[$.

3a) La desigualdad lineal a plantear es $4x < 28$ (ver solución del problema 1c de la clase 2.1), donde x es la edad en años de Mario. La desigualdad se cumple si $x < 7$, es decir, la edad máxima que puede tener Mario es 6 años.

3b) Si x representa la cantidad de estudiantes hombres en la Facultad de Odontología en el año 2017 entonces $2x$ es la cantidad de estudiantes mujeres en dicha facultad. La desigualdad a plantear es $x + 2x \leq 717$, la cual se cumple si $x \leq 239$. Luego, hay a lo sumo 239 hombres.

3c) Si se compra el quintal a \$50.00 entonces el precio mínimo por libra de frijol es \$0.51. Si se compra el quintal a \$58.00 entonces el precio mínimo por libra de frijol es \$0.59.

3d) La estatura mínima será de 1.37 metros.

3e) Carolina vendió, como mínimo, 7 automóviles de \$6,000.

3f) La longitud máxima de la altura es 22.5 cm, y la de la base es 30 cm.

3g) Sea x la longitud (en centímetros) del lado BC; entonces $x + 2$ es la longitud del lado AB y $2x$ es la del lado CA. Como el perímetro es menor o igual que 34 cm entonces $x + (x + 2) + 2x \leq 34$. Lo anterior se cumple si $x \leq 8$, o sea, la longitud máxima del lado BC es 8 cm, la del lado AB es 10 cm y la del lado CA es 16 cm.

Lección 3 Desigualdad no lineal

3.1 Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados

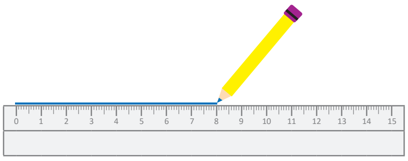
Materiales

- Regla y compás.
- Lápiz y cuaderno.

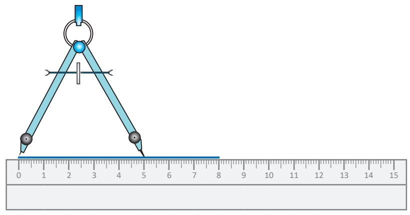
Actividad

Para dibujar un triángulo de lados 5, 7 y 8 centímetros se realiza lo siguiente:

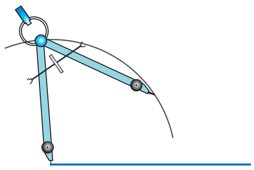
1. Traza el segmento de longitud 8 cm.



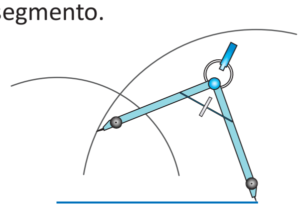
2. Con el compás toma la medida de otro de los lados, por ejemplo 5 cm.



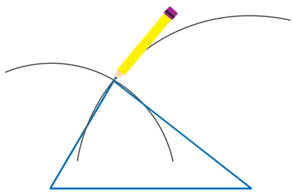
3. Coloca el compás en uno de los extremos del segmento dibujado en el numeral 1 y traza un arco de circunferencia.



4. Repite el proceso de los numerales 2 y 3, ahora tomando la medida de 7 cm y colocando el compás en el otro extremo del segmento.



5. Traza los segmentos que van desde el punto donde se cortan los arcos de circunferencia hacia cada uno de los extremos del segmento de 8 cm. Mide los lados del triángulo para verificar que, en efecto, miden 5, 7 y 8 centímetros.



Preguntas

1. Para cada caso, verifica si es posible trazar el triángulo de lados a, b y c:

   a) a = 4 cm, b = 5 cm y c = 6 cm
   b) a = 8 cm, b = 10 cm y c = 15 cm
   c) a = 3 cm, b = 4 cm y c = 7 cm
   d) a = 6 cm, b = 8 cm y c = 15 cm

2. Para cada uno de los literales del ejercicio 1 realiza lo siguiente:

   a) Calcula las sumas $a + b$, $b + c$ y $a + c$.
   b) ¿Se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$?

Indicador de logro

3.1 Verifica si es posible trazar triángulos usando regla y compás dadas las longitudes de sus lados.

Materiales

Cuaderno de apuntes u hojas de papel bond blanco, regla (puede utilizar también las escuadras), compás, lápiz y borrador.

