Unidad 4. Funciones reales

Competencia de la unidad

Identificar los elementos y características de las funciones cuadráticas, cúbicas de la forma $f(x) = ax^3$, racionales e irracionales, haciendo uso de tablas de valores y de sus gráficas para resolver problemas sobre monotonía y situaciones de la vida cotidiana, e interpretar gráficamente la solución de una desigualdad cuadrática.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa (7°)
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ (9°)
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Definición de función	1	1. Notación de funciones
	1	2. Gráfica de una función
	1	3. Dominio y rango de una función
2. Función cuadrática	1	1. Desplazamiento vertical
	1	2. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$
	1	3. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$
	1	4. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 1
	1	5. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2
	1	6. Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$
	1	7. Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$
	1	8. Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
	1	9. Condiciones iniciales
	2	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Aplicaciones de la función cuadrática	1	1. Monotonía
	1	2. Variación: valor máximo o mínimo

Lección	Horas	Clases
	1	3. Aplicación: valor máximo
	1	4. Aplicación: valor mínimo
	1	5. Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y
	1	6. Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x
	1	7. Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1
	1	9. Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$
	1	10. Desigualdad cuadrática, $a < 0$
	1	11. Cuadro de variación, parte 1
	1	12. Cuadro de variación, parte 2
	1	13. Practica lo aprendido
4. Otras funciones	1	1. Función $f(x) = x^3$
	1	2. Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$
	1	3. Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$
	1	4. Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos
	1	5. Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$

Lección	Horas	Clases
	1	6. Gráfica de la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
	1	7. Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$
	1	8. Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
5. Práctica en GeoGebra	1	1. Generalidades
	1	2. Desplazamientos verticales
	1	3. Desplazamientos horizontales
	1	Prueba de las lecciones 3 y 4
	2	Prueba del segundo periodo

40 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de las lecciones 3 y 4 + prueba del segundo periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Definición de función
En esta lección se introduce la notación $f(x)$ para funciones, las definiciones de dominio y rango de una función y la prueba de la recta vertical para determinar si una línea corresponde a la gráfica de una función.

Lección 2: Función cuadrática
La lección comienza con un repaso de los desplazamientos verticales de funciones lineales y cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$ vistos en octavo y noveno grado. Luego de ello, se verifica la relación entre los elementos (gráfica, dominio y rango) de $f(x) = ax^2$ y los de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$, usando desplazamientos horizontales y verticales. Este proceso se realiza paulatinamente, deduciendo primero los desplazamientos horizontales y después hacer combinaciones de desplazamientos. Finalmente se estudia la forma general de la ecuación de una función cuadrática, y el método de completar cuadrados para expresarla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Lección 3: Aplicaciones de la función cuadrática
Una vez estudiadas las generalidades de la función cuadrática (gráfica, dominio y rango), en esta lección se utilizan las características de la misma para resolver problemas sobre monotonía, cálculo de valores mínimo o máximo y desigualdades cuadráticas. En este último se interpreta la solución de la desigualdad usando la gráfica de una función cuadrática, y luego se resuelven mediante el cuadro de variación.

Lección 4: Otras funciones
En esta lección se utilizan tablas de valores para graficar de las funciones $f(x) = ax^3$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = a\sqrt{x}$ y $f(x) = \sqrt{ax}$ y a partir de estas deducir el dominio y el rango de cada una de ellas. Además, se grafican las funciones $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ como desplazamientos verticales y horizontales de la función $g(x) = \frac{k}{x}$; por otra parte, se grafica la función $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ al transformarla en la forma $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$.

Lección 5: Práctica en GeoGebra
En esta lección se utiliza el software matemático GeoGebra para realizar gráficas de funciones, desplazamientos horizontales o verticales y la construcción de las gráficas de funciones a partir de un conjunto de puntos de la forma $(x, f(x))$.

Lección 1 Definición de función

1.1 Notación de funciones

Problema inicial

Encuentra el valor de y correspondiente al valor de x en cada función si:

a) $y = 5x - 1;\ x = -3$ b) $y = 4x^2;\ x = \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{x^2}{2} + 5;\ x = 10$

Solución

En cada caso debe sustituirse el valor de x para encontrar y:

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = -3$ es $y = -16$.

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = \frac{1}{2}$ es $y = 1$.

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = 10$ es $y = 55$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama **función de A en B** a la correspondencia que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B. Para denotar una función de A en B se escribe $\boldsymbol{f}$**: A ⟶ B**, al elemento x de A se le llama **variable independiente o preimagen**; mientras que el elemento y de B se llama **variable dependiente o imagen**. Cuando se trata con funciones, la variable y se escribe como $\boldsymbol{f(x)}$ y se lee "f de x".

Ya se han estudiado dos funciones específicas: la función lineal $f(x) = ax + b$ y la función $f(x) = ax^2 + c$. Ambas funciones son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues los valores de x y y son números reales. Las funciones también pueden nombrarse utilizando otras letras, por ejemplo, $g(x)$ o $h(x)$.

Dado un valor particular $x = m$, para encontrar el valor de $f(m)$ se sustituye x por m en la **ecuación de la función** $\boldsymbol{f}$.

Ejemplo

Encuentra el valor de $f(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = -2x + 7;\ x = -5$ b) $f(x) = 3x^2 + 2;\ x = 2$

$f(x)$ NO significa f multiplicado por x, sino la función f evaluada en x.

Deben sustituirse los valores de x en la ecuación de la función, según sea el caso. En el primer literal, el valor de la función evaluada en $x = -5$ se representa por $f(-5)$; mientras que en el segundo literal, el valor de la función evaluada en $x = 2$ se representa por $f(2)$.

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(-5) = 17$.

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(2) = 14$.

Problemas

1. En cada caso encuentra el valor de $f(x)$, si x toma el valor dado:

a) $f(x) = x + 4;\ x = 0$ b) $f(x) = 4x - 6;\ x = 1$ c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1;\ x = 6$

d) $f(x) = -5x^2;\ x = 3$ e) $f(x) = x^2 + 4;\ x = -1$ f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2;\ x = 2$

2. Dada la función lineal $f(x) = 2x - 3$, ¿cuál debe ser el valor de x para que $f(x) = 5$?

3. Dada la función $f(x) = 4x^2 + 5$, ¿cuáles deben ser los valores de x para que $f(x) = 11$?

Indicador de logro

1.1 Calcula el valor de $f(x)$ usando la ecuación de la función y el valor de x.

Secuencia

En Tercer Ciclo, la ecuación de una función se escribía de la forma $y = ax + b$ o $y = ax^2 + c$. En esta clase se introduce la notación $f(x)$ para funciones; se utilizan también $g(x)$ o $h(x)$ en los casos donde se mencionan dos o más funciones, la definición (general) de una función y las variables independiente y dependiente.

Propósito

Esta clase es para que los estudiantes se familiaricen con la notación de funciones y con evaluar una función en un valor dado. Las funciones utilizadas en el bloque de Problemas corresponden a funciones lineales o cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$, ambas estudiadas en octavo y noveno grado, respectivamente.

Posibles dificultades

Verificar que los estudiantes escriben correctamente al momento de evaluar una función en un valor específico. Recordarles que $f(x)$ no significa f multiplicado por x.

Solución de problemas:

1a) El valor de la función evaluada en $x = 0$ se representa por $f(0)$. Se sustituye $x = 0$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Luego, $f(0) = 4$.

1b) El valor de la función evaluada en $x = 1$ se representa por $f(1)$. Se sustituye $x = 1$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4(1) - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Luego, $f(1) = -2$.

1c) Se sustituye $x = 6$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(6) &= -\frac{1}{3}(6) + 1 \\ &= -2 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Luego, $f(6) = -1$.

1d) Se sustituye $x = 3$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(3) &= -5(3)^2 \\ &= -5(9) \\ &= -45 \end{aligned}$$

Luego, $f(3) = -45$.

1e) Se sustituye $x = -1$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 4 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Luego, $f(-1) = 5$.

1f) Se sustituye $x = 2$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{1}{2}(2)^2 - 2 \\ &= -\frac{1}{2}(4) - 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Luego, $f(2) = -4$.

2. Como $f(x) = 2x - 3$ entonces $2x - 3 = 5$. Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 5 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de x debe ser igual a 4 para que se cumpla $f(x) = 5$.

3. Como $f(x) = 4x^2 + 5$ entonces $4x^2 + 5 = 11$. Se resuelve esta ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 5 &= 11 \\ 4x^2 &= 6 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de x deben ser igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ o $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Lección 1

1.2 Gráfica de una función

Problema inicial

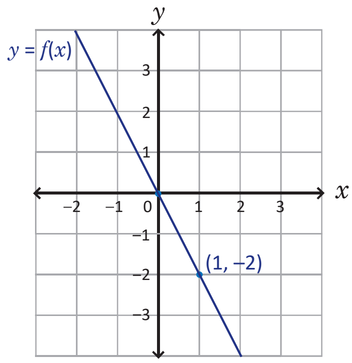
Dadas las funciones $f(x) = -2x$ y $g(x) = 2x^2$:

1. Elabora la gráfica de cada una de ellas.

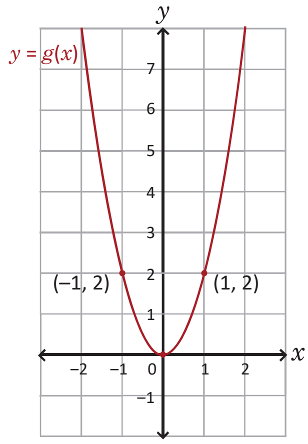
   La gráfica de f es una línea recta mientras que la de g es una parábola.

2. Traza líneas rectas verticales en cada gráfica. ¿Cuántas veces cortan las rectas verticales a las gráficas de f y g?
3. Si se continúan trazando rectas verticales, ¿cuántas veces cortarán a las gráficas de las funciones f y g?

Solución

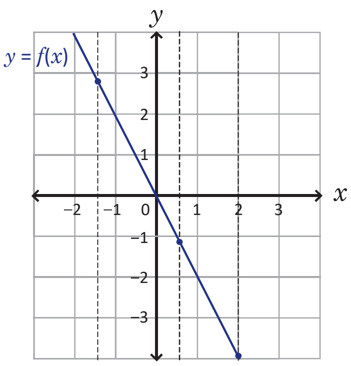


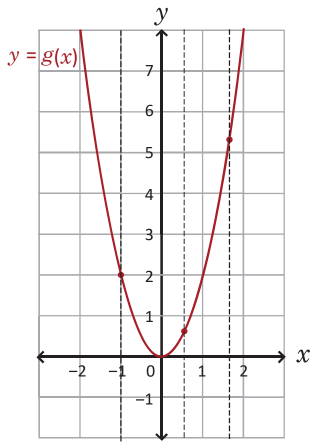
1. La función f es una función lineal y su gráfica es una línea recta que pasa por el origen. A partir de este, si x aumenta una unidad (es decir, $x = 1$) entonces $f(x)$ disminuye 2. La gráfica de $f(x) = -2x$ se presenta a la derecha.



La gráfica de la función g es una parábola con vértice en el origen. Para graficarla se buscan otros dos puntos a la izquierda y derecha del vértice: si $x = -1$ entonces $g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ y el punto $(-1, 2)$ pertenece a la parábola de g; de igual forma si $x = 1$ entonces $g(1) = 2(1)^2 = 2$ y el punto $(1, 2)$ pertenece a la parábola. La gráfica de $g(x) = 2x^2$ se presenta a la derecha.

2. En cada gráfica se han trazado tres rectas verticales. Cada una de ellas corta a la gráfica de f o g, según sea el caso, en un único punto:





3. Sin importar la cantidad de rectas verticales que se tracen, cada una de ellas cortará a la gráfica de la función f o g (según sea el caso) en un único punto.

Conclusión

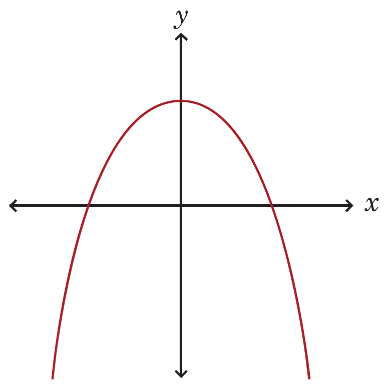
Una línea trazada en el plano cartesiano, cuyos valores de x se encuentran en un intervalo I, corresponde a la gráfica de una función si toda recta vertical trazada en el intervalo I corta a la línea en un único punto. A esta manera de reconocer gráficas de funciones se le conoce como **prueba de la recta vertical**.

Esto ocurre debido a la definición misma de función, a cada elemento x le corresponde un único elemento y. Las rectas verticales trazadas en cada gráfica representan un valor específico para x, si esta recta corta a la gráfica de una función en un único punto, entonces esto indica que para ese valor de x hay un único valor para $f(x)$ o $g(x)$.

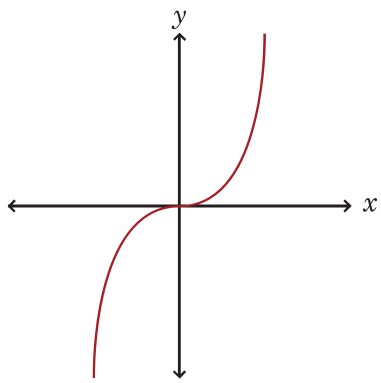
Problemas

Utilizando la prueba de la recta vertical determina, en cada caso, si la línea representa la gráfica de una función (no es necesario encontrar la ecuación de la función):

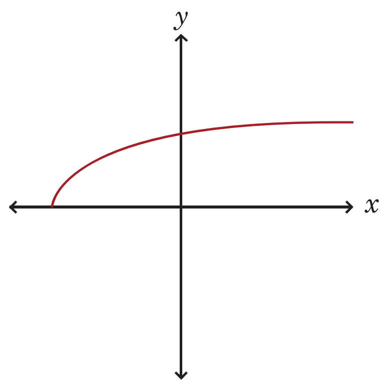
a)



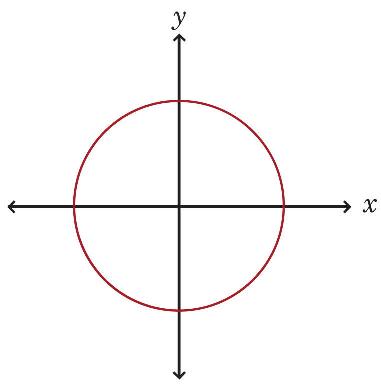
b)



c)



d)



Indicador de logro

1.2 Utiliza la prueba de la recta vertical para identificar gráficas de funciones.

Materiales

Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para elaborar las gráficas de las funciones del Problema inicial en la pizarra (puede forrar una tabla de madera con papel bond y luego con plástico o cinta ancha transparente, y dibujar una cuadrícula con plumón permanente; este recurso le servirá en las clases que involucran gráficas); metro o escuadra de madera.

Secuencia

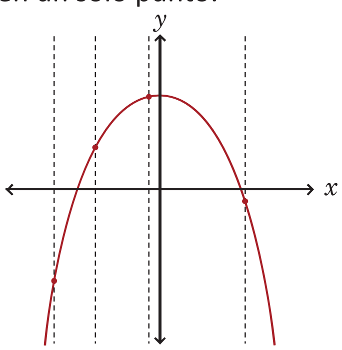
En esta clase se establece el método denominado "prueba de la recta vertical" para analizar si una línea trazada en el plano cartesiano corresponde a la gráfica de una función. Se parte de la definición de función para establecer por qué este método es efectivo para reconocer gráficas de funciones. Se pueden entregar fotocopias del plano cartesiano para elaborar la gráfica de la función.

Propósito

En grados anteriores solo se estudiaron funciones lineales (cuya gráfica es una línea recta) o cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$ (cuya gráfica es una parábola). Observe que, en el bloque de Problemas, las gráficas corresponden no solo a las ya conocidas sino también a funciones cúbicas, racionales y a la de una circunferencia. No se pretende que los estudiantes sepan la ecuación de la función, sino reconocer gráficas de funciones.

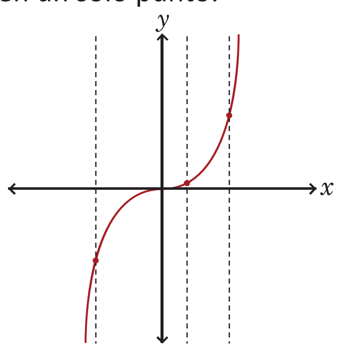
Solución de problemas:

a) Se trazan rectas verticales para verificar si cortan a la línea en un solo punto:



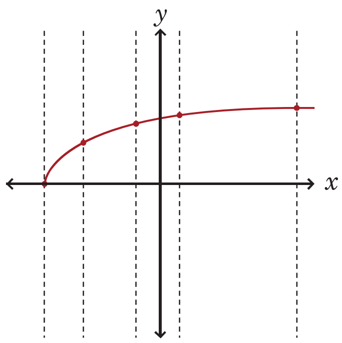
Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

b) Se trazan rectas verticales para verificar si cortan a la línea en un solo punto:



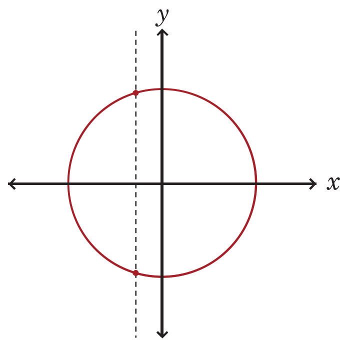
Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

c) Utilizando la prueba de la recta vertical:



Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

d) Utilizando la prueba de la recta vertical:



La recta corta a la línea en dos puntos. Por tanto, no corresponde a la gráfica de una función.