Secuencia

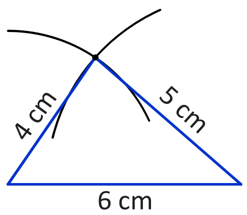
Esta clase sirve como introducción a la desigualdad triangular. Usando los instrumentos de geometría se verifica si es posible construir un triángulo a partir de las longitudes de sus lados.

Propósito

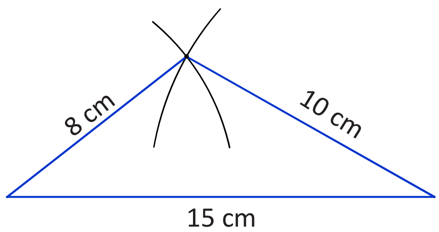
Esta clase no cuenta con Problema inicial; los estudiantes deben desarrollar la actividad descrita, siguiendo el paso a paso y utilizar este procedimiento en la resolución de los numerales del bloque de Preguntas.

Solución de problemas:

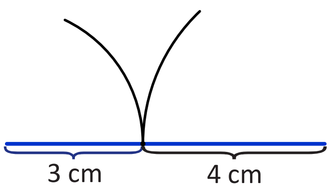
1a) Se dibuja el segmento de longitud c = 6 cm y se trazan los arcos de radios a = 4 cm y b = 5 cm:



1b) Se dibuja el segmento de longitud c = 15 cm y se trazan los arcos de radios a = 8 cm y b = 10 cm:

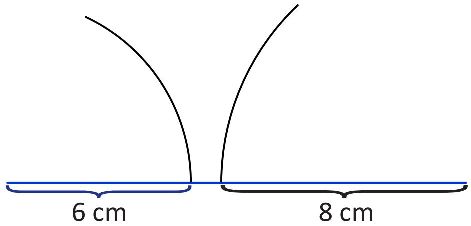


1c) Se dibuja el segmento de longitud c = 7 cm y se trazan los arcos de radios a = 3 cm y b = 4 cm:



Los arcos se cortan justo en el segmento de longitud 7 cm. Por tanto, no es posible trazar el triángulo.

1d) Se dibuja el segmento de longitud c = 15 cm y se trazan los arcos de radios a = 6 cm y b = 8 cm:



Los arcos no se cortan, por lo tanto no es posible trazar el triángulo.

2a)
- Si a = 4 cm, b = 5 cm y c = 6 cm: $a + b$ = 9 cm, $b + c$ = 11 cm y $a + c$ = 10 cm.
- Si a = 8 cm, b = 10 cm y c = 15 cm: $a + b$ = 18 cm, $b + c$ = 25 cm y $a + c$ = 23 cm.
- Si a = 3 cm, b = 4 cm y c = 7 cm: $a + b$ = 7 cm, $b + c$ = 11 cm y $a + c$ = 10 cm.
- Si a = 6 cm, b = 8 cm y c = 15 cm: $a + b$ = 14 cm, $b + c$ = 23 cm y $a + c$ = 21 cm.

2b) Debe verificarse en cada caso, si se cumplen las tres desigualdades.
- En el primer caso: 9 cm > 6 cm ($a + b > c$), 11 cm > 4 cm ($b + c > a$) y 10 cm > 5 cm ($a + c > b$). Por tanto, sí se cumplen $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$.
- En el segundo caso: 18 cm > 15 cm ($a + b > c$), 25 cm > 8 cm ($b + c > a$) y 23 cm > 10 cm ($a + c > b$). Por tanto, sí se cumplen $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$.
- En el tercer caso: $a + b$ = 7 cm, es decir, $a + b = c$ (no se cumple $a + b > c$).
- En el cuarto caso: 14 cm < 15 cm, es decir, $a + b < c$ (no se cumple $a + b > c$).

3.2 Desigualdad triangular, parte 1*

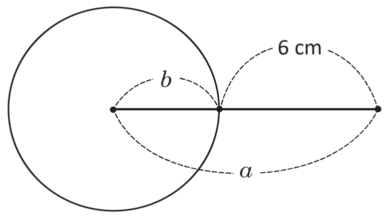
Problema inicial

Sean a = 10 cm, b = 4 cm y c un número positivo. ¿Qué valor puede tomar c para poder formar un triángulo de lados a, b y c?

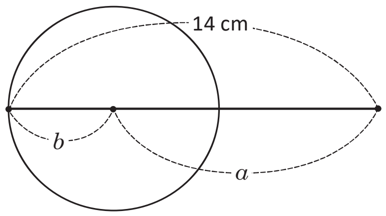
Traza el segmento de longitud a y tomando uno de los extremos como centro, traza una circunferencia de radio b.

Solución

Se traza el segmento a = 10 cm y una circunferencia de radio b = 4 cm y centro en uno de los extremos del segmento. Si dos de los vértices del triángulo son los extremos del segmento de longitud a entonces el tercer vértice debe estar sobre la circunferencia. En principio, el valor de c debe ser mayor que $a - b$ = 6 cm, de lo contrario no se podría formar un triángulo (ver figura de la derecha).

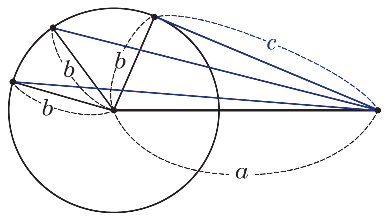


El valor de c también debe ser menor que $a + b$ = 14 cm; esto resulta de colocar el tercer vértice sobre la prolongación del segmento de longitud a como lo muestra la figura de la derecha y no se formaría un triángulo.



En cualquier otro lugar donde se coloque el tercer vértice, el valor de c siempre será mayor que 6 cm y menor que 14 cm. Por lo tanto:

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

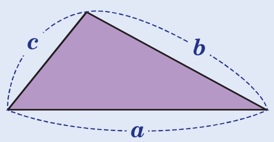


Por lo tanto, c puede tomar valores entre 6 cm y 14 cm para formar un triángulo.

Teorema

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que el tercer lado; y la diferencia de las longitudes de dos lados es menor que el tercer lado, es decir:

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c de tal manera que $b \geq c$ entonces:
$b - c < a < b + c$.

Problemas

1. Dadas las longitudes de dos de los lados de un triángulo, determina los posibles valores que puede tomar el tercer lado:
   a) dos lados miden 9 y 14 centímetros respectivamente;
   b) dos lados miden 3 y 11 centímetros respectivamente;
   c) dos lados miden 13 y 7 centímetros respectivamente.

2. Sin elaborar la figura, justifica por qué con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

Indicador de logro

3.2 Identifica los posibles valores para la longitud del lado de un triángulo dadas las longitudes de los otros dos.

Secuencia

En la clase se utiliza la idea de la construcción de triángulos a partir de sus lados vista en la clase 3.1 para deducir la desigualdad triangular. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en el Teorema y no la construcción del triángulo como en el Problema inicial.

Solución de problemas:

1a) Sea c la longitud del tercer lado del triángulo; esta debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y mayor que la diferencia de las mismas, o sea:

$$14 - 9 < c < 14 + 9$$
$$5 < c < 23$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 5 y 23 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

1b) Similar al literal 1a), si c es la longitud del tercer lado del triángulo, entonces:

$$11 - 3 < c < 11 + 3$$
$$8 < c < 14$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 8 y 14 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

1c) Si c es la longitud del tercer lado del triángulo entonces:

$$13 - 7 < c < 13 + 7$$
$$6 < c < 20$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 6 y 20 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

2. Sean a = 14 cm, b = 30 cm y c = 16 cm. Luego, $a + c$ = 30 cm, es decir, $a + c = b$. Pero, por el Teorema de la clase 3.2, para poder formar un triángulo, la suma de las longitudes de dos lados debe ser mayor que la longitud del tercero, lo cual no se cumple en este caso (la suma de a y c no es mayor que b). Por lo tanto, con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

3.3 Desigualdad triangular, parte 2*

Problema inicial

Demuestra que, para cualesquiera valores reales a y b, con $a \leq b$ siempre se cumple la desigualdad:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Separa por casos: cuando a y b son ambos positivos o iguales a cero; cuando uno es positivo o igual a cero y el otro negativo; y cuando ambos son negativos.

Solución

Para demostrar la desigualdad se separan los posibles casos para los números a y b, dependiendo si son positivos o iguales a cero, o negativos:

a) **Caso 1: $a \geq 0$ y $b \geq 0$.** Entonces, $|a| = a$, $|b| = b$ y $a + b \geq 0$; luego:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

b) **Caso 2: $a < 0$ y $b \geq 0$.** Entonces, $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a| + |b| = (-a) + b$.

- Si $a + b < 0$ entonces: $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b)$

  pero $-b < b$ (ya que b es positivo), y se tiene $(-a) + (-b) < (-a) + b$ y por tanto, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple.

- El caso $a + b \geq 0$ queda como ejercicio.