Lección 1

1.3 Dominio y rango de una función*

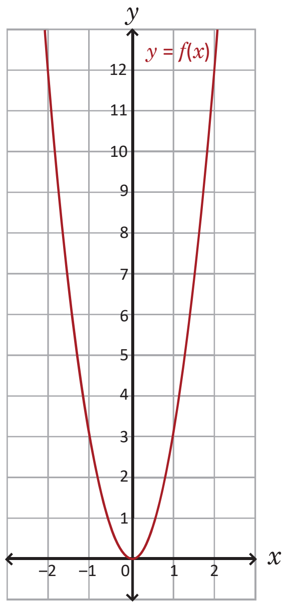
Problema inicial

Utilizando la ecuación y la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ responde lo siguiente:

1. ¿Para qué valores de x está definida $f(x)$?
2. ¿Cuáles son todos los posibles valores para $f(x)$?

Solución

La gráfica de la función es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (0, 0) como se muestra en la figura de la derecha.



1. En la ecuación de la función $f(x) = 3x^2$, la variable independiente x puede tomar el valor de cualquier número real y siempre será posible encontrar su correspondiente $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ está definida para cualquier número real que tome el valor de x.

2. En la gráfica de la función, el valor más pequeño que toma la variable dependiente $y = f(x)$ ocurre cuando $x = 0$. A medida que x aumenta o disminuye, el valor de $f(x)$ siempre aumentará (esto lo refleja el hecho de que la parábola se abre hacia arriba). Por lo tanto, los valores posibles para $f(x)$ son los números reales mayores o iguales a 0, es decir, los números pertenecientes al intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio** de una función f se denota por D_f y es el conjunto de todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida. El **rango** de una función f se denota por R_f y es el conjunto de todos los posibles valores para $f(x)$.

En el caso de las funciones lineales, tanto el dominio como el rango son el conjunto de los números reales, es decir $\mathbb{R}$. Mientras que para funciones de la forma $f(x) = ax^2$ el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango depende del valor de a:
1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

Problemas

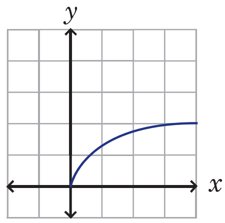
1. Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ b) $f(x) = -10x + 3$ c) $f(x) = -x - 5$

d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = 2x^2$ f) $f(x) = -x^2$

g) $f(x) = -3x^2$ h) $f(x) = 3x^2$ i) $f(x) = -2x^2$

2. La gráfica de una función se presenta en la figura de la derecha. Utilizando únicamente este recurso, ¿cuál es el dominio y el rango de la función?



Unidad 4

81

Indicador de logro

1.3 Encuentra el dominio y rango de funciones lineales y de la forma $f(x) = ax^2$ utilizando la ecuación de la función.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar la gráfica de la función del Problema inicial; plano cartesiano con la gráfica del numeral 2 del bloque de Problemas para colocarlo en la pizarra.

Secuencia

En Tercer Ciclo solamente se estudiaron las ecuaciones y gráficas de las funciones lineales y cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$. En esta clase se definen, de manera general, los números que conforman el dominio o el rango de una función. Se utilizan además las notaciones D_f y R_f para ambos conjuntos.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, los estudiantes deben identificar en cada caso qué tipo de función es (lineal o cuadrática) y, usando lo establecido en la Definición, determinar el dominio y el rango; no es necesario que grafiquen la función de cada literal. Si las preguntas son muy complejas, el docente indica qué repuesta puede dar a cada pregunta.

Solución de problemas:

1a) La función $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ es una función lineal (es de la forma $f(x) = ax + b$, con $a = \frac{1}{3}$ y $b = 4$). Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1b) La función $f(x) = -10x + 3$ es una función lineal (es de la forma $f(x) = ax + b$, con $a = -10$ y $b = 3$). Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1c) Similar a los literales anteriores, la función $f(x) = -x - 5$ es una función lineal. Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1d) La función $f(x) = x^2$ es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = 1$. Luego, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.

1e) La función $f(x) = 2x^2$ también es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = 2$, Luego, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.

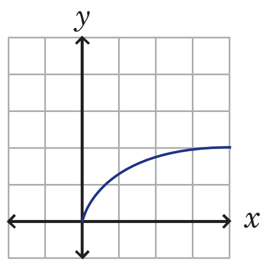
1f) La función $f(x) = -x^2$ también es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = -1$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

1g) Similar al literal 1f) , en la función $f(x) = -3x^2$, $a = -3$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

1h) Similar al literal 1e), en la función $f(x) = 3x^2$, $a = 3$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0, \infty[$.

1i) Similar al literal 1f) , en la función $f(x) = -2x^2$, $a = -2$, Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

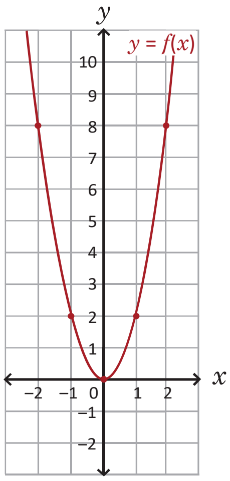
2. Sea $f(x)$ la función cuya gráfica está dada. Al observarla se verifica que "inicia" en el origen, o sea, el punto (0, 0). A medida que el valor de x aumenta entonces el valor de y también aumenta. Por lo tanto, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.



2.1 Desplazamiento vertical

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:



1. Grafica las funciones $g(x) = 2x^2 + 3$ y $h(x) = 2x^2 - 2$. ¿Cuál es el dominio y el rango en cada una?

La gráfica de $g(x)$ corresponde a un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba de la gráfica de f. ¿Hacia dónde será el desplazamiento de h?

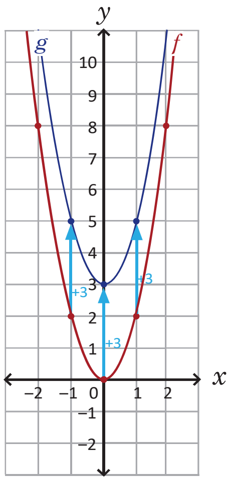
2. Explica qué le ocurre a la gráfica de f para obtener las gráficas de g y h.

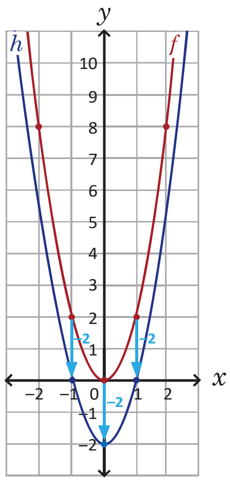
Solución

1. Para graficar $g(x) = 2x^2 + 3$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ tres unidades hacia arriba (ver figura de la derecha).

   Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de g será (0, 3); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 5) y (1, 5) pertenecen a la gráfica de g.

   De la gráfica de la función se deduce que: $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.





Mientras que para graficar $h(x) = 2x^2 - 2$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades hacia abajo.

Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de h será (0, –2); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 0) y (1, 0) pertenecen a la gráfica de h.

De la gráfica de la función se deduce que: $D_h = \mathbb{R}$ y $R_h = [-2, \infty[$.

2. Utilizando $f(x) = 2x^2$:

   a) la gráfica de la función $g(x) = 2x^2 + 3$ se obtiene desplazando verticalmente hacia arriba tres unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$;

   b) la gráfica de la función $h(x) = 2x^2 - 2$ se obtiene desplazando verticalmente hacia abajo dos unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$.

Definición

Dada una función $f(x)$ y un número real k diferente de cero, la gráfica de la función $g(x) = f(x) + k$ es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f, y: si $k > 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia arriba, y si $k < 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia abajo.

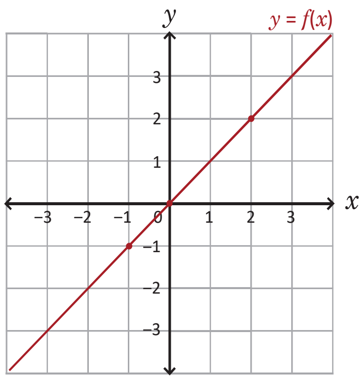
Si $f(x) = ax^2$ entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ es una parábola con vértice en $(0, k)$, y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, k]$.

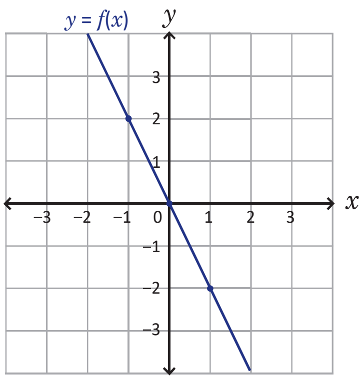
Problemas

Para cada caso y utilizando la gráfica de la función $f(x)$, grafica la función $g(x)$ y encuentra su dominio y rango:

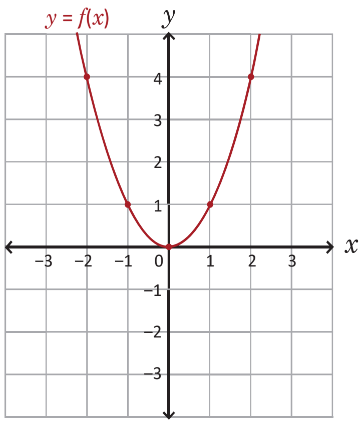
a) $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$



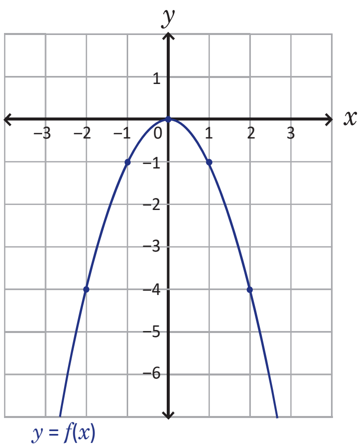
b) $f(x) = -2x$ y $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 - 3$



Indicador de logro

2.1 Elabora la gráfica y encuentra el dominio y el rango de las funciones $g(x) = ax + b$ o $f(x) = ax^2 + c$, usando desplazamientos verticales.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en papel bond con la gráfica de la función del Problema inicial para colocarlo en la pizarra (puede utilizarse también para resolver el bloque de Problemas); metro o escuadra de madera.

Secuencia

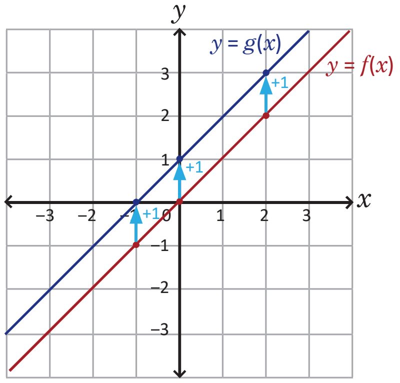
Los desplazamientos verticales se estudiaron en los contenidos de función lineal y función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ en Tercer Ciclo. En esta clase se repasan dichos desplazamientos y se agrega la determinación del dominio y del rango de la función.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no recuerdan cómo realizar los desplazamientos verticales puede comenzar con la Definición y desarrollar el Problema inicial como ejemplo.

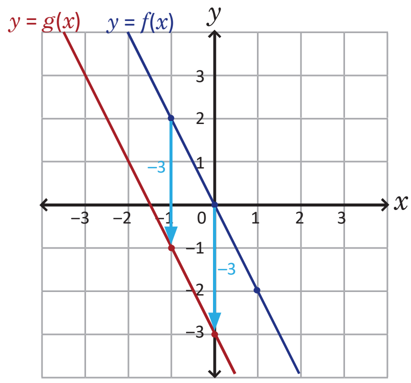
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de f una unidad verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de g:



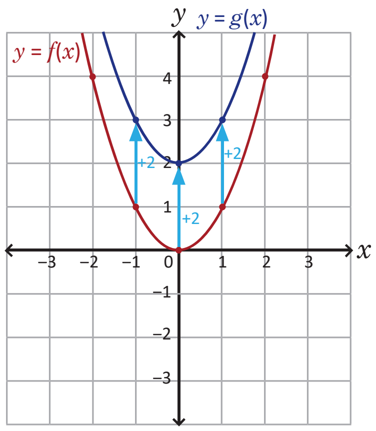
Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

b) Se desplaza la gráfica de f tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de g:



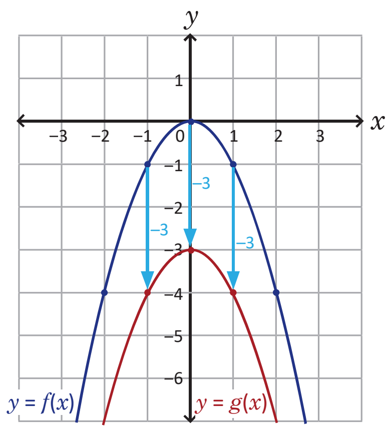
Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

c) Se desplaza la gráfica de f dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de g:



Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [2, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de f tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de g:



Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

2.2 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$

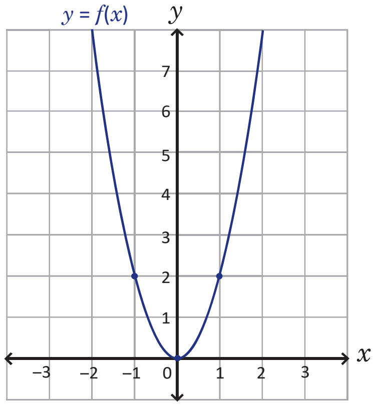
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x - 1)^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.

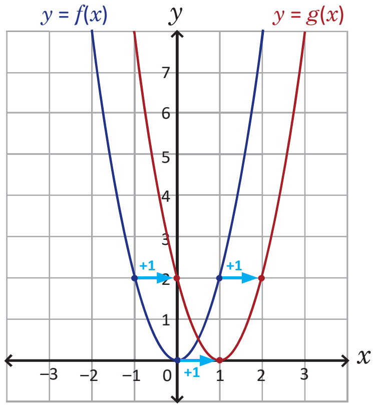


2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?
3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8



se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x - 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 - 1) \\ &= f(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(1, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 1)^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$, donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h > 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la derecha** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x - 2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x - 1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x - 2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x - 3)^2$

Indicador de logro

2.2 Grafica y encuentra el dominio y rango de la función $g(x) = a(x - h)^2$ para $h > 0$ usando desplazamientos horizontales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

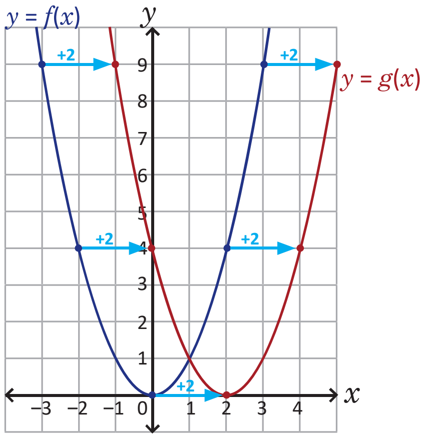
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver los numerales 1 y 3 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Similar a cuando se realizaron los desplazamientos verticales, se utiliza la gráfica de $f(x) = ax^2$ y tablas de valores para obtener la gráfica de la función $g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$ e identificar el desplazamiento horizontal de f; en este caso, el número h es positivo.

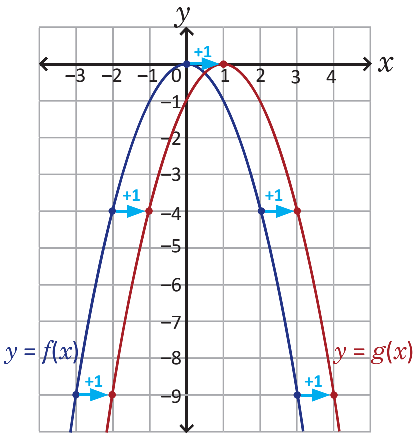
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2$:



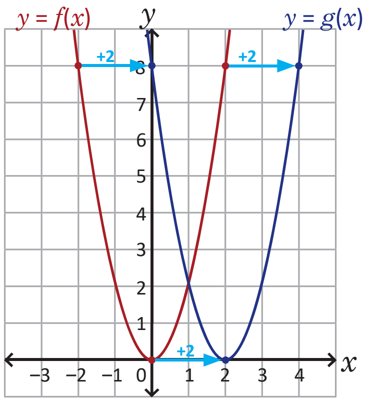
Las coordenadas del vértice son (2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = -(x - 1)^2$:



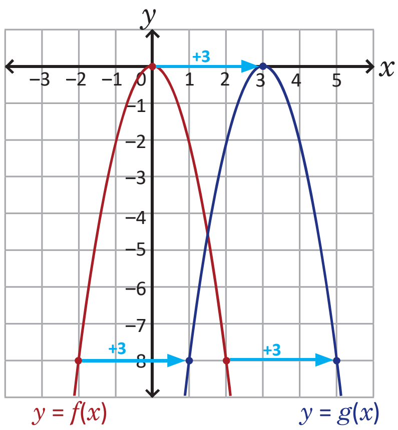
Las coordenadas del vértice son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 2)^2$.



Las coordenadas del vértice son (2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = -2(x - 3)^2$.



Las coordenadas del vértice son (3, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

Lección 2

2.3 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$

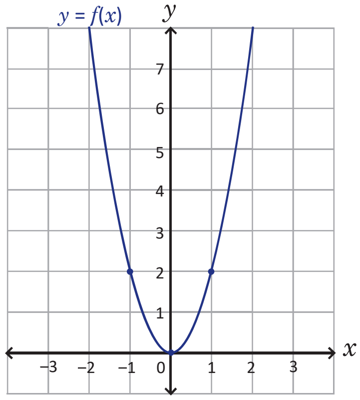
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x + 1)^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?

3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

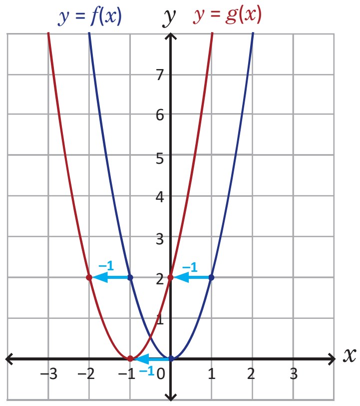
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x + 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 + 1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(-1, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, +\infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 1)^2$.