El caso $a \geq 0$ y $b < 0$ se demuestra de forma similar al caso 2.

c) **Caso 3: $a < 0$ y $b < 0$.** Entonces, $|a| = -a$ y $|b| = -b$; además, la suma de a y b también será un número negativo y:

$$\begin{aligned} |a + b| &= -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

En General

Para cualesquiera números reales a y b, la desigualdad: $|a + b| \leq |a| + |b|$ siempre es verdadera, es decir, el valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de ambos números. A esta desigualdad se le llama **desigualdad triangular.**

Problemas

1. Verifica que la desigualdad triangular se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 7$	b) $a = -8$ y $b = 10$	c) $a = -5$ y $b = -6$
d) $a = 11$ y $b = -13$	e) $a = -4$ y $b = 4$	f) $a = 8$ y $b = 8$
g) $a = 0$ y $b = -6$	h) $a = -\frac{4}{5}$ y $b = \frac{2}{5}$	i) $a = \sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$

2. Demuestra que si $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Sean a, b y c números reales cualesquiera. Utiliza la desigualdad triangular para demostrar la desigualdad $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Indicador de logro

3.3 Verifica la desigualdad triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ para números reales a y b.

Secuencia

Se demuestra la desigualdad triangular para los valores absolutos de los números reales a y b. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Posibles dificultades

El numeral 3 del bloque de Problemas puede desarrollarlo paso a paso con los estudiantes para que comprendan por qué la desigualdad es verdadera. Recuerde que no se esperan demostraciones matemáticas exhaustivas.

Solución de problemas:

1a) $|a + b| = |9 + 7| = |16| = 16$

$\left.\begin{array}{l} |a| = |9| = 9 \\ |b| = |7| = 7 \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 16$

De lo anterior: $16 \leq 16$, es decir, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1b) $|a + b| = |-8 + 10| = |2| = 2$

$\left.\begin{array}{l} |a| = |-8| = 8 \\ |b| = |10| = 10 \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 18$

De lo anterior: $2 \leq 18$, es decir, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1c) $|a + b| = |-5 - 6| = |-11| = 11$

$\left.\begin{array}{l} |a| = |-5| = 5 \\ |b| = |-6| = 6 \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 11$

De lo anterior: $11 \leq 11$.

1d) $|a + b| = |11 - 13| = |-2| = 2$

$\left.\begin{array}{l} |a| = |11| = 11 \\ |b| = |-13| = 13 \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 24$

De lo anterior: $2 \leq 24$.

1e) $|a + b| = |-4 + 4| = 0$; $|a| = 4$, $|b| = 4$ y $|a| + |b| = 8$. Luego, $0 \leq 8$.

1f) $|a + b| = |8 + 8| = 16$; $|a| = 8$, $|b| = 8$ y $|a| + |b| = 16$. Luego, $16 \leq 16$.

1g) $|a + b| = |0 - 6| = |-6| = 6$

$\left.\begin{array}{l} |a| = |0| = 0 \\ |b| = |-6| = 6 \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 6$

De lo anterior: $6 \leq 6$.

1h) $|a + b| = \left|-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right| = \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

$\left.\begin{array}{l} |a| = \left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5} \\ |b| = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} \end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

De lo anterior: $\frac{2}{5} \leq \frac{6}{5}$.

1i) $|a + b| = |\sqrt{2} + 3\sqrt{2}| = |4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$; $|a| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|b| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ y $|a| + |b| = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Luego, $4\sqrt{2} \leq 4\sqrt{2}$.

2. Dados los números reales a y b tales que $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ (según el enunciado del problema). Entonces $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a + b| = a + b$. Pero $a < -a$ (ya que a es negativo) y se tiene $a + b < -a + b$ y por lo tanto se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Dados los números reales a, b y c, $a + b + c = (a + b) + c$ (propiedad asociativa de la suma). Así,

$$|a + b + c| = |(a + b) + c| \leq |a + b| + |c| \quad \text{por la desigualdad triangular.}$$

Además, $|a + b| \leq |a| + |b|$ y por tanto $|a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|$. Luego,

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

3.4 Desigualdad de las medias aritmética y geométrica

Problema inicial

Demuestra lo siguiente:

1. Si x es cualquier número real entonces $x^2 \geq 0$.
2. Si a y b son números reales no negativos entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

En el literal a), separa por casos: $x > 0$ y $x < 0$. Para el literal b), utiliza el resultado de a) sustituyendo x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Solución

1. Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y se cumple la igualdad. Ahora se separan los posibles casos para el número x: cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$.

Caso 1, $x \geq 0$:

$x\,(x) \geq 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número positivo no altera la desigualdad,

$x^2 \geq 0$.

Caso 2, $x < 0$:

$x\,(x) > 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número negativo invierte la desigualdad,

$x^2 > 0$.

Por lo tanto, para cualquier número real x se cumple $x^2 \geq 0$.

2. Usando el resultado del literal anterior se sustituye x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, es decir, si $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ entonces:

$$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0 \quad \text{desarrollar cuadrado de un binomio,}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{sumar } 2\sqrt{ab} \text{ a ambos lados de la desigualdad,}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{multiplicar por } \tfrac{1}{2} \text{ ambos lados de la desigualdad.}$$

Por lo tanto, para cualquier pareja de números no negativos a y b se cumple: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Propiedad

1. Para todo número real a se cumple $a^2 \geq 0$; la igualdad se verifica si $a = 0$.
2. Si a y b son números no negativos cualesquiera entonces la desigualdad:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

es verdadera; el miembro izquierdo de la desigualdad es la media aritmética de a y b, mientras que el miembro derecho es la media geométrica de a y b. A esta desigualdad se le llama **desigualdad de las medias aritmética y geométrica**.

Problemas

1. Verifica que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 4$
b) $a = 8$ y $b = 18$
c) $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{16}$
d) $a = 10$ y $b = 90$
e) $a = 25$ y $b = 49$
f) $a = 6$ y $b = 30$

2. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, demuestra lo siguiente:

a) si x es un número no negativo entonces $1 + x \geq 2\sqrt{x}$;
b) si a y b son números positivos entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Indicador de logro

3.4 Verifica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para números reales no negativos.

Secuencia

En esta clase se demuestra una propiedad fundamental de los números reales ($x^2 \geq 0$), esta se utiliza luego para demostrar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para números reales no negativos.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas, puede dar pistas a los estudiantes sobre cuáles deben ser los números a y b descritos en la Propiedad 2 para ser sustituidos en la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

Solución de problemas:

1a) $\frac{a+b}{2} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$

$\sqrt{ab} = \sqrt{9(4)} = \sqrt{36} = 6$

Luego, $6.5 \geq 6$, es decir, se cumple la desigualdad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

1b) $\frac{a+b}{2} = \frac{8+18}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$\sqrt{ab} = \sqrt{8(18)} = \sqrt{144} = 12$

Luego, $13 \geq 12$, es decir, se cumple la desigualdad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

1c) $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{2} = \frac{\frac{5}{16}}{2} = \frac{5}{32}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

Luego, $\frac{5}{32} \geq \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

1d) $\frac{a+b}{2} = \frac{10+90}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$\sqrt{ab} = \sqrt{10(90)} = \sqrt{900} = 30$

Luego, $50 \geq 30$.

1e) $\frac{a+b}{2} = \frac{25+49}{2} = \frac{74}{2} = 37$

$\sqrt{ab} = \sqrt{25(49)} = 5(7) = 35$

Luego, $37 \geq 35$.

1f) $\frac{a+b}{2} = \frac{6+30}{2} = \frac{36}{2} = 18$

$\sqrt{ab} = \sqrt{6(30)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

Luego, $18 \geq 6\sqrt{5}$, ya que $\sqrt{324} \geq \sqrt{180}$.

2a) Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, con $a = 1$ y $b = x$:

$\frac{1+x}{2} \geq \sqrt{1(x)}$ por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$1 + x \geq 2\sqrt{x}$ se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la desigualdad $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ es verdadera para todo número no negativo x.

2b) Como a y b son positivos, pueden definirse los números $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ (ya que los denominadores son diferentes de cero). Entonces:

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\left(\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}\right)}$ por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ se simplifican las fracciones y se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la desigualdad $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ es verdadera para toda pareja de números positivos a y b.

3.5 Desigualdades con expresiones racionales

Problema inicial

Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

a) $\frac{1}{x} > 0$ b) $\frac{1}{x-1} < 0$

Solución

a) Deben encontrarse todos los valores de x para los cuales el número $\frac{1}{x}$ es positivo. Es claro que $x = 0$ no es parte de la solución, pues se tendría la forma indeterminada $\frac{1}{0}$.

Ahora, para que la expresión $\frac{1}{x}$ sea positiva, el numerador y denominador deben ser ambos positivos o bien ambos negativos. Sin embargo, el numerador ya es positivo y por tanto debe ser $x > 0$.