La ecuación de la función g también puede escribirse como $g(x) = 2[x - (-1)]^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$ donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h < 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la izquierda** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2$

Indicador de logro

2.3 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2$ para $h < 0$ usando desplazamientos horizontales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

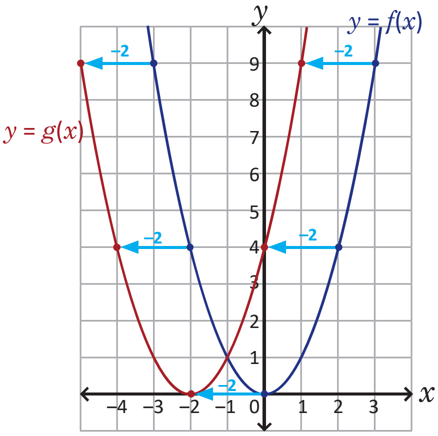
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver los numerales 1 y 3 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se utiliza la gráfica de $f(x) = ax^2$ y tablas de valores para obtener la gráfica de la función $g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$ e identificar el desplazamiento horizontal de f cuando el número h es negativo.

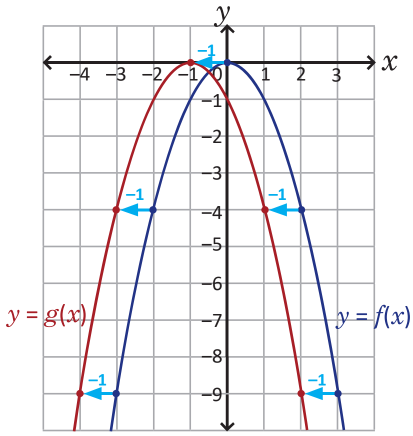
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = (x + 2)^2$.



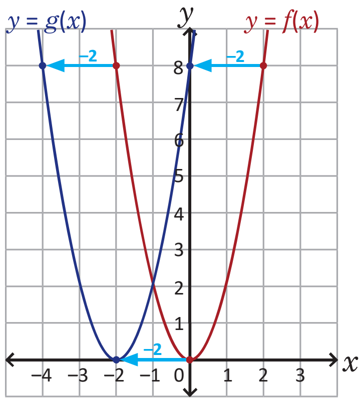
Las coordenadas del vértice son (–2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = -(x + 1)^2$.



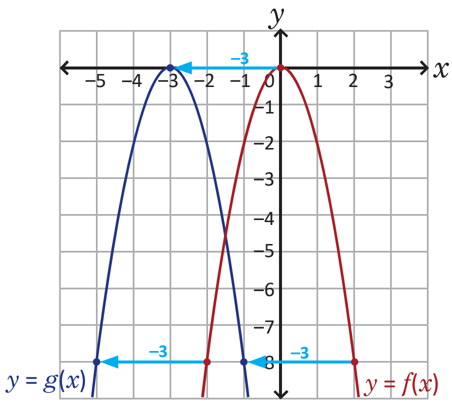
Las coordenadas del vértice son (–1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 2)^2$.



Las coordenadas del vértice son (–2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = -2(x + 3)^2$.



Las coordenadas del vértice son (–3, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

Lección 2

2.4 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 1

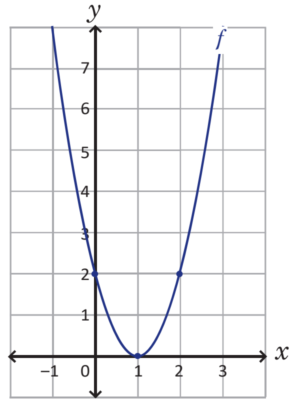
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2(x - 1)^2$ realiza lo siguiente:

1. Grafica las funciones $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ y $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener cada gráfica.

> La gráfica de $g(x) = f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de f, hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso.



Solución

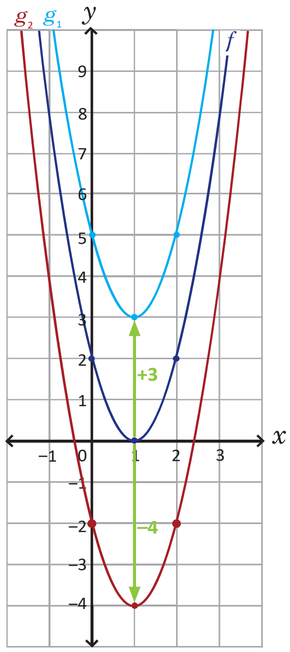
1. Ambas funciones son de la forma $f(x) + k$, es decir, son desplazamientos verticales de k unidades.

   En el caso de $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, $k = 3$ y por tanto la gráfica de f se desplaza tres unidades verticalmente hacia arriba. La parábola en color celeste de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_1.

   En el caso de $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$, $k = -4$ y por tanto la gráfica de f se desplaza cuatro unidades verticalmente hacia abajo. La parábola en color rojo de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_2.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_1 son $(1, 3)$ y además $D_{g_1} = \mathbb{R}$ y $R_{g_1} = [3, \infty[$.

   Mientras que las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_2 son $(1, -4)$ y además $D_{g_2} = \mathbb{R}$ y $R_{g_2} = [-4, \infty[$.



Conclusión

Sean $f(x) = a(x - h)^2$ donde a y h son números reales cualesquiera, y a es diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde k es un número real, es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f. Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba, y si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo. El **vértice de la parábola de g** es (h, k), $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x - 1)^2$; $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x + 2)^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2 - 1$
d) $f(x) = -2(x + 3)^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$

Indicador de logro

2.4 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando desplazamientos verticales de $f(x) = a(x - h)^2$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 1 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

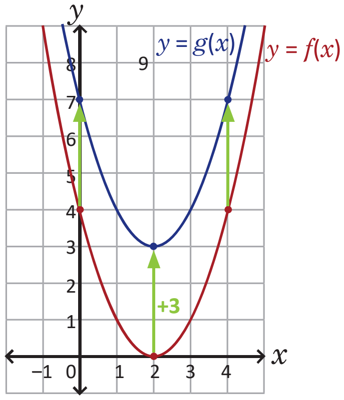
En esta clase, se parte de la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2$ para trazar la de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando los desplazamientos verticales vistos en la clase 2.1 y determinar sus elementos: vértice, dominio y rango.

Propósito

Las gráficas de la función f de los literales del bloque de Problemas ya han sido trazadas en las clases 2.2 y 2.3 por tanto los estudiantes pueden retomarlas directamente. Esta clase les ayudará para identificar que pueden realizar desplazamientos horizontales y verticales a la vez.

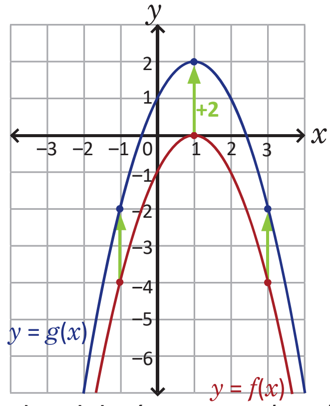
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$ tres unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$:



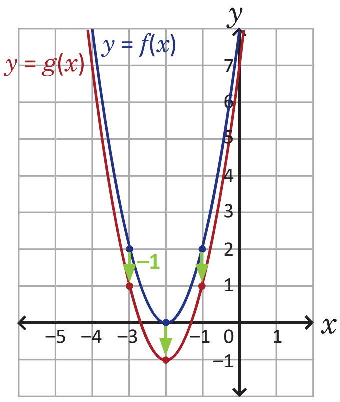
Las coordenadas del vértice son (2, 3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -(x - 1)^2$ dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$:



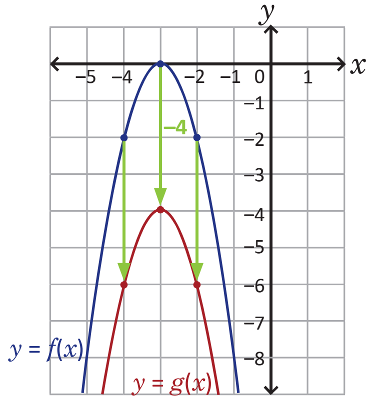
Las coordenadas del vértice son (1, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 2]$.

c) La gráfica de g queda como sigue:



Las coordenadas del vértice son (–2, –1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [-1, \infty[$.

d) La gráfica de g queda como sigue:



Las coordenadas del vértice son (–3, –4), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -4]$.

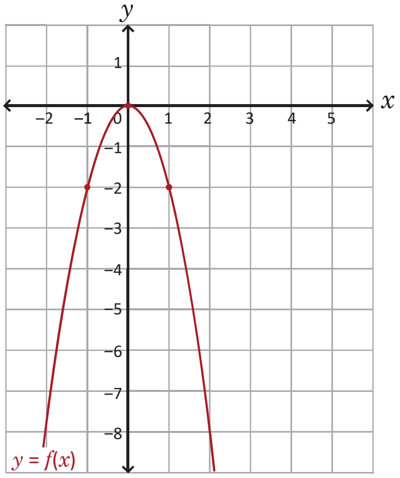
2.5 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = -2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Grafica la función $g(x) = -2(x - 3)^2 - 1$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener g.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función g.

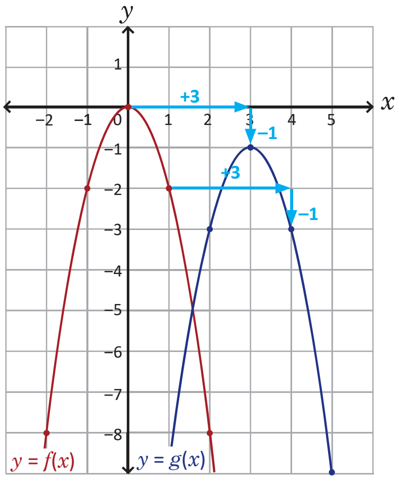


Solución

1. La función g es de la forma $f(x - h) + k$, es decir, combina desplazamientos tanto horizontales como verticales. En este caso, $h = 3$ y $k = -1$:

   Primero se desplaza la gráfica de f tres unidades horizontalmente hacia la derecha, luego se desplaza una unidad verticalmente hacia abajo. La gráfica de g corresponde a la parábola en color azul de la figura de la derecha.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(3, -1)$ y además $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -1]$.



Conclusión

Dada una función $f(x) = ax^2$, donde a es un número real diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

es una parábola que resulta de desplazar h **unidades horizontalmente** y k **unidades verticalmente** la gráfica de f. El vértice de la gráfica de g es (h, k), $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Para cada caso, traza la gráfica de $f(x)$ y a partir de esta elabora la gráfica de $g(x)$. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 1)^2 + 2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 3)^2 - 3$
c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x - 4)^2 - 2$

Unidad 4

Indicador de logro

2.5 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando desplazamientos horizontales y verticales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

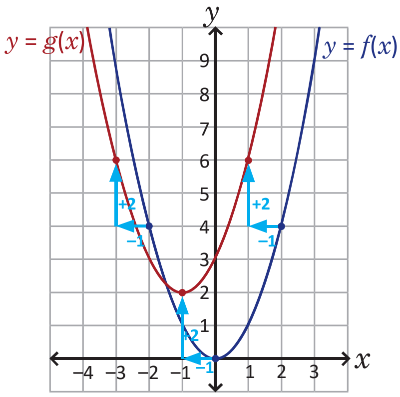
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 1 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Se combinan desplazamientos horizontales y verticales para trazar la gráfica de una función cuadrática de la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$ a partir de la de $f(x) = ax^2$.

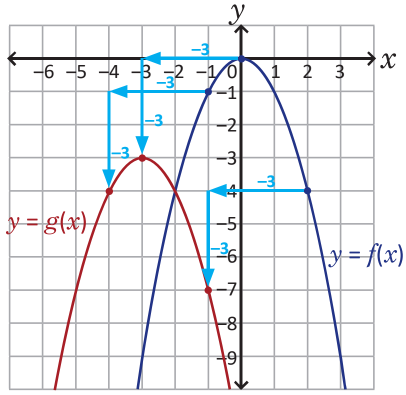
Solución de problemas:

a) En este caso, $h = -1$ y $k = 2$, la gráfica de f se desplaza una unidad horizontalmente hacia la izquierda y dos verticalmente hacia arriba para obtener la de g:



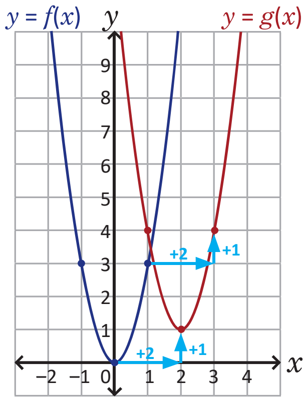
Las coordenadas del vértice son (–1, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [2, \infty[$.

b) En este caso, $h = -3$ y $k = -3$; la gráfica de f se desplaza tres unidades horizontalmente hacia la izquierda y tres verticalmente hacia abajo para obtener la de g:



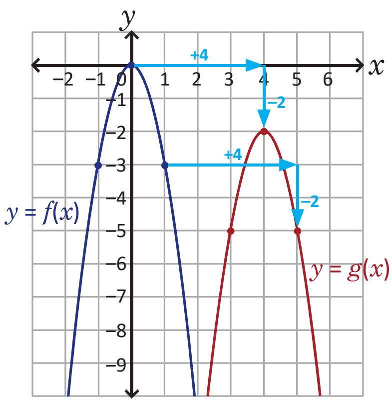
Las coordenadas del vértice son (–3, –3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

c) En este caso, $h = 2$ y $k = 1$; la gráfica de f se desplaza dos unidades horizontalmente hacia la derecha y una verticalmente hacia arriba para obtener la de g:



Las coordenadas del vértice son (2, 1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [1, \infty[$.

d) En este caso, $h = 4$ y $k = -2$, la gráfica de f se desplaza cuatro unidades horizontalmente hacia la derecha y dos verticalmente hacia abajo para obtener la de g:



Las coordenadas del vértice son (4, –2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -2]$.

Lección 2

2.6 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$*

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6x$

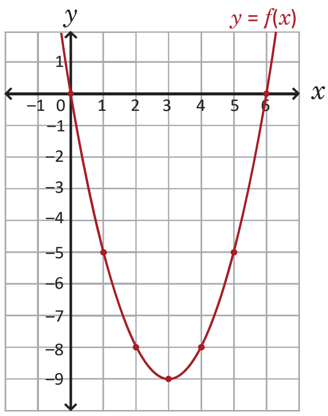
b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

Completa los cuadrados en las ecuaciones de cada función.

Solución

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$f(x) = x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 - 6x + 3^2) - 3^2$$
$$= (x - 3)^2 - 3^2$$
$$= (x - 3)^2 - 9$$

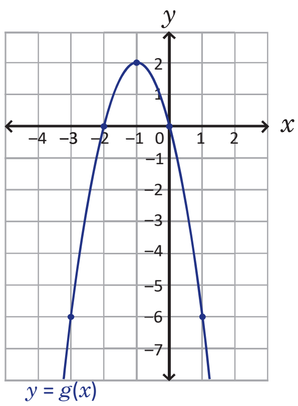


La función f es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(3, -9)$ como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 3)^2 - 9$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la derecha y 9 unidades verticalmente hacia abajo de la gráfica de $h(x) = x^2$.

b) De forma similar, se completa el cuadrado en la ecuación de la función g:

$$g(x) = -2(x^2 + 2x)$$
$$= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right]$$
$$= -2[x^2 + 2x + 1^2 - 1^2]$$
$$= -2[(x + 1)^2 - 1]$$
$$= -2(x + 1)^2 + 2$$



La función g es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(-1, 2)$ como lo muestra la figura de la derecha.

$g(x) = -2(x + 1)^2 + 2$ es un desplazamiento de 1 unidad horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $h(x) = -2x^2$.

En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, esta puede llevarse a la forma $a(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba si $a > 0$ o abierta hacia abajo si $a < 0$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

a) $f(x) = x^2 - 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 2x$

c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

Indicador de logro

2.6 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = ax^2 + bx$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se comienzan a trabajar funciones cuadráticas cuya ecuación está expresada en su forma general. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En la clase sólo se trabajan con funciones cuya ecuación es de la forma $ax^2 + bx$, esto para facilitar los cálculos al momento de completar cuadrados. En las clases 2.7 y 2.8 se agregan a las ecuaciones el término independiente.

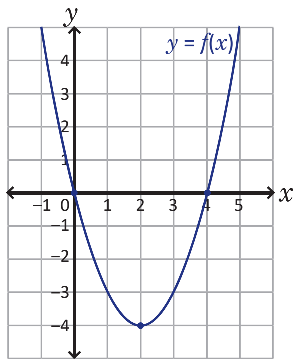
Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 - 4x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza 2 unidades horizontalmente a la derecha y 4 verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

Así, $f(x) = (x - 2)^2 - 4$; su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(2, -4)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4, \infty[$.

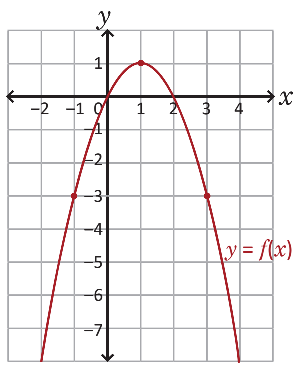


b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = -x^2 + 2x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) \\ &= -\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1^2) + 1^2 \\ &= -(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = -x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente a la derecha y una verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = -(x - 1)^2 + 1$.

Luego, $f(x) = -(x - 1)^2 + 1$; su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(1, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 1]$.

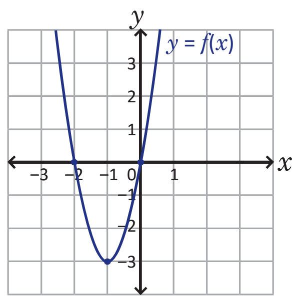


c) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = 3x^2 + 6x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 2x) \\ &= 3\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1^2) - 3 \\ &= 3(x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = 3x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente a la izquierda y 3 verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$.

Luego, $f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$; su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(-1, -3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$.



Lección 2

2.7 Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el vértice, el dominio y rango de la función:

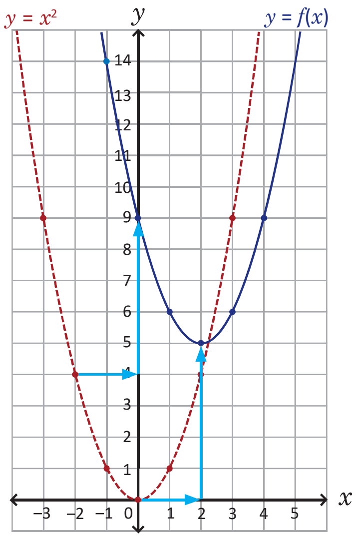
$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

Completa el cuadrado en la ecuación de f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] + 9 \\ &= (x^2 - 4x + \mathbf{2}^2) - \mathbf{2}^2 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 - 4 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 + 5 \end{aligned}$$



luego la función f se ha reescrito en la forma $(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (2, 5) como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ es un desplazamiento de 2 unidades horizontalmente a la derecha y 5 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = x^2$.

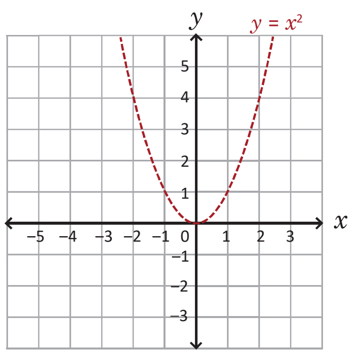
En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, esta puede llevarse a la forma $(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba.

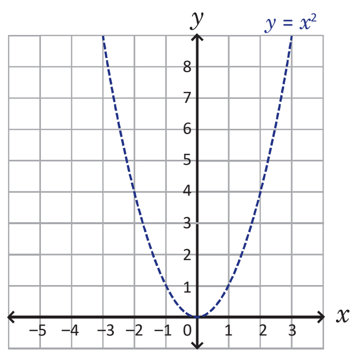
Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

Indicador de logro

2.7 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + bx + c$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar la gráfica de la función del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

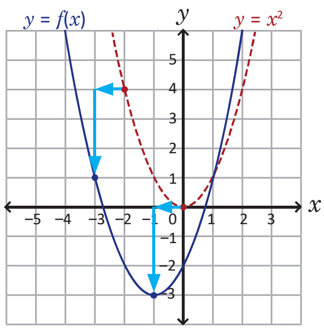
En las ecuaciones de las funciones presentadas en la clase se agrega el término independiente; además, en todas ellas el coeficiente de la variable x^2 es igual a 1, para facilitar los cálculos.

Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2 \\ &= (x^2 + 2x + 1^2) - 1 - 2 \\ &= (x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

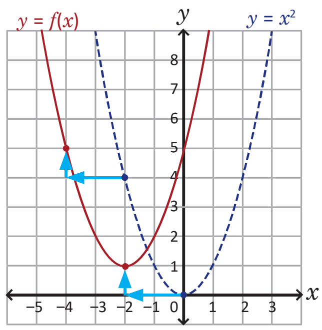
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(-1, -3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$.



b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + 4x + 5$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x^2 + 4x + 2^2) - 4 + 5 \\ &= (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

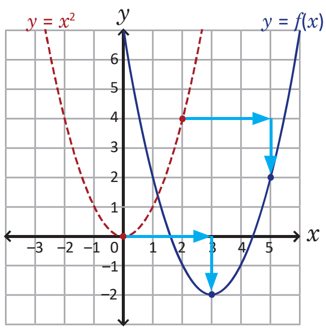
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(-2, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.



c) Completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 \\ &= (x^2 - 6x + 3^2) - 9 + 7 \\ &= (x - 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

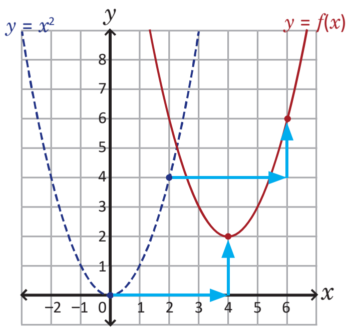
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(3, -2)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$.



d) Completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 18 \\ &= (x^2 - 8x + 4^2) - 16 + 18 \\ &= (x - 4)^2 + 2 \end{aligned}$$

Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(4, 2)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [2, \infty[$.



Lección 2

2.8 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

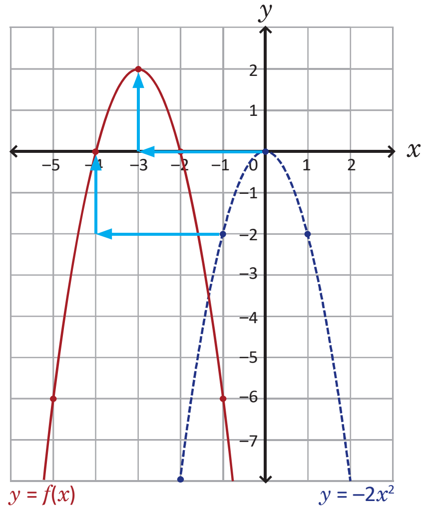
Completa el cuadrado en la ecuación de la función f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2] - 16 \\ &= -2[(x + 3)^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x + 3)^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x + 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

luego, la función f se ha reescrito en la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(-3, 2)$ como lo muestra la figura de la derecha.



La función $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = -2x^2$.

Definición

La función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y a es diferente de cero se llama **función cuadrática**.

Una función cuadrática también puede escribirse en la forma $\boldsymbol{a(x - h)^2 + k}$ completando el cuadrado en la ecuación de la función f y, por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en el punto (h, k) que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

El dominio de una función cuadrática siempre es igual al conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ y el rango dependerá del valor de a y de la segunda coordenada del vértice (h, k) de la gráfica de la función:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra además las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Indicador de logro

2.8 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráfica de la función del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Se continúa con funciones cuadráticas cuyas ecuaciones poseen término independiente. La diferencia con la clase 2.7 es que en esta, el coeficiente de la variable x^2 es diferente de 1.

Posibles dificultades

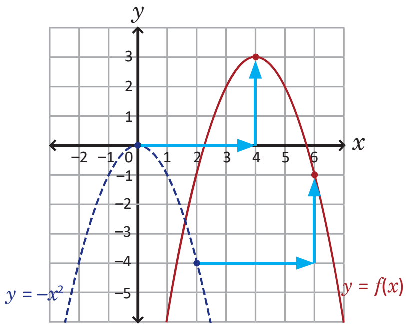
Verificar los procesos de los estudiantes al completar cuadrados; si tienen dificultades con los cálculos pueden realizarlos paso a paso para no olvidar algún término.

Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = -x^2 + 8x - 13$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 8x) - 13 \\ &= -\left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - 13 \\ &= -(x^2 - 8x + 4^2) + 4^2 - 13 \\ &= -(x - 4)^2 + 3 \end{aligned}$$

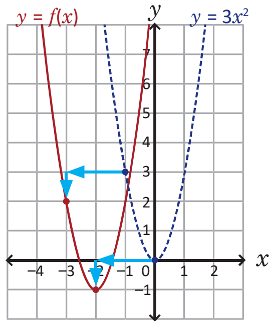
Su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (4, 3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$.



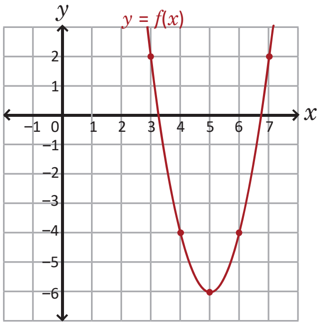
b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 4x) + 11 \\ &= 3\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + 2^2) - 3(2^2) + 11 \\ &= 3(x + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

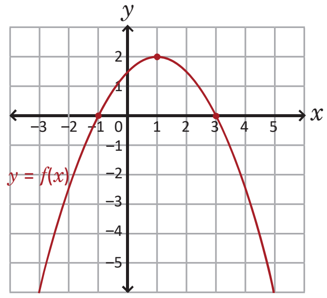
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (−2, −1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty[$.



c) Al completar el cuadrado en la ecuación se obtiene $f(x) = 2(x - 5)^2 - 6$. La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (5, −6), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-6, \infty[$.



d) Al completar el cuadrado en la ecuación se obtiene $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$. La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, con vértice en (1, 2), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$.



2.9 Condiciones iniciales

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
1. El vértice de la gráfica de f es (4, 5) y pasa por el punto (2, –7).
2. f es de la forma $ax^2 + bx$ y la gráfica pasa por los puntos (–1, –10) y (–4, –16).

Solución

1. Las condiciones iniciales indican las coordenadas del vértice de la gráfica de f, por tanto, es conveniente escribir la ecuación en la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \text{------------------ (1)}$$

sustituyendo los valores de h y k en (1), se tiene:

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 5$$

ahora, si la gráfica pasa por el punto (2, –7) entonces cuando $x = 2$, $f(2) = -7$. Se sustituye en la ecuación anterior y se despeja el valor de a:

$$-7 = a(2 - 4)^2 + 5$$
$$-7 = 4a + 5$$
$$-12 = 4a$$
$$-3 = a$$

Por lo tanto, la ecuación de la función es $f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$.

$f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$ también puede escribirse como: $f(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

2. Las condiciones iniciales indican que $f(x) = ax^2 + bx$. Si la gráfica de f pasa por el punto (–1, –10), entonces cuando $x = -1$, $f(-1) = -10$. Se sustituyen estos valores y se despeja a en la forma de la función:

$$-10 = a(-1)^2 + b(-1)$$
$$-10 = a - b$$
$$-10 + b = a \qquad \text{------------------ (2)}$$

de forma similar, cuando $x = -4$, $f(-4) = -16$. Se sustituyen estos valores, incluyendo el de a encontrado en (2), y se despeja el valor de b:

$$-16 = a(-4)^2 + b(-4)$$
$$-16 = (b - 10)16 - 4b$$
$$-16 = 16b - 160 - 4b$$
$$144 = 12b$$
$$12 = b$$

Luego, $a = 2$ y la ecuación de la función es $f(x) = 2x^2 + 12x$.

En resumen

Si f es una función cuadrática, entonces su ecuación puede escribirse en la forma $a(x - h)^2 + k$ o $ax^2 + bx + c$. Si en las condiciones iniciales se proporcionan las coordenadas del vértice de la gráfica de f entonces conviene escribirla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Problemas

1. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
   a) el vértice de la gráfica de f es (–2, 1) y pasa por el punto (0, 5);
   b) el vértice de la gráfica de f es (3, –6) y pasa por el punto (4, –8);
   c) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (8, 0) y (2, –12).

2. Encuentra la ecuación de una función cuadrática f si su gráfica pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4).

Indicador de logro

2.9 Encuentra la ecuación de una función cuadrática que satisface determinadas condiciones.

Secuencia

Conocidas las formas que puede tener la ecuación de una función cuadrática, en esta clase se plantean problemas donde los estudiantes deben encontrar la ecuación de la función que satisface determinadas condiciones.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes que, si bien pueden utilizar cualquiera de las formas para la ecuación de una función cuadrática, dependerá de las condiciones del problema el escoger una de ellas. De preferencia, deben utilizar la forma para la cual eviten el resolver sistemas de una ecuación cuadrática y otra lineal.

Solución de problemas:

1a) Como en el enunciado del problema se proporcionan las coordenadas del vértice entonces se escribe la ecuación de la función f en la forma $a(x-h)^2+k$, o sea, $f(x)=a(x-h)^2+k$. Al sustituir los valores de $h=-2$ y $k=1$ se tiene $f(x)=a(x+2)^2+1$; luego, si la gráfica pasa por (0, 5) entonces $f(0)=5$:

$$\begin{aligned} a(0+2)^2+1&=5\\ a(4)+1&=5\\ 4a&=4\\ a&=1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)=(x+2)^2+1$.

1b) Similar a 1a) , $f(x)=a(x-h)^2+k$; al sustituir los valores de $h=3$ y $k=-6$ se tiene $f(x)=a(x-3)^2-6$. Luego, si la gráfica pasa por (4, –8) entonces $f(4)=-8$:

$$\begin{aligned} a(4-3)^2-6&=-8\\ a(1)-6&=-8\\ a&=-2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)=-2(x-3)^2-6$.

1c) En este caso, $f(x)=ax^2+bx$; además, si la gráfica pasa por (8, 0) y (2, –12) entonces $f(8)=0$ y $f(2)=-12$. Se sustituyen estos valores y se resuelve el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$a(8)^2+b(8)=0 \;\Rightarrow 8a+b=0 \;\Rightarrow b=-8a$$
$$a(2)^2+b(2)=-12 \;\Rightarrow 2a+b=-6 \;\Rightarrow 2a-8a=-6 \;\Rightarrow -6a=-6 \;\Rightarrow a=1$$

Luego, $b=-8$ y $f(x)=x^2-8x$.

2. En el enunciado no se indican las coordenadas del vértice, solo se sabe que la gráfica de la función pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4). Sea $f(x)=ax^2+bx+c$, entonces $f(0)=2$; o sea:

$$a(0)^2+b(0)+c=2 \Rightarrow c=2$$

y $f(x)=ax^2+bx+2$. Se sustituyen los valores $f(-2)=8$ y $f(2)=4$, y se resuelve el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} a(-2)^2+b(-2)+2=8 \;&\Rightarrow 4a\cancel{-2b}=6\\ a(2)^2+b(2)+2=4 \;&\Rightarrow \underline{4a\cancel{+2b}=2}\\ &\quad\;\; 8a \qquad\;\, =8\\ &\qquad\qquad\;\; a=1 \end{aligned}$$

Recomendar a los estudiantes que comiencen evaluando el punto (0, 2).

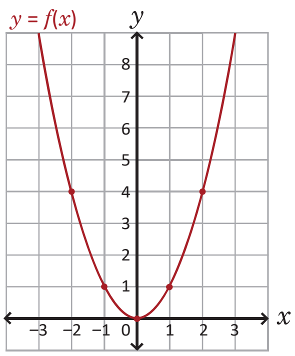
Luego, $b=-1$ y $f(x)=x^2-x+2$.

Lección 2

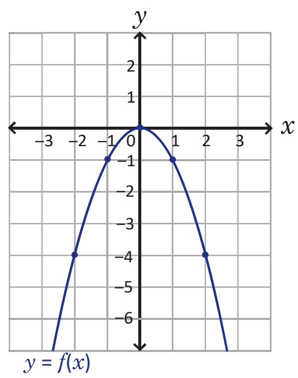
2.10 Practica lo aprendido

Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

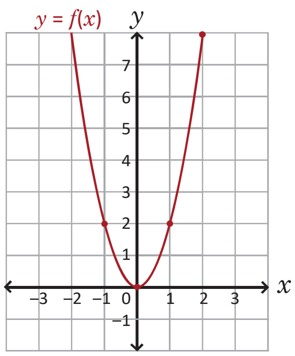
a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



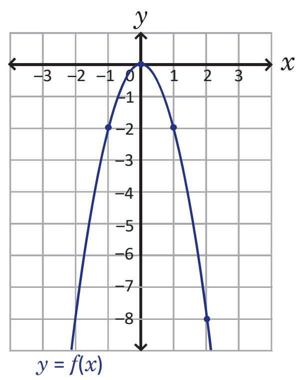
b) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$



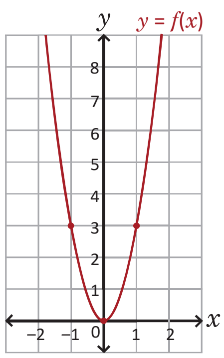
c) $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 1$



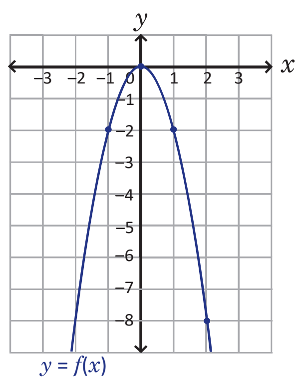
d) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x-4)^2$



f) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x-1)^2$

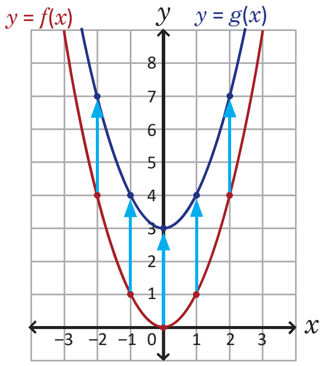


Indicador de logro

2.10 Resuelve problemas correspondientes a funciones cuadráticas.

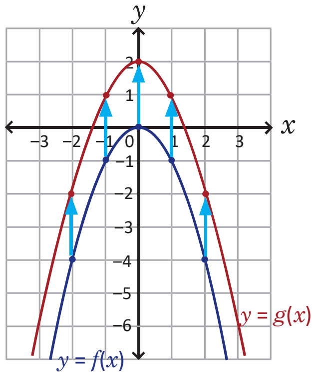
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ tres unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = x^2 + 3$:



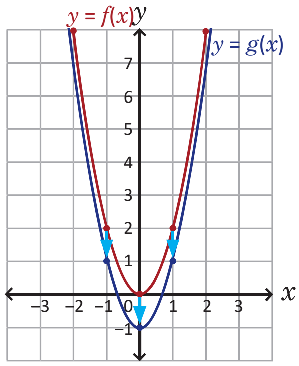
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, 3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = -x^2 + 2$:



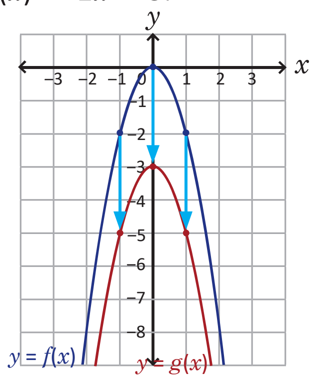
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 2]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ una unidad verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 1$:



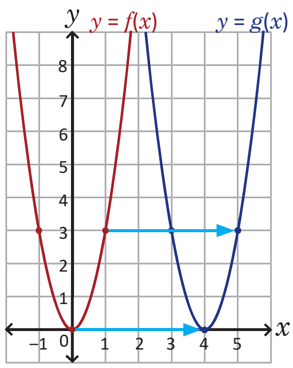
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, –1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [-1, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = -2x^2 - 3$:



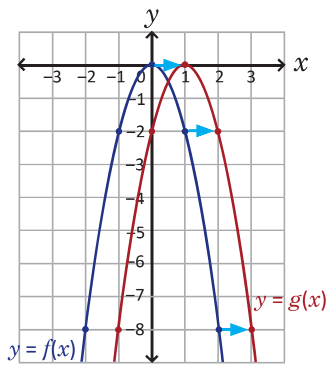
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, –3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

e) La gráfica de $f(x) = 3x^2$ se desplaza cuatro unidades horizontalmente hacia la derecha:



Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (4, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

f) La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente hacia la derecha:

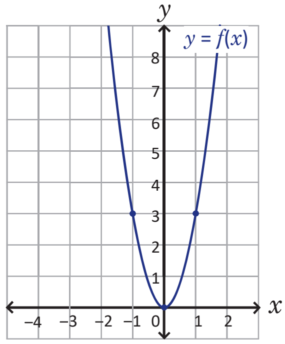


Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

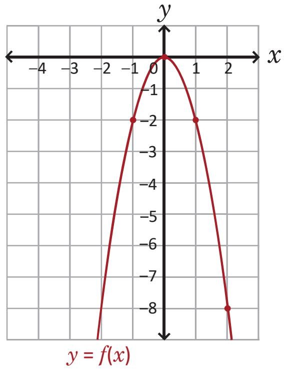
2.11 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

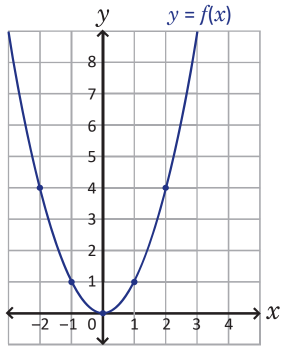
a) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x + 2)^2$



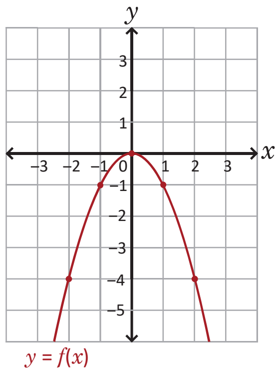
b) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x + 2)^2$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 4)^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -(x + 1)^2 + 3$



2. Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$
b) $f(x) = 5x^2 + 10x$
c) $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
f) $f(x) = x^2 - 10x + 23$
g) $f(x) = -x^2 - 4x - 7$
h) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$
i) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

3. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f si:

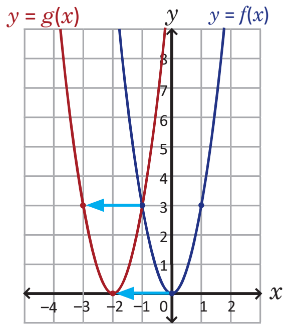
a) la gráfica de f tiene vértice en (0, 0) y pasa por el punto (2, 2);
b) la gráfica de f tiene vértice en (0, –1) y pasa por el punto (–1, –3);
c) la gráfica de f tiene vértice en (3, 0) y pasa por el punto (2, 4);
d) la gráfica de f tiene vértice en (2, –5) y pasa por el punto (4, 3);
e) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (2, 0) y (–1, 3);
f) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (1, –4) y (4, 8);
g) la gráfica de f pasa por los puntos (–2, 3), (0, –3) y (1, 0).

Indicador de logro

2.11 Resuelve problemas correspondientes a funciones cuadráticas.

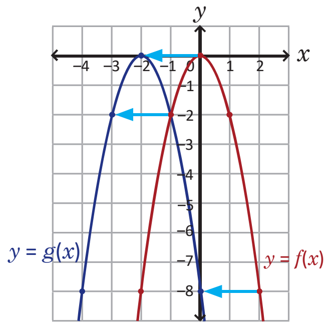
Solución de problemas:

1a)



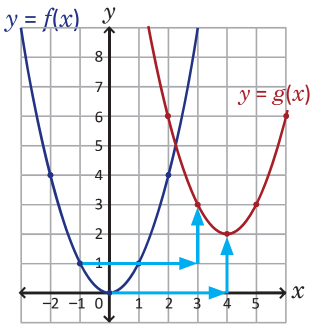
Vértice: $(-2, 0)$
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = [0, \infty[$

1b)



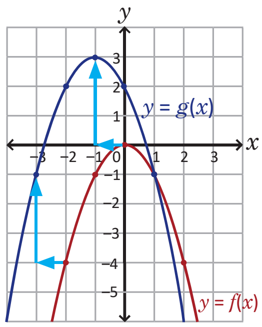
Vértice: $(-2, 0)$
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g =]-\infty, 0]$

1c)



Vértice: $(4, 2)$
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = [2, \infty[$

1d)



Vértice: $(-1, 3)$
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g =]-\infty, 3]$

2a) $f(x) = -3(x-1)^2 + 3$; vértice en $(1, 3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$.

2b) $f(x) = 5(x+1)^2 - 5$; vértice en $(-1, -5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2c) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$; vértice en $(-2, 4)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 4]$.

2d) $f(x) = (x-1)^2 + 1$; vértice en $(1, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2e) $f(x) = (x+1)^2 + 1$; vértice en $(-1, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2f) $f(x) = (x-5)^2 - 2$, vértice en $(5, -2)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$.

2g) $f(x) = -(x+2)^2 - 3$; vértice en $(-2, -3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, -3]$.

2h) $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$; vértice en $(3, -5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2i) $f(x) = -3(x+1)^2 + 5$; vértice en $(-1, 5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 5]$.

Los estudiantes deben elaborar la gráfica en cada literal del problema 2.

3a) Como el vértice es $(0, 0)$ entonces $f(x) = ax^2$, Si pasa por $(2, 2)$ entonces $f(2) = 2$:

$$a(2)^2 = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3b) Como el vértice es $(0, -1)$ entonces $f(x) = ax^2 - 1$. Si $f(-1) = -3$ entonces:

$$a(-1)^2 - 1 = -3 \Rightarrow a = -2$$

Luego, $f(x) = -2x^2 - 1$.

3c) $f(x) = a(x-3)^2$, además $f(2) = 4$, es decir:

$$a(2-3)^2 = 4 \Rightarrow a = 4$$

Luego, $f(x) = 4(x-3)^2$.

3d) $f(x) = a(x-2)^2 - 5$; además $f(4) = 3$, o sea:

$$a(4-2)^2 - 5 = 3 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

Luego, $f(x) = 2(x-2)^2 - 5$.

3e) $f(x) = ax^2 + bx$; además $f(2) = 0$ y $f(-1) = 3$:

$$a(2)^2 + b(2) = 0 \quad \Rightarrow 2a + b = 0$$
$$a(-1)^2 + b(-1) = 3 \Rightarrow \quad a - b = 3$$

Al resolver el sistema se tiene $a = 1$ y $b = -2$, luego, $f(x) = x^2 - 2x$.

3f) $f(x) = ax^2 + bx$; además $f(1) = -4$ y $f(4) = 8$:

$$a(1)^2 + b(1) = -4 \Rightarrow \quad a + b = -4$$
$$a(4)^2 + b(4) = 8 \quad \Rightarrow 4a + b = 2$$

Al resolver el sistema se tiene $a = 2$ y $b = -6$; luego, $f(x) = 2x^2 - 6x$.

3g) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

Lección 3 Aplicaciones de la función cuadrática

3.1 Monotonía

Problema inicial

Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$ y $g(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentran $f(x)$ y $g(x)$?
2. Si $1 \leq x \leq 3$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$ y $g(x)$?

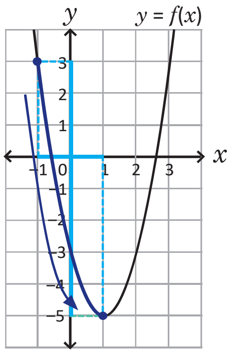
Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se trazan las gráficas de las funciones para poder determinar los valores de $f(x)$ y $g(x)$: la parábola de f es abierta hacia arriba con vértice en (1, –5); mientras que la parábola de g es abierta hacia abajo con vértice en (1, 5). En ambas gráficas, sobre el eje x se ha sombreado en verde el intervalo [–1, 1] de los valores que toma x.

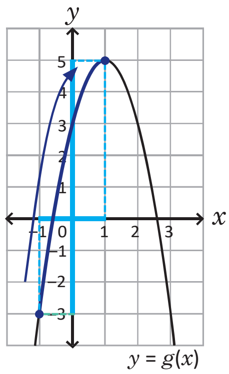
En f: a medida que x aumenta de –1 a 1, $f(x)$ disminuye de $f(-1) = 3$ a $f(1) = -5$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de –1 a 1, $g(x)$ aumenta de $g(-1) = -3$ a $g(1) = 5$.

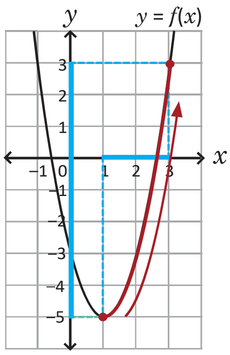
Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



2. Nuevamente, utilizando las gráficas de las funciones se concluye lo siguiente:

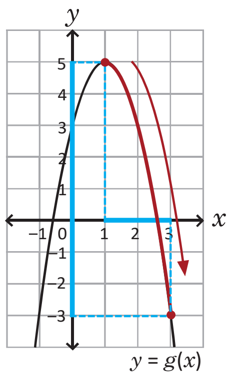
En f: a medida que x aumenta de 1 a 3, $f(x)$ aumenta de $f(1) = -5$ a $f(3) = 3$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de 1 a 3, $g(x)$ disminuye de $g(1) = 5$ a $g(3) = -3$.

Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



Definición

Una función f es **creciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ aumenta de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \leq f(n)$**. Por otro lado f es **decreciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ disminuye de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \geq f(n)$**.

Una función es **monótona** en $[x_1, x_2]$ si es creciente o decreciente en el intervalo.

Problemas

Para cada caso, determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado; escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $5 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-5 \leq x \leq -3$

Indicador de logro

3.1 Determina la monotonía de una función cuadrática en un intervalo dado y encuentra el rango de valores para $f(x)$.

Materiales

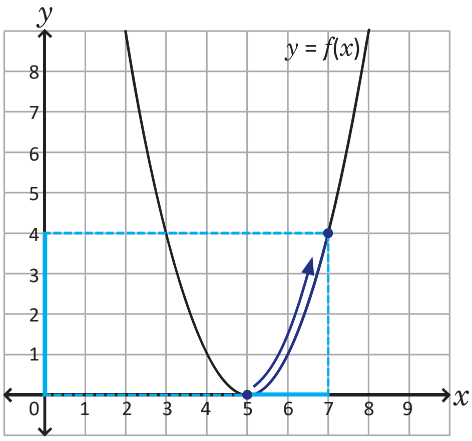
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se analiza la monotonía de una función cuadrática en un intervalo dado. En el Problema inicial y en el bloque de Problemas el valor de h del vértice (h, k) no pertenece al intervalo dado o es uno de sus extremos, por lo cual la función es monótona en dicho intervalo.

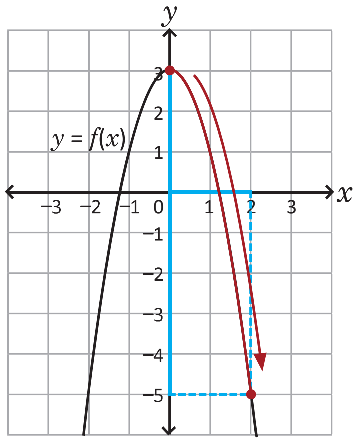
Solución de problemas:

a) Se traza la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2$:



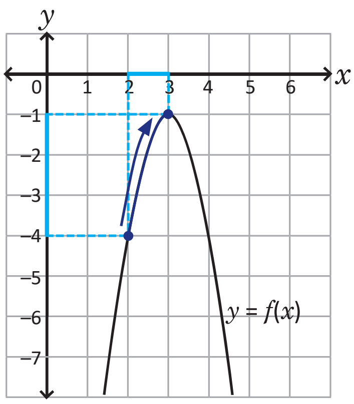
Si x aumenta de 5 a 7 entonces $f(x)$ aumenta de 0 a 4. Así, $f(x)$ es creciente en [5, 7] y $0 \leq f(x) \leq 4$.

b) Se traza la gráfica de $f(x) = -2x^2 + 3$:



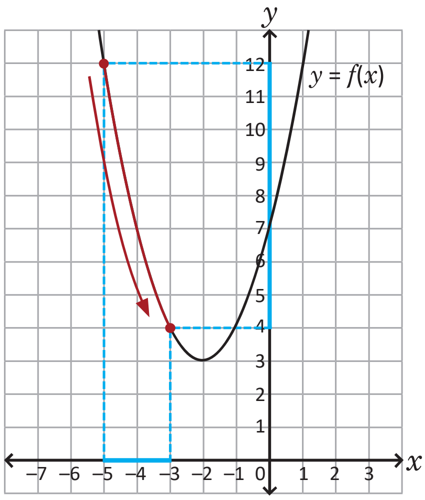
Si x aumenta de 0 a 2 entonces $f(x)$ disminuye de 3 a –5. Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en [0, 2] y $-5 \leq f(x) \leq 3$.

c) Se traza la gráfica de $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$:



Si x aumenta de 2 a 3 entonces $f(x)$ aumenta de –4 a –1. Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en [2, 3] y $-4 \leq f(x) \leq -1$.

d) Se traza la gráfica de $f(x) = (x + 2)^2 + 3$:



Si x aumenta de –5 a –3 entonces $f(x)$ disminuye de 12 a 4. Luego, $f(x)$ es decreciente en [–5, –3] y $4 \leq f(x) \leq 12$.

3.2 Variación: valor máximo o mínimo

Problema inicial

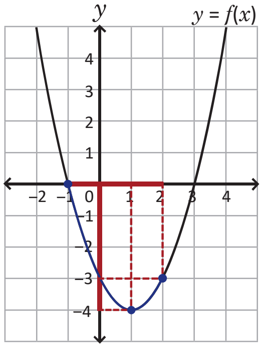
Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = (x-1)^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 2$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$?
2. Si $-4 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentra $g(x)$?

Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se traza la gráfica de la función para poder determinar los valores de $f(x)$ como se muestra en la figura de la derecha. La parábola es abierta hacia arriba con vértice en $(1, -4)$.

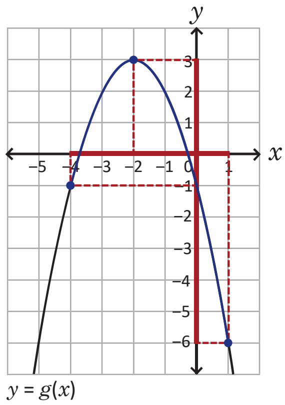


Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-1, 2]$ de los valores que toma x. Si $x = -1$ entonces $f(-1) = 0$ y si $x = 2$ entonces $f(2) = -3$; esto puede llevar a pensar que: $-3 \leq f(x) \leq 0$.

Sin embargo, el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza cuando $x = 1$, es decir, en $f(1) = -4$. Por lo tanto, $-4 \leq f(x) \leq 0$.

2. Primero se escribe g en la forma $a(x-h)^2 + k$ completando el cuadrado:

$$\begin{aligned}
g(x) &= -(x^2+4) - 1 \\
&= -\left[x^2 + 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\
&= -[x^2 + 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] - 1 \\
&= -[(x+\mathbf{2})^2 - 4] - 1 \\
&= -(x+\mathbf{2})^2 + 4 - 1 \\
&= -(x+\mathbf{2})^2 + 3
\end{aligned}$$



La parábola se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 3)$. Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-4, 1]$ de los valores que toma x. Si $x = -4$ entonces $g(-4) = -1$ y si $x = 1$ entonces $g(1) = -6$; para este caso, el valor máximo de $g(x)$ se alcanza cuando $x = -2$, es decir, en $g(-2) = 3$.
Por lo tanto, $-6 \leq g(x) \leq 3$.

En resumen

Dada una función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y $x_1 \leq h \leq x_2$:

1. Si $a > 0$ entonces el valor mínimo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_2)$; caso contrario si $f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_1)$.

2. Si $a < 0$ entonces el valor máximo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $f(x_1) \leq f(x) \leq k$; caso contrario si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces $f(x_2) \leq f(x) \leq k$.

Problemas

Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = (x-5)^2$; $2 \leq x \leq 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $-2 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = -3(x-3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 5$

d) $f(x) = (x+2)^2 + 3$; $-6 \leq x \leq 0$

e) $f(x) = 2(x-6)^2 + 1$; $4 \leq x \leq 8$

f) $f(x) = -(x+4)^2 - 2$; $-6 \leq x \leq -2$

Unidad 4

Indicador de logro

3.2 Determina los valores que toma $f(x)$ a partir de los valores de x, siendo f una función cuadrática.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se analiza el rango de valores que puede tomar una función cuadrática $f(x)$ cuando x se encuentra en un intervalo que contiene el valor h del vértice (h, k).

Propósito

A diferencia de la clase anterior donde la función f era creciente o decreciente en un intervalo dado, en esta clase, si $a \leq x \leq b$, no necesariamente se cumplirá que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ o $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Posibles dificultades

Desde el literal a) hasta el d) del bloque de Problemas, los estudiantes pueden auxiliarse de las gráficas de las funciones trazadas en la clase anterior para determinar el rango de valores de f.