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x} > 0$ se cumple para $x > 0$, o sea $x \in]0, +\infty[$.

b) El proceso es similar al del literal anterior, solo que esta vez $\frac{1}{x-1}$ debe ser negativo. Como el numerador ya es positivo debe ser:

$$x - 1 < 0$$
$$x < 1$$

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x-1} < 0$ se cumple para $x < 1$, o sea $x \in]-\infty, 1[$.

Conclusión

Sean a y b números reales cualesquiera, con $a \neq 0$.

1. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} > 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es positiva. Esto ocurre solo si $ax + b > 0$.
2. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} < 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es negativa. Esto ocurre solo si $ax + b < 0$.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$.

Se multiplica por –1 ambos miembros, esto invierte la desigualdad:

$$\frac{1}{2x+3} > 0$$

entonces, $\frac{1}{2x+3} > 0$ solo si $2x + 3 > 0$:

$$2x > -3$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$ se cumple para $x > -\frac{3}{2}$, es decir si $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

No se consideran los símbolos $\geq$ y $\leq$ para estas desigualdades, ya que una expresión de la forma $\frac{1}{ax+b}$ nunca será igual a cero, por lo que no tiene sentido considerarlos.

Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades (expresa la solución utilizando intervalos):

a) $\frac{1}{x+4} > 0$ b) $\frac{1}{2x-5} < 0$ c) $\frac{-1}{3x+1} > 0$

d) $-\frac{1}{1-x} > 0$ e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ f) $\frac{2}{4x-7} < 0$

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ h) $\frac{-x-4}{x+5} > -1$ i) $\frac{x+2}{x+3} > 1$

En los problemas h) e i), pasa todo a un solo miembro de modo que en un miembro quede cero.

Unidad 3

75

Indicador de logro

3.5 Resuelve desigualdades de la forma $\frac{1}{ax+b} > 0$ o $\frac{1}{ax+b} < 0$.

Secuencia

En la clase se resuelven desigualdades donde uno de sus miembros es una fracción con denominador igual a un polinomio lineal de una variable y el otro miembro es igual a cero. Se analiza el tipo de desigualdad para determinar los valores de la variable tales que la fracción sea un número positivo o un número negativo.

Posibles dificultades

En las desigualdades de los literales h) e i) del bloque de Problemas, indique a sus estudiantes que deben transponer términos y realizar sumas de fracciones para llevarlas a la forma $\frac{1}{ax+b} > 0$ o $\frac{1}{ax+b} < 0$.

Solución de problemas:

a) La desigualdad $\frac{1}{x+4} > 0$ se cumplirá solo si:

$$x + 4 > 0$$
$$x > -4$$

Luego, $\frac{1}{x+4} > 0$ si $x \in \left]-4, \infty\right[$.

b) La desigualdad $\frac{1}{2x-5} < 0$ se cumplirá solo si:

$$2x - 5 < 0$$
$$x < \frac{5}{2}$$

Luego, $\frac{1}{2x-5} < 0$ si $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$.

c) Se multiplican ambos miembros de $\frac{-1}{3x+1} > 0$ por -1 para obtener la equivalente $\frac{1}{3x+1} < 0$; esta segunda se cumplirá solo si:

$$3x + 1 < 0$$
$$x < -\frac{1}{3}$$

Luego, $\frac{-1}{3x+1} > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$.

d) Se multiplican ambos miembros de $-\frac{1}{1-x} > 0$ por -1 para obtener la equivalente $\frac{1}{1-x} < 0$; esta segunda se cumplirá solo sí:

$$1 - x < 0$$
$$1 < x$$

Luego, $-\frac{1}{1-x} > 0$ si $x \in \left]1, \infty\right[$.

e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 5\right[$.

f) $\frac{2}{4x-7} < 0$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$.

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ es equivalente a $\frac{3}{5x+6} < 0$, la cual se cumple si $5x + 6 < 0$ (pues el numerador es positivo):

$$5x < -6$$
$$x < -\frac{6}{5}$$

Luego, $-\frac{3}{5x+6} > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{6}{5}\right[$.

h) Se utiliza transposición de términos y suma de fracciones:

$$\frac{-x-4}{x+5} + 1 > 0$$
$$\frac{-\cancel{x} - 4 + \cancel{x} + 5}{x+5} > 0$$
$$\frac{1}{x+5} > 0$$

Esta última se cumple si $x > -5$. Por lo tanto, la solución de $\frac{-x-4}{x+5} > -1$ son los $x \in \left]-5, \infty\right[$.

i) Similar al literal h, se utiliza transposición de términos y suma de fracciones:

$$\frac{x+2}{x+3} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} - 3}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+3} > 0$$

La desigualdad $\frac{-1}{x+3} > 0$ se cumple si $x < -3$. Por lo tanto, la solución de $\frac{x+2}{x+3} > 1$ son los $x \in \left]-\infty, -3\right[$.