Solución de problemas:

a) Dada la función $f(x) = (x - 5)^2$, las coordenadas del vértice son $(5, 0)$ y $2 \leq 5 \leq 6$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia arriba entonces el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = 5$.

Además, $f(2) = 9$ y $f(6) = 1$, es decir, $f(2) > f(6)$. Por lo tanto, $0 \leq f(x) \leq 9$.

b) Dada la función $f(x) = -2x^2 + 3$, las coordenadas del vértice son $(0, 3)$ y $-2 \leq 0 \leq 1$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia abajo entonces el valor máximo de $f(x)$ se alcanza en $x = 0$.

Además, $f(-2) = -5$ y $f(1) = 1$, es decir, $f(-2) < f(1)$. Por lo tanto, $-5 \leq f(x) \leq 3$.

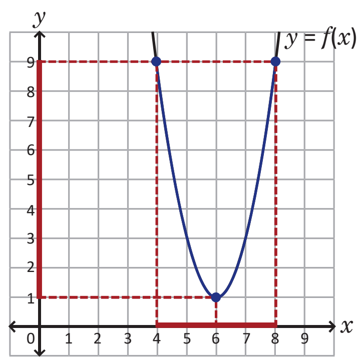
c) Dada la función $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$, las coordenadas del vértice son $(3, -1)$ y $2 \leq 3 \leq 5$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia abajo entonces el valor máximo de $f(x)$ se alcanza en $x = 3$.

Además, $f(2) = -4$ y $f(5) = -13$, es decir, $f(2) > f(5)$. Por lo tanto, $-13 \leq f(x) \leq -1$.

d) Dada la función $f(x) = (x + 2)^2 + 3$, las coordenadas del vértice son $(-2, 3)$ y $-6 \leq -2 \leq 0$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia arriba entonces el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = -2$.

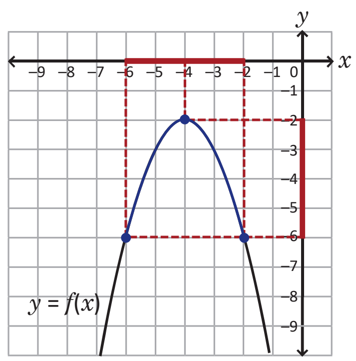
Además, $f(-6) = 19$ y $f(0) = 7$, es decir, $f(-6) > f(0)$. Por lo tanto, $3 \leq f(x) \leq 19$.

e) La gráfica de f se presenta a continuación:



Es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en $(6, 1)$, valor mínimo en $x = 6$ y $f(4) = f(8) = 9$. Por lo tanto, $1 \leq f(x) \leq 9$.

f) La gráfica de f se presenta a continuación:



Es una parábola abierta hacia abajo, con vértice en $(-4, -2)$, valor máximo en $x = -4$ y $f(-6) = f(-2)$. Por lo tanto, $-6 \leq f(x) \leq -2$.

Lección 3

3.3 Aplicación: valor máximo*

Problema inicial

Los estudiantes de primer año de bachillerato del Instituto Nacional de San Matías, en La Libertad, realizan experimentos en su clase de ciencias naturales sobre tiro vertical. Han descubierto que, al lanzar una pelota de fútbol verticalmente hacia arriba, la distancia $f(x)$ en metros sobre el suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

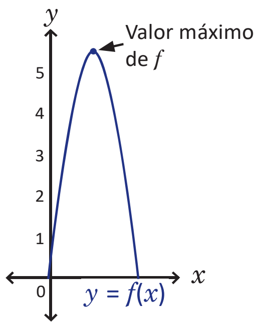
¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿Después de cuántos segundos alcanza la altura máxima?

Solución

Si la pelota se lanza verticalmente hacia arriba llegará a un punto en que debe descender; el problema pide calcular cuántos metros se elevará desde el suelo y cuántos segundos transcurrirán después de ser lanzada antes que empiece a descender.

La función encontrada por los estudiantes que relaciona la distancia sobre el suelo después de x segundos es una función cuadrática, cuyo valor máximo para $f(x)$ se encuentra en el vértice de la gráfica de la función pues el coeficiente de x^2 es negativo. Entonces, el problema se reduce a encontrar las coordenadas del vértice de la gráfica de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2] + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5 + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5.5 \end{aligned}$$



El vértice de la gráfica de f es (1, 5.5) y la parábola se muestra en la figura de la derecha (solo se toma la parte que queda sobre el eje x pues $f(x)$ debe ser positivo o cero). Por lo tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es 5.5 metros después de transcurrir 1 segundo.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es negativo y se desea conocer el valor máximo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

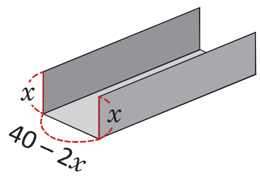
Problemas

1. Carlos, un adolescente con discapacidad intelectual, es parte del equipo de baloncesto que participará en los Juegos Latinoamericanos de Olimpiadas Especiales. Si Carlos lanza la pelota hacia el aro en determinada posición, la distancia en metros de la pelota al suelo después de x segundos está dada por la función:

   $$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

   ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos? ¿Cuántos segundos transcurrirán para alcanzar dicha altura?

2. Marta colocará un canal en el techo de su casa. Para ello dispone de una hoja rectangular metálica cuyos lados deben doblarse para formar el canal. Si la hoja tiene 40 centímetros de ancho, ¿cuántos centímetros debe doblarse en cada lado para que den al canal su mayor capacidad?



La capacidad será máxima cuando el área de la sección transversal de lados x y $40 - 2x$ sea máxima.

Indicador de logro

3.3 Utiliza el valor máximo de una función cuadrática para resolver problemas de la vida cotidiana.

Secuencia

En esta clase se presentan situaciones problema que pueden ser modeladas usando funciones cuadráticas, y cuya solución se encuentra en el valor máximo de la función. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En la clase anterior se definieron los casos para que una función cuadrática posea valor máximo o valor mínimo. Los estudiantes deben relacionar los contenidos de la clase anterior con la solución de los problemas presentados en esta clase, sin tener que trazar la gráfica de la función.

Solución de problemas:

1. Como el coeficiente de x^2 de la función $f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$ que proporciona la distancia de la pelota después de x segundos es negativo entonces f tiene un valor máximo en el vértice de la función; este se encuentra completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 1.2x) + 1.4 \\ &= -5[x^2 - 1.2x + (0.6)^2 - (0.6)^2] + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 1.8 + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 3.2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos será de 3.2 metros; después de haber transcurrido 0.6 segundos.

Aclarar a los estudiantes que el proceso de completar cuadrados es el mismo si los coeficientes son decimales; aunque pueden convertir los decimales a fracción.

2. Sea $A(x)$ la función que proporciona el área de la sección transversal del canal si la hoja se dobla a cada lado x centímetros. Para que el canal tenga su mayor capacidad entonces $A(x)$ debe ser máxima; como esta sección tiene forma de rectángulo de base $40 - 2x$ y altura x entonces:

$$A(x) = (40 - 2x)x = -2x^2 + 40x$$

Similar al numeral 1, se completan cuadrados para encontrar el valor máximo:

$$\begin{aligned} A(x) &= -2[x^2 - 20x + (10)^2 - (10)^2] \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

Por lo tanto, deben doblarse 10 centímetros en cada lado para que el canal tenga su mayor capacidad.

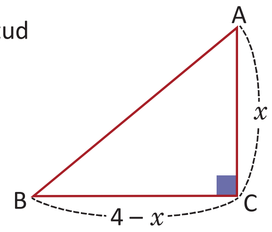
Lección 3

3.4 Aplicación: valor mínimo*

Problema inicial

En el triángulo rectángulo ABC, ¿cuál debe ser el valor de x para que la longitud de la hipotenusa sea mínima?

Por el teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 + CA^2$,
además, $0 < x < 4$.



Solución

Utilizando el teorema de Pitágoras:

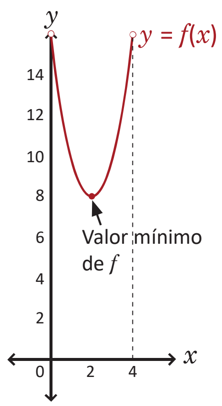
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

se sustituyen BC y CA por $4 - x$ y x, respectivamente, y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

La longitud de la hipotenusa AB será mínima cuando AB^2 también sea mínima. Sea $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$; como es una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo entonces la parábola se abre hacia arriba. Se completa el cuadrado para trazar la gráfica de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] + 16 \\ &= 2[(x - \mathbf{2})^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 + 8 \end{aligned}$$



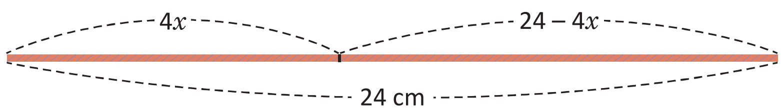
En la figura de la derecha se muestra la gráfica en el intervalo]0, 4[cuyo vértice es (2, 8). Por lo tanto, para que la longitud de la hipotenusa sea mínima, x debe ser igual a 2.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es positivo y se desea conocer el valor mínimo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

Problemas

1. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea igual a 20 y su producto sea mínimo.
2. Un pedazo de lana de 24 cm de longitud se divide en dos partes con las que se formarán dos cuadrados. Si la primera parte tiene longitud $4x$ y la segunda tiene longitud $24 - 4x$, ¿cuál debe ser el valor de x que reduzca al mínimo la suma de las áreas de los dos cuadrados?



Indicador de logro

3.4 Utiliza el valor mínimo de una función cuadrática para resolver problemas de la vida cotidiana.

Secuencia

Similar a la clase 3.3, las situaciones problema abordadas en esta clase se modelan con funciones cuadráticas, ahora la solución se encuentra en el valor mínimo de la función. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

Usando los contenidos de la clase 3.2, los estudiantes deben escribir la ecuación de la función en la forma $a(x - h)^2 + k$ para encontrar el valor mínimo de la función, y sin necesidad de graficarla, interpretar la solución de la misma.

Solución de problemas:

1. Sea x uno de los números enteros buscados. El otro número entero será igual a $x - 20$, pues al calcular la diferencia de ambos se tiene:

$$x - (x - 20) = x - x + 20 = 20$$

Sea $f(x)$ la función que calcula el resultado del producto de los dos números enteros; luego:

$$f(x) = x(x - 20) = x^2 - 20x$$

Si el producto debe ser mínimo, entonces debe encontrarse el valor mínimo de la función $f(x)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo entonces f tiene un valor mínimo en el vértice. Se completan cuadrados para encontrar las coordenadas del mismo:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 20x + 10^2) - 10^2 \\ &= (x - 10)^2 - 100 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 10$ y $x - 20 = -10$, es decir, los números enteros cuya diferencia es igual a 20 y su producto es mínimo son 10 y -10.

2. La primera parte tiene longitud $4x$, esto indica que el perímetro del primer cuadrado es igual a $4x$ y por tanto, la longitud de su lado será $(4x) \div 4 = x$. De forma similar, la segunda parte tiene longitud $24 - 4x$, o sea, el perímetro del segundo cuadrado es $24 - 4x$ y por tanto la longitud de su lado es $(24 - 4x) \div 4 = 6 - x$. Sea $g(x)$ la función que calcula la suma de las áreas de los dos cuadrados, entonces:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (6 - x)^2 \\ &= x^2 + 36 - 12x + x^2 \\ &= 2x^2 - 12x + 36 \end{aligned}$$

Si se requiere del valor de x que reduzca al mínimo la suma entonces debe encontrarse el valor mínimo de la función $g(x)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo, g posee un mínimo en el vértice:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 36 \\ &= 2(x^2 - 6x + 3^2) - 2(3^2) + 36 \\ &= 2(x - 3)^2 - 18 + 36 \\ &= 2(x - 3)^2 + 18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de x debe ser igual a 3 para que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima.

3.5 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje y si:

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

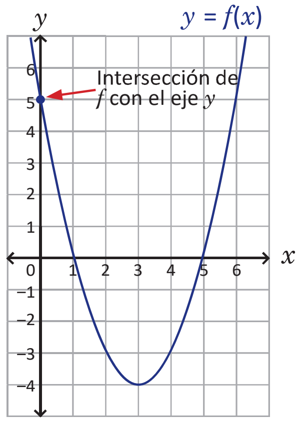
La primera coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y es igual a cero.

Solución

a) La intersección de la gráfica de f con el eje y ocurre cuando $x = 0$, es decir, se debe calcular el valor de $f(0)$ y las coordenadas del punto de corte entre f y el eje y serán $(0, f(0))$.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0-3)^2 - 4 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

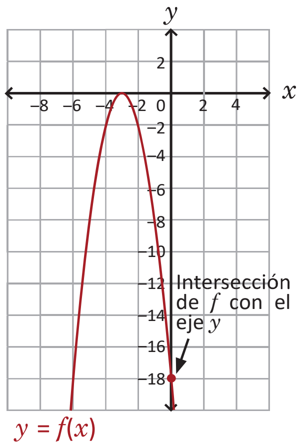
Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = (x-3)^2 - 4$ con el eje y es $(0, 5)$.



b) De forma similar al literal anterior, encontrar las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y equivale a encontrar $(0, f(0))$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y es $(0, -18)$.



En general

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje y son: $(0, f(0))$. Si f es una función cuadrática entonces la gráfica de f corta al eje y en un único punto.

Problemas

1. Para cada caso, determina las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y:

a) $f(x) = -(x+4)^2 + 6$ b) $f(x) = 3(x-2)^2 - 10$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$ e) $f(x) = -5(x+10)^2$ f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$ h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. ¿Es posible que una función cualquiera tenga dos intersecciones con el eje y? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

3.5 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y usando la ecuación de la función.

Secuencia

En octavo grado se calcularon las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función lineal con el eje y. En esta clase se generalizan, para cualquier función, las coordenadas del punto de intersección de esta con el eje y sin necesidad de trazar la gráfica de la misma.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, no es necesario que los estudiantes grafiquen cada función, basta con encontrar las coordenadas usando la ecuación de la función y lo descrito en la parte En general.

Solución de problemas:

1a) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0+4)^2 + 6 \\ &= -16 + 6 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y son (0, –10).

1b) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0-2)^2 - 10 \\ &= 12 - 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y son (0, 2).

1c) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(0)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 0).

1d) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 7).

1e) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -5(0+10)^2 \\ &= -5(100) \\ &= -500 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, –500).

1f) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2(0)^2 + 24(0) + 52 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 52).

1g) Similar a los literales anteriores:

$$\begin{aligned} f(0) &= -3(0)^2 + 6(0) - 11 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Las coordenadas son (0, –11).

1h) Similar a los literales anteriores:

$$f(0) = (0)^2 - 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Las coordenadas son $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

1i) Similar a los literales anteriores:

$$f(0) = (0)^2 + 5(0) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Las coordenadas son $\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

2. No es posible, ya que la definición de función indica que a cada elemento x le corresponde un único elemento $f(x)$. Entonces, si para encontrar la intersección con el eje y se evalúa la ecuación de la función en $x = 0$ entonces $f(0)$ solo tendrá una solución.

3.6 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x

Problema inicial

Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje x si:

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ c) $f(x) = 3x^2 + 2$

La segunda coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje x es igual a cero.

Solución

a) Los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x tienen segunda coordenada igual a cero, es decir, son de la forma $(x, 0)$. Para encontrar el valor de x se iguala a cero la ecuación de f y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$(x-3)^2 - 4 = 0$$
$$(x-3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 5$$

Observa la gráfica de $f(x) = (x-3)^2 - 4$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, los puntos de intersección de $f(x) = (x-3)^2 - 4$ con el eje x son $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

b) De forma similar al literal anterior, se iguala la ecuación de la función f y se resuelve la ecuación cuadrática (en este caso puede factorizarse el polinomio):

$$-2x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

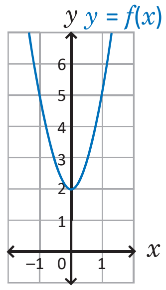
Observa la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, el punto de intersección de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje x es $(-3, 0)$.

c) Al igualar a cero la ecuación de la función:

$$3x^2 + 2 = 0$$

Esta ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales. Esto quiere decir que la gráfica de la función f no corta al eje x, como lo muestra la figura de la derecha.



En general

Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función f con el eje x se encuentra igualando a cero la ecuación de f y resolviendo la ecuación cuadrática resultante:

1. Si la ecuación tiene dos soluciones reales $x = x_1$ y $x = x_2$ entonces la gráfica de f corta al eje x en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
2. Si la ecuación tiene una solución real $x = x_1$ entonces la gráfica de f corta al eje x en el punto $(x_1, 0)$. Este punto es el vértice de la parábola y se dice que la gráfica de f es tangente al eje x.
3. Si la ecuación no tiene solución real entonces la gráfica de f no corta al eje x, es decir, la parábola se encuentra arriba del eje o debajo de este.

Problemas

Para cada caso, determina las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x:

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -(x+4)^2$ c) $f(x) = -(x+6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x-5)^2 - 9$ e) $f(x) = -(x-2)^2 - 4$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Unidad 4

Indicador de logro

3.6 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x a partir de la ecuación de la función.

Secuencia

En esta clase se calculan las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje x. Este contenido se utiliza más adelante para interpretar la solución de la desigualdades cuadráticas.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes no deben graficar cada función, sino usar la ecuación de la función para encontrar las coordenadas tal como lo describe la parte En general.