3.6 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

f) $\sqrt{10}\,x - 8 > \sqrt{2}\,x - 6$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} 5x - 3 > 4x - 5 \\ -2x + 5 \leq -3x + 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 6 < 5x - 16 \\ x + 11 \geq -x - 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 7 < 5x + 1 \\ 6x > 3x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - 3 \leq x - 5 \\ 3x - 1 \geq 4x + 7 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

3. Resuelve las siguientes situaciones:

a) José es un estudiante de primer año de bachillerato. Durante este año obtuvo las siguientes calificaciones en sus exámenes de período de matemática:

Período 1	7.6
Período 2	8.0
Período 3	8.2

Si José quiere que su promedio final en los exámenes sea mayor o igual a 8.0, ¿cuál debe ser la calificación mínima que ha de obtener en el examen del período 4 para lograrlo?

b) Julia rentará un auto para un viaje. La agencia A le cobrará \$24.00 la renta del auto más \$0.30 por cada kilómetro recorrido; mientras que la agencia B le cobrará \$25.00 la renta del auto más \$0.25 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la cantidad mínima de kilómetros que puede recorrer Julia hasta que el precio de la agencia A exceda al precio de la agencia B?

c) Un producto genera utilidad solo cuando el ingreso de la venta del producto excede al costo de producción. Una empresa de teléfonos celulares calcula que el costo C (en dólares) para producir x teléfonos celulares es:

$$C = 90x + 1\,000,$$

mientras que el ingreso R (en dólares) es: $R = 140x$.

¿Cuál debe ser la cantidad mínima de teléfonos celulares que deben venderse para obtener utilidad?

4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

Utiliza el resultado de la clase 3.2 de esta unidad.

5. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica demuestra lo siguiente:

a) si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

b) si a, b y x son números positivos entonces $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$.

Indicador de logro

3.6 Resuelve problemas correspondientes a desigualdades.

Solución de problemas:

1a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

$$4x \leq 20\sqrt{7} + 12\sqrt{7}$$
$$x \leq 32\sqrt{7}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$x \leq 8\sqrt{7}$$

La desigualdad $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 8\sqrt{7}\right]$.

1b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

$$x + x \leq -7\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$$
$$2x \leq -16\sqrt{5}$$
$$x \leq -8\sqrt{5}$$

La desigualdad $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -8\sqrt{5}\right]$.

1c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

$$3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} > -x + 5x$$
$$-2\sqrt{6} > 4x$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{6} > x$$
$$x < -\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

La desigualdad $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{6}\right[$.

1d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

$$11x - 4x \geq 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$
$$7x \geq 3\sqrt{2}$$
$$x \geq \frac{3}{7}\sqrt{2}$$

La desigualdad $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$ se cumple si $x \in \left[\frac{3}{7}\sqrt{2}, \infty\right[$.

1e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

$$8x - 5x < -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$
$$3x < -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$
$$x < (-6\sqrt{3} + 15\sqrt{2})\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x < (-6\sqrt{3})\left(\frac{1}{3}\right) + (15\sqrt{2})\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x < -2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

La desigualdad $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right[$.

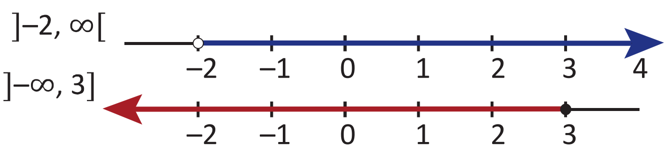
1f) $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$

$$\sqrt{10}x - \sqrt{2}x > -6 + 8$$
$$(\sqrt{10} - \sqrt{2})x > 2$$
$$x > \frac{2}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$$
$$x > \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}$$

Es recomendable efectuar la racionalización.

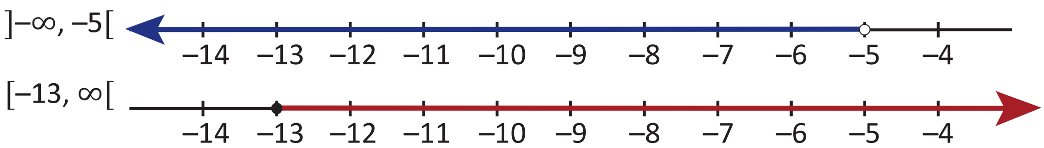
La desigualdad $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$ se cumple si $x \in \left]\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}, \infty\right[$.

2a) La desigualdad $5x - 3 > 4x - 5$ se cumple para $x \in \left]-2, \infty\right[$; mientras que $-2x + 5 \leq -3x + 8$ se cumple para $x \in \left]-\infty, 3\right]$. Se representan ambas soluciones en la recta numérica para encontrar los valores donde coinciden:



De acuerdo a lo anterior, ambos intervalos coinciden en $\left]-2, 3\right]$. Por lo tanto, los valores de x que satisfacen las desigualdades $5x - 3 > 4x - 5$ y $-2x + 5 \leq -3x + 8$ pertenecen al intervalo $\left]-2, 3\right]$.

2b) La desigualdad $7x - 6 < 5x - 16$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -5\right[$; mientras que $x + 11 \geq -x - 15$ se cumple para $x \in \left[-13, \infty\right[$. Representando ambas soluciones en la recta numérica:



Entonces, ambos intervalos coinciden en $[-13, -5[$. Por lo tanto, los valores de x que satisfacen las desigualdades $7x - 6 < 5x - 16$ y $x + 11 \geq -x - 15$ pertenecen al intervalo $[-13, -5[$.

2c) La desigualdad $3x - 7 < 5x + 1$ se cumple para $x \in]-4, \infty[$; mientras que $6x > 3x + 1$ se cumple para $x \in \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$. Siguiendo un proceso como en 2a) y 2b) se deducen los valores de x que satisfacen ambas desigualdades, los cuales pertenecen al intervalo $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$.

2d) La desigualdad $-2x - 3 \leq x - 5$ se cumple para $x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$; mientras que $3x - 1 \geq 4x + 7$ se cumple para $x \in]-\infty, -8]$. Siguiendo un proceso como en 2a) y 2b) se verifica que los intervalos no coinciden en ningún valor, por lo tanto no hay valores reales de x que satisfagan ambas desigualdades.

3a) Sea x la calificación que debe obtener José en el periodo 4. Como el promedio final debe ser mayor o igual que 8.0 entonces:

$$\frac{7.6 + 8.0 + 8.2 + x}{4} \geq 8.0$$

Se resuelve la desigualdad anterior y se interpreta la solución:

$$23.8 + x \geq 32.0$$
$$x \geq 8.2$$

Así, la calificación mínima de José debe ser 8.2.

3b) Sea x la distancia en kilómetros recorrida por Julia. Luego, la agencia A le cobrará $24 + 0.3x$ dólares; mientras que la agencia B le cobrará $25 + 0.25x$ dólares. Si el precio de la agencia A debe exceder al de la agencia B entonces:

$$24 + 0.3x > 25 + 0.25x$$
$$0.05x > 1$$
$$x > 20$$

Por lo tanto, después de 20 kilómetros el precio de la agencia A será mayor que el de la agencia B.

3c) Para obtener utilidad debe ocurrir R > C, o sea, $140x > 90x + 1000$. Resolviendo esta desigualdad:

$$140x > 90x + 1000$$
$$50x > 1000$$
$$x > 20$$

Por lo tanto, para obtener utilidad la empresa debe vender como mínimo 21 celulares.

4. Por ser las longitudes de los lados de un triángulo, los números a, b y c son positivos y las sumas $b + c$, $a + c$ y $a + c$ también serán números positivos. Por el teorema de la clase 3.2 sobre las longitudes de los lados de un triángulo se cumplen las desigualdades $a < b + c$, $b < a + c$ y $c < a + b$. Usando propiedades de desigualdades, si en $a < b + c$ se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $b + c$ entonces la desigualdad no cambia, es decir:

$$a\left(\frac{1}{b+c}\right) < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1.$$

De forma similar se obtienen $\frac{b}{a+c} < 1$ y $\frac{c}{a+b} < 1$. Luego,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 1 + 1 + 1$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

5a) Como x es positivo, puede definirse el número $\frac{1}{x}$ (también será positivo). Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, y propiedades de desigualdades:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

5b) Como a, b y x son positivos, los números ax y $\frac{b}{x}$ también serán positivos. Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, y propiedades de desigualdades:

$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{2} \geq \sqrt{a\cancel{x}\left(\frac{b}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$