Solución de problemas:

a) Se resuelve $3x^2 = 0$:

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2$ con el eje x es (0, 0).

b) Se resuelve $-(x + 4)^2 = 0$:

$$(x + 4)^2 = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 4)^2$ con el eje x es (–4, 0).

c) Se resuelve $-(x + 6)^2 + 1 = 0$:

$$(x + 6)^2 = 1$$
$$x + 6 = \pm 1$$
$$x = -6 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \text{ y } x = -5$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 6)^2 + 1$ con el eje x son (–7, 0) y (–5, 0).

d) Se resuelve $(x - 5)^2 - 9 = 0$:

$$(x - 5)^2 = 9$$
$$x - 5 = \pm 3$$
$$x = 5 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ y } x = 8$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2 - 9$ con el eje x son (2, 0) y (8, 0).

e) Se resuelve $-(x - 2)^2 - 4 = 0$:

$$(x - 2)^2 = -4$$

Esta última ecuación no tiene soluciones reales; por lo tanto la gráfica de $f(x) = -(x - 2)^2 - 4$ no corta al eje x.

f) Se resuelve $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\quad x = 3$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ con el eje x son (–1, 0) y (3, 0).

g) Se resuelve $3x^2 + 9x - 30 = 0$:

$$3(x^2 + 3x - 10) = 0$$
$$3(x + 5)(x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -5 \qquad\quad x = 2$$

Entonces, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ con el eje x son (–5, 0) y (2, 0).

h) Se resuelve $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$:

$$\frac{1}{2}x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ con el eje x son $(-\sqrt{6}, 0)$ y $(\sqrt{6}, 0)$.

i) Si se calcula el discriminante de la ecuación $2x^2 - 12x + 23 = 0$ se obtiene lo siguiente:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(23) = 144 - 184 = -40.$$

De lo anterior, $\Delta < 0$ y la ecuación $2x^2 - 12x + 23 = 0$ no tiene soluciones reales. Por lo tanto, la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$ no corta al eje x.

3.7 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1*

Problema inicial

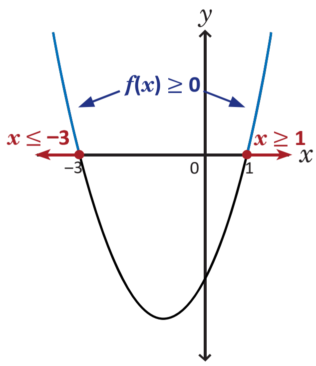
Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; deben determinarse los valores de x para los cuales $f(x)$ es igual o mayor que cero, es decir, los puntos donde la gráfica de f corta al eje x o está arriba de este. Se encuentran las intersecciones con el eje x resolviendo la ecuación cuadrática $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &(x + 3)(x - 1) = 0 \\ &x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \\ &\quad x = -3 \qquad\quad x = 1 \end{aligned}$$



La gráfica de f corta al eje x en los puntos (–3, 0) y (1, 0). Como el coeficiente de x^2 es positivo la parábola se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha.

Se observa lo siguiente: $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 1$; la desigualdad $x \leq -3$ denota al intervalo $]-\infty, -3]$; mientras que, $x \geq 1$ al intervalo $[1, +\infty[$. La solución $x \leq -3$ o $x \geq 1$ se escribe, utilizando intervalos:

$$x \in\ ]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

El símbolo "U" indica que el valor de x está en el primer intervalo o en el segundo.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a > 0$ significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \geq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces $f(x) \geq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra arriba del eje x.

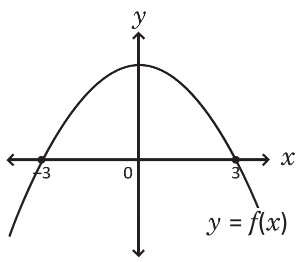
Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in\ ]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \geq 0$
b) $4x^2 - 9 \geq 0$
c) $2x^2 + 4x \geq 0$
d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$
e) $x^2 + x - 20 \geq 0$
f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$
g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$
h) $x^2 - 8 \geq 0$
i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. Utilizando la gráfica de la función cuadrática f que se muestra a la derecha, determina los valores de x para los cuales se cumple $f(x) \geq 0$:



Indicador de logro

3.7 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba y corta al eje x en dos puntos.

Secuencia

Se utiliza el contenido de la clase 3.6 para interpretar y resolver desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

La resolución de desigualdades cuadráticas se realizará por casos. En esta clase solo se resuelven desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, donde $a > 0$ y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales.

Solución de problemas:

1a) Sea $f(x) = x^2 - 4$; se encuentran las intersecciones de la gráfica de f con el eje x resolviendo $f(x) = 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

La gráfica de f corta al eje x en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 - 4 \geq 0$ se cumple para $x \leq -2$ o $x \geq 2$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[.$$

1b) Sea $f(x) = 4x^2 - 9$; similar a 1a) se resuelve la ecuación $f(x) = 0$:

$$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = 4x^2 - 9 \geq 0$ se cumple para $x \leq -\frac{3}{2}$ o $x \geq \frac{3}{2}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[.$$

1c) Sea $f(x) = 2x^2 + 4x$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = -2$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = 2x^2 + 4x \geq 0$ se cumple para $x \leq -2$ o $x \geq 0$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2] \cup [0, \infty[.$$

1d) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 21$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 7) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = 7$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 - 10x + 21 \geq 0$ se cumple para $x \leq 3$ o $x \geq 7$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, 3] \cup [7, \infty[.$$

1e) Sea $f(x) = x^2 + x - 20$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 4) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -5 \qquad x = 4$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 + x - 20 \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq 4$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [4, \infty[.$$

1f) Sea $f(x) = x^2 + 7x + 6$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x + 1) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = -6 \qquad x = -1$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 + 7x + 6 \geq 0$ se cumple para $x \leq -6$ o $x \geq -1$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -6] \cup [-1, \infty[.$$

1g) La desigualdad $x^2 - 4x - 45 \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq 9$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [9, \infty[.$$

1h) $x^2 - 8 \geq 0$ se cumple para $x \leq -2\sqrt{2}$ o $x \geq 2\sqrt{2}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty[.$$

1i) La desigualdad $9x^2 - 5 \geq 0$ se cumple para $x \leq -\frac{\sqrt{5}}{3}$ o $x \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{3}, \infty\right[.$$

2. $f(x) \geq 0$ se cumple para $-3 \leq x \leq 3$, usando intervalos se escribe: $x \in [-3, 3]$.

Lección 3

3.8 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 2

Problema inicial

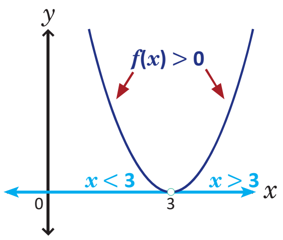
Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; de forma similar a la clase anterior, resolver $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de f queda arriba del eje x; esta vez no deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$ ya que la desigualdad es estricta, sin embargo deben encontrarse las intersecciones con el eje x:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



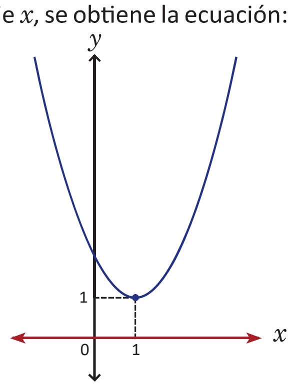
La gráfica de f corta al eje x en el vértice (3, 0) y es una parábola que se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha. Se cumple lo siguiente: $f(x)$ es positivo para cualquier número real x diferente de 3.

Por lo tanto, $x < 3$ o $x > 3$; utilizando intervalos se escribe:

$$x \in \,]-\infty, 3[\, \cup \,]3, \infty[.$$

b) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; si se buscan las intersecciones de la gráfica de f con el eje x, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$



Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Si se completa el cuadrado para llevar a la forma $a(x-h)^2 + k$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x) + 2 \\ &= \left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - \mathbf{1})^2 + 1 \end{aligned}$$

La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (1, 1) como muestra la figura de la derecha. Toda la gráfica queda sobre el eje x, por lo tanto $f(x) > 0$ para todo número real x.

En general

Dada la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$; al denotar por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) > 0$ se cumple para $x < h$ o $x > h$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in \,]-\infty, h[\, \cup \,]h, \infty[$.
2. Si la gráfica de f NO corta al eje x entonces $f(x) > 0$ se cumple para todo número real x, es decir, la gráfica de f queda arriba del eje x.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $2x^2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 6 > 0$ c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$ e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

Unidad 4

Indicador de logro

3.8 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba y corta al eje x en uno o ningún punto.

Secuencia

Se continúa con la solución de desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, en esta clase la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una o ninguna solución en los números reales.

Propósito

Similar a la clase anterior, en el bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Solución de problemas:

a) Sea $f(x) = 2x^2$, el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (0, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $f(x) = 2x^2 > 0$ se cumple para $x < 0$ o $x > 0$, en notación de intervalo se escribe:

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[.$$

También puede utilizarse el siguiente razonamiento: si $x = 0$ entonces $2x^2 = 0$, para cualquier otro número real diferente de cero, $2x^2$ siempre será positivo. Por lo tanto, la desigualdad $2x^2 > 0$ se cumple para $x < 0$ o $x > 0$.

b) Sea $f(x) = x^2 - 4x + 6$, el vértice de la gráfica de f es (2, 2), es decir, se encuentra en el primer cuadrante. Además, la parábola se abre hacia arriba y por tanto no corta al eje x. Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 4x + 6 > 0$ se cumple para todo número real x.

También puede utilizarse el siguiente razonamiento: sea $f(x) = x^2 - 4x + 6$, para determinar las intersecciones con el eje x se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 6 = 0$; sin embargo, al calcular el discriminante se obtiene:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(6) = 16 - 24 = -8.$$

Es decir, $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto, la gráfica no corta al eje x. Como la parábola de f se abre hacia arriba entonces la desigualdad $x^2 - 4x + 6 > 0$ se cumple para todo número real x.

c) Sea $f(x) = x^2 + 4x + 4$; el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (–2, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $x^2 + 4x + 4 > 0$ se cumple para $x < -2$ o $x > -2$, en notación de intervalo se escribe:

$$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[.$$

d) Sea $f(x) = x^2 - 14x + 49$; el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (7, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Entonces, la desigualdad $f(x) = x^2 - 14x + 49 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

e) Sea $f(x) = x^2 + 2x + 3$; el vértice de la gráfica de la función es (–1, 2), es decir, se encuentra en el segundo cuadrante y como la parábola se abre hacia arriba entonces no corta al eje x. Por lo tanto, la desigualdad $f(x) = x^2 + 2x + 3 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

f) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, el vértice de la gráfica de la función es (0, 0) y se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

3.9 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

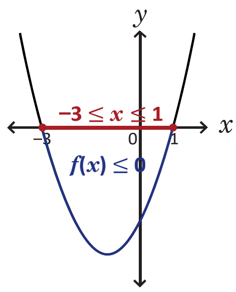
Utiliza las gráficas de la clase anterior.

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; ahora deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de f queda debajo del eje x, incluyendo los puntos donde $f(x) = 0$.

La parábola de la función se muestra a la derecha, en ella se observa que $f(x) \leq 0$ si $-3 \leq x \leq 1$. Utilizando intervalos se escribe:

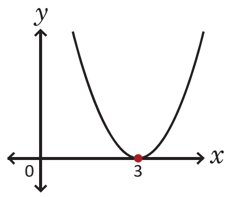
$$x \in [-3, 1].$$



b) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; en la clase anterior se llegó a $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra a la derecha; se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x)$ es menor o igual a cero. La parábola de la función queda siempre arriba del eje x, y es igual a cero en el vértice de la parábola. Por lo tanto, la desigualdad:

$$f(x) = (x - 3)^2 \leq 0$$

se cumple únicamente para $x = 3$.



c) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; en la clase anterior se concluyó que $f(x) > 0$ para todo número real x, es decir, la gráfica queda totalmente arriba del eje x. Por lo tanto, $f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ no tiene solución.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $a > 0$, significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \leq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f(x) \leq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra debajo del eje x. Para ello se encuentran las intersecciones de la gráfica de la función con el eje x:

1. Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \leq 0$ se cumple para $x_1 \leq x \leq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in [x_1, x_2]$.
2. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) \leq 0$ se cumple solo para $x = h$.
3. Si la gráfica de f no corta al eje x entonces $f(x) \leq 0$ no tiene solución.

En las desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ NO deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$; para el numeral 2, $f(x) < 0$ no tiene solución.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \leq 0$ b) $x^2 + 2x \leq 0$ c) $x^2 - 10x + 21 < 0$
d) $x^2 + 8x + 15 < 0$ e) $2x^2 \leq 0$ f) $x^2 - 10x + 25 < 0$
g) $x^2 - 4x - 3 \leq 0$ h) $x^2 + 2x - 8 < 0$ i) $x^2 + 8 \leq 0$

Indicador de logro

3.9 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \leq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba.

Secuencia

Se resuelven desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, donde a es un número real positivo. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, en los problemas presentados en la clase la gráfica de f puede tener dos, uno o ningún punto de intersección con el eje x.

Propósito

Similar a las clases anteriores, en el bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Solución de problemas:

a) Sea $f(x) = x^2 - 4$; los puntos de intersección con el eje x son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 - 4 \leq 0$ se cumple para $-2 \leq x \leq 2$, en notación de intervalo:

$$x \in [-2, 2].$$

b) Sea $f(x) = x^2 + 2x$; los puntos de intersección con el eje x son $(-2, 0)$ y $(0, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 2x \leq 0$ se cumple para $-2 \leq x \leq 0$, en notación de intervalo:

$$x \in [-2, 0].$$

c) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 21$; los puntos de intersección con el eje x son $(3, 0)$ y $(7, 0)$, y la parábola se abre hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 - 10x + 21 < 0$ se cumple para $3 < x < 7$, en notación de intervalo:

$$x \in]3, 7[.$$

d) Sea $f(x) = x^2 + 8x + 15$; los puntos de intersección con el eje x son $(-5, 0)$ y $(-3, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 8x + 15 < 0$ se cumple para $-5 < x < -3$, en notación de intervalo:

$$x \in]-5, -3[.$$

e) Sea $f(x) = 2x^2$, el punto de intersección con el eje x es el vértice $(0, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = 2x^2 \leq 0$ se cumple para $x = 0$.

f) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 25$; el punto de intersección con el eje x es el vértice $(5, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 10x + 25 < 0$ no tiene solución.

g) Sea $f(x) = x^2 - 4x - 3$; los puntos de intersección con el eje x son $(2 - \sqrt{7}, 0)$ y $(2 + \sqrt{7}, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba (las intersecciones se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 3 = 0$ usando la fórmula general). Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 4x - 3 \leq 0$ se cumple para $2 - \sqrt{7} \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$, en notación de intervalo:

$$x \in [2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}].$$

h) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 8$; los puntos de intersección con el eje x son $(-4, 0)$ y $(2, 0)$, y la parábola se abre hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 2x - 8 < 0$ se cumple para $-4 < x < 2$, en notación de intervalo:

$$x \in]-4, 2[.$$

i) Sea $f(x) = x^2 + 8$; el vértice de la gráfica de f es $(0, 8)$ y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, no hay intersección con el eje x y por tanto, la desigualdad $f(x) = x^2 + 8 \leq 0$ no tiene solución.

3.10 Desigualdad cuadrática, $a < 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Solución

Utilizando propiedades de desigualdades, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por – 1, esto hace que el símbolo “menor que” cambie a “mayor que”:

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{-----------------} \ (1)$$

La desigualdad (1) se resuelve como lo visto en las clases anteriores. Primero se encuentran las intersecciones de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con el eje x:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Entonces, $x^2 - 4x + 3 > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$. Esta solución satisface también la desigualdad original:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Por lo tanto, $x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.

En general

A las desigualdades de la forma:

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ b) $ax^2 + bx + c \leq 0$ c) $ax^2 + bx + c > 0$ d) $ax^2 + bx + c < 0$

donde a es cualquier número real diferente de cero, se les llama **desigualdades cuadráticas con una incógnita**. Si $a > 0$ entonces su solución está dada como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9; si $a < 0$ entonces se multiplica por –1 ambos miembros de la desigualdad y se soluciona como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9.

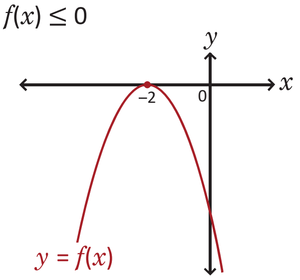
Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

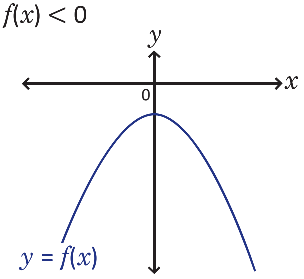
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ b) $-(x + 3)^2 \leq 0$ c) $-x^2 + 1 \geq 0$
d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$ h) $-2x^2 - 1 > 0$ i) $-x^2 + 5 > 0$

2. Utilizando la gráfica de f en cada caso, encuentra los valores de x que satisfacen la desigualdad:

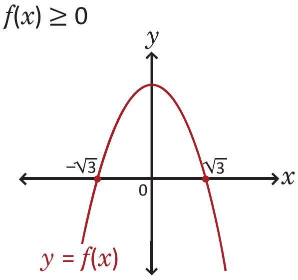
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



Unidad 4

Indicador de logro

3.10 Aplica propiedades de desigualdad para resolver desigualdades cuadráticas cuyo coeficiente de x^2 es negativo.

Secuencia

En esta clase se resuelven desigualdades cuadráticas cuyo coeficiente de x^2 es negativo. Se aplica la propiedad de desigualdad sobre multiplicar ambos miembros por un número negativo y se utiliza lo visto en las clases anteriores.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Posibles dificultades

Sin cambiar el signo del coeficiente de x^2, puede utilizarse la gráfica de la función respectiva para resolver la desigualdad cuadrática, encontrando los intervalos donde esta queda arriba o abajo del eje x (como en el numeral 2 del bloque de Problemas). Sin embargo, los cálculos son más fáciles cuando el coeficiente de x^2 es positivo. Esto se notará en las clases donde se utilice el cuadro de variación.

Solución de problemas:

1a) Al multiplicar ambos miembros por -1 se obtiene $x^2 - 2x - 15 \geq 0$. Si $f(x) = x^2 - 2x - 15$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -3$ y $x = 5$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 5$. Por lo tanto, $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ si:

$$x \in]-\infty, -3] \cup [5, \infty[.$$

1b) Al multiplicar ambos miembros por -1 se obtiene $(x + 3)^2 \geq 0$. Si $f(x) = (x + 3)^2$ entonces su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(-3, 0)$. Luego, $f(x) \geq 0$ se cumple para todo número real x. Por lo tanto, $-(x + 3)^2 \leq 0$ si:

$$x \in \mathbb{R}.$$

1c) Al multiplicar ambos miembros por -1 se obtiene $x^2 - 1 \leq 0$. Si $f(x) = x^2 - 1$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -1$ y $x = 1$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \leq 0$ se cumple para $-1 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, $-x^2 + 1 \geq 0$ si:

$$x \in [-1, 1].$$

1d) Al multiplicar ambos miembros por -1 se obtiene $x^2 + 6x + 5 \geq 0$. Si $f(x) = x^2 + 6x + 5$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -5$ y $x = -1$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq -1$. Por lo tanto, $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ si:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [-1, \infty[.$$

1e) $-2x^2 + 4x - 3 = -2(x - 1)^2 - 1$, por lo que la desigualdad $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ no tiene solución.

1f) La desigualdad $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ solo se cumple para $x = 4$.

1g) La desigualdad $-x^2 - 4x - 4 < 0$ se cumple para $x < -2$ o $x > -2$, o sea, $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$.

1h) La desigualdad $-2x^2 - 1 > 0$ no tiene solución.

1i) La desigualdad $-x^2 + 5 > 0$ se cumple para $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, o sea, $x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

2a) La gráfica de la función f es una parábola abierta hacia abajo, corta al eje x en $(-2, 0)$. Luego, $f(x) \leq 0$ se cumple para todo número real x.

2b) La gráfica de la función f es una parábola abierta hacia abajo, no corta al eje x en ningún punto. Así, $f(x) < 0$ se cumple para todo número real x.

2c) La gráfica de la función f es una parábola que se abre hacia abajo, corta al eje x en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Luego, $f(x) \geq 0$ se cumple para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, o sea, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Lección 3

3.11 Cuadro de variación, parte 1*

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

Solución

Se escribe $2x^2 - x - 3$ como producto de binomios:

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

la desigualdad se convierte en $(x + 1)(2x - 3) > 0$. Para que este producto sea mayor que cero ambos binomios deben ser, o bien positivos o bien negativos. Es necesario dividir los números reales en intervalos y determinar, en cada intervalo, el signo de $x + 1$ y de $2x - 3$. Los intervalos a considerar se toman con base a las raíces del trinomio, a saber:

$$(x + 1)(2x - 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = \frac{3}{2}$$

Se construye una tabla como la siguiente, cuya línea superior simula la recta numérica donde se colocan los valores -1 y $\frac{3}{2}$ por ser las raíces del trinomio y se coloca cero en la línea vertical donde el factor es cero:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$			0				
$2x - 3$					0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

Para determinar el signo de cada factor en un intervalo basta tomar un número que se encuentre dentro del mismo y evaluarlo en el factor. Por ejemplo, -2 pertenece al intervalo $]-\infty, -1[$; entonces si $x = -2$ resulta $-2 + 1 = -1$ negativo para el primer factor y $2(-1) - 3 = -5$ negativo para el segundo factor. En la tabla se escriben los signos de los factores:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0				
$2x - 3$		$-$			0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

También se puede resolver la desigualdad lineal $x + 1 > 0$ para determinar los intervalos donde $x + 1$ es positivo y donde es negativo.

De forma similar se hace para los otros intervalos; la tabla queda de la siguiente manera:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)(2x - 3)$							

Luego, se multiplican los signos de los factores en cada columna, por ejemplo en el intervalo $]-\infty, -1[$ los signos de los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son "–" y "–" respectivamente, por tanto al multiplicarlos el resultado será "+":

	$-\infty$ -1	$\frac{3}{2}$ ∞
$x + 1$	$-$ 0 $+$	$+$
$2x - 3$	$-$ $-$	0 $+$
$(x + 1)(2x - 3)$	$+$ 0 $-$	0 $+$

Los ceros sobre las líneas indican que en ese número el producto de los factores es igual a cero. Como interesa cuando $(x + 1)(2x - 3) > 0$ entonces los valores para x serán aquellos donde el producto es positivo.

Por lo tanto, $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

Unidad 4

En resumen

Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, con $x_1 < x_2$ entonces para resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ se hace lo siguiente:

1. Se escribe $ax^2 + bx + c = pq$, donde p y q son binomios lineales cuyas raíces son x_1 y x_2, respectivamente.
2. Se dividen los números reales en los intervalos $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ y $]x_2, \infty[$.
3. Si n es un número que pertenece a cualquiera de los tres intervalos descritos en 2 y el valor de p o q es positivo o negativo al evaluar $x = n$ entonces p o q será positivo o negativo en todo el intervalo.
4. Se multiplican los signos de p y q en cada intervalo. La solución serán aquellos intervalos donde el producto sea positivo para el caso de $ax^2 + bx + c > 0$, o negativo para el caso de $ax^2 + bx + c < 0$.

A la tabla construida en la solución del Problema inicial se le llama **cuadro de variación**.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $2x^2 - x - 1 > 0$ b) $3x^2 + 8x - 3 < 0$ c) $3x^2 - 8x + 4 < 0$

d) $2x^2 + 9x + 4 > 0$ e) $-3x^2 - 4x + 15 > 0$ f) $-4x^2 + 7x - 3 < 0$

g) $6x^2 + x - 1 < 0$ h) $x^2 - 4x + 4 > 0$ i) $4x^2 - 1 < 0$

2. Antonio es dueño de una tienda de ropa. Ha estimado que la ganancia diaria en dólares en la venta de camisas está dado por la función $f(x) = x^2 - 14x - 32$, donde x es la cantidad de camisas vendidas en un día. ¿Cuántas camisas debe vender Antonio para obtener ganancias y no pérdidas?

Indicador de logro

3.11 Utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas.

Secuencia

En esta clase se utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Posibles dificultades

Puede resolver el problema 1a) para explicar nuevamente la solución de una desigualdad cuadrática usando en cuadro de variación.

Solución de problemas:

1a) $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, las raíces del trinomio son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$.

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		∞
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x + 1)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $2x^2 - x - 1 > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \infty\right[$.

1b) $3x^2 + 8x - 3 = (x + 3)(3x - 1)$, las raíces del trinomio son $x = -3$ y $x = \frac{1}{3}$.

	$-\infty$	-3		$\frac{1}{3}$		∞
$x + 3$	$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 1$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 3)(3x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $3x^2 + 8x - 3 < 0$ si $x \in \left]-3, \frac{1}{3}\right[$.

1c) La desigualdad $3x^2 - 8x + 4 < 0$ se cumple para $x \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

1d) La desigualdad $2x^2 + 9x + 4 > 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

1e) La desigualdad $-3x^2 - 4x + 15 > 0$ se cumple para $x \in \left]-3, \frac{5}{3}\right[$.

1f) La desigualdad $-4x^2 + 7x - 3 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\cup \left]1, \infty\right[$.

1g) La desigualdad $6x^2 + x - 1 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$.

1h) La desigualdad $x^2 - 4x + 4 > 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]2, \infty\right[$.

1i) La desigualdad $4x^2 - 1 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

2. Obtener ganancia significa que $f(x)$ debe ser mayor que cero. Las raíces del trinomio $x^2 - 14x - 32$ son $x = -2$ y $x = 16$; utilizando el cuadro de variación:

	$-\infty$	-2		16		∞
$x + 2$	$-$	0	$+$		$+$	
$x - 16$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 2)(x - 16)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Así, $x^2 - 14x - 32 > 0$ se cumple para $\left]-\infty, -2\right[\cup \left]16, \infty\right[$. Por el contexto del problema no es posible tener cantidades negativas, por lo tanto debe vender más de 16 camisas.

3.12 Cuadro de variación, parte 2

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$-6x^2 \geq -11x - 7$$

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥".

Solución

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥". Utilizando propiedades de desigualdades se suma $6x^2$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\cancel{-6x^2} \cancel{+6x^2} \geq -11x - 7 + 6x^2$$
$$0 \geq 6x^2 - 11x - 7$$

esta última es equivalente a $6x^2 - 11x - 7 \leq 0$. Se factoriza el trinomio como producto de dos binomios lineales, a saber:

$$6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1)$$

De lo anterior se obtienen las raíces del polinomio $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{7}{3}$. De forma similar a la clase anterior se construye el cuadro de variación para determinar los intervalos donde el polinomio es negativo:

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$	∞
$3x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(3x-7)(2x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

El símbolo "≤" indica que también deben tomarse en cuenta los valores de x para los cuales el polinomio $6x^2 - 11x - 7$ es igual a cero.

Entonces, $6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$. Este intervalo también satisface la desigualdad original.

En resumen

En una desigualdad cuadrática se cumplen las siguientes propiedades:

1. Sumar o restar un número real a ambos miembros no altera la desigualdad.
2. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real positivo no altera la desigualdad.
3. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Problemas

1. Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de x si:

a) $6x^2 \geq 11x - 3$ b) $15x^2 + 2x \leq 1$ c) $31x + 15 \geq -10x^2$

d) $3x \geq -20x^2 + 2$ e) $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ f) $9x^2 - 25 \geq 0$

g) $x^2 - 2 \leq 0$ h) $4x^2 - 3 \leq 0$ i) $x^2 \leq 1 + 2x$

2. Sean x_1 y x_2 las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ con $x_1 < x_2$. Utilizando el cuadro de variación demuestra que la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

Indicador de logro

3.12 Aplica propiedades de desigualdades y utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas.

Secuencia

En las desigualdades cuadráticas presentadas en esta clase deben utilizarse primero propiedades de desigualdad para llevarlas a la forma $p \geq 0$ donde p es un trinomio de grado 2 (se incluyen los símbolos $\leq$, $>$ y $<$), y luego aplicar lo visto en la clase 3.11.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes que las desigualdades cuadráticas siempre deben llevarse a la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ (o con los símbolos $\leq$, $>$ y $<$) para luego factorizar.

Solución de problemas:

1a) Al usar propiedades de desigualdades se obtiene $6x^2 - 11x + 3 \geq 0$. Las raíces del trinomio $6x^2 - 11x + 3$ son $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{3}{2}$:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	∞
$3x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$(3x - 1)(2x - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Luego, $6x^2 \geq 11x - 3$ si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.

1b) Al usar propiedades de desigualdades se obtiene $15x^2 + 2x - 1 \leq 0$. Las raíces del trinomio $15x^2 + 2x - 1$ son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{5}$:

	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$	∞
$3x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$5x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$(3x + 1)(5x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Luego, $15x^2 + 2x \leq 1$ si $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$.

1c) La desigualdad $31x + 15 \geq -10x^2$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}, \infty\right[$.

1d) La desigualdad $3x \geq -20x^2 + 2$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

1e) La desigualdad $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ se cumple para $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right]$.

1f) La desigualdad $9x^2 - 25 \geq 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right[$.

1g) La desigualdad cuadrática $x^2 - 2 \leq 0$ se cumple para $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

1h) La desigualdad cuadrática $4x^2 - 3 \leq 0$ se cumple para $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

1i) La desigualdad cuadrática $x^2 \leq 1 + 2x$ se cumple para $x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

2. Si x_1 y x_2 son las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ entonces $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$; deben encontrarse los valores de x para los cuáles se cumple la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$, o sea, $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$. Se observa lo siguiente:

- Si $x < x_1$ también se cumple que $x < x_2$, entonces $x - x_1$ y $x - x_2$ serán números negativos.
- Si $x_1 < x < x_2$ entonces $x - x_1$ será positivo y $x - x_2$ será negativo.
- Si $x_2 < x$ entonces $x - x_1$ y $x - x_2$ serán números positivos.

	$-\infty$	x_1		x_2	∞
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

3.13 Practica lo aprendido

1. Determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado, luego escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

   a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5$; $-7 \leq x \leq -4$

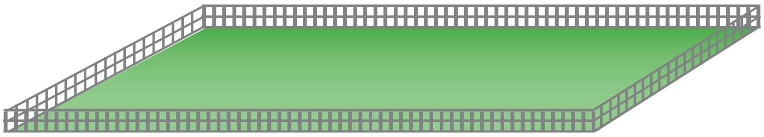
   b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4$; $-1 \leq x \leq 1$

2. En cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

   a) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7$; $-4 \leq x \leq -1$

   b) $f(x) = (x - 5)^2 - 8$; $1 \leq x \leq 8$

3. En el Instituto Nacional Puerto El Triunfo construirán un huerto escolar en un terreno con forma rectangular, para promover el consumo de frutas y hortalizas, y así contribuir a la formación de valores y conocimientos en el cuido del medio ambiente. Si se cuenta con 32 metros de malla para cercar el terreno, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno para tener la mayor área posible? ¿Cuál sería el área para el huerto escolar?



4. Una sastrería confecciona y distribuye trajes para hombre cuyo precio es de \$100.00. Si una tienda de ropa solicita 50 o más trajes, entonces el precio se reduce a razón de \$0.50 por el número pedido. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para producir la máxima ganancia para la sastrería? No tomes en cuenta los costos de producción.

5. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. La altura alcanzada, en metros, después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

   Calcula la altura máxima que alcanza el proyectil y el tiempo que tarda en llegar al suelo.

6. Encuentra dos números enteros cuya suma sea igual a 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

7. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de coordenadas si:

   a) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

   b) $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$

   c) $f(x) = 2x^2 - 8$

   d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

   a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

   b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

   c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

   d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

   e) $-x^2 - 6x \geq 10$

   f) $2x^2 + 15 < 13x$

   g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

   h) $5x^2 + 3x \leq 8$

   i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$

   j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

Unidad 4

Indicador de logro

3.13 Resuelve problemas correspondientes a aplicaciones de las funciones cuadráticas.

Solución de problemas:

1a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5$ es creciente en $-7 \leq x \leq -4$, y $-21 \leq f(x) \leq -6$.

1b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4$ es decreciente $-1 \leq x \leq 1$, y $-2 \leq f(x) \leq 14$.

2a) Si $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7$ y $-4 \leq x \leq -1$ entonces $-1 \leq f(x) \leq 7$.

2b) Si $f(x) = (x - 5)^2 - 8$ y $1 \leq x \leq 8$ entonces $-8 \leq f(x) \leq 8$.

3. Tener 32 m de malla para cercar significa que el perímetro del terreno debe medir 32 m. Como la forma es rectangular, sea x la longitud del largo del terreno y y la longitud del ancho (ambas medidas en metros); entonces $2x + 2y = 32$, o sea, $y = 16 - x$. Sea $f(x)$ la función que calcula el área del terreno a partir de la longitud x de su largo; entonces $f(x) = x(16 - x) = -x^2 + 16x$. La función f tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se tiene: $f(x) = -(x - 8)^2 + 64$. Por lo tanto, las dimensiones del terreno deben ser 8 m de largo y 8 m de ancho para tener la mayor área posible, la cuál sería de 64 m^2.

4. Sea x la cantidad de trajes que confeccionará la sastrería (debe ser mayor o igual a 50 trajes). Como el precio se reduce a razón de \$0.50 por el número pedido entonces el precio de cada traje será de $100 - 0.5x$ dólares. Sea $g(x)$ la función que calcula la ganancia de la sastrería con base en la cantidad x de trajes solicitados, luego: $g(x) = x(100 - 0.5x) = -0.5x^2 + 100x$. La función g tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se obtiene: $g(x) = -0.5(x - 100)^2 + 5\,000$. Por lo tanto, deben solicitar 100 trajes a la sastrería para que esta obtenga la máxima ganancia.

5. La función $f(x) = -5x^2 + 100x$ tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se obtiene la expresión $f(x) = -5(x - 10)^2 + 500$. Luego, la altura máxima que alcanza el proyectil es de 500 m. Por otro lado, llegar al suelo indica que la distancia debe ser igual a cero, es decir, $f(x) = 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática $-5x^2 + 100x = 0$ son $x = 0$ y $x = 20$ (la primera corresponde al momento cuando se lanzó el proyectil). Por lo tanto, llegará al suelo después de 20 segundos.

6. Sea x uno de los número enteros; el otro será igual a $30 - x$. Si $f(x)$ es la función que calcula la suma de los cuadrados de ambos números entonces: $f(x) = x^2 + (30 - x)^2 = 2x^2 - 60x + 900$. Esta función tiene un valor mínimo en el vértice, al completar cuadrados se obtiene $f(x) = 2(x - 15)^2 + 450$. Por lo tanto, ambos números enteros deben ser igual a 15.

7a) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 9$ con los ejes de coordenadas son (0, 0) y (6, 0).

7b) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$ con los ejes de coordenadas son (0, –21), (–7, 0) y (–3, 0).

7c) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 8$ con los ejes de coordenadas son (0, –8), (–2, 0) y (2, 0).

7d) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ con los ejes de coordenadas son (0, –1), $\left(-\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$ y $\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$.

8a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ se cumple si $x \in]-\infty, -4] \cup [2, \infty[$.

8b) $x^2 - 5x - 24 < 0$ se cumple si $x \in]-3, 8[$.

8c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ se cumple si $x = -2$.

8d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$ se cumple si $x \in]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$.

8e) $-x^2 - 6x \geq 10$ no tiene solución.

8f) $2x^2 + 15 < 13x$ se cumple si $x \in \left]\frac{3}{2}, 5\right[$.

8g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$ se cumple si $x \in \left]-4, \frac{1}{3}\right[$.

8h) $5x^2 + 3x \leq 8$ se cumple si $x \in \left[-\frac{8}{5}, 1\right]$.

8i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$ si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2}, \infty\right[$.

8j) $x^2 + 3x - 5 < 0$ si $x \in \left]-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right[$.